MAKALAH LOGIKA MATEMATIKA

DOSEN MATA KULIAH
DRS. AGUS SALIM HARAHAP

Disusun Oleh

EVI MARIANI HARAHAP
101421046
KOM B

PROGRAM STUDI EKSTENSI S1 ILMU KOMPUTER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SUMATERA UTARA
MEDAN
2011

BAGIAN I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Merupakan suatu kenyataan yang tidak dapat dibantah bahwa logika, penalaran dan argumentasi sangat sering digunakan dalam kehidupan nyata sehari-hari. Merupakan matakuliah penting terutama bagi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam seperti Ilmu Komputer. Topik ini sangat penting karena dapat meningkatkan daya nalar mahasiswa dan dapat diaplikasikan di dalam kehidupan nyata dan pada saat mempelajari matakuliah lainnya.

Oleh karena itu, kompetensi yang hendak dicapai adalah agar para mahasiswa memiliki kemampuan dan keterampilan dalam hal mengembangkan dan memanfaatkan logika yang dimiliki serta menambah pengetahuan tentang matakuliah ini.

B. TUJUAN

Makalah ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan sekaligus sebagai tugas matakuliah itu sendiri.

BAGIAN II
TEORI

1. PENGERTIAN LOGIKA MATEMATIKA

Logika Matematika atau Logika Simbol ialah logika yang menggunakan bahasa Matematika, yaitu dengan menggunakan lambang-lambang atau simbol- simbol.

Keuntungan atau kekuatan bahasa simbol adalah: ringkas, univalent/bermakna tunggal, dan universal/dapat dipakai dimana-mana.

2. PERNYATAN

Kalimat adalah rangkaian kata yang disusun menurut aturan bahasa yang mengandung arti. *Pernyataan* adalah kalimat yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah (pernyataan disebut juga preposisi, kalimat deklaratif). Benar diartikan ada kesesuaian antara apa yang dinyatakan dengan keadaan yang sebenarnya. Perhatikan beberapa contoh berikut!

1. Al-Quran adalah sumber hukum pertama umat Islam
2. 4 + 3 = 8
3. Rapikan tempat tidurmu!

Contoh nomor 1 bernilai benar, sedangkan contoh nomor 2 bernilai salah, dan keduanya adalah *pernyataan*. Kalimat 3 di atas tidak mempunyai nilai benar atau salah, sehingga *bukan pernyataan.*

Kalimat Terbuka adalah kalimat yang belum tentu bernilai benar atau salah. Kalimat terbuka biasanya ditandai dengan adanya variabel (peubah). Jika variabelnya diganti dengan konstanta dalam semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi sebuah pernyataan.

Variabel (Peubah) adalah lambang yang menunjukkan anggota yang belum tentu dalam semesta pembicaraan, sedangkan *konstanta* adalah lambang yang menunjukkan anggota tertentu dalam semesta pembicaraan. Pengganti variabel yang menyebabkan kalimat terbuka menjadi pernyataan yang bernilai benar, disebut *selesaian* atau *penyelesaian.* Contoh kalimat terbuka

1. yang duduk di bawah pohon itu cantik rupanya
2. x + 2 = 8

Pernyataan Majemuk

Logika merupakan sistem matematika artinya memuat unsur-unsur yaitu pernyataan-oernyataan dan *operasi-operasi* yang didefinisikan. Operasi-operasi yang akan kita temui berupa kata sambung logika (*conective logic*):

⊔ : Merupakan lambang operasi untuk negasi

$\wedge$: Merupakan lambang operasi untuk konjungsi

$\vee$: Merupakan lambang operasi untuk disjungsi

$\rightarrow$: Merupakan lambang operasi untuk implikasi

$\leftrightarrow$: Merupakan lambang operasi untuk biimplikasi

3. KATA HUBUNG KALIMAT

A. **Ingkaran atau Negasi**

Ingkaran/Negasi dari suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang diperoleh dengan menambahkan kata ”tidak” atau menyisipkan kata ”bukan” pada pernyataan semula. Ingkaran dari suatu pernyataan p disajikan dengan lambang atau –p atau ~p, dan dibaca: ”tidak p”. Bila peryataan p bernilai benar, maka ingkarannya bernilai salah dan sebaliknya. Dengan tabel kebenaran

p	~p
B	S
S	B

B. **Konjungsi ($p \wedge q$)**

Konjungsi dua pernyataan p dan q bernilai benar hanya jika kedua pernyataan komponennya bernilai benar. Dan jika salah satu atau kedua pernyataan komponennya salah, maka konjungsi itu salah. Dengan tabel kebenaran

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

C. **Disjungsi/ Alternasi ($p \vee q$)**

Disjungsi dari dua buah pernyataan p dan q bernilai benar asal salah satu atau kedua pernyataan komponennya benar. Dan jika kedua pernyataan komponennya salah, maka konjungsi itu salah. (Disjungsi seperti ini disebut disjungsi inklusif). Dengan tabel kebenaran

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

D. ***Implikasi ($p \rightarrow q$)***

Bernilai benar jika konsekuennya bernilai benar atau anteseden dan konsekuen kedua-duanya salah, dan bernilai salah jika antesedennya bernilai benar, sedangkan konsekuennya salah. Dengan tabel kebenaran

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

E. **Biimplikasi atau Bikondisional ($p \leftrightarrow q$)**

Biimplikasi $p \leftrightarrow q$ bernilai benar apabila anteseden dan konsekuen kedua-duanya bernilai benar atau kedua-duanya bernilai salah. Jika tidak demikian maka biimplikasi bernilai salah. Dengan tabel kebenaran

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

F. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Dari pernyataan berbentuk implikasi dapat kita turunkan pernyataan-pernyataan baru yang disebut invers, konvers, dan kontraposisi.

Implikasi : $p \rightarrow q$

Inversnya : $\sqcup p \rightarrow \sqcup q$

Konversnya : $q \rightarrow p$

Kontraposisinya : $\sim q \rightarrow \sim p$

G. Bikondisional (Biimplikasi Atau Pernyataan Bersyarat Ganda)

Pernyataan bikondisional bernilai benar hanya jika komponen-komponennya bernilai sama.

Contoh: Jika p : 2 bilangan genap (B)
q : 3 bilangan ganjil (B)
maka $p \Leftrightarrow q$: 2 bilangan genap jhj 3 bilangan ganjil (B)

4. TAUTOLOGI, EKIVALEN DAN KONTRADIKSI

A. Tautologi

Perhatikan bahwa beberapa pernyataan selalu bernilai benar. Contoh pernyataan: “Junus masih bujang atau Junus bukan bujang” akan selalu bernilai benar tidak bergantung pada apakah junus benar-benar masih bujang atau bukan bujang. Jika p : junus masih bujang, dan ~p : junus bukan bujang, maka pernyataan diatas berbentuk $p \vee \sim p$. (coba periksa nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran). Setiap pernyataan yang bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya, disebut tautologi.

B. Ekivalen

Dua buah pernyataan dikatakan ekivalen (berekivalensi logis) jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama.

C. Kontradiksi

Setiap pernyataan yang selalu bernilai salah, untuk setiap nilai kebenaran dari komponen-komponen disebut kontradiksi. Karena kontradiksi selalu bernilai salah, maka kontradiksi merupakan ingkaran dari tautologi dan sebaliknya.

5. KUANTOR

A. Fungsi Pernyataan

Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit).

Fungsi pernyataan merupakan suatu kalimat terbuka yang ditulis sebagai p(x) yang bersifat bahwa p(a) bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk setiap a (a adalah anggota dari semesta pembicaraan). Ingat bahwa p(a) suatu pernyataan.

B. Kuantor Umum (Kuantor Universal)

Simbol $\forall$ yang dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap" disebut kuantor umum. Jika p(x) adalah fungsi proposisi pada suatu himpunan A (himpunan A adalah semesta pembicaraannya) maka ($\forall x \in A$) p(x) atau $\forall x$, p(x) atau $\forall x$ p(x) adalah suatu pernyataan yang dapat dibaca sebagai "Untuk setiap x elemen A, p(x) merupakan pernyataan "Untuk semua x, berlaku p(x)".

C. Kuantor Khusus (Kuantor Eksistensial)

Simbol $\exists$ dibaca "ada" atau "untuk beberapa" atau "untuk paling sedikit satu" disebut kuantor khusus. Jika p(x) adalah fungsi pernyataan pada himpunana tertentu A (himpunana A adalah semesta pembicaraan) maka ($\exists x \in A$) p(x) atau $\exists x!$ p(x) atau $\exists x$ p(x) adalah suatu pernyataan yang dibaca "Ada x elemen A, sedemikian hingga p(x) merupakan pernyataan" atau "Untuk beberapa x, p(x)". ada yang menggunakan simbol $\exists!$ Untuk menyatakan "Ada hanya satu".

D. Negasi Suatu Pernyatan yang Mengandung Kuantor

Jika p(x) adalah manusia tidak kekal atau x tidak kekal, maka "Semua manusia adalah tidak kekal" atau $\forall x$ p(x) bernilai benar, dan "Beberapa manusia kekal" atau $\exists x \sim p(x)$ bernilai salah. Pernyataan di atas dapat dituliskan dengan simbol : $\sim [\forall x\ p(x)] \equiv \exists x \sim p(x)$

E. Fungsi Pernyataan yang Mengandung Lebih dari Satu Variabel

Didefinisikan himpunan A1, A2, A3, . . ., An, suatu fungsi pernyataan yang mengandung variabel pada himpunan A1 x A2 x A3 x . . . x An merupakan kalimat terbuka p(x1, x2, x3, . . ., xn) yang mempunyai sifat p(a1, a2, a3, . . ., an) bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk (a1, a2, a3, . . ., an) anggota semesta A1 x A2 x A3 x . . . x An.

6. VALIDITAS PEMBUKTIAN

A. Premis dan Argumen

Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan disebut premis, sehingga suatu premis dapat berupa aksioma, hipotesa, definisi atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Sedang yang dimaksud dengan argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang mengandung bukti-bukti (evidence) dan suatu (satu) konklusi. Konklusi ini selayaknya (supposed to) diturunkan dari premis-premis.

B. Validitas Pembuktian (I)

1. Modus Ponen

Premis 1 : $p \Rightarrow q$

Premis 2 : p

Konklusi : q

2. Modus Tolen :

Premis 1 : $p \Rightarrow q$

Premis 2 : $\sim q$

Konklusi : $\sim p$

3. Silogisma :

Premis 1 : $p \Rightarrow q$

Premis 2 : $q \Rightarrow r$

Konklusi : $p \Rightarrow r$

4. Silogisma Disjungtif

Premis 1 : $p \vee q$

Premis 2 : $\sim q$

Konklusi : p

5. Konjungsi

Premis 1 : p

Premis 2 : q

Konklusi : $p \wedge q$

Artinya : p benar, q benar. Maka $p \wedge q$ benar.

6. Tambahan (Addition)

Premis 1 : p

Konklusi : $p \vee q$

Artinya : p benar, maka $p \vee q$ benar (tidak peduli nilai benar atau nilai salah yang dimiliki q).

7. Dilema Konstruktif :

Premis 1 : $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

Premis 2 : $\sim q \vee \sim s$

Konklusi : $\sim p \vee \sim r$

C. Pembuktian Tidak Langsung

Pembuktian-pembuktian yang telah kita bicarakan di atas, merupakan pembuktian yang langsung. Berdasarkan pemikiran ini, jika premis-premis dalam suatu argumen yang valid membawa ke konklusi yang bernilai salah, maka paling sedikit ada satu premis yang bernilai salah.

Cara pembuktian ini disebut pembuktian tidak langsung atau pembuktian dengan kontradiksi atau reductio ad absurdum. Ringkasannya, kita dapat membuktikan bahwa suatu pernyataan bernilai benar, dengan menunjukkan bahwa negasi dari pernyataan itu salah. Ini dilakukan dengan menurunkan konklusi yang salah dari argumen yang terdiri dari negasi pernyataan itu dan pernyataan atau pernyataan-pernyataan lain yang telah diterima kebenarannya.

BAGIAN III
KESIMPULAN DAN SARAN

A. KESIMPULAN

Mata Kuliah Logika Matematika mempelajari beberapa hal yang berkaitan dengan logika, seperti logika secara kalimat, logika dalam pemrograman dan logika dalam rangkaian digital.Logika dalam kalimat dinyatakan sebagai proposisi dan pola-pola argumen/pernyataan logis dengan hukum-hukum logika.Logika dalam pemrograman diperlihatkan dengan struktur dasar dari pemrograman dan aliran/kontrol program dengan flow chart. Logika dalam rangkaian digital diperlihatkan dengan logika biner dan gerbang-gerbang logika serta penyederhanaan dalam rangkaian.

B. SARAN

Diharapkan mahasiswa berikutnya dapat mengembangkan makalah ini supaya lebih sederhana dan lebih mudah dimengerti. Diharapkan mahasiswa dapat memahamai mata kuliah logika matematika dan mengaplikasikannya dalam kehidupan nyata.