



REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia, berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta yaitu Undang-Undang tentang perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra (tidak melindungi hak kekayaan intelektual lainnya), dengan ini menerangkan bahwa hal-hal tersebut di bawah ini telah tercatat dalam Daftar Umum Ciptaan:

- I. Nomor dan tanggal permohonan : EC00201702695, 15 Agustus 2017
- II. Pencipta
- Nama : **Akhsanul In'am, Ph.D**
- Alamat : Dusun Gondang 86, RT.002 RW.001 Kelurahan Tegalgondo, Kecamatan Karangploso, Malang, JAWA TIMUR, 65152
- Kewarganegaraan : Indonesia
- III. Pemegang Hak Cipta
- Nama : **UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH MALANG**
- Alamat : Jalan Raya Tlogomas No. 246 Malang, Malang, JAWA TIMUR, 65144
- Kewarganegaraan : Indonesia
- IV. Jenis Ciptaan : Buku
- V. Judul Ciptaan : **Kalkulus Diferensial**
- VI. Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia : 1 Juli 2016, di Malang
- VII. Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.
- VIII. Nomor pencatatan : 03195

Pencatatan Ciptaan atau produk Hak Terkait dalam Daftar Umum Ciptaan bukan merupakan pengesahan atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang dicatat. Menteri tidak bertanggung jawab atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang terdaftar. (Pasal 72 dan Penjelasan Pasal 72 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta)

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
REPUBLIK INDONESIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.
DIREKTUR HAK CIPTA DAN DESAIN INDUSTRI

Dr. Dra. Erni Widhyastari, Apt., M.Si.
NIP. 196003181991032001



Akhsanul In'am, Dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Malang (UMM). Pendidikan dasar dan menengah diselesaikan di Kediri, sedangkan Pendidikan Tinggi yang pernah ditempuh, S-1 Pendidikan Matematika FKIP UMM tahun 1988, S-1 Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel Malang tahun 1990, S-2 Manajemen Program Pascasarjana UMM pada tahun 1996, Doktor Falsafah (Ph.D) bidang Kebijakan Pendidikan dari Fakultas Pendidikan Universiti Malaya tahun 2009, dan Doktor Falsafah (Ph.D) bidang Pendidikan Matematika dari Fakultas Sain Matematika UPSI Malaysia tahun 2012. Beberapa aktivitas yang dijalankan sebagai seorang dosen baik sebagai pemateri maupun menulis buku telah dijalankan. Beberapa karya yang dihasilkan dalam penulisan buku adalah 1) Ringkasan Matematika SMA diterbitkan UMM Press Malang tahun 2008; 2) Bermatematika dengan Balita diterbitkan UMM Press Malang tahun 2009; 4) Menggagas Makna Menggapai Cita diterbitkan Aditya Media Malang tahun 2010; 5) bagian dari buku yang berjudul Peranan Matematika dalam Penentuan Arah Kiblat dalam buku Muhammadiyah dan Tantangan Abad Baru, Percikan Pemikiran dari Negeri Jiran diterbitkan Matan Press Yogyakarta dan PCIM Kualalumpur tahun 2010; 6) Model pembelajaran matematika berbasis metakognitif (Selaras, 2012). Upaya memperkaya wawasan bidang manajerial dan akademik dilakukan melalui kunjungan ke beberapa negara: Singapore, Malaysia, Thailand, Brunei, Vietnam, Kamboja, Filipina, Laos, Myanmar, Saudi Arabia, Mesir, Vatikan, Italia, Austria, Perancis, Jerman, Taiwan, Hongkong, Jepang dan Korea Selatan.

ISBN: 978-979-796-185-5



Kritik dan saran mengenai buku ini via email: ummipress@gmail.com

Akhsanul In'am

KALKULUS
diferensial



KALKULUS

diferensial

KALKU

Akhsanul In'am



KALKULUS

diferensial

KALKULUS
diferensial

KALKULUS



Akhsanul In'am

Kalkulus Diferensial

viii, 201 hlm, 15 x 23 cm

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Hak Cipta © Akhsanul In'am

Hak Terbit pada UMM Press

Penerbitan Universitas Muhammadiyah Malang

Jl. Raya Tlogomas No. 246 Malang 65144

Telepon (0341) 464318 Psw: 140

Fax (0341) 460435

Email: ummpress@gmail.com

<http://ummpress.umm.ac.id>

Edisi Pertama, Juli 2008

Edisi Kedua, Desember 2014

Edisi Ketiga, Juli 2016

ISBN: 978-979-796-185-5

Desain Sampul: Ridlo Setiyono

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun, termasuk fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit. Pengutipan harap menyebutkan sumbernya

Sanksi Pelanggaran Pasal 72 Undang-undang No. 19 Tahun 2012, Tentang Hak Cipta

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau dengan paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (Satu Juta Rupiah) atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,00 (Lima Milyar Rupiah)
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat 1 (satu) dipidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 500.000.000, 00 (Lima Ratus Juta Rupiah)

Prakata

Matematika telah berkembang pesat dengan berbagai cabang telaah dan kajian. Sebagai sarana berpikir yang deduktif aksiomatik, matematika sangat berguna untuk membangun teori keilmuan dan dapat menurunkan prediksi-prediksi serta mengkomunikasikan hasil-hasil aktivitas keilmuan dengan benar, jelas, ringkas, tepat dan cermat.

Salah satu cabang matematika adalah kalkulus, merupakan salah satu mata kuliah dasar yang perlu dikuasai dengan baik oleh mahasiswa sebagai sarana untuk mempelajari materi matematika pada tahap berikutnya.

Buku ini disusun dengan mendasarkan kepada acara perkuliahan selama satu semester sebagai dasar untuk mengikuti materi kalkulus yang berikutnya. Kajian dalam buku ini diawali dengan pendahuluan yang menguraikan mengenai dasar-dasar sistem bilangan, kemudian kajian mengenai fungsi berada pada pembahasan yang kedua. Berikutnya adalah membahas limit dan turunan dan pada kajian akhir di paparkan penerapan turunan. Pada setiap kajian diawali dengan tujuan pembelajaran dan untuk memperkaya wawasan mahasiswa, buku ini dilengkapi dengan 24 soal-soal latihan yang mencakup 780 soal.

Tiada harap, kecuali hanya sebuah ucap semoga buku ini dapat membantu mahasiswa untuk memahami dasar-dasar kalkulus.

Malang, Juli 2016

Daftar Isi

Prakata

Daftar Isi

Bab Satu Pendahuluan

- 1.1 Sistem Bilangan Real 2
- 1.2 Pertaksamaan 10
- 1.3 Nilai Mutlak dan Pertaksamaannya 20
- 1.4 Sistem Koordinat Cartesius 28
- 1.5 Garis Lurus 38
- 1.6 Grafik Persamaan 49

Bab Dua Fungsi

- 2.1 Pendahuluan 55
- 2.2 Grafik Fungsi 68
- 2.3 Operasi pada Himpunan Fungsi 86
- 2.4 Grafik Fungsi Sinus dan Cosinus 89

Bab Tiga Limit

- 3.1 Pendahuluan 102
- 3.2 Limit Fungsi di Satu Titik 104
- 3.3 Limit-limit Sepihak 111
- 3.4 Teorema Limit 117
- 3.5 Limit-limit Tak Hingga 121
- 3.6 Limit Fungsi Trigonometri 132
- 3.7 Kekontinuan Fungsi 136

Bab Empat Turunan

- 4.1 Pendahuluan 148
- 4.2 Definisi Turunan 149
- 4.3 Bentuk-bentuk Setara untuk Turunan 151
- 4.4 Simbul-simbul Turunan 154
- 4.5 Aturan Pencarian Turunan 157
- 4.6 Turunan Sinus dan Cosinus 166

- 4.7 Aturan Rantai 168
- 4.8 Turunan Fungsi Eksponensial dan Algoritmik 170
- 4.9 Turunan Fungsi Implisit 172
- 4.10 Turunan Fungsi Paramater 173

Bab Lima Penerapan Turunan

- 5.1 Kecepatan dan Percepatan 177
- 5.2 Garis Singgung dan Garis Normal 180
- 5.3 Maksimum dan Minimum 182
- 5.4 Kemonotonan dan Kecekungan 186

Daftar Pustaka

Glosarium

Indeks

Bab Satu

Pendahuluan



www.google.com

Rene Descartes (1596-1650) telah menorehkan karyanya berkenaan dengan posisi suatu tempat yang dinamakan dengan koordinat yang hingga kini diabadikan sebagai sarana menentukan posisi suatu titik dalam koordinat **cartesius**

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa dapat:

1. Memahami sistem bilangan real
2. Memahami dan menerapkan aksioma-aksioma dalam operasi bilangan
3. Memahami dan menerapkan cara penyelesaian sistem pertaksamaan linear, kuadrat, pangkat tinggi, mutlak
4. Memahami sistem koordinat cartesius
5. Memahami rumus jarak dan menerapkan untuk menghitung jarak antara dua titik, jarak antara titik dan garis, jarak antara dua garis
6. Memahami persamaan lingkaran, dan dapat mencari pusat dan jari-jari lingkaran jika diketahui persamaanya serta dapat mencari persamaan lingkaran jika diketahui jari-jari dan pusat lingkaran.

1.1 Sistem Bilangan Real

Matematika sebagai ilmu yang dikembangkan dengan berdasarkan diri pada teori bilangan dan geometri. Bilangan telah dimanfaatkan sebagai dasar berbagai cabang matematika dan hal ini telah dilakukan oleh *Pythagoras* sejak 2500 tahun yang lalu. Sebagai ungkapan betapa pentingnya bilangan, telah diungkapkan, *The number rule the universe*, demikian juga *Kronecker* (1823-1891) mengatakan *god made the integer, all the rest is the work of man*. Selain dua orang tersebut terdapat beberapa matematikawan yang telah banyak menyumbangkan hasil pemikirannya bagi perkembangan teori bilangan real, antaranya *K Weierstrass* (1815-1897) *R Dedekind* (1831-1916) dan *G Cantor* (1845-1918)

1.1.1 Bilangan Bulat dan Rasional

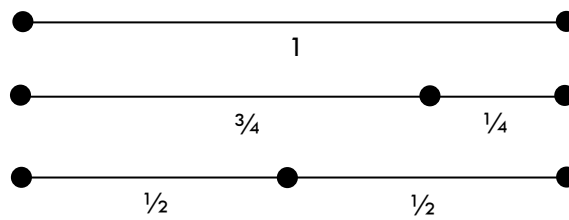
Bilangan yang banyak dikenal dalam kehidupan sehari-hari dalam keperluan membilang adalah bilangan asli, yaitu bilangan 1, 2, 3, 4.... Himpunan bilangan asli yang disimbulkan dengan N dan jika ditulis dalam bentuk himpunan dinyatakan dengan $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Bilangan-bilangan tersebut jika digabung dengan negatifnya dan nol diperoleh bilangan bulat yang dinotasikan dengan Z , jika ditulis dalam bentuk himpunan dapat dinyatakan dengan $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Jika diperhatikan dari sisi perkembangannya, kehidupan manusia selalu berubah, sehingga segala keperluan manusia mengalami perubahan, termasuk didalamnya keperluan untuk mengukur panjang, berat, ternyata bilangan-bilangan tersebut terdapat perubahan, sebagian sudah tidak memadai, bilangan tersebut kurang memberikan ketelitian yang dikehendaki, misalnya untuk mengukur berat badan.

Memperhatikan kondisi yang demikian, dikembangkan bilangan yang dapat mengakomodasi berbagai permasalahan

yang muncul dengan mempertimbangkan hasil bagi dari bilangan-bilangan bulat seperti berikut:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-5}{7}, \text{ dan } \frac{10}{12}$$



Gambar 1.1: Hasil Bagi Bilangan

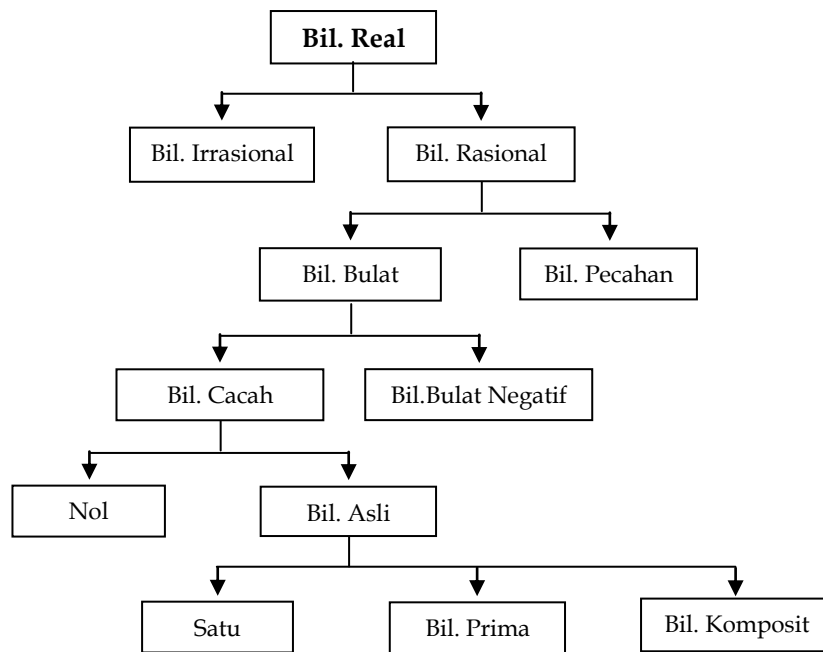
Bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m dan n adalah bilangan bulat dengan syarat $n \neq 0$ dan disebut bilangan rasional yang dinotasikan dengan Q . Manfaat bilangan ini salah satunya adalah untuk menentukan ukuran panjang, namun dalam perkembangannya terdapat ukuran panjang suatu ruas garis yang bukan merupakan bilangan rasional. Perkembangan bilangan rasional ini telah lama dimulai oleh orang Yunani kuno yang tinggal beberapa abad sebelum masehi dan telah menemukan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-siku adalah satu satuan yaitu $\sqrt{2}$. Bilangan ini tidak dapat dituliskan sebagai hasil bagi dari dua bilangan bulat, tidak ada bilangan bulat yang dapat memenuhi sebagai pembilang dan penyebut sehingga sama dengan bilangan $\sqrt{2}$.

1.1.2 Komponen Bilangan Real

Bilangan real adalah sekumpulan bilangan rasional dan irrasional yang dapat mengukur panjang bersama-sama dengan

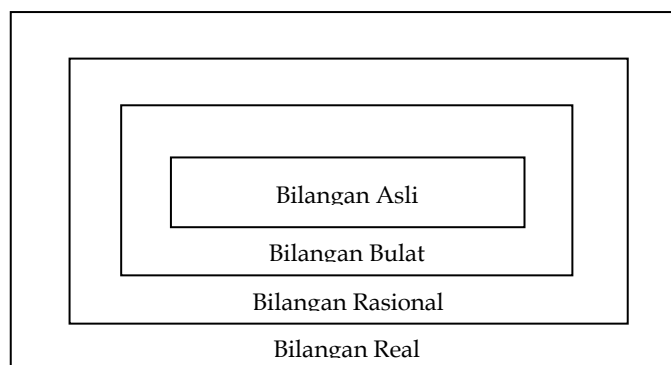
negatif dan nol. Bilangan real terdiri dari beberapa kumpulan bilangan sebagaimana berikut:

1. Bilangan asli adalah bilangan yang digunakan untuk menghitung banyaknya obyek suatu himpunan, 1, 2, 3, dan dilambangkan dengan N.
2. Bilangan prima, adalah bilangan asli yang mempunyai tepat dua faktor, 2, 3, 5, 7, ...
3. Bilangan komposit, adalah bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor, 4, 6, 8, 9, 10, ...
4. Bilangan cacah, adalah bilangan asli beserta unsur nol 0, 1, 2, 3, 4,... dan dilambangkan dengan C.
5. Bilangan bulat,, -2, -1, 0, 1, 2,... dilambangkan dengan Z.
6. Bilangan pecahan adalah bilangan berbentuk $x = \frac{m}{n}$, m bilangan bulat dan n bilangan asli dengan m tidak habis dibagi n . Bilangan pecahan yang terletak di antara 0 dan 1 disebut bilangan pecahan sejati.
7. Bilangan rasional adalah bilangan berbentuk $x = \frac{m}{n}$, m bilangan bulat dan n bilangan asli. Disini x merupakan bilangan bulat jika m habis dibagi n dan x dan disebut bilangan pecahan jika m tidak habis dibagi n . Bilangan rasional bersifat selalu mempunyai bentuk desimal berulang, Contoh $1/2 = 0,50000...$, $1/3 = 0,33333...$ dan dilambangkan dengan Q.
8. Bilangan irrasional adalah bilangan yang bukan rasional, jika dinyatakan dalam bentuk desimal, mempunyai bentuk desimal tak terulang, contoh, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π .
9. Bilangan real adalah gabungan bilangan rasional dan irrasional dan dilambangkan dengan R. hubungan bilangan-bilangan tersebut dapat dilihat pada gambar 1.2



Gambar 1.2: Diagram Pohon Bilangan

Sedangkan jika dinyatakan dalam bentuk diagram venn, hubungan bilangan Real, Rasional, Bulat dan Bilangan Asli dapat dilihat sebagaimana gambar 1.3



Gambar 1.3: Diagram Venn Bilangan Real

Jika terdapat tiga buah bilangan real x , y dan z dengan operasi penjumlahan dan perkalian, maka aksioma-aksioma berikut berlaku:

1. Aksioma Komutatif Penjumlahan, $x + y = y + x$
2. Aksioma komutatif Perkalian $xy = yx$
3. Aksioma Asosiatif Penjumlahan, $x + (y + z) = (x + y) + z$
4. Aksioma Asosiatif Perkalian $x(yz) = (xy)z$
5. Aksioma Distributif $x(y + z) = xy + xz$
6. Terdapat bilangan 0 (nol) yang memenuhi $x + 0 = x$
7. Terdapat bilangan 1 (satu) yang memenuhi $x \cdot 1 = x$
8. Setiap bilangan x mempunyai invers penjumlahan $-x$ (dapat dikatakan juga dengan negatifnya) yang memenuhi $x + (-x) = 0$,
9. Setiap bilangan x mempunyai invers perkalian $1/x$ (dapat dikatakan juga kebalikannya) yang memenuhi $x \cdot 1/x = 1$

Soal-soal Latihan 1

Sederhanakan soal No. 1 hingga 25 melalui berbagai kemungkinan untuk menghilangkan semua tanda kurung dan menyederhanakan bentuk pecahan.

- 1) $5 - 2(7 - 8) - 7$
- 2) $3[4 - 2(3 - 79)]$
- 3) $-6[4(-7 + 8) - 5(-4 + 2)]$
- 4) $7[5(3 - 9) - 3(-3 + 7)]$
- 5) $4 + \frac{5}{1 - \frac{1}{3}}$
- 6) $5 + \frac{3}{3 - \frac{3}{4}}$
- 7) $\frac{5}{6} - (\frac{1}{4} + \frac{2}{3})$
- 8) $\frac{3}{4} - (\frac{7}{12} + \frac{2}{9})$

- 9) $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})+\frac{1}{6}]$
- 10) $-\frac{1}{3}[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})]$
- 11) $\frac{14}{33}-(\frac{2}{3}-\frac{1}{7})^2$
- 12) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{7})/(1+\frac{1}{2})$
- 13) $(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})/(1+\frac{2}{5})$
- 14) $\frac{\frac{11}{49}-\frac{3}{7}}{\frac{11}{49}-\frac{3}{7}}$
- 15) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$
- 16) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$
- 17) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
- 18) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
- 19) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
- 20) $3\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8})$
- 21) $2^3\sqrt{2}(\sqrt{2}+^3\sqrt{16})$
- 22) $2^3\sqrt{4}({}^3\sqrt{2}+^3\sqrt{16})^2$
- 23) $(\frac{5}{6}+\frac{1}{3})^{-2}$
- 24) $(\frac{5}{6}+\frac{1}{3})^2$

$$25) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} \right)^{-2}$$

Kerjakan dan sederhanakan soal-soal No. 26 hingga 45

$$26) (2x - 5)(2x + 5)$$

$$27) (2x - 5)^2$$

$$28) (5x - 3)(x + 7)$$

$$29) (3x + 1)(x - 3)$$

$$30) ((x^2 - 3x) + 2)^2$$

$$31) (3x + 4)^3$$

$$32) (2x - 3)^3$$

$$33) \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$34) \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$35) \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$36) \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$37) \frac{x^2 - 8}{2x - 4}$$

$$38) \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$39) \frac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$40) \frac{18}{x^2 + 3x} - \frac{4}{x} + \frac{6}{x + 3}$$

$$41) \frac{8}{x^2 + 2x} - \frac{4}{x} + \frac{2}{x - 2}$$

$$42) \frac{2}{6x - 2} + \frac{x}{9x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{1 - 3x}$$

$$43) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$44) \frac{\frac{x}{3} - \frac{5}{4}}{\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+3}{x-3}}$$

$$45) \frac{\frac{x}{4} - \frac{6}{x^2 - 4x + 3}}{\frac{4}{x-1} + \frac{4}{x-3}}$$

- 46) Tunjukkan bahwa pembagian bilangan dengan 0 adalah tanpa arti, misalkan $a \neq 0$, jika $a/0 = b$, maka $a = 0$, $b = 0$, kondisi ini menunjukkan adanya kontradiksi. Analisis dan buat alasan yang logis mengapa $0/0$ tidak bermakna (Purcell, 2004)
- 47) Bilangan prima merupakan bilangan bulat positif yang hanya mempunyai dua faktor, yaitu bilangan itu sendiri dan 1. Beberapa bilangan prima yang pertama adalah, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Menurut Teorema Dasar, setiap bilangan asli (selain 1) dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Misalnya $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Tuliskan masing-masing yang berikut sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima (catatan, hasil kali tersebut adalah trivial jika bilangan itu adalah prima, maka bilangan tersebut hanya mempunyai satu faktor) (Purcell, 2004)
- a. 240; b. 119; c) 310; d) 5400
- 48) Melalui penggunaan teorema dasar hitung untuk membuktikan bahwa kuadrat sebarang bilangan asli (selain angka 1) dapat dituliskan sebagai hasil kali suatu bilangan unik yang terdiri dari bilangan prima, dengan masing-masing bilangan prima ini muncul sebanyak bilangan genap, misalnya $(45)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ (Purcell, 2004)
- 49) Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah irrasional, untuk menyelesaikan soal tersebut perhatikan petunjuk, misalkan $\sqrt{2} = p/q$ dimana p dan q adalah bilangan-bilangan asli (bukan 1), maka $2 = p^2/q^2$. Selanjutnya gunakan soal no. 48 untuk menemukan kontradiksi (Purcell, 2004)
- 50) Tunjukkan bahwa $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ adalah irrasional.

1.2 Pertaksamaan

Menyelesaikan persamaan adalah mencari jawab dari suatu peubah yang belum diketahui dengan banyaknya penyelesaian sesuai dengan pangkat peubah yang dicari.

Contoh:

Selesaikan $2x - 4 = 8$

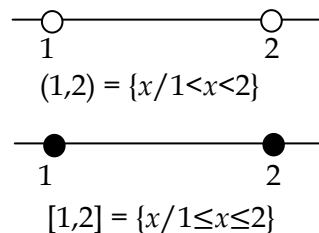
Penyelesaian: $2x - 4 + 4 = 8 + 4$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Sedangkan untuk menyelesaikan suatu pertaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertaksamaan berlaku. Berbeda dengan persamaan, dimana himpunan penyelesaiannya secara normal terdiri dari satu bilangan atau mungkin sejumlah bilangan berhingga, sedangkan pertaksamaan himpunan penyelesaiannya terdiri dari suatu keseluruhan interval bilangan merupakan gabungan dari interval-interval bilangan.

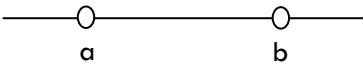
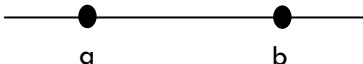
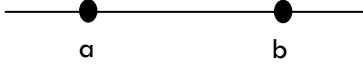
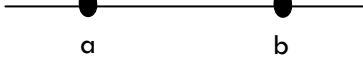

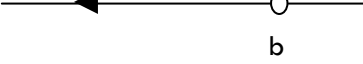


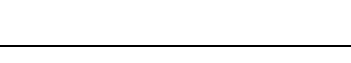
Berkaitan dengan penyelesaian suatu pertaksamaan, beberapa interval yang mungkin muncul dalam penyelesaian pertaksamaan dikemukakan di bawah ini. Interval $a < x < b$ melambangkan interval buka yang terdiri dari semua bilangan real antara a dan b , tidak termasuk titik-titik ujung a dan b , interval tersebut dinyatakan dengan (a, b) . Sedangkan interval $a \leq x \leq b$ melambangkan interval tutup yang terdiri dari semua bilangan real antara a dan b dan termasuk titik-titik ujung a dan b yang dilambangkan dengan $[a, b]$. Sebagai contoh dapat dikemukakan sebagaimana gambar 1.4



Gambar 1.4: Interval Bilangan

Beberapa macam interval dan cara penulisannya dikemukakan sebagaimana Tabel 1.1

Tabel 1.1: Macam Interval dan Cara Penulisanya (Purcell, 2004)

| Penulisan Himpunan | Penulisan Interval | Grafik |
|--------------------------|---------------------|--|
| $\{x/ a < x < b\}$ | (a, b) |  |
| $\{x/ a \leq x \leq b\}$ | $[a, b]$ |  |
| $\{x/ a \leq x < b\}$ | $[a, b)$ |  |
| $\{x/ a < x \leq b\}$ | $(a, b]$ |  |
| $\{x/ x \leq b\}$ | $(-\infty, b]$ |  |
| $\{x/ x < b\}$ | $(-\infty, b)$ |  |
| $\{x/ x \geq a\}$ | $[a, \infty)$ |  |
| $\{x/ x > a\}$ | (a, ∞) |  |
| \mathbb{R} | $(-\infty, \infty)$ |  |

Beberapa aksioma yang berlaku pada himpunan semua bilangan real yang disebut dengan aksioma urutan adalah sebagai berikut:

1. *Trikotomi*

Jika a dan b adalah sebarang bilangan real maka salah satu di antara yang berikut berlaku:

$$a < b, a = b \text{ atau } a > b$$

2. *Ketransitifan*

Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ untuk sebarang bilangan real a , b dan c

3. *Penjumlahan*

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c, \text{ untuk sebarang bilangan real } a, b \text{ dan } c$$

4. *Perkalian*

Untuk bilangan c positif, berlaku $a < b \Leftrightarrow a.c < b.c$ untuk sebarang bilangan real a , b dan c . Untuk bilangan c negatif, berlaku $a < b \Leftrightarrow a.c > b.c$ untuk sebarang bilangan real a , b dan c

Menyelesaikan pertaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan real yang mungkin dan membuat pertaksamaan bernilai benar. Bentuk umum pertaksamaan aljabar dengan satu peubah bilangan real adalah:

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}, A, B, C \text{ dan } D \text{ sukubanyak}$$

tanda ketidaksamaan $<$ dapat diganti dengan $>$, \leq atau \geq , sedangkan langkah-langkah penyelesaian pertaksamaan adalah sebagai berikut:

1. Menggunakan rumus aljabar elementer dan sifat urutan

ubahlah bentuknya menjadi $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ dengan A dan B suku banyak.

2. Uraikan $A(x)$ dan $B(x)$ atas faktor linier atau kuadrat definit positif (mempunyai penyelesaian).
3. Tentukan tanda pertaksamaan untuk interval pembuat nol pada garis bilangan.
4. Tentukan himpunan penyelesaiannya dan tunjukkan dalam bentuk interval.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan $3x - 4 < 2x + 7$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 3x - 4 &< 2x + 7 \\
 3x - 4 + 4 &< 2x + 7 + 4 \text{ (ditambah 4 untuk kedua ruas)} \\
 3x - 2x &< 2x - 2x + 11 \text{ (ditambah -2x untuk kedua ruas)} \\
 x &< 11
 \end{aligned}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-\infty, 11) = \{x/x < 11\}$

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan $3 - 2x < 4x + 15$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 3 - 2x &< 4x + 15 \\
 3 - 3 - 2x &< 4x + 15 - 3 \text{ (ditambah -3 untuk kedua ruas)} \\
 -2x - 4x &< 4x - 4x + 12 \text{ (ditambah -4x untuk kedua ruas)} \\
 -6x \cdot \left(\frac{-1}{6}\right) &> 12 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right) \text{ (dikalikan } \frac{-1}{6} \text{ untuk kedua ruas)} \\
 x &> -2
 \end{aligned}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-2, \infty) = \{x/x > -2\}$

Sebelum menyelesaikan pertaksamaan kuadrat perlu diketahui terlebih dahulu bahwa suatu faktor linier berbentuk $x - a$ adalah positif untuk $x > a$ dan negatif untuk $x < a$, hal ini berarti bahwa hasil kali $(x - a)(x + a)$ dapat berubah dari bernilai positif menjadi negatif atau sebaliknya. Titik-titik ini yang mana suatu faktor adalah nol disebut sebagai titik penyelesaian. Titik-titik ini

merupakan kunci untuk menentukan himpunan penyelesaian suatu pertaksamaan kuadrat atau yang tingkat lebih tinggi.

Contoh 3:

Selesaikanlah pertaksamaan kuadrat $x^2 - 4x < -3$

Penyelesaian:

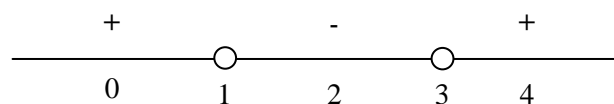
$$\begin{aligned} x^2 - 4x &< -3 \\ x^2 - 4x + 3 &< -3 + 3 \text{ (kedua ruas ditambah 3)} \\ (x - 1)(x - 3) &< 0 \text{ (difaktorkan)} \end{aligned}$$

titik-titik $x - 1 = 0$ (untuk $x = 1$) dan $x - 3 = 0$ (untuk $x = 3$) adalah titik-titik penyelesaian. Langkah untuk mengetahui daerah interval yang terjadi (positif atau negatif) dilakukan uji daerah interval dengan mengambil titik-titik yang kurang dari 1 (misal diambil titik 0), antara 1 dan 3 (misal diambil titik 2) dan lebih besar 3 (misal diambil titik 4) sebagai berikut.

Tabel 1.2: Titik Uji Penyelesaian

| Titik Uji | Nilai dari $(x - 1)(x - 3)$ | Tanda |
|-----------|-----------------------------|-------|
| 0 | 3 | + |
| 2 | -2 | - |
| 4 | 3 | + |

Jika digambarkan pada garis bilangan dapat dikemukakan sebagai berikut:



Gambar 1.5: Gambar Uji Penyelesaian

Berdasarkan grafik tersebut dapat dikatakan bahwa titik-titik penyelesaian membagi garis bilangan real menjadi tiga interval $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ dan $(3, \infty)$. Pada tiap interval bertanda tetap yaitu selalu positif atau negatif.

Jadi penyelesaian pertaksamaan $x^2 - 4x < -3$ adalah $1 < x < 3$.

Contoh 4:

Tentukan himpunan penyelesaian $\frac{2}{x} \geq x + 1$

Penyelesaian:

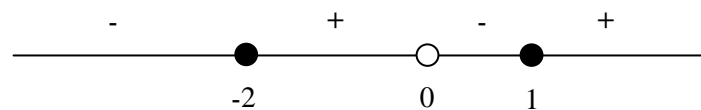
$$\frac{2}{x} \geq x + 1$$

$$x + 1 \leq \frac{2}{x}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 0$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x} \leq 0$$

Langkah selanjutnya setelah masing-masing pembilang dan penyebut berbentuk faktor, kemudian dicari titik-titik pembuat nol atau penyelesaian masing-masing faktor, $x + 2 = 0$ (untuk $x = -2$), $x - 1 = 0$ (untuk $x = 1$) dan $x = 0$, kemudian dibuat garis bilangan untuk menentukan interval yang memenuhi. (Perlu diperhatikan: pertaksamaan yang berbentuk pecahan tidak mempunyai penyelesaian untuk penyebut = 0)



Gambar 1.6: Grafik Penyelesaian Pertaksamaan

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah

$$(-\infty, -2] \cup (0, 1] = \{x/x \leq -2 \text{ atau } 0 < x \leq 1\}$$

Contoh 5:

Tentukan himpunan penyelesaian $2 \leq x^2 - x < 6$.

Pertaksamaan tersebut terdiri dari dua pertaksamaan, untuk itu masing-masing dicari penyelesaiannya, kemudian ditentukan irisan dari kedua penyelesaian yang ditemukan.

$$2 \leq x^2 - x \quad \text{dan} \quad x^2 - x < 6$$

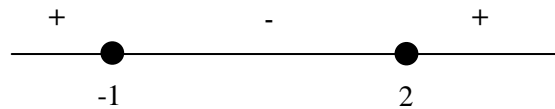
$$2 \leq x^2 - x$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x + 1)(x - 2) \geq 0$$

$$x + 1 = 0, x = -1$$

$$x - 2 = 0, x = 2$$



Gambar 1.7: Grafik Uji Penyelesaian Pertaksamaan

Himpunan penyelesaian $\{x/x \leq -1 \text{ atau } x \geq 2\}$

Sedangkan untuk $x^2 - x < 6$

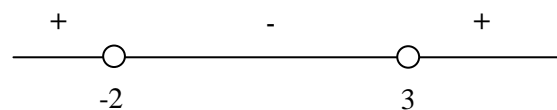
$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x + 2)(x - 3) < 0$$

$$x + 2 = 0, x = -2$$

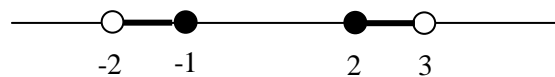
$$x - 3 = 0, x = 3$$



Gambar 1.8: Grafik Uji Penyelesaian Pertaksamaan

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x/ -2 < x < 3\}$

Berdasarkan dua penyelesaian tersebut, langkah selanjutnya dicari irisannya dan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 1.9: Grafik Penyelesaian Pertaksamaan

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah:

$$(-2,-1] \cup [2,3) = \{x/-2 < x \leq -1 \text{ atau } 2 \leq x < 3\}$$

Contoh 6:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$

Penyelesaian:

$$\frac{x+1}{2-x} \geq \frac{x}{x+3}$$

$$\frac{x+1}{x-2} \geq \frac{x}{x+3}$$

$$\frac{x}{2-3} \geq \frac{x+1}{x-2} \leq 0$$

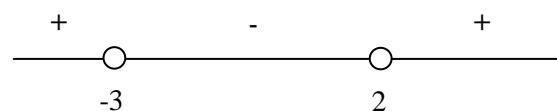
$$\frac{x^2 - 2x + x^2 + 4x + 3}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{(x+3)(x-2)} \leq 0$$

Jika diperhatikan, nampak bahwa faktor pembilang adalah definit positif (berapapun nilai x yang ditentukan persamaan bernilai positif, perhatikan bahwa syarat definit positif $a > 0$ dan $D < 0$), sehingga pertaksamaan diatas setara dengan:

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} < 0$$

sehingga titik-titik penyelesaiannya adalah $x = -3$ atau $x = 2$, untuk mengetahui interval yang memenuhi, grafik penyelesaiannya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1.10: Grafik Penyelesaian Pertaksamaan

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(-3, 2) = \{x / -3 < x < 2\}$

Soal-soal latihan 2:

- 1) Tunjukkan masing-masing interval berikut pada garis bilangan real.
 - a. $(-2, 5)$
 - b. $(-2, 5]$
 - c. $[-2, 5)$
 - d. $[-2, 5]$
 - e. $(-\infty, 5]$
 - f. $[-2, \infty)$

Carilah himpunan penyelesaian soal-soal No. 2 hingga 38 dengan cara menuliskan interval dan gambarlah grafiknya.

- 2) $3x - 4 < x + 6$
- 3) $3x + 3 < 4x - 8$
- 4) $7x - 1 \leq 10x + 4$
- 5) $10x + 1 > 11x - 4$
- 6) $3x + 5 \leq 8x - 9$
- 7) $-4 < 3x - 4 \leq 8$
- 8) $-6 < 2x + 3 < -1$
- 9) $-3 < 4x - 9 < 11$
- 10) $-2 < 1 - 5x \leq 3$
- 11) $2x - 2 < x + 3 \leq 4x - 6$
- 12) $2 + 3x < 5x + 1 < 16$
- 13) $x^2 + x - 12 > 0$
- 14) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
- 15) $3x^2 - 11x - 4 > 0$
- 16) $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$
- 17) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
- 18) $4x^2 - 5x \leq 6$
- 19) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$
- 20) $-9 < x^2 - 6x \leq -8$
- 21) $x^2 + 8x - 20 \leq 0$
- 22) $x^2 + 6x + 10 \leq 0$

- 23) $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$
- 24) $\frac{2x-3}{x+1} > 0$
- 25) $\frac{1}{x} > 5$
- 26) $\frac{7}{2x} > 6$
- 27) $\frac{2}{3x-7} \leq 5$
- 28) $\frac{3}{x+5} \leq 2$
- 29) $\frac{x-2}{x+5} > 2$
- 30) $\frac{2x-1}{x+3} > 1$
- 31) $\frac{2x-1}{x-3} \leq \frac{x+3}{2x-1}$
- 32) $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-3}{2x+3}$
- 33) $(x+2)(2x-1)(3x+7) \leq 0$
- 34) $(2x+3)(3x-1)(x-2) > 0$
- 35) $(x+5)(x+2)^2(2x-1) > 0$
- 36) $(2x+3)(3x-1)^2(x-5) \leq 0$
- 37) $x^3 - 5x^2 - 6x \geq 0$
- 38) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$
- 39) Carilah semua nilai x yang memenuhi ketiga pertaksamaan secara simultan
- $4x + 6 > 3$ dan $2x - 1 < 2$
 - $4x + 6 > 3$ dan $2x - 1 > 3$
 - $4x + 6 > 3$ dan $2x - 1 < -4$
- 40) Carilah semua nilai x yang memenuhi paling sedikit satu dari dua pertaksamaan berikut:
- $3x - 7 > 1$ dan $5x + 2 < -1$
 - $3x - 7 \leq 1$ dan $5x + 2 > -2$
 - $3x - 7 \leq 1$ dan $5x + 2 < -3$

1.3 Nilai Mutlak dan Pertaksamaannya

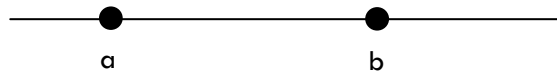
1.3.1 Nilai Mutlak

Pengenalan konsep nilai mutlak diawali melalui pengertian jarak dua titik pada garis bilangan sebagaimana gambar dibawah ini.

jarak = $b - a$



jarak titik a ke titik b adalah $b - a$ jika $a < b$, jarak = $a - b$



Gambar 1.11: Grafik Ilustrasi Jarak dua titik

jarak titik a ke titik b adalah $a - b$ jika $a > b$, kenyataan sebagaimana diatas mengarahkan pada kesimpulan berikut:

Jarak titik a ke titik b pada garis bilangan adalah

$$\text{Jarak } (a,b) = \begin{cases} b - a, & \text{jika, } a < b \\ 0 & , \text{jika, } a = b \\ a - b, & \text{jika, } a > b \end{cases}$$

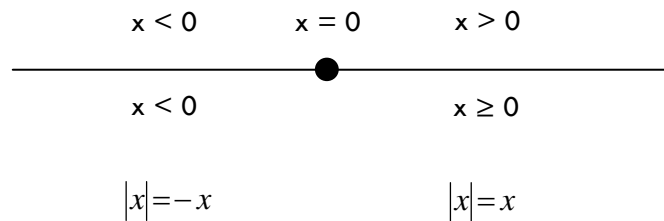
keadaan khusus jika $b = 0$, maka jarak dari titik a ke 0 adalah

$$\text{Jarak } (a,b) = \begin{cases} -a, & \text{jika, } a < b \\ 0 & , \text{jika, } a = b \\ a, & \text{jika, } a > b \end{cases}$$

Nilai mutlak suatu bilangan real x dinyatakan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika, } x \geq 0 \\ -x & \text{jika, } x < 0 \end{cases}$$

Usaha untuk mempermudah pemahaman nilai mutlak, dapat diperhatikan gambar berikut:



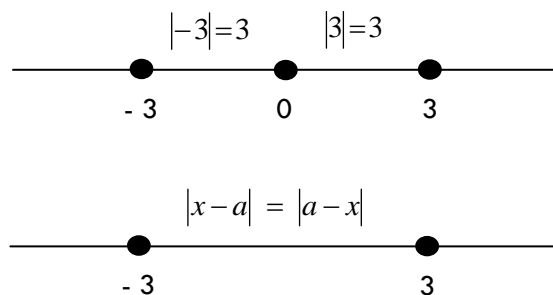
Gambar 1.12: Grafik Pemahaman Nilai Mutlak

Gambar diatas menunjukkan bahwa titik 0 membagi garis bilangan menjadi dua daerah $x \geq 0$ dan $x < 0$. Pada daerah $x < 0$ berlaku $|x| = -x$ dan pada daerah $x \geq 0$ berlaku $|x| = x$, dalam hal ini dikatakan bahwa $|x|$ berganti tanda di titik 0

Contoh:

$$|-9|=9, |3|=3, |0|=0$$

Sehingga $|x|$ selalu bernilai tidak negatif, untuk mempermudah memahami nilai mutlak dapat dibayangkan sebagai jarak, khususnya $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal 0 dan $|x-a|$ adalah jarak antara x dan a .



Gambar 1.13: Harga Mutlak sebagai Jarak dua Titik

Berdasarkan definisi dapat pula dilihat bahwa nilai mutlak suatu bilangan adalah bilangan positif atau nol. Berikut disajikan sifat-sifat yang berhubungan dengan nilai mutlak (Purcell, 2004).

1. $|x| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketidaksamaan segitiga)
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$

1.3.2 Pertaksamaan dengan Nilai Mutlak

Penyelesaian pertaksamaan yang memuat nilai mutlak adalah mengubah bentuk pertaksamaan yang diketahui sehingga tidak memuat nilai mutlak lagi, kemudian menyelesaikan pertaksamaan yang sudah disesuaikan pada setiap permasalahan.

Perhatikan ilustrasi berikut:

$$\text{Jika } a \geq 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$$

$$\text{Jika } a \geq 0, |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ atau } x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$$

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & \text{jika } x \geq a \\ a - x, & \text{jika } x < a \end{cases}$$

Contoh 1:

Selesaikanlah pertaksamaan $|2x - 1| < 5$

Penyelesaian:

$$|2x - 1| < 5$$

$$2x - 1 < -5 \text{ atau } 2x - 1 > 5$$

$$2x < -4 \text{ atau } 2x > 6$$

$$x < -2 \text{ atau } x > 3$$

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian $|x^2 - x| < 2$

Penyelesaian:

$$|x^2 - x| < 2$$

$$-2 < x^2 - x < 2$$

$$x^2 - x + 2 > 0 \quad \text{dan} \quad x^2 - x - 2 < 0$$

$x^2 - x + 2 > 0$ adalah definit positif ($a > 0$ dan $D < 0$) sehingga setiap x bilangan real memenuhi pertaksamaan tersebut, sedangkan untuk $x^2 - x - 2 < 0$ difaktorkan menjadi:

$$(x + 1)(x - 2) < 0$$

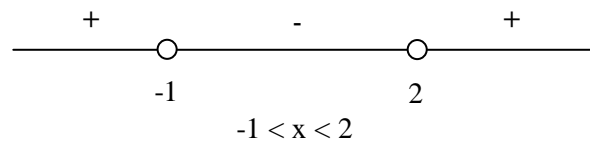
$$x + 1 = 0$$

$$(x = -1)$$

$$(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

jika digambarkan pada garis bilangan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 1.14: Grafik Penyelesaian Pertaksamaan

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah

$$R \cap (-1, 2) = (-1, 2) = \{x / -1 < x < 2\}$$

Contoh 3:

Tentukan himpunan penyelesaiannya dari $\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$

Penyelesaiannya:

Langkah-langkah untuk penyelesaian soal ini dilakukan dengan mengkuadratkan kedua ruas, kemudian membuat ruas kanan menjadi nol dan diselesaikan dengan menggunakan bantuan rumus $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 &\leq \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \\ \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 &\leq 0 \\ \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-2}{x+1}\right) \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x-2}{x+1}\right) &\leq 0 \\ \frac{8(x^2 - x + 1)(x - \frac{1}{2})}{(x-1)^2(x+1)^2} &\leq 0\end{aligned}$$

Faktor pembilang $x^2 - x + 1$ definit positif ($a > 0$ dan $D < 0$), maka bentuk tersebut setara dengan

$$\frac{(x - \frac{1}{2})}{(x-1)^2(x+1)^2} \leq 0$$

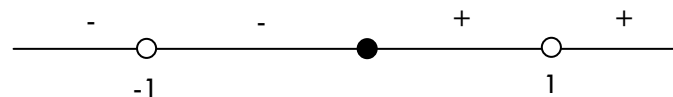
berdasarkan ketiga faktor tersebut, dapat diketahui titik-titik penyelesaiannya

$$x - \frac{1}{2} = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$(x - 1)^2 = 0, x = 1$$

$$(x - 1)^2 = 0, x = 1$$

Selanjutnya membuat grafik garis bilangan dari penyelesaian tersebut sebagai berikut:



Gambar 1.15: Grafik Penyelesaian Pertaksamaan

jadi himpunan penyelesaiannya adalah

$$(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2}] = \{x / x < -1 \text{ atau } -1 < x \leq \frac{1}{2}\}$$

Contoh 4:

$$\text{Jika } |x| \leq 2, \text{ buktikan } \left| \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 4} \right| \leq \frac{5}{3}$$

Penyelesaian:

Faktor penyebut dari soal tersebut mempunyai nilai $a > 0$ dan $D < 0$ yang berarti definit positif, perhatikan uraian faktor penyebut sebagai berikut:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3$$

yang bermakna $\frac{1}{x^2 + 2x + 4} \leq 3$

hal ini mengakibatkan

$$\left| \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 4} \right| = \frac{1}{x^2 + 2x + 4} |x^2 - 2x - 3| \leq \frac{1}{3} |x^2 - 2x - 3|$$

untuk harga $|x| \leq 2$ diperoleh interval nilai x , $-2 \leq x \leq 2$ selanjutnya nilai batas dari $|x^2 - 2x - 3| = (x - 1)^2 - 4$ dengan menggunakan sifat nilai mutlak dan pertaksamaan diperoleh sebagai berikut:

$$-3 \leq x - 1 \leq 1$$

$$0 \leq (x - 1)^2 \leq 9$$

$$-4 \leq (x - 1)^2 - 4 \leq 5$$

$$-5 \leq -4 \leq x^2 - 2x - 3 \leq 5$$

$$|x^2 - 2x - 3| \leq 5$$

dengan menggunakan hasil ini diperoleh

$$\left| \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 4} \right| \leq \frac{1}{3} |x^2 - 2x - 3| \leq \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3} \text{ (terbukti)}$$

Contoh 5:

Andaikan ε suatu bilangan positif, carilah bilangan positif δ sedemikian hingga

$$|x - 4| < \delta \Leftrightarrow |5x - 20| < \varepsilon$$

Penyelesaian:

$$|5x - 20| < \varepsilon \Leftrightarrow |5(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 5|x - 4| < \varepsilon \quad (|ab| = |a| |b|)$$

$$|x - 4| < \varepsilon / 5$$

dengan memilih $\delta = \varepsilon / 5$ secara mundur terlihat bahwa
 $|x - 4| < \delta \Rightarrow |5x - 20| < \varepsilon$

Soal-soal Latihan 3:

Carilah himpunan penyelesaian soal-soal No. 1 hingga 20 dari pertaksamaan yang diberikan

- 1) $|x - 3| < 5$
- 2) $|x + 4| < 7$
- 3) $|3x - 4| > 8$
- 4) $|2x + 6| < 9$
- 5) $|x - 4| \leq 2$
- 6) $|2 - 3x| \geq 14$
- 7) $|x + 1/2| \geq 7$
- 8) $|x/3 - 9| \leq 15$
- 9) $|\frac{2x}{5} + 9| \geq 18$
- 10) $|\frac{x}{3} + 6| \geq 12$
- 11) $|\frac{x}{3} - 9| \leq 27$
- 12) $|\frac{3}{x} - 6| \geq 23$
- 13) $|\frac{3}{2x} - 4| \geq 15$

$$14) \left| \frac{1}{x} - 1 \right| \geq 17$$

$$15) \left| \frac{2}{x} - \frac{3}{8} \right| \leq 19$$

$$16) \left| \frac{x}{3} - \frac{3}{7} \right| \geq 14$$

$$17) \left| \frac{x}{3} - \frac{3}{8} \right| \leq 11$$

$$18) \left| \frac{2x}{7} - \frac{3}{8} \right| \geq 16$$

$$19) \left| \frac{3x}{7} - 6 \right| \leq \frac{1}{5}$$

$$20) \left| \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{5}{8}$$

Selesaikan soal-soal No. 21 hingga 30 dengan menggunakan rumus kuadrat.

$$21) 2x^2 - 5x - 4 \leq 0$$

$$22) 3x^2 + x - 1 > 0$$

$$23) 4x^2 + x - 2 > 0$$

$$24) x^2 - 5x - 4 \leq 0$$

$$25) 2x^2 - 2x - 5 \leq 0$$

$$26) 2x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$27) 6x^2 + 23x + 21 \geq 0$$

$$28) -x^2 - 4x + 5 \leq 0$$

$$29) 2x^2 - 3x + 8 \leq 0$$

$$30) x^2 + 2x + 10 \leq 0$$

Buktikan soal-soal No. 31 hingga 35, mempunyai implikasi yang ditunjukkan adalah benar

$$31) |x - 3| < 0.5 \Rightarrow |4x - 12| < 1.5$$

$$32) |x + 2| < 2 \Rightarrow |2x + 4| < 8$$

$$33) |x + 3| < 0.3 \Rightarrow |3x + 9| < 0.9$$

$$34) |x - 5| < 1.5 \Rightarrow |2x - 10| < 3.0$$

$$35) |x + 6| < 1.3 \Rightarrow |2x - 12| < 2.6$$

Carilah δ (tergantung pada ε) untuk soal-soal No. 36 hingga 40 sedemikian hingga implikasi yang diberikan adalah benar.

$$36) \quad |x-3| < \delta \Rightarrow |5x-15| < \varepsilon$$

$$37) \quad |x+2| < \delta \Rightarrow |6x+12| < \varepsilon$$

$$38) \quad |x+3| < \delta \Rightarrow |7x+21| < \varepsilon$$

$$39) \quad |x-7| < \delta \Rightarrow |2x-14| < \varepsilon$$

$$40) \quad |x-3| < \delta \Rightarrow |5x-25| < \varepsilon$$

Selesaikanlah soal-soal No. 41 hingga 45

$$41) \quad |3x+6| < |2x-8|$$

$$42) \quad |5x+6| \leq |2x-8|$$

$$43) \quad 2|3x+7| \geq |x-3|$$

$$44) \quad |x+5| \leq 3|x-7|$$

$$45) \quad |2x+1| \geq 3|x-9|$$

$$46) \quad x|x| \geq |x-2|$$

$$47) \quad ||x| + x| \geq 2$$

$$48) \quad 2|x-1|^2 - |x-1| \leq 1$$

$$49) \quad x|x-1| \leq 6/|x+1|$$

$$50) \quad \text{Jika } |x| \leq 2, \text{ buktikan } \left| \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x + 2} \right| \leq 20$$

1.4 Sistem Koordinat Cartesius

Rene Descartes dikenal sebagai ahli filsafat modern pertama yang terbesar dan juga ahli biologi modern, fisika dan matematika. *Descartes* lahir di *Touraine* Perancis, putra dari seorang ahli hukum. Orang tuanya berharap *Descartes* menjadi orang yang bermanfaat dalam hidupnya dan mengirimnya untuk menggali ilmu di sekolah Jesuit pada umur 8 tahun. Karena kesehatannya kurang baik ia diperkenankan meng-habiskan waktu paginya untuk belajar di tempat tidur. Pada umur 20 tahun mendapat gelar

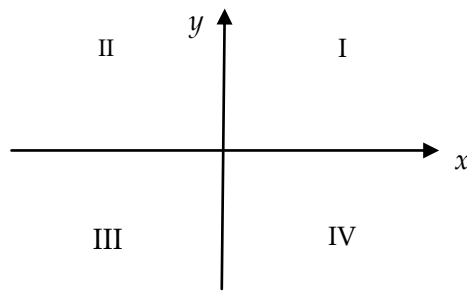
Sarjana Hukum. Selanjutnya menjalani dinas militer beberapa tahun dan tinggal di Paris kemudian pindah ke Belanda.

Rene *Descartes* menyelidiki suatu metode berpikir umum yang pada akhirnya memberikan pertalian pada pengetahuan dan menuju kebenaran ilmu-ilmu. Penyelidikan tersebut mengantarkannya ke matematika yang disimpulkan sebagai sarana pengembangan kebenaran disegala bidang. Karya matematikanya yang paling terkenal dan digunakan oleh para ahli sebagai literatur adalah *La Geometry* yang diterbitkan pada tahun 1637. Rene *Descartes* mencoba menggabungkan teori-teori geometri dengan aljabar yang masih baru lahir. Bersama orang Perancis *Piere Fermat* (1602 – 1665) mengembangkan geometri analitik yang di dalam pembahasannya mengemukakan tentang koor-dinat yang dinamakan dengan Koordinat Cartesius yang di-namakan menurut nama Rene *Descartes*.

Sistem Koordinat Cartesius dalam bidang terdiri dari dua garis bilangan real satu mendatar dan satu vertikal yang berpotongan pada titik nol. Garis mendatar dinamakan sumbu absis (sumbu x) dan garis vertikal dinamakan sumbu ordinat (sumbu y) dan perpotongan kedua sumbu tersebut dinamakan dengan pusat koordinat. Menurut perjanjian koordinat cartesius membagi bidang menjadi empat bagian yang disebut dengan kuadran. Kuadran I daerah yang dibatasi sumbu x positif (dari pusat ke kanan) dan sumbu y yang positif (dari pusat ke atas). Kuadran II dibatasi oleh sumbu y positif dan sumbu x negatif (dari pusat ke kiri), kuadran III dibatasi oleh sumbu x negatif dan sumbu y negatif (dari pusat ke bawah), kuadran IV dibatasi oleh sumbu x positif dan sumbu y negatif. Perhatikan gambar 1.16.

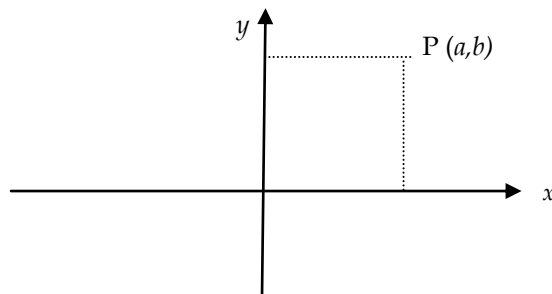
Salah satu kegunaan koordinat cartesius adalah untuk menentukan posisi suatu benda yang dinyatakan sebagai titik. Pada gambar di bawah terlihat bahwa titik P masing-masing memotong sumbu x dan sumbu y di a dan b , maka titik P

mempunyai koordinat (a,b) ditulis $P(a,b)$. Kita sebut (a,b) suatu pasangan terurut bilangan-bilangan karena akan berbeda jika urutannya dibalik. Bilangan pertama a adalah koordinat x disebut dengan *absis*, koordinat kedua b adalah koordinat y disebut dengan *ordinat*.



Gambar 1.16: Daerah Kuadran

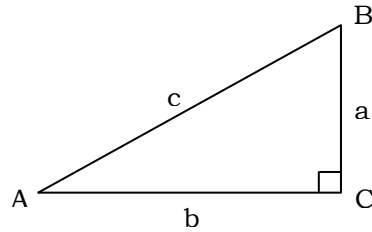
Sebaliknya jika diambil sebarang pasangan terurut (a,b) , maka garis tegak yang melalui a pada sumbu x dan garis mendatar yang melalui b pada sumbu y berpotongan di titik P yang koordinatnya adalah (a,b) . Perhatikan gambar 1.17



Gambar 1.17: Posisi suatu Titik

1.4.1 Rumus Jarak

Perhatikan segitiga siku-siku ABC seperti gambar 1.18

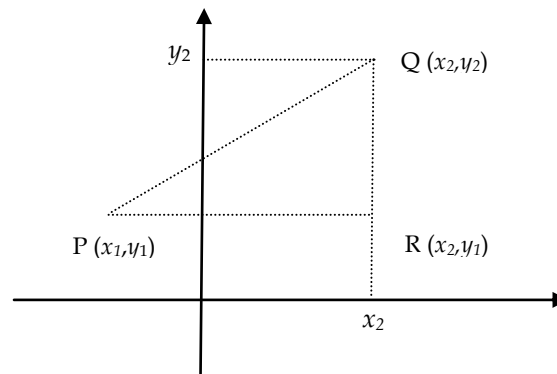


Gambar 1.18: Segitiga Siku-siku

Pada segitiga siku-siku di atas berlaku teorema *Pythagoras* yang mengatakan jika a dan b merupakan ukuran sisi siku-siku dan c merupakan ukuran sisi miring maka:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Melalui koordinat pada suatu diagram cartesius dapat diperkenalkan sebuah rumus sederhana untuk menentukan jarak antara dua titik melalui pendekatan segitiga siku-siku. Perhatikan gambar 1.8



Gambar 1.19: Posisi suatu Titik

Perhatikan dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ sebagaimana gambar 1.8. Misalkan $R(x_2, y_1)$, maka P , Q dan R membentuk segitiga siku-siku di R dengan $PR = |x_2 - x_1|$ dan $QR = |y_2 - y_1|$. Karena segitiga yang terbentuk adalah segitiga siku-siku, maka

berlaku teorema *pythagoras*, dimana sisi miring segitiga tersebut adalah PQ (jarak antara titik P dan Q).

$$\begin{aligned}PQ^2 &= PR^2 + QR^2 \\&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$

rumus ini disebut dengan rumus jarak (jarak antara dua titik)

Contoh:

Tentukan jarak antara

- a. P (2,3) dan Q (4,8)
- b. P (-2,10) dan Q(1,4)

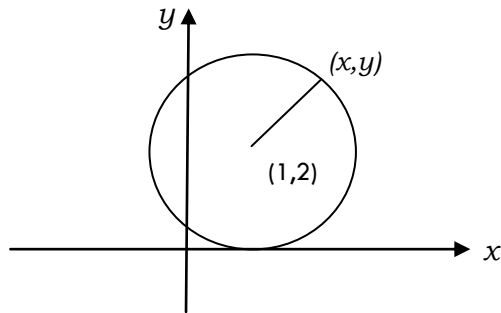
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{a. } PQ &= \sqrt{(4-2)^2 + (8-3)^2} \\&= \sqrt{(2)^2 + (5)^2} \\&= \sqrt{4+25} \\&= \sqrt{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b. } PQ &= \sqrt{(1+2)^2 + (4-10)^2} \\&= \sqrt{(3)^2 + (-6)^2} \\&= \sqrt{9+36} \\&= \sqrt{45}\end{aligned}$$

1.4.2 Persamaan Lingkaran

Secara definisi, lingkaran adalah himpunan titik-titik yang mempunyai jarak yang sama (jari-jari) dari titik tertentu (titik pusat lingkaran). Misalkan sebuah lingkaran yang berjari-jari 2 dan ber-pusat dititik (1,2) sebagaimana gambar berikut :



Gambar 1.20: Lingkaran

Misalkan titik (x, y) terletak pada lingkaran, maka jarak antara titik (x, y) ke pusat lingkaran (sama dengan jari-jari) dapat dinyatakan sebagai jarak antara dua titik yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} &= 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 9\end{aligned}$$

Persamaan tersebut dinamakan persamaan lingkaran tersebut diatas. Secara umum lingkaran yang berjari-jari r dan titik pusatnya (a, b) mempunyai persamaan:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Contoh 1:

Carilah persamaan lingkaran berjari-jari 4 dan titik pusatnya $(2, 3)$, dan cari koordinat x jika koordinat $y = 2$.

Penyelesaian:

Persamaan lingkaran yang diminta adalah:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 4^2 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

untuk mencari koordinat x kita substitusikan harga $y = 2$ dalam persamaan tersebut:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (2 - 3)^2 &= 16 \\(x - 2)^2 + 1 &= 16 \\(x - 2)^2 &= 16 - 1 \\(x - 2)^2 &= 15 \\x &= -2 \pm \sqrt{15}\end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan apakah persamaan berikut adalah persamaan lingkaran, jika ya tentukan pusat dan jari-jarinya.

$$x^2 + 2x - 10y + y^2 + 25 = 0$$

Penyelesaiannya:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 10y + y^2 + 25 &= 0 \\x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 &= 1 \\(x + 1)^2 + (y - 5)^2 &= 1\end{aligned}$$

berdasarkan bentuk terakhir tersebut dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan lingkaran yang berjari-jari 1 dan pusatnya $(-1, 5)$

Contoh 3:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 &= 0 \\x^2 + y^2 + x - 3y + 1/4 &= 0 \text{ (dikalikan } 1/4) \\x^2 + x + 0.25 + y^2 - 3y + 2.25 &= 2.25 \\(x + 0.5)^2 + (y - 1.5)^2 &= 2.25\end{aligned}$$

berdasarkan persamaan terakhir dapat diketahui bahwa pusat lingkaran di $(-0.5, 1.5)$ dan jari-jarinya $\sqrt{2.25} = 1.5$.

1.4.3 Jarak Titik ke Garis

Jarak titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Rumus tersebut dapat dikemukakan melalui bentuk umum persamaan garis lurus sebagaimana diatas adalah

$$Ax + By + C = 0$$

dan titik $P(x_1, y_1)$, maka $Bx - Ay - (Bx_1 - Ay_1) = 0$ adalah garis yang tegak lurus dengan garis yang diketahui dan melalui $P(x_1, y_1)$, kedua garis berpotongan di titik Q dengan

$$Q\left(-\frac{AC - B^2x_1 + AB y_1}{A^2 + B^2}, -\frac{BC + ABx_1 - A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)$$

dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, maka diperoleh panjang $d = PQ$ adalah.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(x_1 + \frac{AC - B^2x_1 + AB y_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{BC + ABx_1 - A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{A^2x_1 + AC + AB y_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B^2y_1 + BC + ABx_1}{A^2 + B^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(A^2 + B^2)\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Contoh 1:

Tentukan jarak titik (2,5) ke garis $3x - 4y + 1 = 0$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\&= \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\&= \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Soal-soal Latihan 4:

Tandailah titik-titik pada bidang koordinat, soal-soal No. 1 hingga 10, kemudian carilah jarak antara titik-titik tersebut

- 1) (2,1), (5,3)
- 2) (-2,1), (7,13)
- 3) (4,2), (2,4)
- 4) (-1,5), (6,3)
- 5) (0,1), (3,5)
- 6) (-2,-3), (-1,8)
- 7) (4,5), (1,7)
- 8) (4,-1), (1,4)
- 9) (1,232), (4,153)
- 10) (2,71;4,33)
- 11) Buktikan bahwa segitiga yang memiliki titik-titik sudut (5,3), (-2,4) dan (10,8) adalah segitiga sama kaki (Purcell, 2004)
- 12) Tunjukkan bahwa segitiga yang memiliki titik-titik sudut (1, 5), (5,0), (1,0) adalah segitiga siku-siku.
- 13) Diketahui titik-titik (2,5) dan (4,9) adalah titik-titik sudut suatu bujur sangkar. Berikan tiga pasang titik-titik sudut lain yang mungkin.
- 14) Carilah titik pada sumbu x yang berjarak sama dari (2,3) dan (8,2)

- 15) Titik tengah ruas garis yang menghubungkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) mempunyai koordinat $[(x_1, x_1)/2, (y_2, y_2)/2]$. Carilah jarak antara titik (4,6) dengan titik tengah ruas garis yang menghubungkan (1, -2) dan (8,10)
- 16) Carilah panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah ruas garis AB dan CD dimana A(2,4), B(4,9), C(1,5) dan D(3,6)

Carilah pusat dan jari-jari lingkaran untuk soal-soal No. 17 hingga 25

- 17) $x^2 + y^2 = 25$
- 18) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$
- 19) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
- 20) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
- 21) $x^2 + y^2 = 64$
- 22) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 12$
- 23) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 6$
- 24) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 12$
- 25) $(x - 1)^2 + y^2 = 3$

Carilah persamaan lingkaran soal-soal No. 26 hingga 35 yang memenuhi persyaratan yang diberikan.

- 26) Pusat (3,-2) jari-jari = 4
- 27) Pusat (1,-2) jari-jari = 6
- 28) Pusat (-3,4) jari-jari = 8
- 29) Pusat (2,-1) jari-jari = $\sqrt{8}$
- 30) Pusat (5,9) menyinggung sumbu x positif
- 31) Pusat (-4,3) menyinggung sumbu y positif
- 32) Pusat (2,4) melalui pusat koordinat
- 33) Pusat (1,-1) melalui (4,3)
- 34) Pusat (4,3) melalui (6,2)
- 35) Mempunyai titik-titik berhadapan diametral (-1,2) dan (3,8)

Carilah pusat dan jari-jari lingkaran soal-soal No. 36 hingga 46

- 36) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
- 37) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

- 38) $x^2 + y^2 - 10x + 30 = 0$
 39) $x^2 + y^2 - 18x + 18y = 0$
 40) $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 20/3 = 0$
 41) $x^2 + y^2 + 8x + 8 = 0$
 42) $6x^2 + 6y^2 - 6x + 6y = 3$
 43) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
 44) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 20 = 0$
 45) $16x^2 + 16y^2 + 40x + 16y - 7 = 0$
 46) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y - 9 = 0$
 47) Titik-titik (1,4), (6,4), (6,-2) dan (1,-2) adalah titik-titik sudut suatu bujur sangkar. Carilah persamaan-persamaan lingkaran dalam dan luar.
 48) Sebuah benang mengelilingi dua lingkaran dengan persamaan $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ dan $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 12$, tentukan panjang benang tersebut
 49) Carilah persamaan lingkaran yang melingkupi segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (1,0), (8,3) dan (4,6).
 50) Perlihatkan bahwa dua lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ tidak berpotongan (Petunjuk: cari jarak antara pusat-pusatnya). (Purcell, 2004)

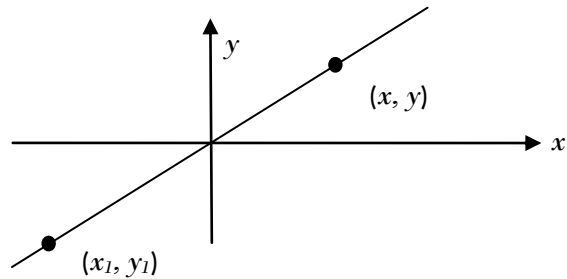
1.5 Garis Lurus

1.5.1 Persamaan Garis Lurus yang melalui Sebuah Titik dengan Kemiringan m

Sebuah garis yang mempunyai kemiringan m dan melalui titik (x_1, y_1) mempunyai persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$



Gambar 1.21: Grafik $y = m x$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis yang melalui $(1, 2)$ yang mempunyai kemiringan 3

Penyelesaian:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 2 = 3 (x - 1)$$

$$y - 2 = 3x - 3$$

$$3x - y - 1 = 0$$

Gradien garis yang sejajar dengan sumbu x dapat dilakukan dengan rumus tersebut dengan gradien nol dan menghasilkan $y - y_1 = 0$, sedangkan untuk garis vertikal tidak dapat dipresentasikan dengan bentuk titik-kemiringan, sebab tidak mempunyai kemiringan. Jika (x_1, y_1) adalah salah satu titik di garis vertikal, maka setiap titik (x, y) dengan $x = x_1$ atau $x - x_1 = 0$ berada pada garis vertikal tersebut.

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis vertikal yang melalui $(3, 7)$.

Penyelesaian:

Karena absis titik yang diketahui adalah 3, maka semua titik yang berada pada garis tersebut mempunyai absis 3. Jadi $x = 3$ atau $x - 3 = 0$

1.5.2 Persamaan Garis lurus dengan Kemiringan m dan Memotong Sumbu- y di Titik $(0,b)$

Menggunakan rumus $y - y_1 = m(x - x_1)$, dan menggantikan $x_1 = 0$ dan $y_1 = b$ dengan kemiringan m diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang mempunyai kemiringan -4 dan memotong sumbu- y di titik $(0,7)$

Penyelesaian:

$$y = mx + b$$

$$y = -4x + 7$$

$$2x - y + 5 = 0$$

1.5.3 Persamaan Garis Lurus melalui Dua Titik $(x_1 - y_1)$ dan $(x_2 - y_2)$

Sebuah garis yang melalui $(x_1 - y_1)$ dan $(x_2 - y_2)$, $x_1 \neq x_2$ mempunyai persamaan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis yang melalui $(2,1)$ dan $(5,3)$.

Penyelesaian:

Menggunakan rumus di atas diperoleh persamaan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{5-2} (x - 2)$$

$$y - 1 = 2/3 (x - 2)$$

$$3y - 3 = 2x - 4$$

$$2x + 3y + 1 = 0$$

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dari ruas garis yang menghubungkan titik (5,2) dengan (3,6) dan melalui titik tengah ruas garis tersebut.

Penyelesaian:

Pertama kita cari titik tengah segmen garis tersebut.

$$x = \frac{3-5}{2} = -1; y = \frac{6-2}{2} = 2$$

Jadi titik tengah ruas garis tersebut adalah (-1, 2).

Kemiringan dari ruas garis yang menghubungkan titik (5, 2) dan (3, 6) adalah

$$m = \frac{6-2}{3-5} = -\frac{4}{2} = -2$$

sehingga ukuran kemiringan garis yang tegak lurus adalah $m = 1/2$

Menggunakan rumus $y - y_1 = m (x - x_1)$, dengan mensubsitusi titik (5, 2) dengan cara mengambil salah satu titik dari dua buah titik yang diketahui dan $m = 1/2$ diperoleh persamaan garis sebagai berikut:

$$y - 2 = 1/2 (x - 5)$$

$$2y - 4 = x - 5$$

$$-x + 2y + 1 = 0$$

1.5.4 Persamaan Garis yang Memotong Sumbu- x di $(a,0)$ dan Sumbu- y di $(0,b)$

Menggunakan rumus persamaan garis melalui dua titik dapat ditentukan persamaan garis yang memotong sumbu x di $(a,0)$ dan memotong sumbu y di titik $(0,b)$ sebagai berikut :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{-a} + 1$$

$$\frac{y}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang memotong sumbu- x di titik $(6,0)$ dan sumbu- y di titik $(0,3)$

Penyelesaian:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$-3x + 6y = -18$$

$$-3x + 6y + 18 = 0$$

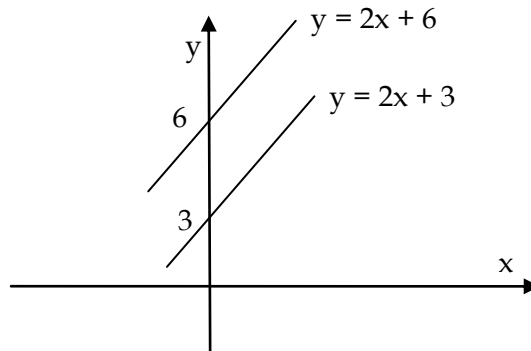
Berdasarkan beberapa cara membentuk persamaan garis lurus sebagaimana tersebut diatas dapat dituliskan bentuk umum persamaan garis lurus sebagai berikut:

$Ax + By + C = 0$, A dan B keduanya tidak sama dengan nol.

Untuk membuat sketsa garis tersebut dapat dilakukan dengan mengambil titik-titik potong dengan sumbu koordinat, kemudian menghubungkan kedua titik itu sebagai garis lurus.

1.5.5 Garis-garis sejajar

Jika ada dua garis yang mempunyai kemiringan sama, maka kedua garis tersebut sejajar. Perhatikan grafik dua garis $y = 2x + 3$ dan $y = 2x + 6$ berikut :



Gambar 1.22: Dua Garis Sejajar

Contoh 1:

Carilah persamaan garis yang melalui $(3, 7)$ dan sejajar dengan garis yang mempunyai persamaan $2x - 6y - 15 = 0$

Penyelesaian:

$$2x - 6y - 15 = 0$$

$$-6y = -2x + 15$$

$$y = (1/3)x + (15/-6)$$

Berdasarkan persamaan terakhir diketahui bahwa garis tersebut mempunyai kemiringan $1/3$, sehingga persamaan garis yang dicari juga mempunyai kemiringan $1/3$. Dengan menggunakan rumus $y - y_1 = m(x - x_1)$ diperoleh:

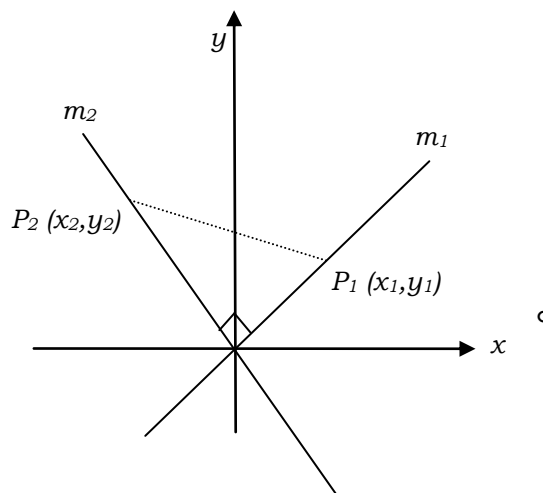
$$y - 7 = 1/3 (x - 3)$$

$$3y - 21 = x - 3$$

$$x - 3y + 18 = 0$$

1.5.6 Garis-garis tegak lurus

Bagaimana persyaratan yang harus dipenuhi untuk mengetahui bahwa kedua garis adalah tegak lurus? untuk menjawab pertanyaan tersebut perhatikan dua garis tegak lurus sebagaimana di bawah ini.



Gambar 1.23: Dua Garis Tegak lurus

Perhatikan sebagaimana tertera pada gambar diatas bahwa titik $P_1(x_1, y_1)$ terletak pada garis m_1 , sedangkan titik $P_2(x_2, y_2)$ terletak pada garis m_2 . dimana titik-titik P_1 , P_2 dan O merupakan titik sudut segitiga siku-siku P_1, P_2O , dengan menggunakan teorema *Pythagoras* diperoleh :

$$P_1O^2 + P_2O^2 = P_1P_2^2$$

sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 + (\sqrt{x_2^2 + y_2^2})^2 &= (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2})^2 \\
 x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 \\
 x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 &= x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_2y_1 + y_2^2 \\
 x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 &= x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_2y_1 + y_2^2 \\
 \frac{y_1}{x_1} &= -\frac{x_2}{y_2}
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa y_1/x_1 adalah kemiringan dari garis m_1 sedangkan y_2/x_2 adalah kemiringan dari garis m_2 , sehingga dapat dikatakan bahwa jika dua garis adalah berpotongan tegak lurus, maka kemiringannya adalah saling berbalikan negatif.

Contoh 1:

Carilah persamaan garis yang melalui (-4,2) dan (6,-1)

Penyelesaian:

Kemiringan garis yang melalui (-4,2) dan (6,-1) adalah $(-1 - 2)/(6 + 4) = -3/10$, dengan menggunakan titik (-4,2) sebagai titik tetap diperoleh persamaan garis

$$y - 2 = -3/10 (x + 4)$$

Contoh 2:

Carilah persamaan garis yang melalui (6, 8) yang sejajar dengan garis yang mempunyai persamaan $6x - 2y - 8 = 0$.

Penyelesaian:

Garis dengan persamaan $6x - 2y - 8 = 0$, mempunyai gradien $6/2 = 3$. Jika titik tetap yang dilalui garis tersebut adalah (6, 8), maka persamaannya adalah

$$y - 8 = 3 (x - 6) \text{ atau dapat dituliskan dengan } y - 3x + 10 = 0$$

Contoh 3:

Carilah persamaan garis yang melalui titik (7, 8) dan tegak lurus dengan garis yang mempunyai persamaan $2x - 5y - 9 = 0$.

Penyelesaian:

Garis dengan persamaan $2x - 5y - 9 = 0$ mempunyai gradien $2/5$, sehingga garis yang tegak lurus dengannya mempunyai

Gradient $-5/2$, sebab dua garis saling tegak lurus perkalian kedua gradiennya sama dengan -1 . Jika titik yang dilalui adalah (7,8), maka persamaan garis yang dimaksud adalah:

$$y - 8 = -5/2 (x - 7) \text{ atau dapat dituliskan dengan } 2y + 5x - 43 = 0$$

Soal-soal Latihan 5:

Cari kemiringan dari garis yang melalui dua titik yang diberikan dalam soal-soal No. 1 hingga 15.

- 1) (2,3) dan (4,8)
- 2) (4,1) dan (8,2)
- 3) (-4,2) dan (3,0)
- 4) (2,-4) dan (0,6)
- 5) (5,-3) dan (-7,8)
- 6) (-8,7) dan (3,-1)
- 7) (3,0) dan (0,5)
- 8) (-6,0) dan (0,6)
- 9) (7,8) dan (9,1)
- 10) (-11,8) dan (2,5)
- 11) (-14,9) dan (11,13)
- 12) (9,1) dan (-5,8)
- 13) (10,-2) dan (-1,0)
- 14) (-1,732;5,014) dan (4,315;6,175)
- 15) (2,71;3,72) dan (1,78;-3,45)

Tentukan persamaan garis yang melalui titik yang diberikan dan kemiringan yang diketahui untuk soal-soal No. 16 hingga 25.

- 16) $(-2, 1); m = 3$
- 17) $(5, 1); m = -4$
- 18) $(2, 3); m = -2$
- 19) $(0, 0); m = 1$
- 20) $(0, -2); m = -4$
- 21) $(-3, 1); m = 0$
- 22) $(-4, -5)$ tidak mempunyai kemiringan
- 23) $(-4, 6)$ tegak lurus dengan sumbu x
- 24) $(3, -7)$ sejajar dengan sumbu y
- 25) $(-1, 8)$ tegak lurus dengan sumbu y
- 26) Tentukan persamaan sisi-sisi segitiga yang mempunyai titik-titik sudutnya $(1, 5)$, $(3, 2)$, dan $(-1, -4)$.
- 27) Tentukan persamaan garis tengah dari segitiga soal no. 26.
- 28) Tentukan persamaan garis tinggi dari segitiga soal no. 26.
- 29) Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan $4x - y + 1 = 0$ dan melalui titik $(2, 8)$.
- 30) Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan $3x + 2y - 6 = 0$ dan memotong sumbu- x dititik $(3, 1)$.
- 31) Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan $5x + 7y + 5 = 0$ dan memuat titik $(3, -2)$
- 32) Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $7x + 11y - 2 = 0$ dan memotong sumbu- y dititik $(0, 6)$.
- 33) Tentukan persamaan garis yang mempunyai kemiringan m dan memotong sumbu- y dititik $(0, a)$.
- 34) Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $2x - 3y = 2$ dan $3x + 6y = -1$ yang memenuhi :
 - a. Sejajar garis dengan persamaan $x - 6y = 5$
 - b. Tegak lurus garis dengan persamaan $2x - 3y = 8$
 - c. Sejajar sumbu x
 - d. Tegak lurus sumbu x
- 35) Tuliskan persamaan garis yang melalui $(0, -6)$ dan tegak lurus garis dengan persamaan $y + 3 = (-1/3)(x - 1)$
- 36) Cari nilai k sedemikian sehingga garis $kx - 3y = 10$
 - a. Sejajar garis $y = 2x + 5$

- b. Tegak lurus garis $y = 2x + 5$
 - c. Tegak lurus garis $2x + 3y = 7$
- 37) Apakah titik $(3,10)$ terletak di atas atau di bawah garis $y = 3x - 1$

Cari koordinat titik potong, kemudian tuliskan persamaan garis yang melalui titik tersebut dan tegak lurus pada garis yang dituliskan pertama untuk soal-soal No. 38 hingga 45

- 38) $2x + y = 6$
 $-3x + y = 7$
- 39) $6x - 5y = 18$
 $2x + 3y = -3$
- 40) $3x - 4y = 8$
 $2x + 5y = 7$
- 41) $5x - 3y = 9$
 $8x + 3y = 2$
- 42) $2x - 3y = 9$
 $-x + 5y = 3$
- 43) $2x + 3y = 4$
 $-6x + y = 9$
- 44) $-2x + y = 5$
 $-3x + 2y = 4$
- 45) $x - 3y = 3$
 $-3x + 4y = 5$
- 46) Pengalaman menunjukkan bahwa produksi telur di daerah R tumbuh secara linier. Pada tahun 2005 produknya sebanyak 700.000 peti, pada tahun 2015 produknya sebanyak 820.000 peti. Tuliskan rumus (y) yang menyatakan banyaknya peti telur yang diproduksi (x) tahun setelah tahun 2005 dan gunakan rumus tersebut untuk memprediksi telur pada tahun 2025 (Purcell, 2004)
- 47) Buktikan bahwa grafik dari $Ax + By + C = 0$ selalu berupa sebuah garis (asalkan A, B keduanya tidak sama dengan 0). (Petunjuk: pandang dua kasus $B=0$, dan $B \neq 0$)

- 48) Cari persamaan garis yang melalui $(2, 5)$ yang mempunyai perpotongan dengan sumbu- x dan sumbu- y sama.
- 49) Perlihatkan bahwa untuk setiap nilai k persamaan garis $2x - y + 4 + k(x + 3y - 6) = 0$ menyatakkan sebuah garis yang melalui perpotongan dua garis $2x - y + 4 = 0$ dan $x + 3y - 6 = 0$ (petunjuk, tidak perlu mencari titik potong kedua garis) (Purcell, 2004)
- 50) Cari persamaan garis yang membagi dua ruas garis dari $(-2, 3)$ ke $(4, -3)$ dan yang bersudut siku-siku terhadap ruas garis ini.

1.6 Grafik Persamaan

Grafik suatu persamaan dalam x dan y terdiri dari titik-titik di bidang yang koordinat-koordinatnya (x, y) memenuhi. Untuk menggambarkan suatu persamaan dapat digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukanlah koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan.
2. Tandailah titik-titik tersebut pada bidang Cartesius.
3. Hubungkanlah titik-titik tersebut dengan sebuah kurva.

Cara terbaik untuk melakukan langkah pertama adalah membuat sebuah tabel nilai-nilai. Berikan nilai-nilai pada salah satu peubah misalnya x dan tentukanlah nilai-nilai yang berpadanan dari peubah lainnya, dengan mendaftarkan hasil-hasil yang tersusun dalam tabel.

1.6.1 Kesimetrisan Grafik Persamaan

Penggambaran grafik persamaan mendekati grafik yang sebenarnya dapat juga dengan bantuan melihat kesimetrisan grafik persamaan.

Kesimetrisan sebuah grafik dapat diperhatikan hal-hal seperti berikut:

1. Grafik persamaan dikatakan simetris terhadap sumbu y jika penggantian x oleh $-x$ menghasilkan suatu persamaan yang setara.
2. Grafik persamaan dikatakan simetri terhadap sumbu- x jika penggantian y oleh $-y$ menghasilkan suatu persamaan yang setara.

3. Grafik persamaan dikatakan simetri terhadap titik asal jika penggantian x oleh $-x$, y oleh $-y$ menghasilkan suatu persamaan yang setara.

Contoh:

1. Grafik $y = x^2 - 9$ sebagaimana tertera pada contoh simetri terhadap sumbu- y , sebab jika x diganti dengan $-x$, diperoleh $y = (-x)^2 - 9$, setara dengan $y = x^2 - 9$.
2. Grafik $x = y^2 + 4$ simetri terhadap suatu sumbu- x , sebab jika y diganti dengan $-y$, diperoleh $x = (-y)^2 + 4$, setara dengan $x = y^2 + 4$.
3. Grafik $y = x^3$ simetri terhadap titik asal, sebab jika y diganti dengan $-y$, x diganti dengan $-x$, setara dengan $y = x^3$.

1.6.2 Perpotongan

Penggambaran grafik persamaan dapat juga dengan menentukan titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat.

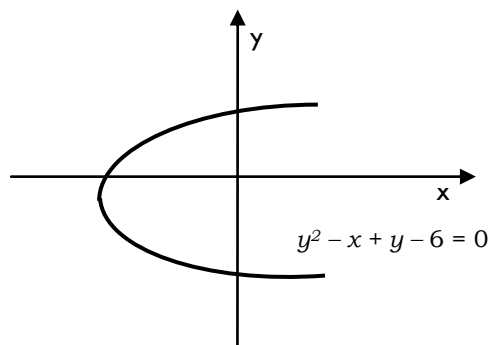
Contoh:

Gambarlah grafik persamaan $y^2 - x + y - 6 = 0$ dengan memperlihatkan semua perpotongan terhadap sumbu-sumbu koordinat.

Penyelesaian:

Sketsa grafik dicari terlebih dahulu melalui perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

- a) Memotong sumbu x jika $y = 0$ diperoleh $x = -6$, jadi titik potong dengan sumbu x adalah $(-6, 0)$.
- b) Memotong sumbu y jika $x = 0$ diperoleh;
$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$
$$y = -3 \text{ atau } y = 2$$
jadi titik potong dengan sumbu y adalah $(0, -3)$ dan $(0, 2)$
- c) Pemeriksaan kesimetrian menunjukkan bahwa grafik tersebut tidak memenuhi ketiga kriteria simetri sebagaimana syarat di atas, sehingga grafik persamaannya dapat diperlihatkan sebagai berikut :



Gambar 1.24: Grafik Fungsi $x = y^2 + y - 6$

Soal-soal Latihan 6:

Gambarlah grafik untuk soal-soal No. 1 hingga 35 dari persamaan yang diberikan, yang dapat dilakukan dengan memeriksa simetri dan perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

- 1) $y = -x^2 + 4$
- 2) $y = -x^2 - 4$
- 3) $x = -y^2 - 4$
- 4) $x = -y^2 + 4$
- 5) $x^2 + y^2 = 9$
- 6) $3x^2 + 4y = 0$
- 7) $y = 2x^2 - x$
- 8) $y = x^2 - 4x + 4$
- 9) $y = x^2 - 4x + 3$
- 10) $y = (x - 3)^2$
- 11) $y = (x + 3)^2$
- 12) $y = 2x^2 + 5x + 2$
- 13) $y = 2(x - 3)^2$
- 14) $y = 2x^2 + 8x + 6$
- 15) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

- 16) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$
- 17) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
- 18) $x^2 + (y - 2)^2 = 25$
- 19) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- 20) $9x^2 + 4y^2 = 36$
- 21) $16x^2 + y^2 = 16$
- 22) $y = x^3 - 3x$
- 23) $y = x^3 - 1$
- 24) $x^3 - y^2 = 0$
- 25) $x^4 + y^4 = 36$
- 26) $x^4 - y^4 = 16$
- 27) $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
- 28) $y = x(x - 3)(x + 1)$
- 29) $y = 3x(x - 3)^2$
- 30) $y = x^2(x - 4)$
- 31) $y = x^2(x + 1)(x - 4)$
- 32) $|x| + |y| = 4$
- 33) $2|x| - 4|y| = -2$
- 34) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } x < -3 \\ x^2, & \text{jika } x \geq -3 \end{cases}$
- 35) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x < 0 \\ x^2, & \text{jika } 0 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, & \text{jika } x > 4 \end{cases}$

Gambarlah sketsa grafik dari kedua persamaan pada bidang koordinat yang sama untuk soal-soal No. 36 hingga 44

- 36) $x + y = 2$
 $y = x^2 + 2x + 1$
- 37) $x + y = 5$
 $y = -x^2 + 2x + 4$

- 38) $2x + y = 3$
 $y = -x^2 - x + 3$
- 39) $3x + y = 12$
 $y = 3x^2 - 3x + 12$
- 40) $-1,5x + y = 3,2$
 $y = x^2 - 2,9x + 5$
- 41) $-2,1x = y = 3,3$
 $y = -1,2x^2 + 4,5$
- 42) $y - 4x = 3$
 $y^2 + x^2 = 5$
- 43) $y - 3x = 2$
 $y^2 + 2x + x^2 = 15$
- 44) $y = 2x$
 $y^2 + x^2 = 9$
- 45) Carilah jarak antara dua titik pada grafik $y = 3x^4 - 2x + 1$ dengan koordinat-koordinat x adalah -2 dan 2.
- 46) Carilah jarak antara titik-titik pada kurva $y = 3x^2 - 2x + 5$ yang berpadanan terhadap $x = 1$ dan $x = \pi$, teliti sampai dengan empat posisi deimal.
- 47) Tentukan kesimetrian dan sketsa grafik $y = 3^x + 3^{-x}$.
- 48) Tentukan kesimetrian dan sketsa grafik $y = 4^x - 4^{-x}$.
- 49) Sketsalah grafik $y = (1 + x^{3/2})/x$ untuk $0 < x \leq 12$ dengan membuat sebuah table nilai-nilai yang ekstensif (petunjuk, hati-hati dekat $x = 0$).
- 50) Tuliskan kembali soal no. 45 sebagai $y = 1/x + \sqrt{x}$ pada bidang koordinat yang sama dan kemudian menambahkan ordinat-ordinatnya.

Bab Dua

F u n g s i



www.google.com

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), menghasilkan karya yang terkenal *Cours d'Analyse* dan karya ini sudah sepatutnya dibaca oleh siapa saja yang mencintai ketelitian dalam penelitian matematika

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa dapat:

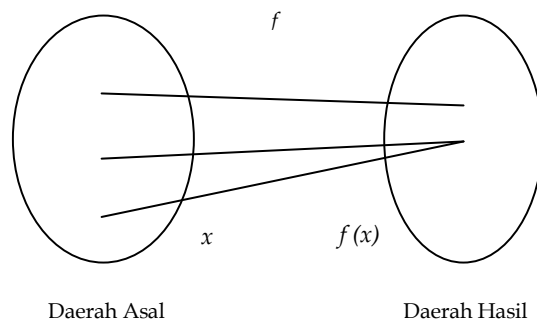
1. Memahami fungsi-fungsi yang ditinjau dari pemetaan, letak variabel, operasi fungsi, harga fungsi dan beberapa fungsi yang lain seperti fungsi periodik, fungsi homogen, fungsi invers.
2. Dapat menentukan daerah asal dan juga mencari daerah hasil
3. Memahami dan dapat menggambarkan grafik fungsi kuadrat, rasional, irrasional, mutlak, dan trigonometri

2.1 Pendahuluan

Aktivitas dalam mempelajari kalkulus diperlukan adanya pemahaman tentang fungsi dan berbagai sifatnya. Pengetahuan tentang fungsi mempunyai peranan penting dalam memahami objek tentang limit, kekontinuan dan turunan yang kesemuanya dibahas dan dikaji dalam Kalkulus 1.

2.1.1 Definisi Fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan yang disebut sebagai daerah asal dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah nilai fungsi tersebut. Perhatikan gambar 2.1.



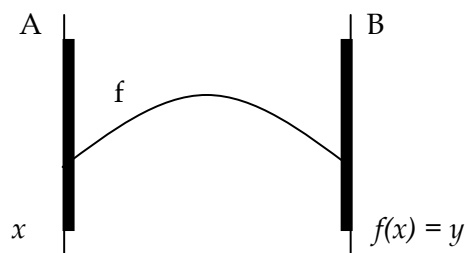
Gambar 2.1: Daerah Asal dan Daerah Hasil

Misalkan suatu fungsi yang mempunyai daerah asal A dan daerah hasil B dengan nama fungsi f dan aturan fungsinya $y = f(x)$ yang dapat ditulis:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow f(x) = y$$

yang berarti fungsi f memetakan unsur di A ke B dengan aturan fungsi $y = f(x)$, dalam hal ini x dinamakan variabel bebas dan y variabel tergantung (tidak bebas)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $y = f(x)$ dapat digambarkan dalam diagram anak panah sebagai berikut:



Gambar 2.2: Diagram Fungsi $f : A \rightarrow B$

Definisi tersebut menggunakan dasar pemetaan, sedangkan jika digunakan dasar pasangan terurut, maka definisi fungsi dapat dikemukakan sebagai berikut:

Jika f adalah fungsi dengan pasangan terurut, maka

$$f = \{(x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z, \forall x \in A\}$$

Berdasarkan aturan fungsi sebagai pemetaan diperoleh himpunan pasangan terurut, sedangkan dari himpunan pasangan terurut diperoleh aturan fungsi.

Setelah mengetahui definisi fungsi, perlu diketahui bagaimana cara menuliskannya. Pemberian nama fungsi biasanya dipakai huruf tunggal seperti f . Nilai yang diberikan f pada x dinotasikan dengan $f(x)$. Jika $f(x) = x^2 + 3$, maka

$$f(1) = 1^2 + 3 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 3 = 7$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

$$f(a) = a^2 + 3$$

$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 + 3$$

Contoh 1:

Diketahui $f(x) = x^2 - 3x$, cari dan sederhanakan:

- $f(2)$
- $f(2+h)$

- c. $f(2+h) - f(2)$
 d. $[f(2+h) - f(2)]/h$

Penyelesaian:

- a. $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$
 b. $f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2$
 c. $f(2+h) - f(2) = (h^2 + h - 2) - (-2) = h^2 + h$
 d. $[f(2+h) - f(2)] / h = (h^2 + h) / h = h + 1$

Contoh 2 :

Untuk $g(x) = 1/x$ cari dan sederhanakan
 $[g(a+h) - g(h)] / h$

Penyelesaian:

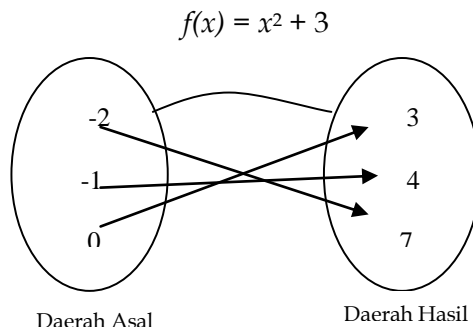
$$\begin{aligned} \frac{g(a+h) - g(h)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{(a+h)a}}{h} \\ &= \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2 + ah} \end{aligned}$$

2.1.2 Daerah Asal dan Daerah Hasil

Daerah asal adalah himpunan dari anggota-anggota sedemikian sehingga fungsi itu mempunyai nilai, daerah asal fungsi f ditulis D_f . Nama lain untuk daerah asal adalah domain, ranah atau daerah definisi. Daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai dari daerah asal yang dihasilkan oleh fungsi tersebut, daerah hasil dari fungsi f ditulis dengan lambang R_f . Nama lain untuk daerah hasil adalah daerah nilai, range atau jelajah.

Contoh 1:

Jika $f(x)$ adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x^2 + 3$ dan jika daerah asalnya adalah $\{-2, -1, 0\}$, maka daerah hasilnya adalah $\{3, 4, 7\}$. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.3: Daerah Asal dan Daerah Hasil $f(x) = x^2 + 3$

Suatu fungsi dengan daerah asal tidak diketahui, maka daerah asalnya adalah himpunan bilangan real yang terbesar sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan nilai bilangan real dan disebut sebagai daerah asal alamiah.

Contoh 2:

Tentukan daerah asal alamiah fungsi berikut:

- $f(x) = \frac{5}{x-4}$
- $f(x) = \sqrt{x+3}$
- $f(x) = 3/\sqrt{16-x^2}$

Penyelesaian:

- Daerah asal alamiah f adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\}$ dibaca himpunan x anggota \mathbb{R} (bilangan real) sedemikian hingga x tidak sama dengan 4. Dihindari bilangan 4 hal ini untuk menghindari pembagian oleh bilangan 0.
- Daerah asal alamiah f adalah $D_f = \{x : \sqrt{x+3} \text{ terdefinisi}\}$ yang dapat dikatakan dalam bentuk lain dengan notasi $\{x : x+3 \geq 0\}$
- Daerah asal alamiah f adalah $D_f = \{x : \sqrt{16-x^2} \text{ terdefinisi}\}$.

Untuk menghindari nilai yang tidak real $\sqrt{16-x^2}$, maka dengan mensyaratkan $|x| \leq 4$, sehingga daerah asal alamiah

adalah $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4 \}$ Jika ditulis dalam bentuk interval dapat dinyatakan dengan $[-4, 4]$.

2.1.3 Jenis-jenis Fungsi

Untuk mengkaji jenis-jenis fungsi dapat dilihat dari berbagai kajian sebagai berikut:

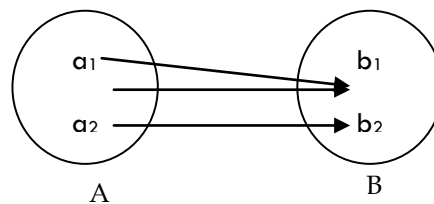
2.1.3.1 Ditinjau dari Pemetaan $f : A \rightarrow B$

a. Fungsi ke dalam (into)

Jika terdapat suatu unsur $b \in B$ yang tidak merupakan bayangan (peta) suatu unsur $a \in A$, maka f disebut fungsi ke dalam (into) dari A ke B dan ditulis dengan :

$$f: A \xrightarrow{\text{into}} B$$

Perhatikan grafik berikut :



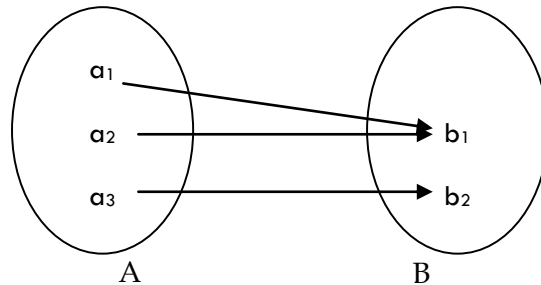
Gambar 2.4: Diagram Fungsi Into

b. Fungsi kepada (onto)

Jika setiap unsur $b \in B$ merupakan bayangan (peta) suatu unsur $a \in A$, maka f disebut fungsi kepada dari A ke B yang ditulis dengan

$$f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$$

Perhatikan gambar berikut :



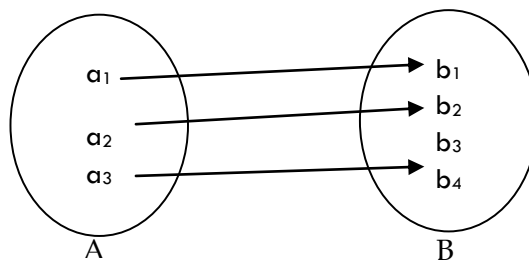
Gambar 2.5: Diagram Fungsi *Onto*

c. *Fungsi satu-satu (1-1)*

Jika setiap $a_n \in A$ dan $a_n \neq a_{n+1}$ ($n \in \text{Himpunan Bilangan Asli}$), berlaku $f(a_n) \neq f(a_{n+1})$, maka disebut fungsi satu-satu (1-1) dari A ke B dan ditulis dengan

$$f: A \xrightarrow{1-1} B$$

Perhatikan gambar berikut :

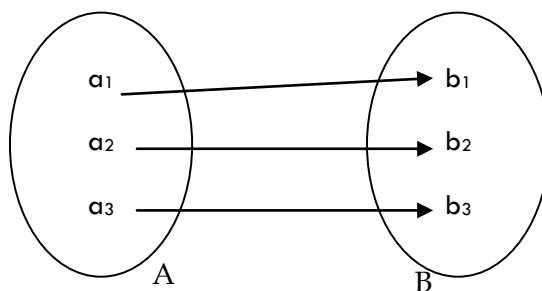


Gambar 2.6: Diagram Fungsi *satu-satu*

d. *Fungsi Korespondensi Satu-satu*

Jika suatu fungsi memenuhi syarat onto dan satu-satu, maka fungsi tersebut dinamakan dengan fungsi korespondensi satu-satu.

Perhatikan gambar berikut :

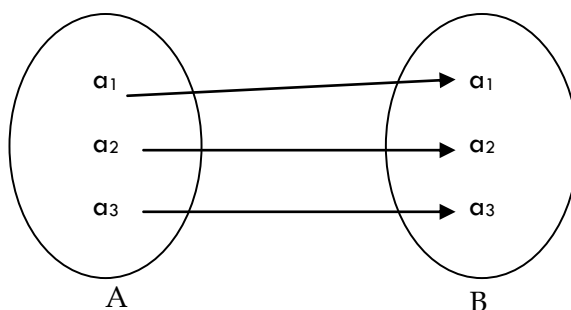


Gambar 2.7: Diagram Fungsi Korespondensi Satu-satu

e. Fungsi Identitas

Jika $A = B$ dan $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$, maka f disebut dengan fungsi identitas.

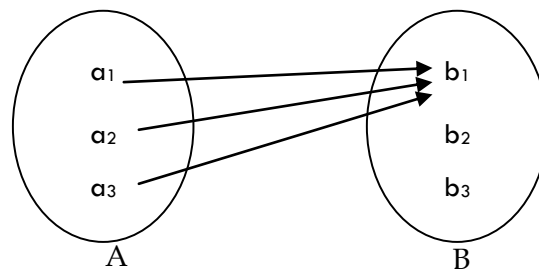
Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.8: Diagram Fungsi Identitas

f. Fungsi Konstan

Jika fungsi f bersifat bahwa setiap unsur di A dipetakan pada satu unsur $b \in B$, maka f disebut fungsi konstan dari A ke B. Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2.9: Diagram Fungsi Konstan

2.1.3.2 Ditinjau dari Letak Variabel

Jenis-jenis fungsi jika ditinjau dari letak variabel dapat dibedakan seperti berikut:

a. Fungsi Eksplisit

Suatu fungsi dimana kedua variabelnya terpisah dalam kedua ruas, disimbulkan dengan $y = f(x)$.

Contoh:

$$y = x \cos 3x$$

$$y = 4x - \log x$$

$$y = x^2 - 3x - 4$$

b. Fungsi Implisit

Suatu fungsi dimana kedua variabelnya terdapat dalam satu ruas, disimbulkan dengan $f(x,y) = 0$

Contoh :

$$y + x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$yx^2 - 4yx - 4x - y = 0$$

Catatan :

Setiap fungsi eksplisit selalu dapat ditulis menjadi fungsi implisit, tetapi sebaliknya setiap fungsi implisit belum tentu dapat ditulis dalam bentuk fungsi eksplisit.

2.1.3.3 Ditinjau dari Operasi dalam Fungsi

Jika ditinjau dari operasi yang dilakukan dalam fungsi, maka jenis-jenis fungsinya adalah sebagai berikut:

a. Fungsi Aljabar

Suatu fungsi yang melibatkan operasi menjumlah, mengurangi, memangkatkan, mengalikan, dan mencari akar. Fungsi ini terdiri dari fungsi rasional dan fungsi irrasional.

Contoh :

$$y = x^2 - 3x - 4 \text{ (fungsi rasional)}$$

$$y = (x^2 - 3x) / (x+1) \text{ (fungsi rasional)}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \text{ (fungsi irrasional)}$$

b. Fungsi Transenden

Suatu fungsi yang tidak melibatkan operasi menjumlah, mengurangi, memangkatkan, mengalikan dan mencari akar. Fungsi ini terdiri dari fungsi-fungsi berikut:

1. Fungsi Trigonometri

Suatu fungsi yang variabelnya ada yang memuat sin, cos, tan, csc, sec, dan cotan.

Contoh:

$$y = \cos 4x$$

$$y = 3 \cotan 5x$$

2. Fungsi Logaritma

Suatu fungsi yang variabelnya ada yang memuat logaritma.

Contoh:

$$y = 4 + \log x$$

$$y = 4x - 5 \log x$$

$$y = \log (x^2 - 4x + 3)$$

3. Fungsi Eksponen

Suatu fungsi yang variabelnya terletak pada pangkat.

Contoh:

$$y = 4^x + 9$$

$$y = e^{3x-4}$$

$$y = 6^x - 9$$

4. Fungsi Siklometri

Suatu fungsi yang variabelnya memuat invers fungsi trigonometri

Contoh:

$$y = \arccos 6x$$

$$y = 3 \arctan 5x$$

$$y = \arcsin 2x$$

5. Fungsi Hiperbolic

Suatu fungsi yang variabelnya memuat \sinh , \cosh , \tanh , cosech , sech , dan ctanh .

Contoh:

$$y = \cosh 4x$$

$$y = 3 \operatorname{cotanh} 5x$$

2.1.3.4 Ditinjau dari Harga Fungsi

Jenis-jenis fungsi dapat juga ditinjau dari harga fungsi, yang dapat dikemukakan sebagai berikut:

a. Fungsi Genap

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ untuk setiap $x \in A$ berlaku $f(x)=f(-x)$ maka $f(x)$ adalah fungsi genap.

Contoh:

$$y = 4x^2 + 8$$

$$y = 4x^4 - 3x^2 - 9$$

b. Fungsi Ganjil

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ untuk setiap $x \in A$ berlaku $f(x) = -f(-x)$, maka $f(x)$ adalah fungsi ganjil.

Contoh:

$$y = x^3 + x$$

$$y = 4x^3 + 5x$$

2.1.3.5 Fungsi-fungsi yang lain

Selain pembagian jenis fungsi seperti tersebut di atas, ada beberapa jenis fungsi lain yang tidak termasuk pengelompokan sebelumnya.

a. Fungsi Periodik

$F(x)$ dikatakan fungsi periodik jika suatu konstanta $c > 0$ dapat ditentukan $F(x+c)$ sedemikian hingga berlaku $F(x+c) = F(x)$.

Contoh :

$$F(x) = \cos x$$

$$F(x+c) = \sin(x+2k\pi)$$

b. Fungsi Homogen

Fungsi $f(x,y)$ disebut homogen jika untuk setiap x,y diganti tx, ty sedemikian sehingga $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, dengan n disebut derajat fungsi homogen.

Contoh:

$$F(x,y) = 3x^3y + 6x^4$$

$$F(tx,ty) = 3(tx)^3(ty) + 6(tx)^4$$

$$= t^4(3x^3y + 6x^4)$$

$$= t^4 F(x, y)$$

Jadi $F(x, y)$ adalah fungsi homogen berderajat 4.

c. Fungsi Invers

Misalkan A dan B adalah himpunan dan f fungsi dari A ke B, dimana $f = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Himpunan pasangan berurutan yang diperoleh dengan jalan menukarkan setiap pasangan berurutan $(a, b) \in f$ menjadi (b, a) yang dilambangkan dengan f^{-1} . Jika, himpunan f^{-1} merupakan suatu fungsi, maka disebut suatu fungsi invers dari B ke A.

Contoh :

- 1) Misalkan $f = \{(2, 3), (4, 6), (5, 1), (7, 9)\}$

Anggota f tidak terdapat dua pasangan berurutan berbeda yang mempunyai unsur pertama yang sama, maka f adalah sebuah fungsi, sedangkan $f^{-1} = \{(3, 2), (6, 4), (1, 5), (9, 7)\}$ juga sebuah fungsi sebab tidak terdapat pasangan berurutan yang mempunyai unsur pertama yang sama dan fungsi tersebut merupakan fungsi invers dari f .

- 2) Tentukan invers dari :

- a. $f(x) = 2x - 4$
- b. $f(x) = (3x - 4) / (2x + 6)$
- c. $f(x) = 3 / (5x + 8)$

Penyelesaian:

- a. $f(x) = 2x - 4$
 $2x = f(x) + 4$
 $x = (f(x) + 4) / 2$
 $f^{-1}(x) = (x + 4) / 2$
- b. $f(x) = (3x - 4) / (2x + 6)$
 $f(x) (2x + 6) = 3x - 4$
 $2x f(x) + 6 f(x) = 3x - 4$
 $2x f(x) - 3x = -6 f(x) - 4$
 $x (2 f(x) - 3) = -6 f(x) - 4$

$$x = -(6f(x) + 4) / (2f(x) - 3)$$

$$f^{-1}(x) = -(6x + 4) / (2x - 3)$$

c. $f(x) = 3 / (5x + 8)$

$$f(x)(5x + 8) = 3$$

$$5xf(x) + 8f(x) = 3$$

$$x = (3 - 8f(x)) / 5f(x)$$

$$f^{-1}(x) = (3 - 8x) / 5x$$

d. *Fungsi Komposisi*

Jika $f : x \rightarrow y$ dan $g : y \rightarrow z$, dikatakan bahwa $g \circ f : x \rightarrow z$ adalah fungsi komposisi dari x .

Contoh :

Diketahui $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 6$ tentukan :

a. $f[g(x)]$

b. $g[f(x)]$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } f[g(x)] &= 3g(x) - 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 6) - 4 \\ &= 3x^2 - 6x + 18 - 4 \\ &= 3x^2 - 6x + 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } g[f(x)] &= f(x)^2 - f(x) + 6 \\ &= (3x - 4)^2 - (3x - 4) + 6 \\ &= 9x^2 - 24x + 16 - 3x + 4 + 6 \\ &= 9x^2 - 27x + 26 \end{aligned}$$

e. *Fungsi Parameter*

Suatu fungsi dimana x dan y masing-masing dinyatakan dalam suatu variabel ketiga.

Contoh :

a.
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x = 4t - 8 \\ y = 2t^3 + 4t \end{cases}$$

2.2 Grafik Fungsi

Pembahasan grafik fungsi ini, diawali dengan pembahasan grafik fungsi aljabar yang terdiri dari grafik fungsi suku banyak, rasional dan irrasional, dilanjutkan dengan pembahasan grafik fungsi-fungsi khusus, yaitu grafik fungsi dengan banyak persamaan, fungsi dengan nilai mutlak, dan fungsi bilangan bulat terbesar (fungsi tangga).

Usaha untuk mempermudah menggambarkan grafik fungsi, dibahas pergeseran dan kesimetrisan grafik. Sedangkan untuk menggambarkan grafik canggih, dapat digunakan penggunaan turunan.

2.2.1 Grafik Fungsi Aljabar

2.2.1.1 Grafik Fungsi Suku Banyak

a. Grafik Fungsi Linier

Grafik fungsi linier adalah garis lurus sehingga untuk menggambarkan grafik ini dapat diperoleh dengan mengambil dua titik berlainan pada bidang dan menghubungkannya. Cara yang dapat digunakan untuk mempermudah menggambarkan fungsi dengan mengambil dua titik yang merupakan titik potong dengan sumbu x dan titik potong dengan sumbu y . Jika kedua titik potong tersebut adalah sama, yaitu $(0,0)$, maka perlu diambil suatu penyelesaian: titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat sebagaimana pada tabel.

Contoh:

Gambarlah grafik fungsi f dimana $f(x) = x - 4$

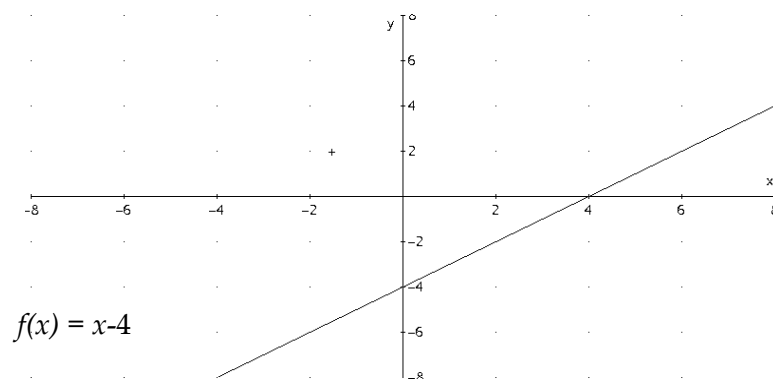
Penyelesaian :

Ambillah titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat sebagaimana tabel berikut:

Tabel 2.1: Titik Potong $f(x) = x - 4$ dengan sumbu koordinat

| | | |
|--------|----|---|
| x | 0 | 4 |
| $f(x)$ | -4 | 0 |

Berdasarkan tabel tersebut dapat dituliskan bahwa titik-titik potong dengan sumbu koordinat adalah $(0,-4)$ dan $(4,0)$, dan grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.10: Grafik fungsi $f(x) = x-4$

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f , jika $f(x) = -x$

Penyelesaian :

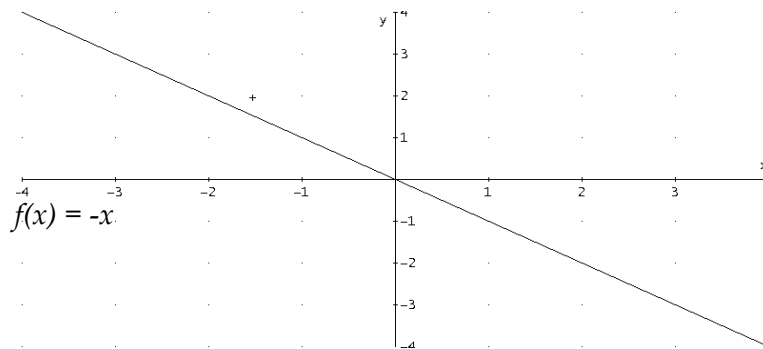
Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y=0$, sehingga $x=0$, sehingga diperoleh titik $(0,0)$. Karena garis melalui $(0,0)$ maka perlu diambil titik lain, misalnya jika $x = 2$, maka $y = -2$, sehingga

titik yang ditandai adalah $(-2, 2)$. Keterangan diatas dapat diemukakan dalam tabel berikut:

Tabel 2.2: Pembuat Nol fungsi $f(x) = -x$

| | | |
|--------|---|----|
| x | 0 | 2 |
| $f(x)$ | 0 | -2 |

Grafik fungsi $f(x) = -x$ digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.11: Grafik fungsi $f(x) = -x$

a. Grafik Fungsi Kuadrat

Untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut :

1) Tentukan titik potong dengan sumbu x .

Diperoleh jika $y=0$ sehingga diperoleh persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut merupakan titik-titik potong dengan sumbu x . Banyaknya titik potong dengan sumbu x dapat dilihat dari nilai diskriminan yaitu $D = b^2 - 4ac$

- Jika $D > 0$, maka grafik fungsi akan memotong sumbu x di dua titik yang berbeda
- Jika $D = 0$, maka grafik fungsi akan memotong sumbu x di satu titik (dua titik berimpit)
- Jika $D < 0$, maka grafik fungsi tidak memotong sumbu x .

Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika $x=0$, sehingga $y = a(0)^2 + b(0) + c \Leftrightarrow y = c$. Jadi titik potong dengan sumbu y adalah $(0, c)$.

2) Tentukan titik ekstrim

Titik ekstrim diperoleh dengan mengubah bentuk kuadrat dari persamaan kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna, dengan cara seperti berikut :

$$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

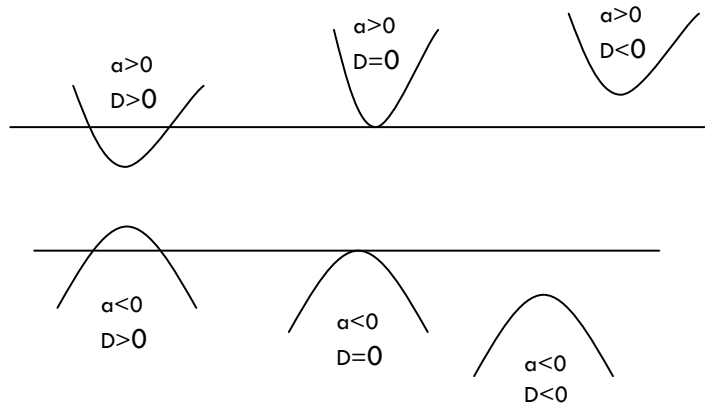
sehingga diperoleh titik ekstrim $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$

Untuk menentukan sketsa grafik fungsi kuadrat dapat dilihat dari kondisi $D = b^2 - 4ac$ dan harga a .

Berdasarkan bentuk diatas didapat:

- Jika $a > 0$ maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \forall x \in R$
 kalau diambil $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ yaitu nilai terkecil dari $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
 maka $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ merupakan nilai minimum dari persamaan tersebut. Jadi, jika $a > 0$ akan diperoleh titik ekstrim minimum. $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$.
- Jika $a < 0$ maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0, \forall x \in R$
 Dengan analisis yang sama dengan yang diatas akan didapat ;
 Jika $a < 0$ maka akan diperoleh titik ekstrim maksimum $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$.

Berdasarkan hasil diatas dapat dibuat beberapa sketsa grafik fungsi kuadrat dengan melihat kemungkinan-kemungkinan nilai a dan D , sebagai berikut :



Gambar 2.12: Alternatif Kurva berdasarkan nilai a dan D

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = x^2 + 3x - 4$

Penyelesaian:

1. Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.

Titik potong dengan sumbu x mempunyai ordinat $y = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 3x - 4 \\ &= (x - 1)(x + 4) \\ \Rightarrow x &= 1 \text{ atau } x = -4 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah $(1,0)$ dan $(-4,0)$.

Titik potong dengan sumbu y mempunyai absis $x = 0$ sehingga $y = -4$, sehingga titik potong dengan sumbu y mempunyai koordinat $(0, -4)$

2. Titik Ekstrim

Dari persamaan kuadrat:

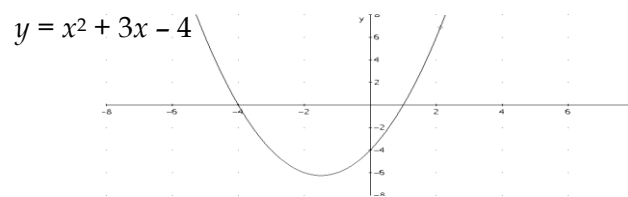
$$y = x^2 + 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow y = a(x+3/2)^2 - 25/4$$

dari persamaan tersebut dapat dituliskan titik ekstrimnya

$$\text{adalah } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

Dengan mendasarkan diri pada penghitungan diatas, maka dapat digambarkan grafik fungsi $y = x^2 + 3x - 4$ sebagai berikut:



Gambar 2.13: Grafik fungsi $y = x^2 + 3x - 4$

c. Grafik Fungsi Kubik

Pembahasan grafik fungsi kubik dapat digambarkan dengan mengambil beberapa titik anggota daerah asal yang dapat mewakili titik-titik yang lain. Pembahasan lebih lanjut, dapat dilihat pada penggunaan turunan.

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = x^3$

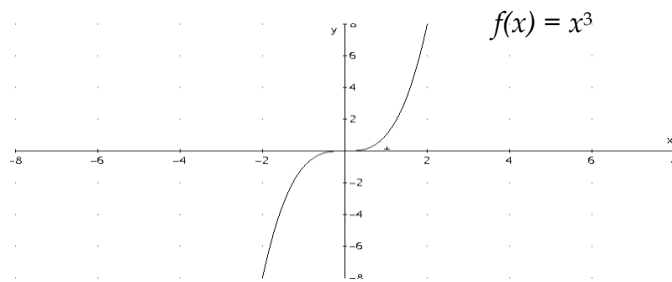
Penyelesaian:

Grafik fungsi f dengan $f(x) = x^3$ dapat digambar dengan mengambil beberapa titik pada \mathbb{R} sebagai berikut :

Tabel 2.3: Harga Pembuat Nol fungsi $f(x) = x^3$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|-----|----|----|---|---|---|
| y | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |

Berdasarkan beberapa titik sebagaimana terdapat dalam tabel tersebut, jika x dilanjutkan sampai menuju tak terhingga, nilai $f(x)$ semakin besar dan jika x dilanjutkan sampai menuju negatif tak terhingga maka nilai $f(x)$ semakin kecil, sehingga grafik fungsi f dengan $f(x) = x^3$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.14: Grafik fungsi $f(x) = x^3$

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = x^3 + 2$

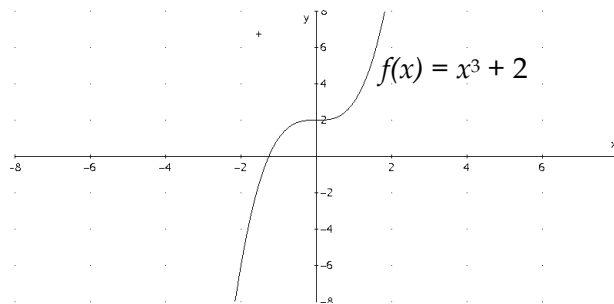
Penyelesaian :

Untuk menggambar grafik fungsi f diambil beberapa titik pada \mathbb{R} yang disajikan dalam tabel sebagai berikut :

Tabel 2.4: Harga Pembuat Nol Fungsi $f(x) = x^3 + 2$

| x | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|-----|----|----|---|---|-----|
| y | -6 | 1 | 2 | 3 | -10 |

Grafik fungsi f di atas dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 2.15: Grafik Fungsi $f(x) = x^3 + 2$

2.2.1.2 Grafik Fungsi Rasional

Grafik fungsi rasional didapat dengan membuat tabel nilai tanpa mengabaikan keistimewaan yang terjadi pada grafik fungsi rasional.

Contoh 1 :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = \frac{1}{x}$

Penyelesaian :

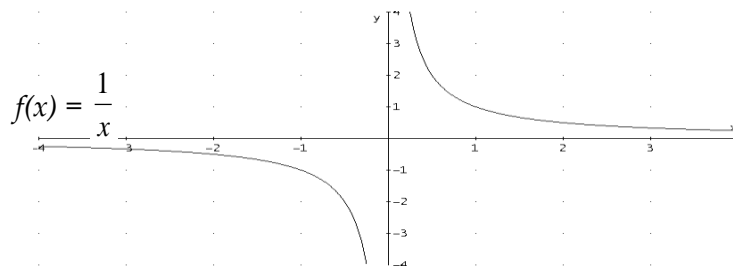
Untuk menggambar grafik fungsi tersebut dibuat tabel nilai sebagai berikut :

Tabel 2.5: Harga Pembuat Nol $f(x) = \frac{1}{x}$

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----------------|----|----------------|----------------|-----|-----|-----|---------------|---------------|---|---------------|
| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | ... | 0 | ... | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | 2 |
| y | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -4 | -8 | ... | ... | ... | 8 | 4 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Berdasarkan Tabel 2.4 terlihat bahwa jika x mendekati 0 dari kanan, nilai $f(x)$ membesar tanpa batas dan jika x mendekati 0 dari kiri nilai $f(x)$ mengecil tanpa batas. Untuk $x=0$ fungsi tersebut menjadi tidak terdefinisi.

Grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.16: Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$

Contoh 2 :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

Penyelesaian :

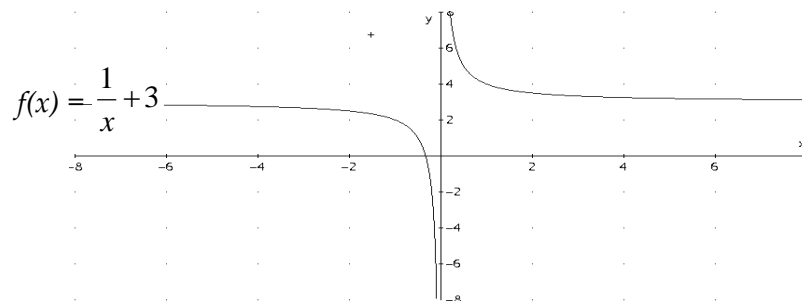
Tabel nilai fungsi diatas sebagai berikut :

Tabel 2.6: Harga Pembuat Nol $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{3}$ | ... | 0 | ... | $\frac{1}{3}$ | 1 | 2 |
|-----|---------------|----|----------------|-----|----|-----|---------------|---|---------------|
| y | $\frac{5}{2}$ | 2 | 0 | ... | .. | ... | 6 | 4 | $\frac{7}{2}$ |

Berdasarkan Tabel 2.5 terlihat bahwa jika x mendekati 0 dari kanan nilai $f(x)$ membesar tanpa batas dan jika x mendekati 0 dari kiri nilai $f(x)$ mengecil tanpa batas. Untuk $x = 0$ fungsi tersebut menjadi tidak terdefinisi, namun grafik ini digeser keatas sejauh 3

satuan dari grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.17: Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

2.2.1.3 Grafik Fungsi Irrasional

Untuk membuat grafik fungsi irrasional dapat dibuat tabel nilai dengan memperhatikan daerah asal dari fungsi.

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = \sqrt{x}$

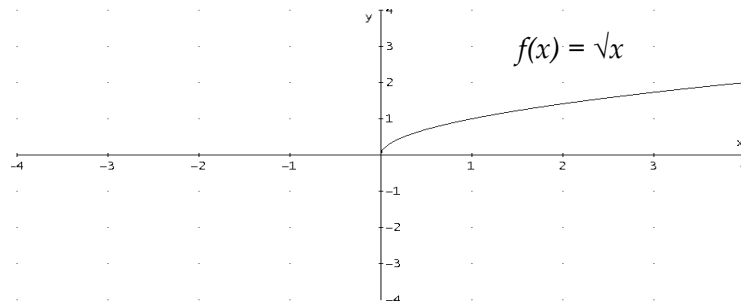
Penyelesaian:

Daerah asal dari f adalah $D_f = (0, \infty)$ sehingga tabel nilai yang bersesuaian adalah sebagai berikut

Tabel 2.7: Harga Pembuat Nol Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Dari tabel tersebut dapat digambarkan grafiknya sebagai berikut :



Gambar 2.18: Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

2.2.2 Grafik Fungsi Khusus

Pada pembahasan ini akan diuraikan tentang grafik fungsi dengan banyak persamaan, grafik fungsi nilai mutlak, dan grafik fungsi bilangan bulat terbesar (fungsi tangga).

a. Grafik Fungsi dengan Banyak Persamaan

Sebuah fungsi ada juga yang dinyatakan dengan beberapa persamaan dalam satu kesatuan, sehingga gambar grafiknya juga perpaduan dari beberapa grafik fungsi tersebut dengan memperhatikan persyaratannya.

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi f jika

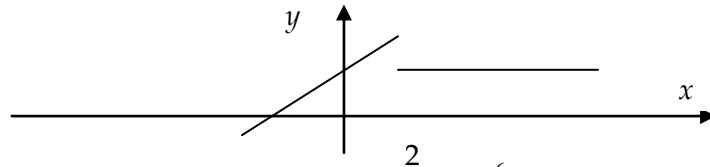
$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Penyelesaian :

Grafik fungsi diperoleh dengan menggunakan masing-masing grafik fungsi sesuai aturan sebagai berikut :

- Menggambar grafik f dengan $f(x) = x + 2$ untuk $x < 2$
- Menggambar grafik f dengan $f(x) = 2$ untuk $x \geq 2$

Sehingga diperoleh grafik fungsi f sebagai berikut :



Gambar 2.19: Grafik Fungsi $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$

b. Grafik Fungsi dengan Nilai Mutlak

Nilai Mutlak suatu bialangan real x dinyatakan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai : $|x| = x$, jika $x \geq 0$

$|x| = -x$, jika $x < 0$

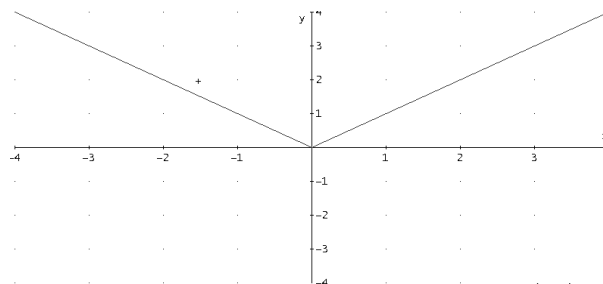
Untuk menggambarkan grafik fungsi tersebut dapat dibantu dengan tabel berikut.

Contoh 1 :

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = |x|$

Penyelesaian :

Dari pengertian nilai mutlak sebagaimana diatas dapat digambar grafiknya seperti berikut:



Gambar 2.20: Grafik Fungsi $f(x) = |x|$

Contoh 2 :

Gambarlah grafik fungsi f dengan $f(x) = |x+3|$

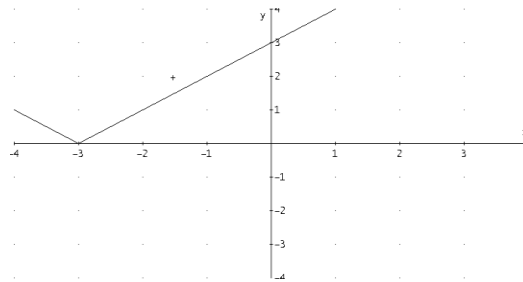
Penyelesaian :

Menurut definisi fungsi dengan nilai mutlak :

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{jika } x \geq -3 \\ -(x+3), & \text{jika } x < -3 \end{cases}$$

Sehingga grafik fungsinya adalah sebagai berikut :

$$f(x) = |x+3|$$



Gambar 2.21: Grafik Fungsi $f(x) = |x+3|$

c. Grafik Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

Sebuah fungsi yang dilambangkan $\|x\|$ didefinisikan dengan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

Contoh :

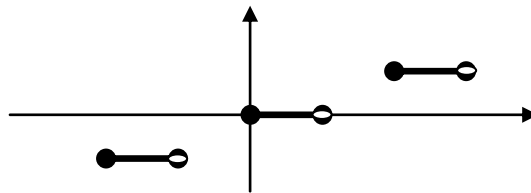
Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

Penyelesaian :

Fungsi f dengan $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ menurut definisi adalah

$$f(x) = \|x\| = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Sehingga grafik fungsinya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.22: Grafik Fungsi $f(x) = \|x\|$

2.2.3 Pergeseran Grafik Fungsi

Grafik fungsi $y = f(x-a) + b, a > 0, b > 0$ diperoleh dengan menggeser grafik fungsi $y = f(x)$ sejauh a satuan ke kanan (ke arah sumbu x positif) dan b satuan ke atas (ke arah sumbu y positif).

Arah pergeseran grafik fungsi jika $y = f(x-a) + b$ adalah sebagai berikut:

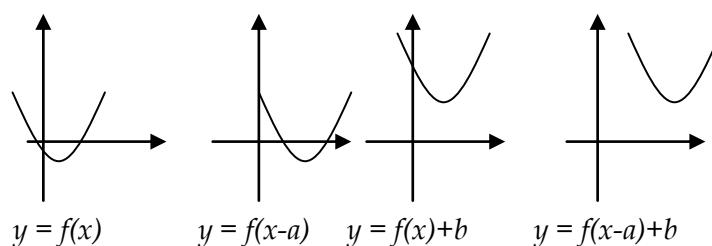
$a > 0$ dan $b > 0$ pergeserannya ke kanan dan ke atas.

$a < 0$ dan $b > 0$ pergeserannya ke kiri dan ke atas.

$a > 0$ dan $b < 0$ pergeserannya ke kanan dan ke bawah.

$a < 0$ dan $b < 0$ pergeserannya ke kiri dan ke bawah

Ilustrasinya sebagai berikut:



Gambar 2.23: Ilustrasi Pergeseran Grafik

Contoh:

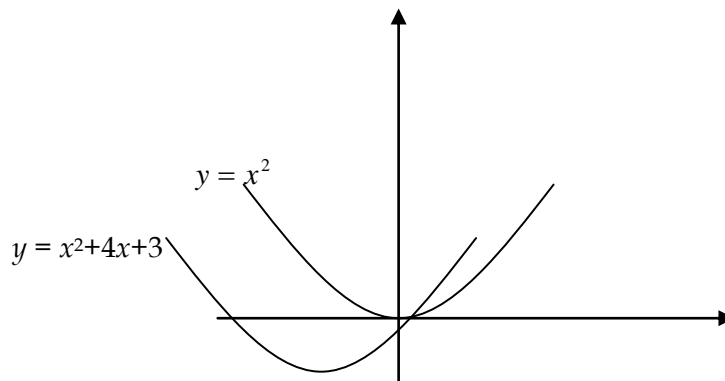
Gambarlah grafik fungsi f , jika $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Penyelesaian:

Untuk membuat grafik fungsi kuadrat dengan cara seperti di jelaskan sebelumnya akan memakan banyak waktu. Untuk mempermudah membuat grafik dapat digunakan prinsip pergeseran dari grafik $y = x^2$ dengan mengubah menjadi bentuk kuadrat sempurna yaitu

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$$

sehingga diperoleh grafik fungsi f sebagai berikut.



Gambar 2.24: Grafik fungsi $y = x^2 + 4x + 3$ dan $y = x^2$

2.2.4 Kesimetrisan Grafik Fungsi

Dengan adanya definisi fungsi genap dan ganjil akan mempermudah dalam menggambarkan grafik fungsi, karena akan diketahui kesimetrisan grafik. Jika f fungsi genap, maka grafik fungsi f simetri terhadap sumbu y dan jika f fungsi ganjil, maka grafik fungsi f simetri terhadap titik asal.

Contoh:

Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = x^2 - 3$

Penyelesaian:

Untuk menguji apakah fungsi tersebut genap atau ganjil maka digunakan langkah sebagai berikut:

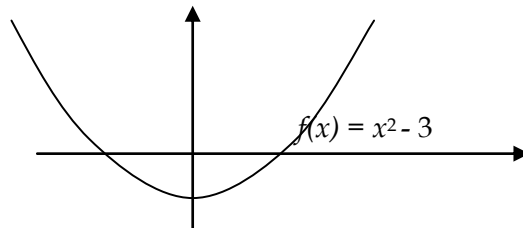
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 3 \\ &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

Karena $f(-x) = f(x)$, maka fungsi f adalah fungsi genap sehingga simetri terhadap sumbu y . untuk mempermudah menggambarkan grafiknya diperlukan bentuan tabel sebagai berikut:

Tabel 2.8: Titik-titik Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 3$

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|----|----|----|----|----|---|---|
| y | 6 | 1 | -2 | -3 | -2 | 1 | 6 |

Dari tabel tersebut dapat membantu untuk menggambar grafiknya sebagai berikut:



Gambar 2.25: Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 3$

Soal-soal Latihan 7:

Gambarlah grafik fungsi f dengan masing-masing aturan fungsi sebagai berikut:

1). $f(x) = 5x - 9$

2). $f(x) = 3x^2 - 8$

3). $f(x) = (x - 3)^2$

4). $f(x) = x^2 - 4x + 4$

5). $f(x) = x^2 - 4x - 5$

6). $f(x) = x^2 + 4x$

7). $f(x) = -x^2 - 1$

8). $f(x) = 2(x - 3)^2$

9). $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

10). $f(x) = -(x - 1)^2$

11). $f(x) = 3x^2 + 6x$

12). $f(x) = 3x^3$

13). $f(x) = 3x^3 + 4$

14). $f(x) = 3x^3 + 4x - 1$

15). $f(x) = \llbracket x - 1 \rrbracket$

16). $f(x) = 2\llbracket x - 1 \rrbracket$

17). $f(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$

18). $f(x) = \llbracket x - 1 \rrbracket + 5$

19). $f(x) = |2x - 1|$

20). $f(x) = 2|x| - 3$

21). $f(x) = x|x - 1|$

22). $f(x) = \frac{x}{x} \frac{x}{|x|}$

Gambarlah grafik fungsi f dengan menentukan daerah asal terlebih dahulu:

$$23) y = \sqrt{2x + 3}$$

$$24) f(x) = \frac{4-x^2}{x^2}$$

Gambarlah grafik fungsi di bawah ini dengan cara pergeseran

$$25) f(x) = -x^2 - x + 2$$

$$26) f(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$27) f(x) = (x - 3)^2 + 4$$

$$28) f(x) = 2(x + 4)^2 - 4$$

$$29) f(x) = |x + 5| - 4$$

Gambarlah grafik fungsi di bawah ini dengan terlebih dahulu menentukan apakah masing-masing fungsi merupakan fungsi genap atau ganjil atau bukan kedua-duanya.

$$30). f(x) = 2x + 1$$

$$31). f(x) = 3x - \sqrt{x}$$

$$32). f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$33). f(x) = -|x + 3|$$

$$34). f(x) = \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil$$

$$35). f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } t \leq 0 \\ t - 1 & , \text{ jika } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & , \text{ jika } t \geq 2 \end{cases}$$

2.3 Operasi pada Himpunan Fungsi

Operasi hitung pada bilangan real, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan dan penarikan akar sudah diketahui. Operasi-operasi pada dua fungsi, berikut daerah asal hasil operasi dua fungsi tersebut seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.9: Daerah Asal Hasil Operasi

| Rumus | Daerah Asal |
|---|----------------|
| $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ | $D_f \cap D_g$ |
| $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ | $D_f \cap D_g$ |
| $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ | $D_f \cap D_g$ |
| $(f / g)(x) = f(x) / g(x), g(x) \neq 0$ | $D_f \cap D_g$ |
| $f^n(x) = (f(x))^n, n \neq -1$ | D_f |

Contoh:

Misalkan $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$ dan $g(x) = \sqrt{x + 1}$ tentukan

- $(f+g)(x)$
- $(f-g)(x)$
- $(f \cdot g)(x)$
- $(f/g)(x)$
- $f^2(x)$
- $g^2(x)$

Penyelesaian:

$$a.(f+g)(x)=\frac{x^2+3}{2}+\sqrt{x+1}$$

$$b.(f-g)(x)=\frac{x^2+3}{2}-\sqrt{x+1}$$

$$c.(f \cdot g)(x)=(\frac{x^2+3}{2}) \cdot \sqrt{x+1}$$

$$d.(f/g)(x)=(\frac{x^2+3}{2})/\sqrt{x+1}$$

$$e.f^2(x)=(\frac{x^2+3}{2})^2$$

$$f. g^2(x)=(\sqrt{x+1})^2 = x+1$$

2.3.1 Komposisi fungsi

Misalnya f dan g dua fungsi, dapat di komposisi dari f dan g yang ditulis dengan $f \circ g$ yang mempunyai arti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Contoh:

Misalnya f dan g fungsi dengan $f(x)=\frac{x+2}{3}$ dan $g(x)=\sqrt{x-2}$ tentukan

a. $f \circ g$

b. $g \circ f$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{a. } f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= \frac{g(x)+2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}+2}{3} \end{aligned}$$

b. $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{f(x) - 2} \\
&= \sqrt{\frac{x+2}{3} - 2} \\
&= \sqrt{\frac{x-4}{3}}
\end{aligned}$$

Soal-soal Latihan 8:

- 1) Untuk $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ dan $g(x) = \sqrt{2+x^2}$ carilah nilai dari
 - a. $(f+g)(2)$
 - b. $(f \cdot g)(0)$
 - c. $(g/f)(3)$
 - d. $(f \circ g)(0)$
 - e. $(g \circ f)(0)$
- 2) Untuk $f(x) = x^3 - 3$ dan $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ carilah rumus untuk masing-masing berikut dan nyatakan daerah asalnya.
 - a. $(f+g)(x)$
 - b. $(g/f)(x)$
 - c. $(f \circ g)(x)$
 - d. $(g \circ f)(x)$
- 3) Tentukan $f(x) = \sqrt{x-5}$ dan $g(x) = 2|x|$, carilah rumus-rumus untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.
- 4) Jika $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, cari rumus-rumus untuk yang berikut dan nyatakan daerah asalnya.
 - a. $(f+g)(x)$
 - b. $(g/f)(x)$
 - c. $(f \circ g)(x)$
 - d. $(g \circ f)(x)$
 - e. $f^3(x) + g^3(x)$

- 5) Jika $g(x) = x^2 + 1$ carilah rumus untuk
 - a. $g^3(x)$
 - b. $(g \circ g)(x)$
 - c. $(g \circ g \circ g)(x)$
- 6) Carilah f dan g sedemikian hingga $p = f \circ g$
 - a. $p(x) = \frac{2}{x^2 + x + 1}$
 - b. $p(x) = \log(x^3 + 3x)$
- 7) Carilah f dan g sedemikian hingga $F = g \circ f$
 - a. $F(x) = \sqrt{x+7}$
 - b. $F(x) = (x^2 + x)^{15}$
- 8) Tuliskan $k(x) = \log \sqrt{x^2 + 1}$ sebagai suatu komposisi tiga fungsi dalam dua cara berbeda.
- 9) Tuliskan $k(x) = \log \sqrt{x^2 + 1}$ sebagai suatu komposisi dari empat fungsi.
- 10) Hitunglah $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{\frac{1}{3}}$ jika $g(x) = 6x - 11$

2.4 Grafik Fungsi Sinus dan Cosinus

Untuk menggambarkan grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$, kita ikuti prosedur baku (buat tabel nilai, rajah titik-titik yang berpadanan, dan hubungkan titik-titik ini dengan lengkungan mulus). Dengan bantuan tabel fungsi trigonometri (ukuran radian) atau memakai kalkulator (dalam mode rad) diperoleh grafik dalam gambar di bawah berikut.

Empat sifat dari grafik fungsi sinus dan cosinus adalah sebagai berikut:

1. $\sin t$ dan $\cos t$ keduanya berkisar -1 sampai dengan 1.
2. Kedua grafik berulang dengan sendirinya pada selang yang berdampingan.

3. Grafik $y = \sin t$ simetri terhadap titik asal (fungsi ganjil) dan $y = \cos t$ terhadap sb y (fungsi genap)
4. Grafik $y = \sin t$ sama seperti grafik $y = \cos t$, tetapi digeser $\frac{\pi}{2}$ satuan kekanan.

2.4.1 Empat Fungsi Trigonometri Lainnya

Empat fungsi trigonometri lainnya: tangen, ctan, sec, dan csc, didefinisikan sebagai berikut.

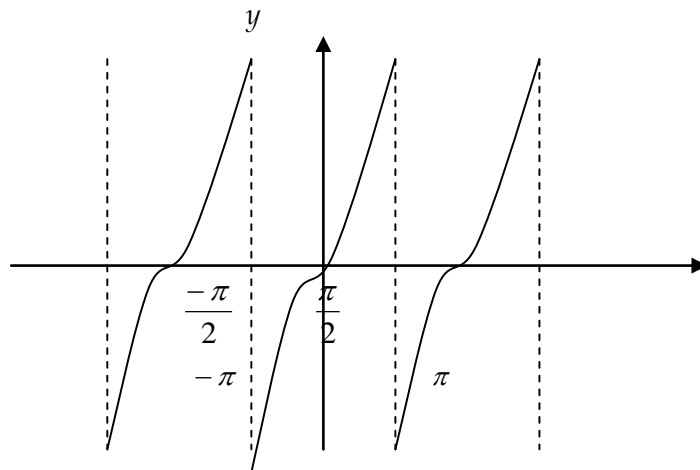
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Grafik untuk fungsi $y = \tan t$ diberikan pada gambar berikut.



Gambar 2.26: Grafik Fungsi $y = \tan t$

2.4.2 Hubungan dengan Trigonometri Sudut

Ukuran sebuah sudut biasanya dinyatakan dalam satuan derajat atau satuan radian. Sudut yang berpadanan terhadap satuan putaran penuh berukuran 360° atau 2π radian. Dengan demikian sudut siku-siku adalah 90° atau $\frac{\pi}{2}$ radian. Jika di konversi diperoleh $180^\circ = \pi \text{ radian} \approx 3,1415927$ radian

$1^\circ \approx 0,0174533$ radian dan $1 \text{ radian} \approx 57,29578^\circ$

Contoh:

- Konversikan 50° ke dalam satuan radian.
- Konversikan $\frac{\pi}{6}$ radian ke dalam satuan derajat.

Penyelesaian:

a. $50^\circ = 50 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) \approx 0,87266$

b. $\frac{\pi}{6} \text{ radian} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$

Jika $r = 1$ (satuan), maka panjang busur pada lingkaran satuan dengan sudut pusat t radian adalah t . Jadi dapat disimpulkan bahwa panjang busur lingkaran satuan di depan sudut pusat yang besarnya t radian adalah t satuan. Tanda dari t positif atau negatif tergantung arah peng-ukurannya. Jadi arah pengukuran berlawanan arah putar jarum jam, maka t bertanda positif, sebaliknya bertanda negatif.

Sekarang kita mendapatkan hubungan antara trigo-nometri sudut dan trigonometri lingkaran satuan sebagai berikut. Jika \emptyset adalah sudut yang berukuran t radian, maka $\sin \emptyset = \sin t$ dan $\cos \emptyset = \cos t$.

Soal-soal Latihan 9:

1). Konversikan yang berikut ke dalam radian (gunakan π dalam jawaban anda)

- a. 240°
- b. -135°
- c. 600°
- d. 18°
- e. 6°

2). Konversikan ukuran radian berikut menjadi derajat.

- a. $\frac{7\pi}{6}$
- b. 8π
- c. $\frac{3\pi}{2}$
- d. $\frac{\pi}{18}$
- e. $\frac{-\pi}{5}$

3). Hitunglah tanpa memakai kalkulator.

- a. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- b. $\sec(\pi)$
- c. $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- d. $\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4) Periksa kebenaran kesamaan berikut.

- a. $(1+\sin z)(1-\sin z) = \left(\frac{1}{\sec^2}\right)$
- b. $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

c. $\sec t - \sin t \tan t = \cos t$

d. $\left(\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} \right) = \sin^2 t$

5) Sketsalah grafik-grafik yang berikut pada $[-\pi, 2\pi]$.

a. $y = \sec t$

b. $y = 3\sin t$

c. $y = \sin 2t$

d. $y = \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$

Contoh soal dan penyelesaian

1) Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$

Penyelesaian:

Agar $f(x) \in \mathbb{R}$, syaratnya adalah $x \neq 0$, sehingga daerah asal fungsi f adalah $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Untuk menentukan daerah hasil fungsi ini, dapat dengan bantuan grafik dengan cara seperti berikut.

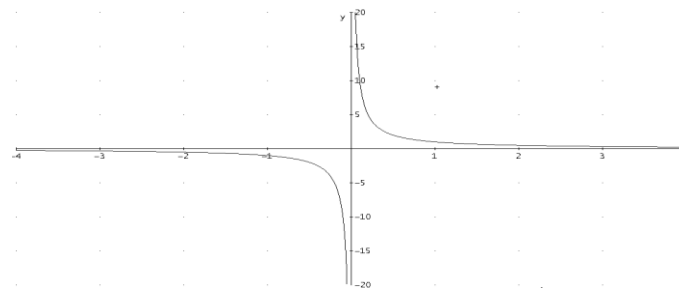
$$y = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow yx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, y \neq 0$$

jadi daerah hasil fungsi f adalah $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

jika dalam bentuk grafik adalah seperti berikut :



Gambar 2.27: Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$

Jadi $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

- 2) Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi g dengan $g(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2}$.

Penyelesaian:

Agar $g(x) \in \mathbb{R}$ syaratnya adalah $4 - (x-2)^2 \geq 0$

$$4 - x^2 + 4x - 4 = 4x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

Jadi daerah asal fungsi g adalah $[0, 4]$.

Daerah asal fungsi g dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

Karena $D_g = [0, 4]$, maka

$$0 \leq x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x - 2)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -(x - 2)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 4 - (x - 2)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 2$$

3) Selidikilah apakah fungsi berikut genap, ganjil atau tidak keduanya.

a. $f(x) = 2x^2 + 4$

b. $g(x) = \{ |x-1| \}$

c. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{jika } x \leq 1 \\ 3x & \text{jika } x > 2 \end{cases}$

Penyelesaian:

a. $f(-x) = 2(-x)^2 + 4 = 2x^2 + 4 = f(x)$. Jadi f fungsi genap.

b. $g(x) = \{ |x-1| \} = \begin{cases} \dots \\ -2 & \text{jika } -1 \leq x < 0 \\ -1 & \text{jika } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{jika } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{jika } 2 \leq x < 3 \\ \dots \end{cases}$

Pilih $x = 1$, maka $g(-1) = -2$, tetapi $g(1) = 0$. Karena terdapat $x = 1$ tetapi $-2 = g(-1) \neq -g(1) = 0$, dan $-2 = g(-1) \neq -g(1) = 0$ maka g bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

4). Gambarkan grafik fungsi $f(x) = 3x^3 + x$.

Penyelesaian:

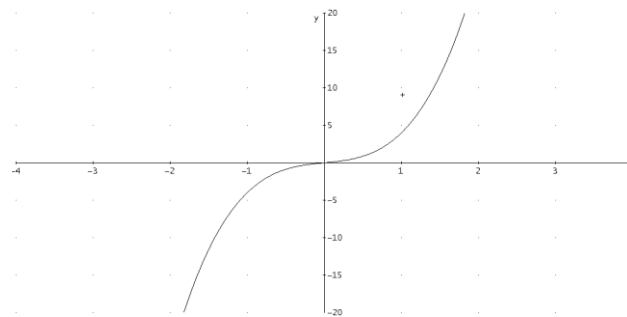
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^3 + (-x) \\ &= -3x^3 - x \\ &= -(3x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Karena $f(-x) = -f(x)$, maka f fungsi ganjil. Grafik f simetri terhadap titik asal, sehingga titik-titik yang perlu diambil adalah

Tabel 2.10: Titik-titik Fungsi $f(x) = 3x^3 + x$

| x | 0 | 1 | 2 |
|--------|---|---|----|
| $f(x)$ | 0 | 4 | 26 |

Grafik fungsinya sebagai berikut:



Gambar 2.28: Grafik Fungsi $f(x) = 3x^3 + x$

5) Gambarlah grafik fungsi f jika $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

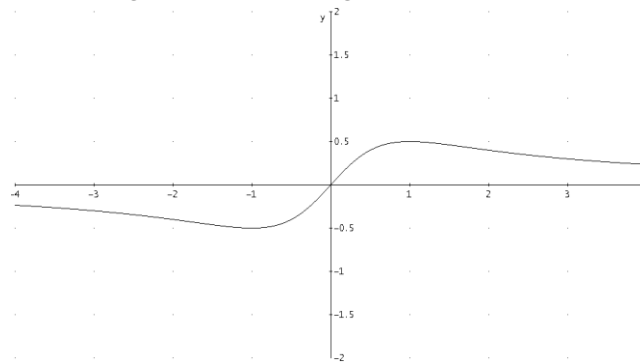
Penyelesaian:

- Menentukan daerah asal, karena untuk setiap x , nilai $x^2 + 1 \neq 0$ maka daerah fungsi adalah \mathbb{R} .
- Menentukan kesimetrian grafik, karena $f(-x) = -f(x)$ maka fungsi tersebut adalah fungsi ganjil, karena itu grafiknya akan simetri terhadap titik asal.
- Tabel nilai karena sudah diperiksa kesimetrian grafik maka tabel nilai yang diperlukan adalah

Tabel 2.11: Titik-titik Fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| $f(x)$ | 0 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |

Grafik fungsi f adalah sebagai berikut



Gambar 2.29: Grafik Fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

6). Periksalah bahwa $\frac{1}{\sin t \cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \tan t$

Penyelesaian:

$$\frac{1}{\sin t \cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \tan t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 t}{\sin t \cos t} = \tan t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t \cos t} = \tan t$$

7). Tuliskanlah $\sin 3t$ dalam bentuk t (petunjuk: $3t = 2t + t$)

Penyelesaian:

$$\sin 3t = \sin (2t + t)$$

$$\Leftrightarrow = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t$$

$$\Leftrightarrow = 2 \sin t \cos t \cos t + (1 - 2 \sin^2 t) \sin t$$

$$\Leftrightarrow = 2 \sin t \cos^2 t + \sin t - 2 \sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow = 2 \sin t (1 - \sin^2 t) + \sin t - 2 \sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$$

Soal-soal Latihan 10:

1) Tentukan daerah asal fungsi berikut.

a. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

b. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|2x+3|}$

c. $g(x) = \sqrt{4+x^2}$

d. $h(x) = \frac{x+1}{x}$

2) Misalkan f fungsi dengan $f(t) = \frac{|t|}{t}$

a. Tulis fungsi f dengan tanpa tanda nilai mutlak

b. Selidiki, apakah f fungsi genap, ganjil atau tidak keduanya

c. Sketsa grafik fungsi f

3) Nyatakan apakah masing-masing yang berikut berupa suatu fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak satupun, buktikan pernyataan anda.

a. Jumlah dua fungsi genap

b. jumlah dua fungsi ganjil

c. Hasil kali dua fungsi genap

d. Hasil kali dua fungsi ganjil

- e. Hasil kali fungsi genap dan fungsi ganjil
- 4) Nyatakan apakah fungsi berikut berupa fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak satupun. Jelaskan jawaban anda.
- $f(x) = \sec x$
 - $f(x) = x \sin x$
 - $f(x) = \sin x$
 - $f(x) = \csc x$
 - $f(x) = x \cos x$
 - $f(x) = \sin x + \cos x$
- 5) Sketsalah grafik-grafik dari fungsi berikut pada $[-\pi, \pi]$.
- $y = \csc t$
 - $y = \cos t$
 - $y = 2 \cos t$
- 6) Tulislah aturan fungsi berikut ke dalam bentuk tanpa tanda nilai mutlak dan gambar grafiknya.
- $f(x) = \sin |x|$
 - $f(x) = -\cos |x|$
 - $g(x) = |\cos x|$
 - $g(x) = |\sin x|$
- 7) Diketahui $f(x) = \frac{1-x}{x}$ dan $g(x) = \frac{x}{1+x}$. Tentukan aturan fungsi $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ dan $\frac{g}{f}$ beserta daerah asalnya.
- 8) Jelaskan untuk benar atau salahnya pernyataan berikut.
- Persamaan $xy^2 + x^2 = 3x$ menentukan suatu fungsi dengan rumus berbentuk $y = f(x)$
 - Daerah asal dari $f(x)$ adalah $\sqrt{\frac{8}{4-x}}$ selang $[0,4]$

- c. Daerah hasil dari fungsi f dengan $f(x) = x^2 - 6$ adalah selang $[-6, \infty]$.
- d. Fungsi f dengan $f(x) = \frac{2x^2 + x}{4 - x}$ adalah selang $[0, 4]$
- e. jika daerah hasil suatu fungsi hanya terdiri dari satu bilangan, maka daerah asalnya juga hanya terdiri dari satu bilangan.
- f. Jika daerah asal suatu fungsi memuat paling sedikit dua bilangan, maka daerah hasilnya juga memuat paling sedikit dua bilangan.
- g. Jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x^3$, maka $g \circ f = f \circ g$.
- h. Jika f dan g mempunyai daerah yang sama misalkan D , maka $\frac{f}{g}$ juga mempunyai daerah asal D .

Bab Tiga

Limit



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) menguak bahwa arah semua perkembangan ilmu modern terletak dalam membangun keteraturan simetri dan harmoni, sifat yang berkenaan dengan ketajaman berbanding menangani masalah tunggal

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa dapat:

1. Memahami limit fungsi dan menentukan limit fungsi di suatu titik, limit sepihak
2. Memahami dan dapat menerapkan teorema limit fungsi
3. Memahami limit fungsi trigonometri dan dapat menerapkannya dalam penyelesaian soal-soal yang bersesuaian

3.1 Pendahuluan

Kalkulus diferensial dan integral dibangun dan dikembangkan dengan mendasarkan diri kepada konsep limit fungsi yang dikenal sebagai suatu proses takhingga dan merupakan suatu cara khusus dari kalkulus. Jika diketahui sebuah fungsi yang mempunyai peubah bebas mendekati suatu titik tertentu, yang mempunyai arti bahwa peubah bebas mempunyai jarak yang semakin lama semakin kecil ke suatu titik tertentu, maka nilai peubah tergantung akan mendekati suatu titik tertentu, apakah membesar, mengecil, menuju positif atau negatif dan bahkan menuju ke takhingga.

Permasalahan yang dikemukakan sebagaimana uraian tersebut dikaji dalam limit fungsi sebagaimana diuraikan dalam pembahasan berikut.

Perkataan limit sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari, namun tidak banyak kaitannya dengan kalkulus, misalnya, penyelesaian tugas mata kuliah kalkulus mendekati tahap akhir, skripsi saya sudah mendekati penyelesaian. Kata-kata mendekati merupakan pengukuran kata limit dalam kehidupan sehari-hari.

Pemahaman limit secara intuitif dapat dijelaskan sebagai berikut, pandang fungsi yang ditentukan oleh rumus berikut:

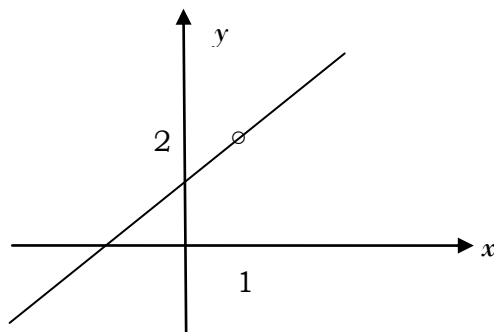
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Perhatian bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi untuk $x = 1$, karena tidak $f(x)$ berbentuk $0/0$, bentuk ini tanpa arti. Tetapi masih dapat dikonsultasikan kepada $f(x)$ jika x mendekati 1. Untuk memperoleh jawaban dari kondisi tersebut ada dua hal yang dapat dilakukan, yaitu; a) menghitung nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1; b) membuat sketsa grafik $y = f(x)$.

Tabel 3.1: Nilai $f(x)$

| x | $f(x)$ |
|-------|--------|
| 1,200 | 2,200 |
| 1,100 | 2,100 |
| 1,050 | 2,050 |
| 1,001 | 2,001 |
| ↓ | ↓ |
| 1,000 | ? |
| ↑ | ↑ |
| 0,999 | 1,999 |
| 0,950 | 1,950 |
| 0,900 | 1,900 |
| 0,800 | 1,800 |

Berdasarkan tabel nilai tersebut grafik $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1: Grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Gambar 3.1 memberikan informasi bahwa jika x mendekati 1, maka $f(x)$ mendekati 3, kondisi tersebut secara matematika dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 3.

Penyelesaian soal tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan manipulasi aljabar, mencari faktor-faktornya kemudian disederhanakan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Memperhatikan uraian di atas dapat diperhatikan bahwa nilai $(x - 1)/(x - 1) = 1$ untuk $x \neq 1$, dan untuk menegaskan pemahaman tentang limit, perhatikan definisi berikut:

Definisi :

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat tetapi tidak sama dengan c , maka $f(x)$ dekat ke L .

Sebagai contoh, untuk $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, maka $f(x)$ tidak terdefinisi di $x = 1$, namun untuk x mendekati 1 dapat diperoleh nilainya.

3.2 Limit Fungsi di Satu Titik

Suatu fungsi f dikatakan mendekati suatu nilai L untuk x mendekati a , jika $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L dengan

cara membuat x cukup dekat ke a . Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

atau

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow L \text{ atau } f(x) \rightarrow L \Rightarrow x \rightarrow a$$

Contoh 1:

Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 7)$

Penyelesaian :

Jika x dekat ke 4, maka $2x - 7$ dekat ke $2 \cdot 4 - 7 = 1$ dan ditulis

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 7) = 1$$

Contoh 2:

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} x^3$

Penyelesaian :

Jika x dekat ke 3, maka x^3 dekat ke $3^3 = 27$, ditulis $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$

Contoh 3:

Carilah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = (\sqrt{1}+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Contoh 4:

Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

Contoh 5 :

Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x + 3} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Contoh 6

Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - 1 \rfloor$

Penyelesaian :

$\lfloor x \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Berdasarkan definisi tersebut dapat dikatakan, $\lfloor x - 1 \rfloor = n$, jika $n \leq x - 1 < n + 1 \Leftrightarrow n + 1 \leq x < n + 2$, n anggota bilangan bulat.

$$n = -2 \Rightarrow \llbracket x-1 \rrbracket = -2, \text{ untuk } -1 \leq x < 0$$

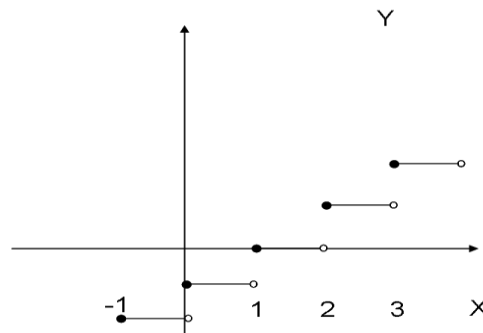
$$n = -1 \Rightarrow \llbracket x-1 \rrbracket = -1, \text{ untuk } 0 \leq x < 1$$

$$n = 0 \Rightarrow \llbracket x-1 \rrbracket = 0, \text{ untuk } 1 \leq x < 2$$

$$n = 1 \Rightarrow \llbracket x-1 \rrbracket = 1, \text{ untuk } 2 \leq x < 3$$

$$n = 2 \Rightarrow \llbracket x-1 \rrbracket = 2, \text{ untuk } 3 \leq x < 4$$

Grafik fungsi tersebut jika digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.2: Grafik fungsi $f(x) = \llbracket x-1 \rrbracket$

Berdasarkan gambar 3.2 dapat diperoleh keterangan bahwa untuk semua x yang lebih kecil 2 dan lebih besar atau sama dengan 1 diperoleh $\llbracket x-1 \rrbracket = 0$, untuk semua x yang lebih kecil 3 dan lebih besar atau sama dengan 2 diperoleh $\llbracket x-1 \rrbracket = 1$. Dengan demikian tidak ada bilang L sedemikin hingga $\llbracket x-1 \rrbracket$ dekat ke L jika x ke 2, sehingga dapat diambil kesimpulan $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x-1 \rrbracket$ tidak ada.

Soal-soal Latihan 11:

Cari limit yang ditunjukkan untuk soal No. 1 hingga 12.

1). $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 9)$

2). $\lim_{x \rightarrow 1} \lfloor 3x - 2 \rfloor$

3). $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 3x + 2)$

4). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x^2 - 1}{2x^2 + 5}$

5). $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x} + 7 \right)$

6). $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9}$

7). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - x^2}{x^2 + 2x - 4}$

8). $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 3}{x^4 - 1}$

9). $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x - 3}$

10). $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor 2x \rfloor$

11). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x}$

12). $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4}$

Hitunglah limit untuk soal 13 hingga 26 (petunjuk: gunakan operasi aljabar terlebih dahulu untuk menyederhanakan pecahan)

13). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

14). $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x - 4}{x - 3}$

$$15). \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$$

$$16). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

$$17). \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

$$18). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$$

$$19). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$$

$$20). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$21). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

$$22). \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x + 2}$$

$$23). \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$$

$$24). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$$

$$25). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 4}$$

$$26). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 2x}$$

27). Sketsa grafik dari

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing yang berikut atau nyatakan jika ada.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- b. $f(1)$
- c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- d. $f(0)$

28). Sketsalah grafik fungsi f jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x < 3 \\ 1 - x, & x \geq 3 \end{cases}$$

Kemudian carilah nilai untuk masing-masing soal yang berikut dan uraikan alasan jawabannya.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- c. $f(1)$
- d. $f(3)$

29). Sketsalah grafik $f(x) = \frac{x}{|x|}$, kemudian carilah nilai untuk masing-masing yang berikut serta beri alasan.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c. $f(1)$
- d. $f(0)$

30). Berilah alasan mengapa fungsi-fungsi berikut tidak mempunyai limit di titik yang ditunjuk

- a. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ x + 1, & 1 \leq x < 5 \end{cases}$ di $x = 1$
- b. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$ di $x = 0$

3.3 Limit-limit Sepihak

Jika suatu fungsi mempunyai lompatan, yang bermakna tidak kontinyu sebagaimana grafik dari $f(x) = \llbracket x \rrbracket$, maka limit tidak ada pada setiap titik lompatan.

Definisi :

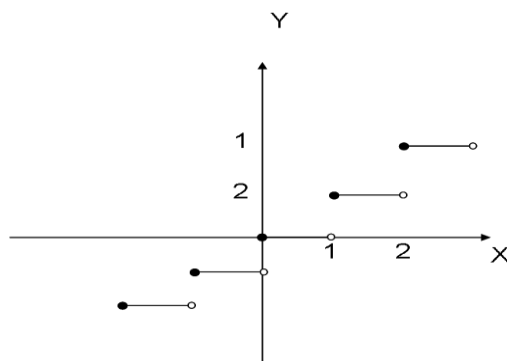
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$, mempunyai arti bahwa jika x dekat dan di sebelah kanan c , maka $f(x)$ adalah dekat ke L , demikian juga untuk $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat dan di sebelah kiri c , maka $f(x)$ dekat ke L .

Contoh 1 :

Hitung $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$

Penyelesaian :

$y = \llbracket x \rrbracket$ dapat dibuat sketsa grafiknya sebagai berikut:



Gambar 3.3: Grafik fungsi $y = \llbracket x \rrbracket$

Fungsi $\llbracket x \rrbracket$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x , sehingga untuk semua bilangan x yang lebih kecil dari 2 dan lebih besar atau sama dengan 1, maka $\llbracket x \rrbracket = 1$ dan semua bilangan yang lebih besar atau sama dengan 2 dan lebih kecil dari 3, maka $\llbracket x \rrbracket = 2$.

Berdasarkan kenyataan tersebut dapat dilihat bahwa limit fungsi $\llbracket x \rrbracket$ untuk x mendekati 2 dari kiri nilai 1 dan limit fungsi $\llbracket x \rrbracket$ untuk x mendekati 2 dari kanan nilainya 2, sehingga tidak pernah diperoleh nilai L yang tunggal, dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa nilai limit dari kiri tidak sama dengan nilai limit dari kanan. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$ tidak ada.

Kenyataan tersebut jika ditulis dalam bentuk limit kiri dan limit kanan dapat ditulis sebagai berikut:

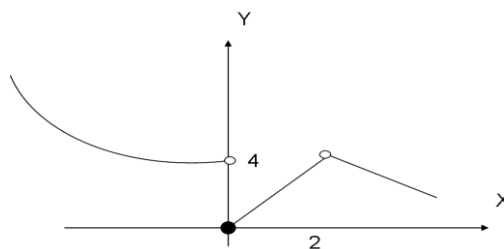
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket = 2$$

Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Contoh 2 :

Cari nilai limit yang ditunjukkan atau nilai fungsi yang dinyatakan dalam soal untuk grafik fungsi sebagaimana berikut dan berikan alasan dari jawaban yang ditemukan.



- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- e. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- f. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Penyelesaian :

- a. Jika x mendekati 0 dari kiri, maka $f(x)$ dekat ke 4 ditulis

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$$
- b. Jika x mendekati 0 dari kanan, maka $f(x)$ dekat ke 0 ditulis

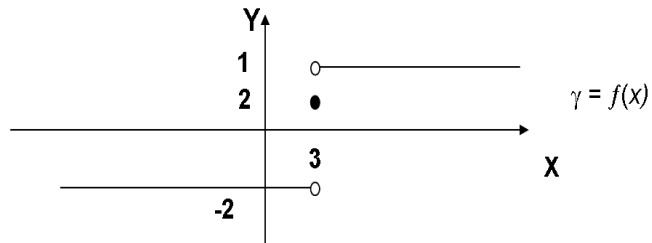
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$
- c. Karena $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ tidak ada
- d. Jika x mendekati 2 dari kiri, maka $f(x)$ dekat ke 4 ditulis

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$
- e. Jika x mendekati 2 dari kanan, maka $f(x)$ dekat ke 4 ditulis

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$
- f. Karena $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, maka $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

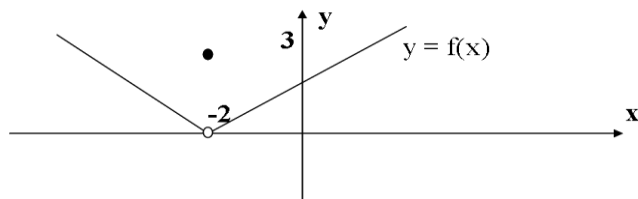
Soal-soal Latihan 12:

- 1). Carilah limit pada soal berikut dengan mendasarkan pada grafik yang ditentukan.
 - a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 - c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
 - d. $f(3)$



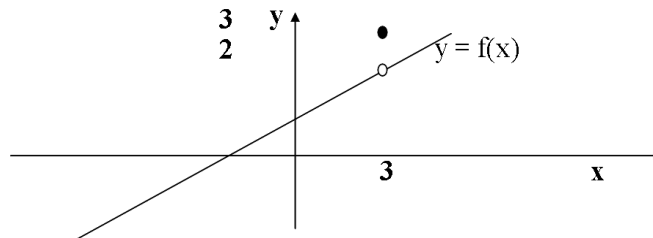
2). Cari limit fungsi soal-soal berikut dengan memperhatikan grafik yang diketahui

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $f(-2)$



3). Carilah limit fungsi soal-soal berikut berdasarkan grafik yang diketahui.

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $f(3)$



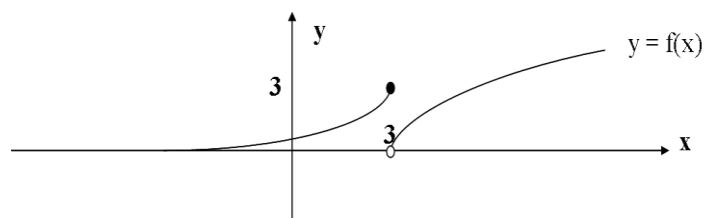
4). Carilah limit fungsi soal-soal berikut berdasarkan grafik yang diketahui:

a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

d. $f(3)$



Carilah limit dari soal No.5 hingga 22

5). $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \sqrt{x})$

6). $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \sqrt{x})$

7). $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \sqrt{x^2 - 4}$

8). $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2 - \sqrt{x^2 - 9}$

9). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 - 4}$

- 10). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 - 9}$
- 11). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 - 4}$
- 12). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - \lfloor x \rfloor}$
- 13). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$
- 14). $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$
- 15). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$
- 16). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$
- 17). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$
- 18). $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|} \right)$
- 19). $\lim_{x \rightarrow 3^3} (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor)$
- 20). $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$
- 21). $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$
- 22). $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor)$

23). Diketahui fungsi sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 2x - 3 - 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

a. Sketsa grafik fungsi tersebut

- b. Carilah $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $f(2)$
 c. Carilah $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $f(1)$
 24). Diketahui fungsi sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 - 1, & 0 < x < 1 \\ x^2 + 1, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

- a. Sketsa grafik fungsi tersebut
 b. Carilah $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $f(0)$
 c. Carilah $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $f(1)$
 d. Carilah $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $f(2)$
 25). Diketahui fungsi sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ |2x - 2|, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

- a. Sketsa grafik fungsi tersebut
 b. Carilah $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $f(0)$
 c. Carilah $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $f(2)$

3.4 Teorema Limit

Teorema limit berikut dapat dibuktikan berdasarkan definisi limit, teorema dan berbagai manipulasi aljabar serta analisis.

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi limit di c , maka

- 1 $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- 2 $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- 3 $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- 4 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 5 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 6 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 7 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- 8 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
- 9 $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ jika n genap
- 10 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, jika $f(x)$ adalah fungsi polinom atau fungsi rasional (dengan syarat penyebutnya tidak sama dengan nol di c)

Contoh 1:

Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} (2x^3 + 5x)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} (2x^3 + 5x) &= \lim_{x \rightarrow 4} 2x^3 + \lim_{x \rightarrow 4} 5x \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 4} x^3 + 5 \lim_{x \rightarrow 4} x \\
 &= 2 \cdot 64 + 5 \cdot 4 = 148
 \end{aligned}$$

Contoh 2 :

Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 3x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 3x} \\
&= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 3} x} \\
&= \sqrt{[\lim_{x \rightarrow 3} x]^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 3} x} \\
&= \sqrt{3^2 + 3 \cdot 3} \\
&= \sqrt{18}
\end{aligned}$$

Contoh 3 :

Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x^2 + 6x}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x^2 + 6x} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 + 6x)} \\
&= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 6x} \\
&= \sqrt[3]{2 \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 6 \lim_{x \rightarrow 4} x} \\
&= \sqrt[3]{2[\lim_{x \rightarrow 4} x]^2 + 6 \lim_{x \rightarrow 4} x} \\
&= \sqrt[3]{2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4} \\
&= \sqrt[3]{32 + 24} \\
&= \sqrt[3]{56}
\end{aligned}$$

Soal-soal Latihan 13:

Gunakan teori limit untuk menyelesaikan soal-soal No.1 hingga 18.

- 1). $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x)$
- 2). $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 8)$

$$3). \lim_{x \rightarrow 5} (6x^3 + 2)$$

$$4). \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x - 1)$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2)(x - 4)$$

$$6). \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 1)(x^2 + 1)$$

$$7). \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 3}$$

$$8). \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^3 + 2x}$$

$$9). \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 3}$$

$$10). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{\sqrt{x}}$$

$$11). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3}{\sqrt{x - 4}}$$

$$12). \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x} + 2}{x^2 - 1}$$

$$13). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt{x}}$$

$$14). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 4)^2}{\sqrt{x}^2}$$

$$15). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

$$16). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)^3}{\sqrt{x - 2}}$$

$$17). \lim_{x \rightarrow 3} [x^2 - 3x]^{\frac{1}{3}}$$

$$18). \lim_{x \rightarrow 2} [\sqrt{x^2 - 4}]^3$$

Cari limit soal No 19 hingga 24 jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -1$

$$19). \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$$

$$20). \lim_{x \rightarrow c} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$$

$$21). \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{g(x)} [f(x) + 3]$$

$$22). \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - 3]^5$$

$$23). \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (x - c)g(x)]$$

$$24). \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + 3g(x)]^3$$

Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x - 2)}$ untuk setiap fungsi yang diberikan:

$$25). f(x) = 5x^2$$

$$26). f(x) = 3x^2 - 5$$

$$27). f(x) = \frac{1}{x}$$

$$28). f(x) = \frac{3}{x}$$

$$29). f(x) = x^2 - 2$$

$$30). f(x) = \frac{5}{x^2}$$

3.5 Limit-limit Tak Hingga

Limit tak hingga terjadi jika $f(x)$ membesar atau mengecil tanpa batas, demikian juga untuk peubah x yang membesar atau mengecil tanpa batas, sehingga aktivitas limit ini melibatkan lambang ∞ dan $-\infty$. Pernyataan tersebut memaparkan adanya dua konsep limit tak hingga. Konsep pertama menggambarkan tentang limit fungsi di titik c untuk fungsi f yang terdefinisi pada interval yang memuat c , dalam hal ini kemung-kinannya ada dua sebagaimana berikut:

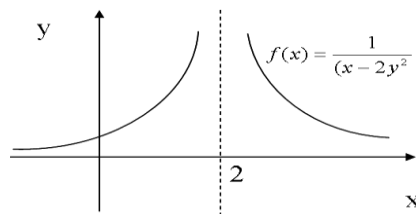
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \text{ atau } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Konsep kedua adalah limit fungsi f dimana peubah membesar tanpa batas ($x \rightarrow \infty$) atau untuk peubah x mengecil tanpa batas ($x \rightarrow -\infty$) yang dikenal dengan limit di tak hingga, dalam hal ini kemungkinannya adalah

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

3.5.1 Limit Tak Hingga

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$



Gambar 3.4: Grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Berdasarkan grafik 3.4 terlihat bahwa jika x cukup dekat ke 2 maka $f(x)$ membesar tanpa batas artinya $f(x)$ dapat lebih besar dari setiap bilangan positif M sebarang x sangat dekat dengan 2. Pernyataan di atas mempunyai arti bahwa untuk setiap bilangan positif M sebarang terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku $f(x) > M$ untuk

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty, \text{ secara matematis dapat ditulis dengan}$$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dikemukakan definisi limit tak hingga :

Definisi :

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \text{ jika } \forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty \text{ jika } \forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \text{ jika } \forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \text{ jika } \forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < c - x < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty \text{ jika } \forall M > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Teorema:

Misalkan fungsi $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \neq 0$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, maka

1. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \rightarrow 0^+$
2. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \rightarrow 0^-$
3. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \rightarrow 0^+$
4. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \rightarrow 0^-$

Contoh:

Carilah limit berikut:

1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-8}{x^2-5x+6}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-4|}{2x^2-x-6}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 2x^2}{3x^2 - x - 2}$$

Penyelesaian :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 8 = 5 \text{ positif}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3)(x - 2) = 0$$

(dari arah positif, sebab $x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$ dan $x - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$ pada interval $(3^+, +\infty)$, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 8}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 4| = 2 \text{ (positif)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 - x - 6 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 3)(x - 2) = 0$$

dari arah negatif sehingga $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 4|}{2x^2 - x - 6} = -\infty$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} 5x - 2x^2 = 3 \text{ (positif)}$$

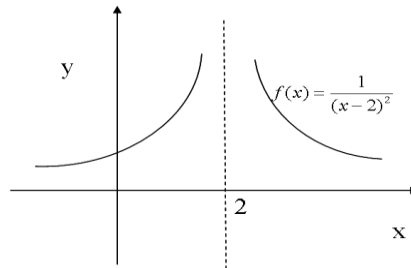
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 - x - 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 2)(x - 1) = 0$$

(dari arah positif, sebab $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ dan $3x + 2 > 0 = 3x^2 - x - 2 > 0$ pada interval $(1^+, +\infty)$, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 2x^2}{3x^2 - x - 2} = +\infty$$

3.5.2 Limit di Tak Hingga

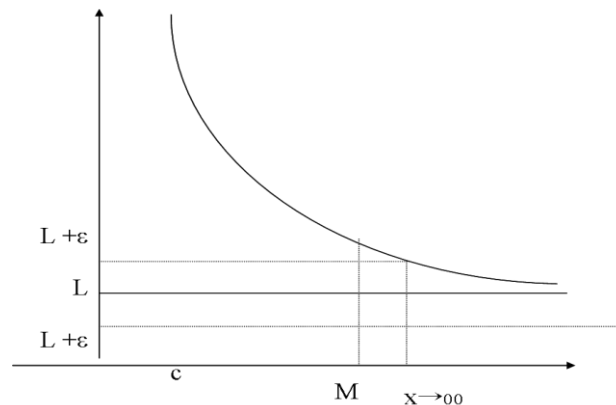
Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$



Gambar 3.5: Grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Nilai $f(x)$ akan mendekati 0 apabila x membesar atau mengecil tanpa batas, dan dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$ atau $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$

Untuk memahami limit di takhingga secara definisi perhatikan ilustrasi berikut :



Gambar 3.6: Grafik Ilustrasi Limit Takhingga

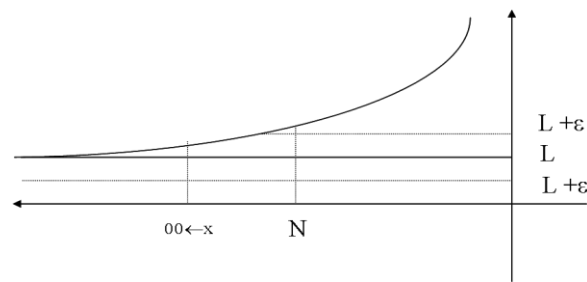
Berdasarkan grafik 3.6 terlihat jika $x > M$, maka $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L atau dapat dikatakan dengan jarak $f(x)$ ke L dapat dibuat lebih kecil dari bilangan positif kecil yang dilambangkan dengan ε . Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat

dikatakan bahwa limit fungsi f di tak hingga sama dengan l dan ditulis secara matematik sebagai berikut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \text{ jika}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Untuk x mendekati negatif tak hingga dapat dikaji dengan ilustrasi berikut :



Gambar 3.7: Grafik Ilustrasi Mendekati Takhingga

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dikemukakan bahwa jika $x < N$, maka $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L . Secara matematika dapat dikemukakan sebagai berikut :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N < 0 \ni x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Beberapa sifat aljabar limit fungsi di tak hingga dapat dikemukakan sebagai berikut :

jika $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ dan $g(x) = M$, maka

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) / g(x)] = L / M$, dengan syarat $M \neq 0$.

Contoh :

Hitunglah limit berikut :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{4x + 1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{4x + 1}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3x + x}$$

Penyelesaian :

a. Untuk $x \rightarrow \infty$ berlaku $x > 0$ sehingga $\sqrt{x^2} = x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{3 + \frac{1}{x}}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{x}}}{\left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

b. Untuk $x \rightarrow -\infty$ berlaku $x < 0$ sehingga $\sqrt{x^2} = -x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt[3]{3 + \frac{1}{x}}}{-x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt[3]{3 + \frac{1}{x}}}{-\left(4 + \frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt[3]{3}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x \frac{\sqrt{x^2 - 3x} - x}{\sqrt{x^2 - 3x} - x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} - x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1 \right)} = \frac{-3}{1} = -3
\end{aligned}$$

Soal-soal Latihan 14:

Hitunglah limit yang ditunjukkan

$$1). \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5}$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 6^+} \sqrt{x - 6}$$

$$4). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 5}$$

- 5). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 9}$
- 6). $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2}$
- 7). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2}$
- 8). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$
- 9). $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5 - x} - 5}{x - 5}$
- 10). $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x}{x - 7}$
- 11). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10 - \sqrt{x^2 + 1}}}{x - 3}$
- 12). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 17x}{4x^3 + 1}$
- 13). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x}{x^2}$
- 14). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 7}{x^2 + 2x}$
- 15). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$
- 16). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$
- 17). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$
- 18). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4}$
- 19). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$

$$20). \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$$

$$21). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

$$22). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{3x + 5}$$

$$23). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x + 9}$$

$$24). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 7}{3x + 50}$$

$$25). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^3 + 5}$$

$$26). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{x^2}$$

$$27). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$28). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[4]{x}}$$

$$29). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \sqrt[3]{8x}}{4 - \sqrt[3]{8x}}$$

$$30). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{5x + 2}$$

$$31). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 9}}{x - 2}$$

$$32). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x + 5}$$

$$33). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{\sqrt{x^5 - 4x^2}}$$

$$34). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$35). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4-x^2)(\sqrt{x^2+2})}{3x^3-9x+8}$$

$$36). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3+3x^2+2)(5x-6)}{(x^2+2x+1)(4-x^2)}$$

$$37). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2-5)\sqrt{x^2+4x+1}}{(4x-3)\sqrt{9x^2+3x^2+1}}$$

$$38). \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$39). \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+1}-2x)$$

$$40). \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$$

$$41). \lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{x^2+x})$$

$$42). \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x+2}-x)$$

$$43). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}{x} \right)$$

$$44). \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$45). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\lceil x \rceil}$$

$$46). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\lceil x \rceil}$$

$$47). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$48). \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 2x} \right)$$

$$49). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x}}$$

50). Tentukan konstanta a agar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 1}}{x + 3} = 4$$

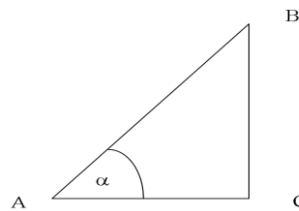
51). Tentukan konstanta a agar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + 2} - 2x - 1 \right) \text{ ada, kemudian hitunglah limitnya}$$

untuk konstanta a tersebut.

3.6 Limit Fungsi Trigonometri

Sebelum mempelajari limit fungsi trigonometri terlebih dahulu dipaparkan kembali definisi fungsi trigonometri sebagai berikut :



$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \cos \alpha = \frac{AC}{AB}, \tan \alpha = \frac{BC}{AC}$$

Gambar 3.8: Segitiga Siku-siku ABC

Ukuran sudut yang digunakan dalam pembahasan limit fungsi trigonometri dalam bentuk radian. Sebagai alat untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri dikemukakan kesamaan trigonometri sebagai berikut :

1. Kesamaan ganjil-genap

$$\sin (-x) = -\sin x$$

$$\cos (-x) = \cos x$$

$$\tan (-x) = -\tan x$$

2. Kesamaan fungsi

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$$

3. Kesamaan Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

4. Kesamaan Penjumlahan dan Pengurangan

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

5. Kesamaan sudut ganda

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

6. Kesamaan setengah sudut

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Teorema :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (buktikan dari teorema ini sebagai latihan)}$$

Contoh 1 :

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \cdot 3x}{7x \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{3}{7}$$

Contoh 2:

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Soal-soal Latihan 15:

1). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$

2). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$

3). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$

4). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 8x}$

5). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$

6). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

7). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

$$8). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

$$9). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}$$

$$10). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$11). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x}$$

$$12). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\cos 7x - 1}$$

$$13). \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$14). \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$15). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$16). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$17). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cos x}$$

$$18). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$19). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$$

$$20). \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{x - 1}$$

21). Jika f dan g adalah fungsi sedemikian hingga $0 \leq f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dekat ke c . Jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, dibuktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$,

22).Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{2} x = 0$,

(Petunjuk : gunakan teorema apit)

23).Jika $f(x) = a \sin p(x)$ dengan $p(x)$ adalah suku banyak.

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq |a, \forall c \in \mathbb{R}|$

24).Misalkan $f(x) = \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{2}), x < \frac{\pi}{2} \\ a \cos x + b \sin x, \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \sin 2x, x \geq \pi \end{cases}$

Tentukan a dan b agar f mempunyai limit di $\frac{\pi}{2}$ dan di π .

25).Buktikan bahwa :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$

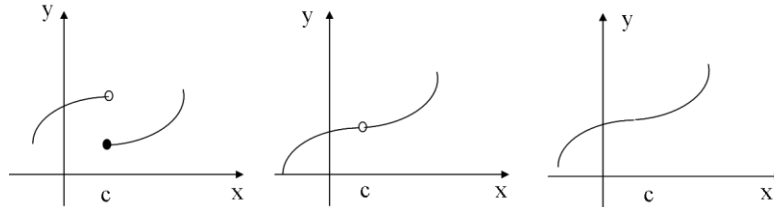
c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \frac{3}{2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = 2$

3.7 Kekontinuan Fungsi

Kata kontinu sering digunakan untuk menunjukkan suatu kegiatan yang berkelanjutan tanpa adanya suatu perubahan yang mendadak. Pemahaman demikian sebagai ide yang diterapkan pada fungsi. Perhatikan tiga grafik berikut:



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ tidak ada} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ ada} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Gambar 3.9: Ilustrasi Limit pada Grafik

Definisi :

Fungsi f dikatakan kontinu di c jika ada interval terbuka di sekitar c termuat dalam daerah asal f dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Dengan definisi diatas terdapat tiga hal :

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada (fungsi f terdefinisi di c)
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Ketiga hal tersebut merupakan syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi kontinu di suatu titik, jika ada satu syarat yang tidak terpenuhi, maka fungsi tersebut tidak dapat dikatakan kontinu.

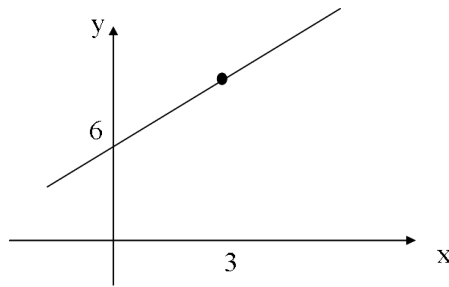
Contoh:

Andaikan $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, x \neq 3$, bagaimana seharusnya f didefinisikan di $x = 3$ agar kontinu di titik tersebut?

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

karena $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$, maka didefinisikan $f(3) = 6$ dan grafik yang dihasilkan dapat dihasilkan dapat diperlihatkan seperti gambar berikut :



Gambar 3.10: Grafik Fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$

Contoh 2 :

Periksalah kekontinuan fungsi berikut di $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$
2. Berdasarkan definisi fungsi tersebut di atas dapat ditentukan $f(2) = 4$
3. Dari syarat 1 dan 2 diperoleh keterangan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, jadi dapat disimpulkan bahwa fungsi tersebut kontinu di $x = 2$

Soal-soal Latihan 16:

Nyatakan apakah fungsi yang ditunjukkan kontinu atau tidak di $x = 2$, jika tidak kontinu jelaskan sebabnya untuk soal-soal No. 1 hingga 14

1). $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

2). $f(x) = \frac{8}{x-2}$

3). $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$

4). $f(x) = \sqrt{x-1}$

5). $f(x) = \sqrt{x-3}$

6). $f(x) = |3 - 5x^2|$

7). $f(x) = \lfloor x \rfloor$

8). $f(x) = \lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor$

9). $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

10). $f(x) = \frac{4x - 8}{x - 2}$

11). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$

12). $f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

13). $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

14). $f(x) = \begin{cases} -3x + 4, & x \leq 2 \\ -2, & x > 2 \end{cases}$

Tentukanlah titik-titik diskontinu fungsi yang diketahui (jika ada), untuk soal-soal No. 15 hingga 20

15). $f(x) = \lfloor x \rfloor$

16). $f(x) = \lfloor x \rfloor - x$

17). $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasional} \\ -x, & x \text{ irrasional} \end{cases}$

18). $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

19). $f(x) = \sec x$

20). $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 3}$

21). Jika $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, adalah bilangan $x \in D$, yang mengakibatkan fungsi f diskontinu. Jelaskan !

22). Sketsalah grafik fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut :

- Daerah asalnya $[2, -2]$
- $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$
- Diskontinu di -1 dan 1
- Kontinu kanan di -1 dan kontinu kiri di 1

23). Sketsa grafik fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut :

- Daerah asalnya $[0, 6]$
- $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$
- f kontinu di $x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$

3.7.1. Sifat Kekontinuan

Suatu fungsi yang kontinu memenuhi aturan limit sebagaimana dipaparkan di depan, sehingga sifat kekontinuan fungsi juga diturunkan dari sifat-sifat limit.

Teorema :

1. Jika f fungsi polinom, maka kontinu pada setiap bilangan real c
2. Jika fungsi rasional, maka f kontinu pada daerah asalnya
3. Jika fungsi mutlak, maka f kontinu pada setiap bilangan real c
4. Jika n bilangan bulat ganjil dan f adalah fungsi akar ke- n dari x , maka f kontinu pada setiap bilangan real c
5. Jika n bilangan bulat genap dan f fungsi akar ke- n dari x , maka f kontinu pada setiap bilangan real positif c .

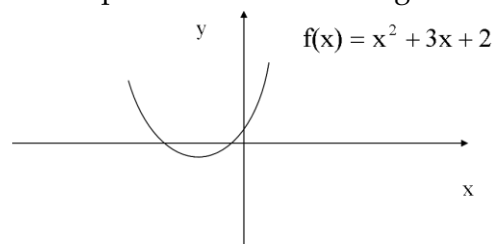
Contoh :

Tentukan apakah fungsi-fungsi berikut kontinu atau tidak :

- a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- b. $f(x) = |x|$
- c. $f(x) = \sqrt{x}$
- d. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

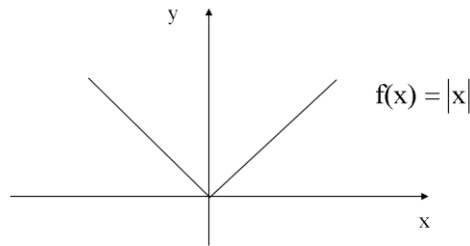
Penyelesaian :

- a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ merupakan fungsi polinom, menurut teorema di atas, maka fungsi ini kontinu di setiap bilangan real
- c. Secara grafik dapat dikemukakan sebagai berikut :



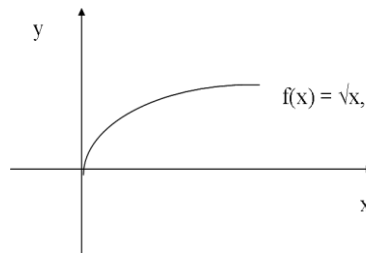
Gambar 3.11: Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + 3x + 2$

- b. $f(x) = |x|$, adalah fungsi harga mutlak, menurut teorema di atas fungsi harga mutlak selalu kontinu pada setiap bilangan real c , secara grafik dapat digambarkan sebagaimana berikut:



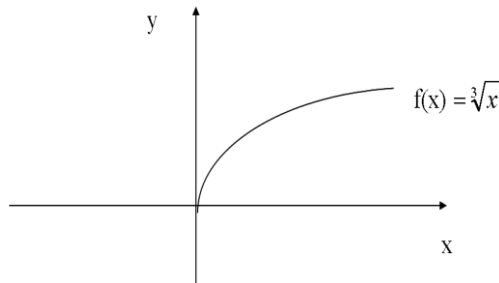
Gambar 3.12: Grafik Fungsi $f(x) = |x|$

- c. $f(x) = \sqrt[n]{x}$, sesuai dengan teorema ke lima di atas, jika n bilangan bulat genap dan f fungsi akar ke- n dari x , maka f kontinu pada setiap bilangan real positif c . Grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.13: Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

- d. Teorema yang berbunyi jika n bilangan bulat ganjil dan f adalah fungsi akar ke- n dari x , maka f kontinu pada setiap bilangan real c sesuai untuk fungsi $f(x) = \sqrt[n]{x}$, sehingga dapat dikatakan bahwa fungsi tersebut kontinu disetiap bilangan real c . Grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14: Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. Jika n bilangan bulat genap dan f fungsi akar ke- n dari x , maka f kontinu pada setiap bilangan real positif c . Jika f dan g kontinu di c dan k suatu konstanta, maka $kf, f+g, f-g, f \cdot g, f/g$ adalah kontinu dengan :
- syarat $g(c) \neq 0$
 - $f^n, f^{1/n}$ untuk n genap $f(c) > 0$.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $k(x) = |x^2 + 5x + 4|$ kontinu di setiap bilangan real.

Penyelesaian :

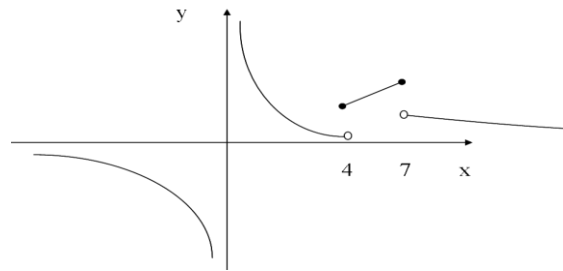
Misalkan $f(x) = |x|$ dan $g(x) = x^2 + 5x + 4$ keduanya kontinu disetiap bilangan real, sebab $f(x)$ adalah fungsi harga mutlak dan $g(x)$ adalah fungsi polinom, sehingga $f \circ g = f(g(x)) = |x^2 + 5x + 4| = k(x)$ adalah kontinu disetiap bilangan real.

Definisi :

- Jika f kontinu di setiap titik (a, b) , maka dikatakan bahwa f kontinu pada selang terbuka (a, b) .
- Jika f kontinu pada (a, b) dan kontinu kanan di a , demikian juga kontinu pada selang tertutup $[a, b]$.

Contoh:

Menggunakan definisi di atas uraikan sifat-sifat kekontinuan dari fungsi yang grafiknya sebagaimana berikut :



Gambar 3.15: Grafik Fungsi Kekontinuan

Penyelesaian:

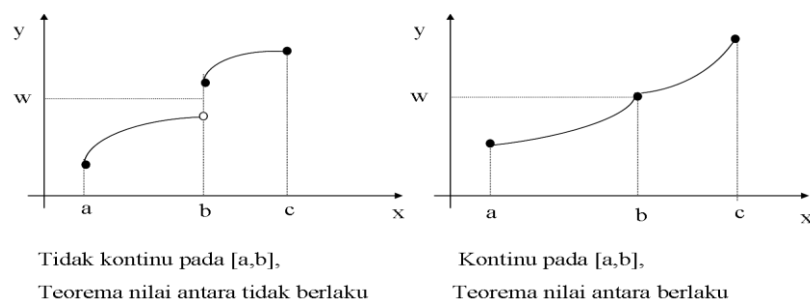
Fungsi tersebut kontinu pada selang

$(-\infty, 0), (0, 4), [4, 7], (7, \infty)$.

Teorema Nilai Antara:

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan jika w sebuah bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat sebuah bilangan c diantara a dan b sedemikian ingá $f(c) = w$

Sebagai ilustrasi dari teorema tersebut dapat ditunjukkan grafik berikut :



Gambar 3.16: Ilustrasi Kekontinuan Fungsi

Soal-soal Latihan 17:

Periksalah apakah fungsi pada soal No. 1 hingga 15 kontinu pada interval yang ditunjuk

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ di $(0,1)$

2) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ di $(0,1)$

3) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ di $(0,1)$

4) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ di $(0,2)$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ di $(0,2)$

6) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 1 \leq x \end{cases}$ di $(-1,0)$ dan $(0,1)$

7) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ di $(-1,1)$

8) $f(x) = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x - \cos x}$ di $(0, \pi)$

9) $f(x) = \tan x \sin x$ di $x = \frac{3\pi}{4}$

10) $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$ di $x=1$

11) $f(x) = \frac{1}{2}$, di $(0,1)$

12) $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$, di $(2,3)$

13) $f(x) = |x-1|$ di $(-1,1)$

$$14) f(x) = |2x| + \frac{1}{x}, \text{ di } (0,2)$$

$$15) f(x) = |2x-1| \text{ di } (0,3)$$

Untuk soal no 16-20 buktikan bahwa fungsi tersebut kontinu pada daerah asalnya

$$16) f(x) = |2x-5|$$

$$17) f(x) = 2x|x-1|$$

$$18) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$19) f(x) = x + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

20) Gunakan teorema nilai antara untuk membuktikan bahwa:

- a. $x^3 + 3x - 2 = 0$ mempunyai akar antara 0 dan 1
- b. $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ mempunyai paling sedikit satu akar antara 2 dan 3
- c. $x^2 - 4x + 5 = 0$ mempunyai akar antara -2 dan 0
- d. $3x^5 - x - 1 = 0$ mempunyai akar antara 0 dan 1
- e. $2x^6 + 4x^3 - 2x - 1 = 0$ mempunyai akar antara 0 dan 1

21) Jika f fungsi kontinu pada interval I , buktikan bahwa fungsi $[f]$ juga kontinu pada I

22) Misalkan f, g dan h tiga fungsi sedemikian hingga $f < g < h$. Jika f dan h kontinu di c . Buktikanlah bahwa g juga kontinu di c

23) Carilah sepasang fungsi f dan g sedemikian hingga f dan g tidak kontinu di c tetapi $f \circ g$ kontinu di c . Dari pasangan fungsi-fungsi itu apakah $g \circ f$ juga kontinu di c .

Bab Empat

Turunan



www.google.com

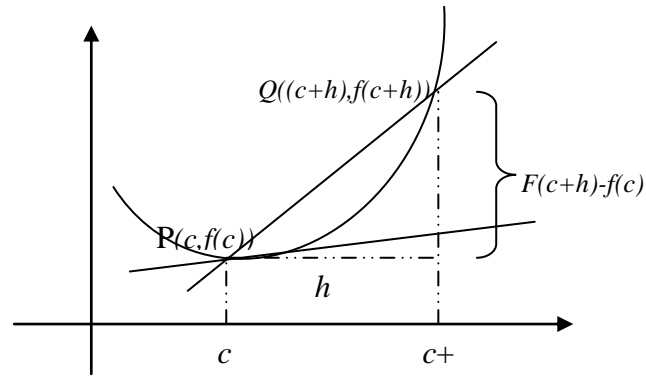
George Friedrich Benhard Riemann (1826-1866) sebagai pengganti *Dirichlet* di *Göttingen*, telah sampai pada orang yang lebih daripada yang lain dalam mempengaruhi jalannya matematika modern

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa dapat:

1. Memahami pengertian turunan dan bentuk-bentuk yang setara untuk turunan
2. Memahami dan menerapkan aturan-aturan pencarian turunan dalam mencari turunan suatu fungsi
3. Memahami turunan fungsi trigonometri dan menerapkan cara penyelesaiannya
4. Memahami dan menerapkan aturan rantai untuk mencari turunan fungsi.
5. Memahami turunan fungsi eksponensial, logaritma, implisit dan parameter serta dan menerapkan aturan-aturannya untuk mencari turunan dari fungsi-fungsi tersebut.

4.1 Pendahuluan



Gambar 4.1: Grafik $y=f(x)$

Misalkan kurva pada gambar 4.1 adalah grafik dengan persamaan $y=f(x)$, dengan titik P mempunyai koordinat $(c, f(c))$, titik Q di dekatnya mempunyai kordinat $(c+h, f(c+h))$, maka garis PQ adalah tali busur yang melalui titik P dan Q yang mempunyai kemiringan m_{sec} yang diberikan oleh:

$$m_{sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

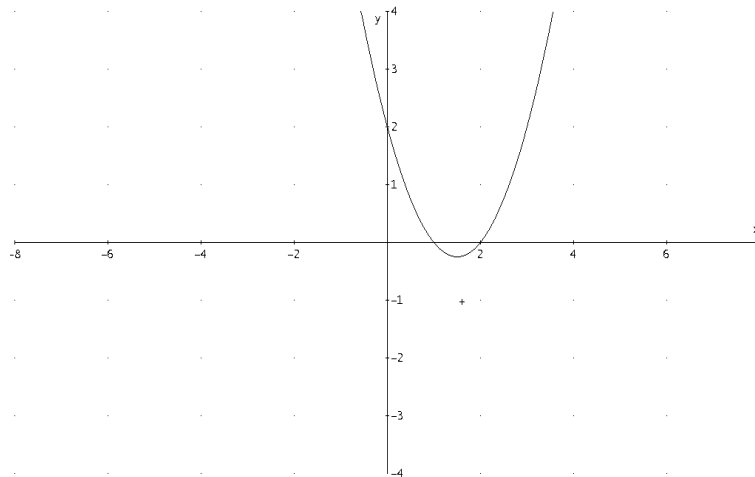
Jika $h \rightarrow 0$, titik P tetap, sedang titik Q bergerak sepanjang kurva menuju P dan garis PQ berputar pada P menuju posisi limitnya, garis singgung PT pada kurva di P mempunyai kemiringan yang diberikan oleh:

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Contoh:

Cari kemiringan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik $x = 2$

Penyelesaian:



Gambar 4.2: Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2$$

$$f(2) = 0$$

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) + 2$$

$$f(2 + h) = h^2 + h$$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2}{h} = h + 1$$

maka:

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 1$$

Jadi kemiringan garis singgung yang melalui titik $P(2,0)$ pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ adalah $m_{\text{tan}} = 1$.

4.2 Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah dapat dituliskan dalam bentuk f' (dibaca f aksen) yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika limit ini ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan di c dan pencarian turunan disebut pendiferensialan.

Contoh 1:

Andaikan $f(x) = x^2 + 2x$ carilah $f'(2)$.

Penyelesaian:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2$$

$$= 8$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h)$$

$$= 4 + 4h + h^2 + 4 + 2h$$

$$= h^2 + 6h + 8$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + 6h + 8 - 8}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 6h}{h} = h + 6$$

maka :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 6 = 6$$

Contoh 2:

Jika $f(x) = x^2 - 3x + 5$, cari $f'(c)$.

Penyelesaian:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$f(c) = c^2 - 3c + 5$$

$$f(c+h) = (c+h)^2 - 3(c+h) + 5$$

$$= c^2 - 3c + 5 + h^2 + 2ch - 3h$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{c^2 - 3c + 5 + h^2 + 2ch - 3h - (c^2 - 3c + 5)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h^2 + 2ch - 3h}{h} \\
 &= h + 2c - 3
 \end{aligned}$$

maka:

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2c - 3 \\
 &= 2c - 3
 \end{aligned}$$

Contoh 3:

Cari $f'(x)$ dari $f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$

Penyelesaian :

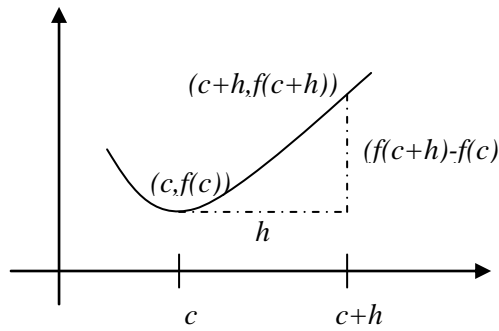
$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= \frac{1}{x+h} \\
 f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \\
 f(x+h) - f(x) &= \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \\
 &= \frac{-h}{x^2} + hx \\
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{-1}{x^2 + hx}
 \end{aligned}$$

maka:

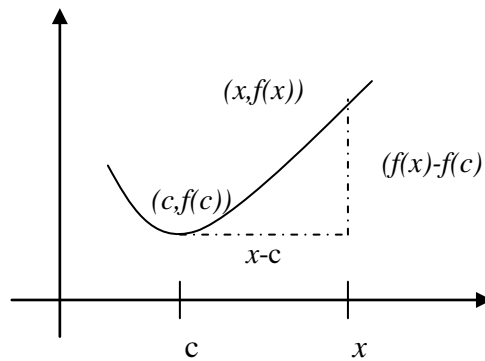
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + hx} \\
 &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

4.3 Bentuk-bentuk Setara untuk Turunan

Rumus turunan pada definisi turunan di atas tidaklah mengikat. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 4.3: Grafik Penjelasan Rumus Turunan



Gambar 4.4: Grafik Penjelasan Substitusi $x-c$ dengan h

Pada gambar di atas x mengambil tempat $c+h$, sehingga $x-c$ menggantikan h , jadi:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Analog dengan di atas, maka:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$f'(x) = \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x}$$

Contoh 1:

Carilah $f'(c)$ dari $f(x) = 8 - 5x^2$

Penyelesaian:

$$f(x) = 8 - 5x^2$$

$$f(c) = 8 - 5c^2$$

$$f(x) - f(c) = (8 - 5x^2) - (8 - 5c^2)$$

$$= -5x^2 + 5c^2$$

$$= -5(x^2 - c^2)$$

$$= -5(x + c)(x - c), \text{ sehingga}$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{-5(x + c)(x - c)}{x - c}$$

maka:

$$= -5(x + c)$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} -5(x + c)$$

$$f'(c) = -5(c + c)$$

$$= -10c$$

Teorema:

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c .

Bukti: kita perlu menunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

$$f(c) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c); x \neq c$$

Karena itu:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c) \quad (\text{terbukti}).\end{aligned}$$

Contoh 2:

Pada contoh di atas, menunjukkan bahwa $f'(2)$ dari $y = f(x) = x^2 + 2x$ ada yaitu $f'(2)=6$, dan f tersebut kontinu di $x=2$. Untuk lebih jelasnya bisa dibantu dengan gambar. Kebalikan dari turunan ini tidak benar, misalnya jika f kontinu di c , maka tidak berarti bahwa f mempunyai turunan di c . sebagai contoh $f(x) = |x|$ kontinu di $x=1$, apakah $f'(1)$ ada ? (buktikan).

4.4 Simbul-simbul Turunan

Turunan $y=f(x)$ terhadap x dapat dinyatakan oleh salah satu simbul:

$$dy/dx, D_x y, y', f'(x), d(f(x))/dx.$$

Soal-soal Latihan 18:

- 1) Diberikan $y = x^3 + 2$
 - a. Sketsalah grafiknya
 - b. Cari kemiringan garis singgung di titik (2,10)
- 2) Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik-titik dengan $x=-2; 1,5; 2,5$
- 3) Carilah kemiringan garis singgung $y = -x^2 + 5x - 6$ pada titik-titik potong dengan sumbu x .
- 4) Gunakan definisi

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Untuk mencari turunan berikut:

- a. $f'(-1)$ jika $f(x) = x^3 + 2x^2$

- b. $f'(3)$ jika $f(x) = x^2 - x$
- c. $f'(-2)$ jika $f(x) = x^3$
- d. $f'(-1)$ jika $f(x) = x^3 + 2x^2$
- e. $f'(4)$ jika $f(x) = 3/(x + 1)$

Gunakan definisi berikut untuk soal No 5 hingga 35

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 5) $f(x) = 5x$
- 6) $f(x) = 5x - 4$
- 7) $f(x) = ax + b$
- 8) $f(x) = x^2$
- 9) $f(x) = 8x^2 - 1$
- 10) $f(x) = x^2 + 5x$
- 11) $f(x) = x^2 + 3x + 4$
- 12) $f(x) = ax^2 + bx + c$
- 13) $f(x) = 2x^3$
- 14) $f(x) = x^3 - 2x$
- 15) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$
- 16) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
- 17) $f(x) = x^4$
- 18) $f(x) = x^4 - 3x$
- 19) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6$
- 20) $f(x) = 1/x$
- 21) $f(x) = 3/5x$
- 22) $f(x) = 2/(x + 6)$

$$23) f(x) = 1/(x + 2)^2$$

$$24) f(x) = 3/(x^2 - 1)$$

$$25) f(x) = (x - 1)/(x + 1)$$

$$26) f(x) = (x - 1)/(x + 1)^2$$

$$27) f(x) = (2x - 1)/(x + 4)$$

$$28) f(x) = (2 - x)/(2x - 3)$$

$$29) f(x) = 2x/(x^2 - x)$$

$$30) f(x) = x/(x^2 - x - 1)$$

$$31) f(x) = \sqrt{x}$$

$$32) f(x) = \sqrt{3x}$$

$$33) f(x) = 1/\sqrt{3x}$$

$$34) f(x) = 3/\sqrt{(x - 2)}$$

$$35) f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)}$$

Selesaikan soal No. 36 hingga 45 dengan menggunakan

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

untuk mencari $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut

$$36) f(x) = x^2$$

$$37) f(x) = x^2 - 3x$$

$$38) f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$39) f(x) = x^3$$

$$40) f(x) = x^3 + 5$$

$$41) f(x) = x^3 + 2x - 5$$

$$42) f(x) = 1/x$$

$$43) f(x) = 1/x^2$$

$$44) f(x) = x/(x - 5)$$

$$45) f(x) = x/(x + 2)^2$$

Limit yang diberikan pada soal No. 46 hingga 55 adalah suatu turunan, tetapi dari fungsi apa dan di titik mana?

$$46) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$$

$$47) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 15}{h}$$

$$48) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$49) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x - 30}{x - 3}$$

$$50) \lim_{h \rightarrow x} \frac{h^2 - x^2}{h - x}$$

$$51) \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^3 - x^3}{t - x}$$

$$52) \lim_{x \rightarrow t} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x - t}$$

$$53) \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

$$54) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$55) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(t+h) - \tan t}{h}$$

4.5 Aturan Pencarian Turunan

Prosedur mencari turunan dengan menggunakan definisi turunan memakan waktu yang lama dan membosankan serta tidak praktis. Proses pencarian turunan dimungkinkan untuk didapat cara yang lebih pendek, sehingga penyelesaiannya lebih cepat. Berikut aturan pencarian turunan untuk fungsi aljabar.

4.5.1 Aturan Fungsi Konstanta

Teorema:

Jika $f(x)=k$, dengan k suatu konstanta, maka untuk sebarang x , $f'(x)=0$, yakni : $D_x(k)=0$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

4.5.2 Aturan Fungsi Identitas

Teorema:

Jika $f(x)=x$, maka $f'(x)=1$, yakni : $D_x(x)=1$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

4.5.3 Aturan Pangkat

Teorema:

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, yakni : $D_x(x^n) = nx^{n-1}$

Bukti:

Kembali mengingat aturan perpangkatan bi-nomial, dimana koefisien-koefisiennya menggunakan aturan segitiga *Pascal*.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab + b^3 \\&\dots \\(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Dengan menggunakan analogi di atas maka:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]}{h}
\end{aligned}$$

Di dalam kurung siku, semua suku kecuali suku pertama mempunyai h sebagai faktor, sehingga masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila h mendekati nol, jadi: $f'(x) = nx^{n-1}$

Contoh:

$$D_x(x^6) = 6x^5; D_x(x^{12}) = 12x^{11}; D_x(x^{99}) = 99x^{98}$$

4.5.4 Aturan Kelipatan Konstanta

Teorema:

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; yakni:
 $D_x(k \cdot f(x)) = k \cdot D_x(f(x))$.

Bukti:

Andaikan $F(x) = k \cdot f(x)$; maka

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= k \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Contoh:

$$D_x(-2x^6) = -2D_x x^6 = -2 \cdot 6x^5 = -12x^5;$$

$$D_x\left(-\frac{2}{3}x^{12}\right) = -\frac{2}{3}D_x x^{12} = -\frac{2}{3}12x^{11} = -8x^{11}$$

4.5.5 Aturan Jumlah dan Selisih

Teorema:

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdeferensialkan, maka:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x); \text{ yakni:} \\
D_x(f(x) \pm g(x)) &= D_x f(x) \pm D_x g(x)
\end{aligned}$$

Bukti:

Andaikan $F(x)=f(x)+g(x)$; (Misalkan untuk aturan jumlah) maka:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= f'(x) + g'(x). \text{ Terbukti.}
\end{aligned}$$

Sebarang operator L dengan sifat-sifat yang dinyatakan dalam Teorema Kelipatan Konstanta dan Jumlah disebut linier, yakni, L adalah linier jika:

- $L(kf)=kL(f)$; k konstanta
- $L(f+g)=L(f)+L(g)$.

Contoh:

Carilah turunan dari $f(x) = 7x^{21} + 8x^3 - 4$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 D_x f(x) &= D_x(7x^{21} + 8x^3 - 4) \\
 &= D_x(7x^{21} + 8x^3) - D_x(4) \quad \text{Selisih} \\
 &= D_x(7x^{21}) + D_x(8x^3) - D_x(4) \quad \text{Jumlah} \\
 &= 7D_x(x^{21}) + 8D_x(x^3) - 4D_x(1) \quad \text{Kelipatan Konstanta} \\
 &= 7.21x^{20} + 8.3x^2 - 4.0 \quad \text{Pangkat, Konstanta} \\
 &= 147x^{20} + 24x^2
 \end{aligned}$$

4.5.6 Aturan Hasil Kali

Teorema:

Andaikan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, yakni :

$$D_x[f(x) \cdot g(x)] = D_x(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot D_x(g(x))$$

Bukti:

Andaikan $F(x) = f(x) \cdot g(x)$; maka:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h} \\
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + f(x+h) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right] \\
 F'(x) &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 F'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad \text{Terbukti.}
 \end{aligned}$$

Contoh:

Misalkan $F(x) = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$; carilah $F'(x)$,

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} D_x F(x) &= D_x[(x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)] \\ &= D_x[(x^4 + 2x)](x^3 + 2x^2 + 1) + (x^4 + 2x) \cdot D_x(x^3 + 2x^2 + 1) \\ &= (4x^3 + 2)(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^4 + 2x)(3x^2 + 4x) \\ &= (4x^6 + 8x^5 + 4x^3 + 2x^3 + 4x^2 + 2) + (3x^6 + 4x^5 + 6x^3 + 8x^2) \\ &= 7x^6 + 12x^5 + 12x^3 + 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

4.5.7 Aturan Hasil bagi

Teorema:

Andaikan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, dengan $g(x) \neq 0$, maka:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \text{ yakni:}$$

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_x[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot D_x[g(x)]}{g^2(x)}$$

Bukti:

$$\text{Andaikan } F(x) = \frac{f(x)}{g(x)};$$

maka:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)g(x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right] \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}] \cdot [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)}] \\
&= g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \left[\frac{1}{g(x)g(x)} \right] \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \text{ Terbukti}
\end{aligned}$$

Contoh:

Misalkan $F(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 2x^2 + 1}$; cari $F'(x)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
D_x F(x) &= D_x \left[\frac{x^4 + 2x}{x^3 + 2x^2 + 1} \right] \\
&= \frac{D_x [x^4 + 2x] \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) - (x^4 + 2x) \cdot D_x (x^3 + 2x^2 + 1)}{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{[(4x^3 + 2)] \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) - (x^4 + 2x)(3x^2 + 4x)}{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(4x^6 + 8x^5 + 4x^3 + 2x^3 + 4x^2 + 2) - (3x^6 + 4x^5 + 6x^3 + 6x^2)}{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} \\
&= \left[\frac{(x^6 + 4x^5 - 2x^3 + 2)}{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} \right]
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan ingatan kita pada aturan-aturan turunan fungsi aljabar di atas, maka secara umum dapat digaris bawahi sebagai berikut:

Dalam rumus-rumus ini, fungsi u , v dan w adalah fungsi z yang dapat didiferensiasi serta u' , v' dan w' adalah turunan pertama dari u , v dan w , maka:

1. $D_x k = 0$; dimana k adalah sebarang konstanta.
2. $D_x x = 1$
3. $D_x x^n = nx^{n-1}$

4. $D_x u^n = nu^{n-1} \cdot u$
5. $D_x(u + v + \dots) = D_x u + D_x v + \dots$
6. $D_x(ku) = kD_x u$
7. $D_x(uv) = uD_x v + vD_x u$
8. $D_x(uvw) = uvD_x w + uwD_x v + vwD_x u$
9. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD_x u - uD_x v}{v^2}; v \neq 0$

Soal-soal Latihan 19:

Gunakan aturan-aturan turunan, untuk mencari turunan pertama soal-soal No. 1 hingga 30

- 1). $y = 2x^2$
- 2). $y = 3x^4$
- 3). $y = \pi x^2$
- 4). $y = \sqrt{x}$
- 5). $y = \sqrt{3}x^3$
- 6). $y = -3x^{-3}$
- 7). $y = 4x^{-2}$
- 8). $y = \frac{-2}{3x+4}$
- 9). $y = \frac{5}{3x^2}$
- 10). $y = \frac{4}{2x^2-7}$
- 11). $y = -x^3 + 2x$
- 12). $y = -x^3 + 7x^2 - 6$
- 13). $y = 2x^4 - 3x$
- 14). $y = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}$
- 15). $y = 3x(x^3 - 1)$
- 16). $y = 2x^5 - 4x$
- 17). $y = x^4 - 3x + 19$

- 18). $y = 5x^6 - 3x^5 + 11x - 9$
- 19). $y = 3x^7 - 9x^2 + 21$
- 20). $y = 3x^{-5} + 2x^{-3}$
- 21). $y = 2x^{-6} + x^{-1}$
- 22). $y = x(x^2 + 1)$
- 23). $y = 3x(x^3 - 1)$
- 24). $y = (2x + 1)^2$
- 25). $y = (-3x + 2)^2$
- 26). $y = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$
- 27). $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$
- 28). $y = (x^3 - 2x)(x^2 - 3x + 1)$
- 29). $y = (x^4 - 2x)(3x^2 - 3x + 1)$
- 30). $y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 5}$
- 31). Gunakan aturan hasil kali untuk menunjukkan bahwa $D[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$
- 32). Kembangkan suatu aturan untuk $D[f(x)g(x)h(x)]$
- 33). Jika $f(3) = 7$, $f'(3) = 2$, $g(3) = 6$ dan $g'(3) = -10$, carilah :
 - a. $(f - g)'(3)$
 - b. $(f + g)'(3)$
 - c. $(f \cdot g)'(3)$
 - d. $(g/f)'(3)$
 - e. $(f/g)'(3)$
- 34). Carilah persamaan garis singgung pada $y = 3x^2 - 6x + 2$ dititik $(1, -1)$
- 35). Carilah persamaan garis singgung pada $y = 2/(x^2 + 1)$ dititik $(2, 2/5)$
- 36). Carilah semua titik pada grafik $y = x^3 - 3x^2$ dimana garis singgung mendatar.
- 37). Cari semua titik pada grafik $y = 0,2x^3 + 3x^2 - 2x$ dimana garis singgung mempunyai kemiringan 1.
- 38). Tinggi s dalam m dari sebuah bola di atas tanah pada saat t detik diberikan oleh $s = -8t^2 + 20t + 12$
 - a. Berapa kecepatan sesaatnya pada $t = 2$?
 - b. Kapan kecepatan sesaatnya 0?

- 39). Sebuah bola menggelinding sepanjang bidang miring sehingga jarak s dari titik awal setelah t detik adalah $s = 9t^2 + 0,5t$ cm. Kapankah kecepatan sesaat sebesar 30 cm/detik?
- 40). Terdapat dua garis singgung pada kurva $y = 4x - x^2$ yang melalui titik $(1, 3)$. Cari persamaan garis singgung ter-sebut. Petunjuk: andaikan (x_0, y_0) adalah titik singgung-nya. Cari dua syarat yang harus dipenuhi oleh (x_0, y_0)

4.6 Turunan Sinus dan Cosinus

Teorema:

Fungsi-fungsi $f(x) = \sin(x)$ dan $g(x) = \cos(x)$ keduanya dapat didiferensialkan.

$$D_x \sin(x) = \cos(x) \text{ dan } D_x \cos(x) = -\sin(x)$$

Turunan fungsi-fungsi trigonometri yang lain, dapat dikembangkan atas teorema di atas, dengan aturan pencarian turunan pada fungsi aljabar.

Contoh 1:

Untuk menyelesaikan turunan dari fungsi di atas, maka diketahui bahwa:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos x}; \text{ dengan menggunakan aturan hasil bagi, maka :}$$

$$\begin{aligned} D_x \tan(x) &= D_x \left[\frac{\sin(x)}{\cos x} \right] \\ &= \frac{(D_x \sin(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) D_x \cos(x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Turunan untuk fungsi $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$ dapat dicari sebagai latihan.

4.6.1 Aturan Turunan Fungsi Trigonometri

Misalkan u adalah fungsi x yang dapat didiferensialkan dan u' adalah turunan pertama dari fungsi u , maka:

1. $D_x \sin(u) = \cos(u) \cdot u'$
2. $D_x \cos(u) = -\sin(u) \cdot u'$
3. $D_x \tan(u) = \sec^2(u) \cdot u'$
4. $D_x \cot(u) = -\operatorname{cosec}^2(u) \cdot u'$
5. $D_x \sec(u) = \sec(u) \tan(u) \cdot u'$
6. $D_x \csc(u) = -\csc(u) \cot(u) \cdot u'$

Soal-soal Latihan 20:

Carilah turunan pertama dari fungsi untuk soal No 1 hingga 14 berikut ini:

- 1). $y = 3 \sin x - 5 \cos x$
- 2). $y = \sin x \cos x$
- 3). $y = \sin 2x$
- 4). $y = \cos 2x$
- 5). $y = \tan x$
- 6). $y = \cot x$
- 7). $y = \sec x$
- 8). $y = \operatorname{cosec} x$
- 9). $y = \sin^2 x$
- 10). $y = \cos^2 x$
- 11). $y = x^2 \sin x$
- 12). $y = (\cos x) / x$
- 13). $y = (\sin x) / x$
- 14). $y = (x^2 + 1) / (x \sin x)$
- 15.) Carilah persamaan garis singgung pada $y = \sin x$ di $x = 1$
- 16.) Carilah persamaan garis singgung pada $y = \tan x$ di $x = \pi/4$

- 17). Pada saat t detik, pusat sebuah pelampung gabus benda sejauh $2 \sin t$ cm di atas (atau di bawah) permukaan air. Berapa kecepatan palampung pada saat $t = 0, \pi/2, \pi$?
- 18). Gunakan definisi turunan untuk memperlihatkan bahwa $D(\sin x^2) = 2x \cos x^2$.
- 19). Gunakan definisi turunan untuk memperlihatkan bahwa $D(\sin 5x) = 5 \cos 5x$.

4.7 Aturan Rantai

Teorema:

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di u maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x , dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; yakni:

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

Contoh:

Misalkan $y = f(x) - (3x^4 - 6x + 3)^{10}$; cari $D_x y$

Penyelesaian:

Misalkan $u = (3x^4 - 6x + 3)$, maka $y = u^{10}$, sehingga:

$D_x u = D_x(3x^4 - 6x + 3) = 12x^3 - 6$ dan $D_u y = 10u^9$, maka :

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u = (10u^9) \cdot (12x^3 - 6) = 10(3x^4 - 6x + 3)^9 (12x^3 - 6)$$

Analog dengan teorema di atas, maka andaikan $w = f(s)$ dan $s = g(t)$, maka: $D_t w = D_s w \cdot D_t s$; dan misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(v)$, serta $v = h(x)$ maka $D_x y = D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v$

Soal-soal Latihan 21:

Carilah turunan pertama dengan menggunakan aturan rantai, dari soal-soal No. 1 hingga 20.

- 1). $y = (2 - 9x)^{15}$
- 2). $y = (4x + 7)^{23}$
- 3). $y = (5x^2 + 2x - 8)^5$
- 4). $y = (3x^3 - 11x)^7$
- 5). $y = (x^3 - 3x^2 + 11x)^9$
- 6). $y = (2x^4 - 12x^2 + 11x - 9)^{10}$

- 7). $y = (3x^4 + x - 8)^3$
- 8). $y = (7x^3 - 2x^2 - 9x)^3$
- 9). $y = (4x^3 - 3x^2 + 11x - 1)^{-5}$
- 10). $y = \sin(3x^2 + 11x)$
- 11). $y = \cos(3x^2 + 11x)$
- 12). $y = \cos^3 x$
- 13). $x = \sin^3 x$
- 14). $y = \cos(\sin x)$
- 15). $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4} \right)^4$
- 16). $y = \cos \left(\frac{x^2 - 1}{x + 4} \right)$
- 17). $y = (4x - 7)^2(2x + 3)$
- 18). $y = (x^2 - 7)^2(x - 3)$
- 19). $y = (x - 7)^3(2x - 5)^2(x - 2)$
- 20). $y = (4x^4 - 9)^2(7x + 3)^5$

Gunakan aturan rantai bersusun untuk mencari turunan yang ditunjukkan untuk soal No. 21 hingga 28.

- 21). $D_x[(\sin^4(x^2 + 3x))]$
- 22). $D_x[\cos^3(3x^3 + x)]$
- 23). $D_x[\sin^4(\cos x)]$
- 24). $D_x[\cos^4(\sin x)]$
- 25). $D_x[x \sin^2(2x)]$
- 26). $D_x[x \cos^2(\sin 2x)]$
- 27). $D_x\{\sin[\cos(\sin 2x)]\}$
- 28). $D_x\{\cos^2[\cos(\cos x)]\}$
- 29). Carilah persamaan garis singgung pada $y = (x^2 + 1)^3(x^4 + 1)^2$ di titik (1, 32)
- 30). Buktikan bahwa $D_x |x| = |x| / x, x \neq 0$. Petunjuk, tulis $|x| = \sqrt{x^2}$ dan gunakan aturan rantai dengan $u = x^2$

4.8 Turunan Fungsi Eksponensial dan Algoritmik

Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, dan jika $a^y = x$ maka $y = \log_a x$, $y = \log_e x = \ln x$; $y = \log_{10} x = \log x$.

Ranah definisi adalah $x > 0$; jangkauannya adalah himpunan bilangan real.

Aturan Turunan:

Jika u adalah fungsi x yang dapat didiferensialkan, dan u adalah turunan dari fungsi u , maka (aturan ini dapat dicari dengan cara turunan):

$$1. D_x \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \cdot u; (a > 0, a \neq 1)$$

$$2. D_x \ln u = \frac{1}{u} u$$

$$3. D_x a^u = a^u \ln a \cdot u; (a > 0)$$

$$4. D_x e^u = e^u u$$

Contoh 1

Carilah turunan dari $y = \ln(x+3)^2$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan aturan di atas, maka:

$$D_x y = D_x \ln(x+3)^2 = 2 D_x \ln(x+3) = 2 \frac{1}{x+3} D_x (x+3)$$

$$D_x y = \frac{2}{x+3}$$

Contoh 2

Carilah turunan dari $y = \ln \sin(3x)$

Penyelesaian:

$$D_x y = D_x \ln \sin(3x) = \frac{1}{\sin(3x)} D_x \sin(3x) = \frac{1}{\sin(3x)} \cos(3x) 3$$

$$D_x y = 3 \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} = 3 \cot(3x)$$

Soal-soal Latihan 22:

Carilah turunan pertama dari fungsi eksponensial dan logaritmik berikut ini:

- 1). $y = \ln(4x - 5)$
- 2). $y = \ln \sqrt{3 - x^2}$
- 3). $y = \ln \sqrt{4 + 3x - x^2}$
- 4). $y = \ln(x^2 - 5)$
- 5). $y = \ln(4x^2 - 2x + 1)$
- 6). $y = \ln(4x^2 - 2x + 1)^2$
- 7). $y = \ln(2x^2 - x)(x - 2)$
- 8). $y = \ln(x^2 - 3x)(2x - 1)^2$
- 9). $y = x \ln x - x$
- 10). $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$
- 11). $y = e^{5x}$
- 12). $y = e^{2x-1}$
- 13). $y = e^{\ln x}$
- 14). $y = x^2 e^x$
- 15). $y = e^{\sqrt{x} + \sqrt{e}x}$
- 16). $y = e^{3x-4}$
- 17). $y = e^{(\ln x)/x}$
- 18). $y = e^{\sin 3x}$

$$19). y = e^{-x} \cos x$$

$$20). y = e^{\ln x - 2 \ln 6}$$

$$21). y = e^{\ln 2 + 2 \ln x}$$

$$22). y = e^{e^x}$$

$$23). y = x^x$$

$$24). y = x^{x-2}$$

$$25). y = e^{e^{-x^2}}$$

4.9 Turunan Fungsi Implisit

Aturan fungsi yang dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ dapat ditampilkan dalam bentuk $f(x,y)=0$ dengan $f(x,y)= y - f(x)$, aturan $f(x,y) = 0$ menyatakan bahwa y adalah fungsi dari x dan juga x adalah fungsi dari y , sehingga dapat dikatakan bahwa y adalah fungsi implisit dari x dan juga x fungsi implisit dari y . dari aturan $f(x,y) = 0$ kemungkinan y dapat dinyatakan secara eksplisit dalam x atau sebaliknya, atau mungkin juga tidak dapat dilakukan. Sebagai ilustrasi dapat dikemukakan fungsi implisit dan eksplisit sebagai berikut:

Jika diketahui $x^2 + y^2 = 1$, maka bentuk fungsi eksplisitnya

$$y = \sqrt{1 - x^2}, y = -\sqrt{1 - x^2}, x = \sqrt{1 - y^2}, x = -\sqrt{1 - y^2}$$

Contoh:

Tentukan turunan dari

$$a. x^2 + y^2 = 9$$

$$b. \sin xy = 2xy^2 + 1$$

Penyelesaian:

$$a. \frac{d}{d_x}(x^2 + y^2) = \frac{d}{d_x} 9$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -(x/y)$$

$$\text{b. } \frac{d}{d_x}(\sin xy) = \frac{d}{d_x}(2xy^2 + 1)$$

$$\cos xy \frac{d}{d_x}(xy) = 2x \frac{d}{d_x}(y^2) + 2y^2 \frac{d}{d_x}(x)$$

$$(\cos xy)(xy' + y) = 2x(2yy') + 2y^2$$

$$xy' \cos xy - 4xyy' = 2y^2 - y \cos xy$$

$$y'(x \cos xy - 4xy) = 2y^2 - y \cos xy$$

$$y' = (2y^2 - y \cos xy) / (x \cos xy - 4xy)$$

4.10 Turunan Fungsi Parameter

Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ terdefinisi pada interval $D \subseteq \mathbb{R}$,

maka aturan $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}^{t \in D}$

Dinamakan fungsi parameter. Pada aturan ini, t dinamakan parameter dan himpunan titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dinamakan grafik fungsi parameter

Pada fungsi parameter, jika y terdiferensialkan terhadap x atau x terdiferensialkan terhadap y , maka dapat ditentukan turunannya dengan menggunakan aturan rantai dan diperoleh turunan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$dx/dt \neq 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

yang dikenal sebagai turunan fungsi parameter.

Contoh:

Tentukan y' dari fungsi parameter

$$\begin{cases} x = 4t^2 - 4t \\ y = 1 - 4t^2 \end{cases}, t \geq \frac{1}{2}$$

Penyelesaian:

Karena fungsi $x = 4t^2 - 4t$ dan $y = 1 - 4t^2$ terdiferensialkan terhadap t pada interval $(1/2, \infty)$ dengan

$$x = 4t^2 - 4t, dx/dt = 8t - 4$$

$$y = 1 - 4t^2, dy/dt = -8t$$

maka fungsi y terdiferensialkan terhadap x dengan

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-8t}{8t-4} = \frac{-2t}{2t-1}$$

Soal-soal Latihan 23:

Carilah $D_x y$ fungsi-fungsi soal no. 1 hingga 10

- 1). $x^2 - y^2 = 9$
- 2). $4x^2 + 9y^2 = 36$
- 3). $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, a, b konstanta
- 4). $xy^2 - x + 16 = 0$
- 5). $x^3 - 3x^2y + 19xy = 0$
- 6). $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$
- 7). $\sqrt{xy} + 3y = 10x$
- 8). $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$
- 9). $xy + \sin y = x^2$
- 10). $\cos(xy) = y^2 + 2x$

Cari persamaan garis singgung di titik yang ditunjuk untuk soal-soal No. 11 hingga 15

11). $x^3y + y^3x = 10, (1,2)$

12). $x^2y^2 + 3xy = 10y, (2,1)$

13). $\sin(xy) = y, (\pi/2, 1)$

14). $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4, (1,0)$

15). $\sqrt{y} + xy^2 = 5(4,1)$

Cari dy/dx untuk soal-soal No. 16 hingga 30

16). $y = 3x^{3/5} + \sqrt{x}$

17). $y = x^{1/3} - 2x^{7/2}$

18). $y = x^{1/3} + 1/x^{1/3}$

19). $y = (2x+1)^{1/4}$

20). $y = (x^3 - 2x)^{1/4}$

21). $y = (3x^3 - 4x)^{1/3}$

22). $y = (3x - 9)^{-5/2}$

23). $y = (x^2 + \sin x)^{1/2}$

24). $y = (x^2 \cos x)^{1/2}$

25). $y = (1 + \cos x)^{1/2}$

26). $y = (1 + \sin x)^{1/2}$

27). $y = (1 - \cos 5x)^{1/2}$

28). $y = (1 - \sin 5x)^{1/2}$

29). $y = (\tan^2 x + \sin^2 x)^{1/2}$

30). $y = (1 + \cos(x^2 + 2x))^{1/2}$

31). Jika $s^2t + t^3 = 1$ cari ds/dt dan dt/ds

32). Jika $y = \sin(x^2) + 2x^3$ cari dx/dy

33). Sketsalah grafik fungsi $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$, kemudian cari persamaan-persamaan untuk dua garis singgung yang melalui titik asal.

Bab Lima

Penerapan Turunan



www.google.com

Saya seperti seorang anak lelaki yang bermain-main di pantai, kemudian menemukan koral yang lebih luas atau kerang yang lebih indah daripada yang biasa sementara samudra besar dari kebenaran semuanya terbentang di hadapan saya tak terungkapkan
Isaac Newton (1642-1727)

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini mahasiswa dapat:

1. Memahami pengertian tentang kecepatan dan percepatan dan menerapkan aturan turunan untuk menyelesaikan permasalahannya
2. Memahami dan dapat menerapkan aturan turunan untuk penyelesaian persoalan garis singgung dan garis normal
3. Memahami maksimum dan minimum dan dapat menerapkan aturan turunan untuk mencari nilai maksimum dan minimum suatu fungsi
4. Memahami pengertian dan kecekungan dan menerapkan aturan turunan untuk menentukan kecekungan dan suatu fungsi

5.1 Kecepatan dan Percepatan

5.1.1 Gerakan Garis Lurus

Misal terdapat sebuah partikel P, gerakan partikel tersebut sepanjang garis lurus digambarkan dengan lengkap oleh persamaan $s = f(t)$, untuk $t \geq 0$ dan t adalah waktu sedangkan s adalah jarak P terhadap titik tetap O pada jejaknya. Menggunakan analogi pada pembahasan kemiringan garis singgung, diperoleh kecepatan P pada saat t adalah :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Jika $v > 0$, P bergerak dalam arah bertambahnya s , untuk $v < 0$, P bergerak dalam arah berkurangnya s , sedangkan untuk $v = 0$, P diam sesaat. Sedangkan percepatan P pada saat t adalah:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Jika $a > 0$, v bertambah, sedangkan untuk $a < 0$, maka v berkurang. Jika v dan a mempunyai tanda sama, kecepatan P bertambah, adapun untuk v dan a mempunyai tanda berlawanan, maka kecepatan P berkurang.

5.1.2 Gerakan Melingkar

Seperti pada pemaparan gerakan pada garis lurus, jika gerakan sebuah partikel P sepanjang lingkaran digambarkan dengan lengkap oleh persamaan $\theta = f(t)$, dimana θ adalah sudut pusat (dalam radian) yang diliputi dalam waktu t oleh sebuah garis yang menghubungkan P dengan pusat lingkaran.

Analog dengan gerakan yang terjadi pada garis lurus di atas, maka:

Kecepatan angular P pada saat t adalah $\omega \frac{d\theta}{dt}$

Percepatan angular P pada saat t adalah $\alpha \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Contoh 1:

Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus yang mengikut persamaan $s = \frac{1}{2}t^2 - 2t$. Tentukan kecepatan dan percepatan pada akhir 4 detik.

Penyelesaian:

Kecepatan benda pada akhir 4 detik adalah:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2; \text{ pada } t = 4, \text{ maka :}$$

$$v = \frac{3}{2}4^2 - 2$$

Jadi kecepatan benda pada akhir 4 detik adalah 22 satuan panjang/dt.

Contoh 2:

Pergerakan sebuah artikel yang pada garis lurus diberikan persamaan $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$

a. Cari s dan a jika $v = 0$

Penyelesaian:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$v = 3t^2 - 12t + 9; \text{ pada saat } v = 0, \text{ maka :}$$

$$3t^2 - 12t + 9 = (t - 3)(t - 1) = 0,$$

$$\text{sehingga } t = 3 \text{ atau } t = 1$$

Jadi kecepatan $v = 0$ pada saat $t=1$ atau $t= 3$ detik.

Jika $t = 1$, maka:

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

$$s = t^3 - 6.t^2 + 9.1 + 4$$

$$s = 8 \text{ satuan panjang; dan}$$

$$v = \frac{dv}{dt}$$

$a = 6t - 12$; pada saat $t = 1$, maka:

$a = -6$ satuan panjang/ dt^2

Analog dengan diatas, untuk $t = 3$, diperoleh s dan a sebagai berikut:

$s = 4$ satuan panjang dan;

$a = 6$ satuan panjang/ dt^2

- b. Cari s dan v jika $a = 0$

Penyelesaian:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$a = 6t - 12$; pada saat $a = 0$, diperoleh harga t sebagai berikut:

$6t - 12 = 0$, jika $a = 0$ diperoleh $t = 2$, sehingga harga s diperoleh:

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

$$s = 2^3 - 6.2^2 + 9.2 + 4$$

$s = 6$ satuan panjang; dan

$$v = 3t^2 - 12t + 9$$

$$v = 3.2^2 - 12.2 + 9$$

$v = -3$ satuan panjang/detik

- c. Kapan s bertambah?

Penyelesaian:

s bertambah jika $v > 0$, sehingga :

$(t - 3)(t - 1) > 0$, maka s bertambah jika $t < 1$ dan $t > 3$

- d. Kapan v bertambah ?

Penyelesaian:

v bertambah jika $a > 0$, untuk $t > 2$

- e. Bilamana arah gerakan berubah?

Penyelesaian:

Arah gerakan benda berubah jika $v = 0$ dan $a \neq 0$. Dari (a), diperoleh bahwa arah berubah jika $t = 1$ dan $t = 3$.

5.2 Garis Singgung dan Garis Normal

Misalkan fungsi $f(x)$ mempunyai turunan $f'(x)$ di $x=x_0$, kurva $y=f(x)$ mempunyai garis singgung di $P_0(x_0, y_0)$ yang kemiringan garis singgung (m_{\tan}) adalah

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika $m_{\tan} = 0$, kurva tersebut mempunyai garis singgung horisontal yang sejajar dengan sumbu x dengan persamaan $y = y_0$ di P_0 , seperti A, C dan E pada gambar diatas. Sedangkan dalam kondisi yang lain, persamaan garis singgung adalah:

$$y - y_0 = m_{\tan}(x - x_0)$$

jika $f'(x)$ adalah kontinu di $x = x_0$ tetapi $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$ kurva mempunyai garis singgung vertikal yang sejajar dengan sumbu y dengan persamaan $x=x_0$.

Garis normal adalah garis yang tegak lurus garis singgung di titik singgungnya. Persamaan garis normal di $P_0(x_0, y_0)$ adalah $x=x_0$, jika garis singgung horisontal, garis singgung sejajar sumbu x . Sedangkan jika garis singgung adalah vertikal, garis sejajar dengan sumbu y , maka persamaan garis normal adalah $y = y_0$, adapun dalam keadaan yang lain, persamaan garis normal adalah:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_{\tan}}(x - x_0)$$

5.2.1 Panjang Garis Singgung, Normal, Subgaris Singgung dan Subnormal

Perhatikan gambar diatas, maka panjang garis singgung suatu kurva di salah satu titiknya didefinisikan sebagai panjang bagian garis singgung diantara titik singgungnya dan sumbu- x ($=TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$). Panjang proyeksi segmen ini pada

sumbu x disebut panjang subgaris singgung ($= TS = \frac{y_0}{m_{\tan}}$); sedangkan panjang normal didefinisikan sebagai panjang bagian normal antara titik singgung garis singgung dan sumbu x ($= P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$). Panjang proyeksi segmen ini pada sumbu x disebut panjang sub normal ($= SN = m_{\tan} y_0$)

Contoh:

Diketahui suatu fungsi $y = \frac{5-2x}{x-1}$

- Carilah persamaan garis singgung dan garis normal di titik (2,1)
- Carilah panjang sub garis singgung, sub garis normal, garis singgung dan normal.

Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-1}$$

$$D_x f(x) = \frac{D_x(5-2x)(x-1) - (5-2x)D_x(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$D_x f(x) = \frac{-2(x-1) - (5-2x)1}{(x-1)^2}$$

$$D_x f(x) = \frac{-2x+2-5+2x}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Jadi m_{\tan} di titik (2, 1) adalah -3, sehingga:

- Persamaan garis singgung melalui (2,1) mempunyai $m_{\tan} = -3$

$$y-1 = -3(x-2)$$

$$y-1 = -3x+6$$

$$y = -3x+7; \text{ dan}$$

Persamaan garis normalnya adalah:

$$y-1 = \frac{1}{-3}(x-2)$$

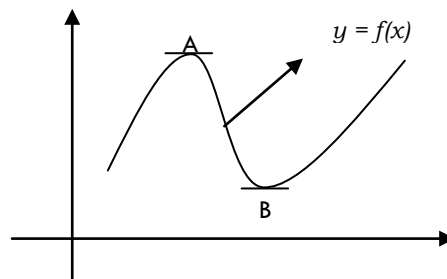
$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

5.3 Maksimum dan Minimum

Misal $y = f(x)$ dengan daerah asal S , seperti gambar di bawah ini:



Gambar 5.1: Titik Maksimum dan Minimum Fungsi $y = f(x)$

Definisi:

Misalkan S daerah asal f , memuat titik c , kita katakan bahwa:

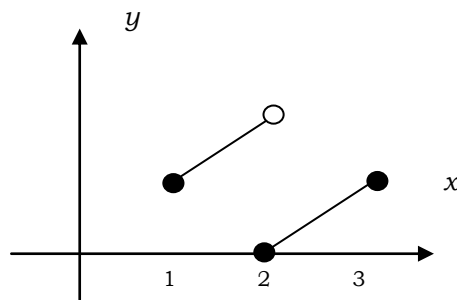
- $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S (misal, pada gambar di atas pada titik A).
- $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S (misal, pada gambar di atas pada titik B).
- $f(c)$ adalah nilai ekstrem f pada S jika nilai tersebut maksimum atau nilai minimum.

Perhatikan fungsi berikut, $y = 1/x$ pada $S = (0, \infty)$, maka fungsi f tidak mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum. Tetapi fungsi yang sama pada $S = [1, 3]$ mempunyai nilai maksimum $f(1) = 1$ dan nilai minimum $f(3) = 1/3$. Sedang pada $S =$

$(1,3]$ f tidak mempunyai nilai maksimum, tetapi mempunyai nilai minimum $f(3) = 1/3$.

Jadi suatu fungsi $y = f(x)$ pada S belum tentu mempunyai nilai maksimum ataupun nilai minimum tergantung pada interval S yang diberikan.

Selain itu nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi tergantung pula pada tipe fungsi itu. Sebagai contoh pada fungsi tak kontinu g seperti berikut:



Gambar 5.2: Grafik Fungsi $g(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x < 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Pada $S = [1, 3]$, g tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya), tetapi dengan nilai minimum $g(2) = 0$.

Teorema A

(Teorema Kewujudan Maks-Min). Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum

Titik Kritis

Untuk menguji dimana terjadinya nilai-nilai ekstrim dapat dilihat dari titik-titik kritis fungsinya tersebut.

Teorema B

(Teorema Titik Kritis). Misalkan f didefinisikan pada interval I , yang memuat titik c . Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis; yakni c berupa salah satu:

- Titik ujung dari I ;
- Titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$);
- Titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada).

Contoh 1:

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ pada $[-1/2, 2]$

Penyelesaian:

Titik-titik kritis:

- Titik-titik ujungnya adalah $-1/2$ dan 2
- Titik stasioner ($f'(x) = 0$)

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 1$$

- Titik singular tidak ada

Jadi titik-titik kritis fungsi $f(x)$ adalah $-1/2, 0, 1$ dan 2

Sehingga:

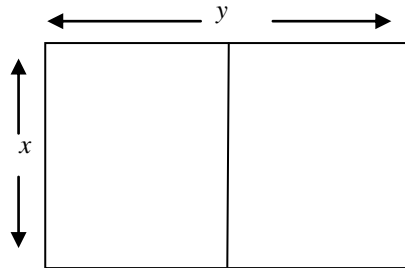
$$f(-1/2) = 1; f(0) = 0; f(1) = 1 \text{ dan } f(2) = 4.$$

Dengan demikian f maksimum pada $x = -1/2$ dan $x = 1$ serta f minimum pada $x=0$, dengan nilai maksimum $f(-1/2) = f(1) = 1$ dan nilai minimum $f(0) = 0$.

Contoh 2:

Seorang mahasiswa hendak membuat dua kotak yang sama luasnya dan ia mempunyai 100 cm tali rafia yang akan dipakai membuat batas yang sama secara berdampingan, seperti diperlihatkan dalam gambar. Berapa ukuran seluruh kelilingnya agar luas maksimum?

Penyelesaian:



Gambar 5.3: Dua Kotak Berdampingan Sama Luas

Misalkan x adalah lebar dan y adalah panjang, keduanya dalam meter, maka:

$$3x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - \frac{3}{2}x, \text{ dan}$$

Luas total A dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A = xy = x(50 - \frac{3}{2}x) = 50x - \frac{3}{2}x^2. \text{ Karena harus terdapat tiga sisi}$$

sepanjang x , maka $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$, Jadi, bagaimana memaksi-mumkan A

pada $[0, \frac{100}{3}]$.

Titik stasioner diperoleh dari turunan pertama A adalah: $dA/dx = 50 - 3x = 0$, sehingga $x = 50/3$, sehingga titik-titik kritisnya adalah $0, \frac{100}{3}$ dan $50/3$.

Titik ujung $x=0 \Rightarrow A=0$, titik ujung $x = \frac{100}{3} \Rightarrow A=0$, dan titik

stasioner $x = 50/3 \Rightarrow A = 415,67$ (maksimum), sehingga ukuran yang sesuai agar kelilingnya maksimum adalah $x = 50/3 \text{ cm}$

$$\text{dan } y = 50 - \frac{2}{3}(50/3) = 25 \text{ cm}$$

5.4 Kemonotonan dan Kecekungan

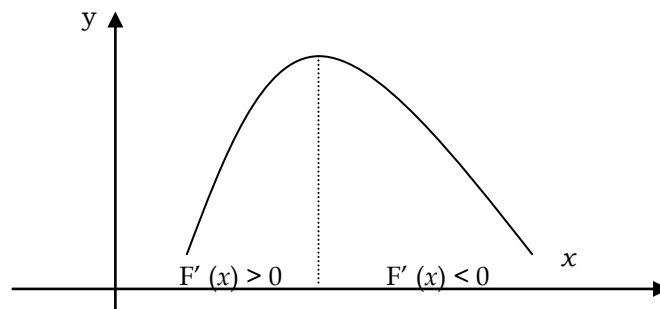
Definisi:

Misalkan f terdefinisi pada interval I (terbuka, tertutup atau tak satupun). dikatakan bahwa:

- f adalah naik pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f adalah turun pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- f monoton murni pada I jika naik pada I turun pada I .

5.4.1 Turunan Pertama dan Kemonotonan

Misalkan $y = f(x)$, maka turunan pertama $f'(x)$ adalah kemiringan garis singgung pada grafik f di titik x . Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan; Jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan. Perhatikan gambar



Gambar 5.4: Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Teorema A

(*Teorema Kemonotonan*). Misalkan f kontinu pada interval I dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dalam x dari I .

- jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I , maka f naik pada I .
- jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I , maka f turun pada I .

Contoh:

Diberikan $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$. Cari dimana fungsi itu naik dan dimana fungsi itu turun?

Penyelesaian:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x$$

$$= 6x(x + 3)$$

Langkah berikutnya perlu menentukan dimana $6x(x + 3) > 0$ dan juga $6x(x + 3) < 0$. Dengan menyelesaikan kedua pertaksamaan di atas dengan garis bilangan, maka f naik pada $(-\infty, -3)$, $(0, \infty)$; dan fungsi f turun pada $(-3, 0)$.

5.4.2 Turunan Kedua dan Kecekungan

Definisi:

Misalkan f dapat didiferensialkan pada interval terbuka $I = (a, b)$. Jika f' naik pada I , maka f (dan grafiknya) cekung ke atas; jika f' turun pada I , maka f cekung ke bawah pada I .

Teorema B

(*Teorema Kecekungan*). Misalkan f terdiferensial dua kali pada interval terbuka (a, b) :

- jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b) , maka f cekung ke atas pada (a, b) .
- jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b) , maka f cekung ke bawah pada (a, b) .

Contoh:

Diberikan $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$. Cari dimana fungsi itu cekung ke atas dan cekung ke bawah?

Penyelesaian:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x$$

$$f''(x) = 12x + 18$$

Langkah berikutnya perlu menentukan dimana $12x + 18 > 0$ dan juga $12x + 18 < 0$, dengan menyelesaikan kedua pertaksamaan di atas, maka f cekung ke atas pada $(-3/2, \infty)$, dan cekung ke bawah pada $(-\infty, -3/2)$.

5.4.3 Titik Balik

Titik balik adalah suatu titik dimana suatu kurva berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya. Sehingga suatu fungsi $y = f(x)$, kontinu di c , maka $x = c$ merupakan titik balik jika $f''(x) = 0$ atau $f''(x)$ tidak ada, dan jika $f''(x)$ berubah tanda jika x bertambah setelah $x = c$.

Contoh:

Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Carilah:

- Nilai maksimum dan nilai minimum.
- Dimana fungsi itu naik dan fungsi itu turun.
- Dimana fungsi itu cekung ke atas dan cekung ke bawah.
- Titik balik.
- Gambarkan grafiknya.

Penyelesaian:

- Nilai maksimum dan minimum.

Interval pada soal tidak ditentukan, maka dicari titik stasionernya yaitu pada $f'(x) = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Stasioner pada $f'(x) = 0$, sehingga:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 1) = 0$$

Titik-titik stasionernya adalah $x = 1/3$ dan $x = 1$.

$$f(1) = 1 \text{ dan } f(1/3) = 31/27$$

Sehingga nilai maksimum pada $x = 1/3$ dengan $f(1/3) = 31/27$ dan minimum pada $x = 1$ dengan $f(1) = 1$.

- Fungsi naik dan fungsi turun.

Turunan pertama $f(x)$ adalah $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Fungsi naik jika $f'(x) > 0$, dan fungsi turun jika $f'(x) < 0$, dengan demikian

dengan menyelesaikan pertaksamaan $(3x - 1)(x - 1) > 0$ dan $(3x - 1)(x - 1) < 0$, dengan bantuan garis bilangan, maka fungsi naik pada $(-\infty, 1/3)$, $(1, \infty)$; dan fungsi turun pada $(1/3, 1)$.

- c. Fungsi cekung ke atas dan fungsi cekung ke bawah.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

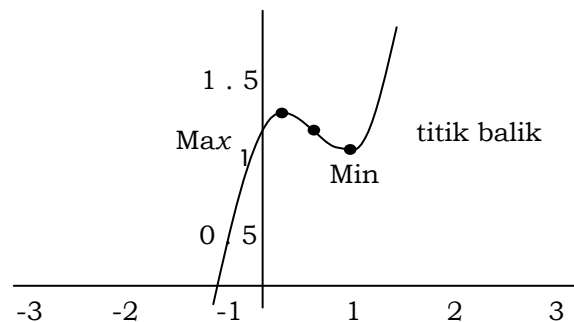
Dengan demikian kita menyelesaikan pertaksamaan $6x - 4 > 0$ dan $6x - 4 < 0$, sehingga fungsi cekung ke atas (jika $f''(x) > 0$) pada $x > 2/3$ dan fungsi cekung ke bawah (jika $f''(x) < 0$) pada $x < 2/3$.

- d. Titik Balik

Melihat $f''(x) = 6x - 4 = 0$, sehingga terdapat satu calon titik balik yaitu pada $x = 2/3$, dengan memperhatikan interval fungsi cekung ke atas dan ke bawah dalam penyelesaian c), maka titik $(2/3, 29/27)$ merupakan titik balik karena kecekungan berubah arah di titik $(2/3, 29/27)$.

- e. Grafik Fungsi

Dengan menggunakan pertolongan titik-titik yang telah diketahui dalam koordinat titik (nilai maksimum dan minimum, fungsi naik dan turun, fungsi cekung ke bawah dan ke atas serta titik balik), maka dengan menghubungkan titik-titik tersebut, grafik fungsi sebagai berikut:



Gambar 5.5: Titik Balik Maksimum dan Minimum

Soal-soal Latihan 24:

Kenali titik-titik kritis dan carilah nilai maksimum dan minimum, untuk soal-soal No. 1 hingga 15

- 1) $f(x) = -x^2 + 4x - 1, [0,3]$
- 2) $f(x) = x^2 + 3x, [-2,1]$
- 3) $f(x) = 2x^2 + x - 1, [-4,4]$
- 4) $f(x) = x^2 + 4x + 3, [-1,5]$
- 5) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1, [-3,3]$
- 6) $f(x) = -x^2 + 4x - 1, [0,3]$
- 7) $f(x) = x^3 - 3 + 1, [-3/2,3]$
- 8) $f(x) = \sin x - \cos x [0,\pi]$
- 9) $f(x) = |x - 2|, [1,5]$
- 10) $f(x) = |5 - 3x|, [0,3]$
- 11) $f(x) = |1 - x|, [-2,4]$
- 12) $f(x) = x^{2/5}, [-1,32]$
- 13) $f(x) = x^{2/5}, [-1/32]$
- 14) $f(x) = x - \tan t, [-\pi/4, \pi/4]$
- 15) $f(x) = \lfloor 5x \rfloor, [-3/2,4]$
- 16) Sebuah pola berputar lewat sudut θ radian dalam waktu t detik sehingga $\theta = 27t - 9t^2$. Cari kecepatan angular dan percepatan angular pada akhir 3 detik
- 17) Sebuah batu yang dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 14 m/dt bergerak menurut rumus $s = 25t - 5t^2$ dimana s adalah jarak dari titik awal. Hitunglah a) kecepatan dan pada saat $t = 3$ dan $t = 4$; b) tinggi maksimum yang dicapai.
- 18) Carilah persamaan garis singgung dan normal serta panjang sub garis singgung, sub normal, garis singgung dan normal pada $y = x^3 - 3x^2 + 2$ di titik $(2, 0)$.
- 19) Seorang mahasiswa membuat lapangan futsal, dan untuk membatasi sisi-sisi lapangan disediakan 75 m tali yang akan digunakan untuk tepi siku empat sepanjang satu sisi sepanjang 100 m . Beberapa ukuran lapangan futsal yang mempunyai luas maksimum?

- 20) Tentukan dimana grafik fungsi yang diberikan naik, turun, cekung ke atas, cekung ke bawah dan cari juga titik baliknya serta sketsalah grafiknya dari :
- a. $f(x) = x^3 - 5x - 3$
 - b. $g(x) = 2x^4 - 7x^3 + 2$

Daftar Pustaka

- Anton, H (1998) *Calculus With Analitic Geometry* New York: John Wiley & Sons
- Barnett, R.A., Ziegler, M.,R., & Byleen, K.E. (2005). *Calculus for Business, Economic, Life Sciences and Social Science* Singapore: Pearson Education
- Faires J.D (1982) *Calculus and Analitic Geometry*, Boston: Prindle Webwe & Smith
- Hazrul Izwadi dkk (2006). *Kalkulus* Malang: Bayu Media
- In'am, A (2001).*Pengantar Kalkulus I* Malang: UMMPress
- In'am, A (2003) *Pengantar Geometri*, Malang: Bayu Media
- Leithold (1986), *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik (Terjemah Koko Martono dkk)*, Jakarta: Erlangga
- Murray S & Robert W (2007).*Teori dan Soal-soal Kalkulus Lanjut Ed.2 (terjemah Refina I)*. Jakarta:Erlangga
- Prayudi (2006). *Kalkulus, Fungsi Satu Variabel*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Purcell E.J (2004) *Calculus With Analitic Geometry 8th* Toronto: Prentice Hall Inc
- Sapti W, dkk (1998), *Kalkulus I*, Malang: Penerbit IKIP Malang

Glosarium

A

Absis

Bilangan pertama dari pasangan bilangan yang menunjukkan letak sesuatu dalam koordinat kartesius

Aksioma

Suatu pernyataan yang kebenarannya diterima tanpa melalui serangkaian pembuktian

Asosiatif

Pengelompokan bilangan yang berlaku pada operasi perkalian dan penjumlahan

B

Bilangan

Bilangan memiliki sebuah tempat di garis bilangan

Bilangan Bulat

Adalah bilangan yang terdiri dari bilangan nol, bilangan asli dan negatifnya

Bilangan Asli

Bilangan yang digunakan untuk menghitung banyaknya obyek suatu himpunan

Daerah Hasil

Himpunan nilai-nilai dari daerah asal yang dihasilkan oleh fungsi

Bilangan Cacah

Bilangan asli beserta unsur nol

Bilangan Irrasional

Suatu bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk a/b

Bilangan Komposit

Bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor

Bilangan Prima

Bilangan asli yang hanya mempunyai dua faktor

Bilangan Rasional

Suatu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a/b , a bilangan bulat dan b bilangan asli

Bilangan Real

Sekumpulan bilangan yang terdiri dari bilangan rasional dan irrasional

Daerah Asal

Himpunan dari anggota-anggota sedemikian hingga fungsi tersebut mempunyai nilai

Fungsi Eksponen

Suatu fungsi dimana variabelnya terletak pada pangkat

| | |
|---|--|
| Definit Negatif | Fungsi Ganjil |
| Sesuatu yang menunjukkan bahwa harga dari suatu fungsi selalu negatif yang ditunjukkan dengan harga $a < 0$ dan $D < 0$ | Suatu fungsi yang memenuhi persyaratan $f(x) = -f(-x)$ |
| Definisi | Fungsi Genap |
| Pegertian tentang sesuatu | Suatu fungsi yang memenuhi persyaratan $f(x) = f(-x)$ |
| Definit Positif | Fungsi Identitas |
| Sesuatu yang menunjukkan bahwa harga dari suatu fungsi selalu positif yang ditunjukkan dengan harga $a > 0$ dan $D < 0$ | Suatu fungsi yang dipasangkan ke dirinya sendiri |
| F | Fungsi Implisit |
| Fungsi | Suatu fungsi dimana kedua variabelnya terletak pada satu ruas |
| Suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek dalam suatu himpunan | Fungsi Into |
| Fungsi Aljabar | Suatu fungsi dimana ada anggota daerah hasil yang tidak mempunyai pasangan |
| Suatu fungsi yang melibatkan operasi perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan | Fungsi Invers |
| Fungsi Eksplisit | Suatu fungsi yang diperoleh dengan mempertukarkan posisi suatu variabel |
| Suatu fungsi yang kedua variabelnya terpisah dalam kedua ruas | Fungsi Konstan |
| Fungsi Satu-satu | Suatu fungsi dimana setiap anggota daerah asal dipasangkan ke tepat satu dan hanya satu anggota daerah hasil |
| Suatu fungsi dimana setiap anggota daerah asal mempunyai satu dan hanya satu pasangan di daerah kawan | Fungsi Korespondensi 1-1 |
| | Suatu fungsi yang memenuhi syarat sebagai fungsi 1-1 dan onto |

| | |
|---|--|
| Fungsi Logaritma Suatu fungsi yang variabelnya dalam logaritma | Garis-garis Berpotongan Dua buah garis atau lebih yang melalui sebuah titik |
| Fungsi Naik Suatu fungsi yang harga kemiringannya selalu positif | Garis-garis Sejajar Dua buah garis atau lebih yang selalu mempunyai jarak yang sama dan tidak pernah berpotongan |
| Fungsi Onto Suatu fungsi dimana setiap anggota daerah hasil mempunyai pasangan | Garis-garis Tegak Lurus Dua buah garis yang berpotongan dan membentuk sudut siku-siku |
| Fungsi Turun Suatu fungsi yang harga kemiringannya selalu negatif | Grafik Gambar, bagan atau diagram yang menunjukkan informasi tentang sesuatu |
| G | Garis Simetri Garis simetri membagi suatu bentuk menjadi dua |
| Garis Normal Garis yang tegak lurus dengan garis singgung | J |
| Garis Singgung Garis lurus yang melaluti titik singgung suatu kurva | Jarak Ukuran panjang ruas garis yang menghubungkan antara dua titik |
| Jari-jari Lingkaran Ukuran ruas garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke kelilingnya | Jarak Titik ke Garis Ukuran panjang ruas garis yang menghubungkan sebuah titik dan titik perpotongan tegak lurus ruas garis dengan garis tersebut |
| Kuadrat Dikuadratkan, berarti suatu bilangan dikalikan dengan dirinya sendiri | K |
| Kemiringan Disebut juga dengan gradien, yaitu tangen sudut antara garis dengan sumbu x positif | Koordinat Dua bilangan atau huruf yang menjelaskan posisi sesuatu di grafik, koordinat pertama disebut absis dan koordinat kedua disebut ordinat |
| L | |
| Lambang Tanda yang digunakan untuk mewakili kata | |

Lingkaran

Kumpulan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik tertentu (titik pusat)

O

Ordinal

Bilangan yang menunjukkan suatu urutan, seperti pertama, kedua, ketiga

Ordinat

Bilangan kedua dari pasangan bilangan yang menunjukkan letak sesuatu di dalam koordinat kartesius

P

Persamaan

Kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda sama dengan

Pertaksamaan

Kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda ketaksamaan

Pythagoras

Teorema yang berlaku pada segitiga siku-siku, dimana sisi miring kuadrat sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya

Penjumlahan

Proses menjumlahkan dua atau lebih bilangan untuk memperoleh jumlah keseluruhan

R

Rumus

Cara ringkas untuk menuliskan suatu kaedah

S

Sejajar

Garis sejajar adalah garis yang mempunyai jarak yang sama

Segitiga Sama Kaki

Segitiga yang mempunyai dua sisi yang sama

Segitiga Sama Sisi

Segitiga yang ketiga sisinya sama

Segitiga Siku-siku

Segitiga yang salah satu sudutnya adalah siku-siku

Selang

Jumlah waktu atau ruang diantara dua hal

T

Teorema

Suatu pernyataan yang kebenarannya diterima melalui serangkaian pembuktian

Titik Balik

Suatu koordinat yang menunjukkan posisi suatu fungsi dari keadaan turun menjadi naik atau sebaliknya

Tegak Lurus

Dua garis dikatakan tegak lurus jika keduanya berpotongan dan membentuk sudut 90°

Indeks

A

Absis 29,39,72
Aksioma 1,6,12
Asosiatif 6
Aturan Fungsi 55, 56,
58,84,99,158,172
Identitas 61, 158
Konstanta 65, 117, 132, 143,
158, 159,160,161, 163, 174
Aturan 55, 56, 57, 58, 78, 84
Hasil Kali 9, 13, 99, 161, 165
Hasil Bagi 3, 162, 166
Pangkat 1, 10, 64, 86, 158, 161,
193

B

Bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11,
12, 13
Asli 2,4,5,6,9,10,11
Bulat 2, 3, 4, 5, 6, 10
Cacah 4, 5, 6
Irrasional 3, 5, 6,10
Komposit 4, 5, 6
Prima 9
Rasional 2, 3, 4, 5, 6
Real 1, 2, 4, 6, 10, 12, 13, 15, 18,
20

C

Cartesius 1, 28, 29, 31, 49

D

Daerah 14, 21, 30, 48, 52, 54, 55,
57, 58, 73, 77, 85, 86, 88, 93, 95,
94, 96, 98, 99, 100, 137, 140,
141, 146, 182

Asal 54, 55, 57, 58, 73, 77, 85,
86, 88, 93, 95, 94, 96, 98, 99,
100, 137, 140, 141, 146, 182
Hasil 54, 55, 57, 58, 93, 94, 100
Interval, 14
Kuadran 30
Definit 13, 17, 23, 24, 25
Positif 13, 17, 23, 24, 25
Distributif 6

F

Fungsi 51, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64,
65, 82, 83, 85, 90, 95, 98, 99,
147, 170, 171
Aljabar 63
Eksplisit 62,172
Eksponen 64, 147, 170, 171
Ganjil 65, 82, 90, 95, 96
Genap 64, 65, 82, 83, 85, 90,
95, 98, 99
Homogen 54, 65, 66
Identitas 61, 158
Implisit 62, 171, 172
Invers, 54, 66
Trigonometri 63, 64, 89, 90,
132, 147, 166, 167, 198
Onto 60
Korespondensi 60, 61
Parameter 67, 173, 174
Periodik 70
Satu-satu 60
Siklometri 64
Transenden 63
Trigonometri 63, 64, 89, 90,
132, 147, 166, 167, 198

G

Garis 3, 13, 14, 14, 18, 20, 21, 23,
24, 29, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
41, 42, 43, 44, 148, 149, 154,
165, 166, 167, 169, 175, 176,
177, 180, 181, 186, 190
Normal 176, 180, 181
Singgung 148, 149, 154, 165,
166, 167, 169, 175, 176, 177,
180, 181, 186, 190
Sejajar 43, 180
Tegak lurus 44

J

Jarak 1, 20, 21, 22, 23, 31, 33, 34,
37, 38, 53, 57, 102, 125, 166,
177, 190
Dua Titik 1, 20, 21, 31, 32, 33,
37, 38, 53, 177
Titik Ke Garis 1, 20, 35, 36
Jari-jari Lingkaran 1, 32, 33

K

Kecekungan 176, 186, 187
Kemiringan 38, 39, 40, 41, 43, 45,
46, 47, 148, 149, 154, 165, 177,
180, 186
Komposisi Fungsi 87, 198
Komutatif 6, 198

L

Limit Di Tak Hingga 122, 124
Limit Fungsi 101, 102, 104, 112,
114, 121, 122, 126, 132,
Limit Fungsi Trigonometri 132,
Limit Sepihak 101, 111,
Limit Tak Hingga 121, 122
Sepihak 108, 118
Tak Hingga 130, 131

N

Nilai 137, 144, 146, 149,
Limit 137,
Antara 144, 146,
Maksimum 176, 182, 183, 184,
188, 189, 190,
Minimum 176, 182, 183, 184,
188, 189, 190,
Mutlak 20, 21, 22, 25, 68, 78, 79,
80, 98, 99

P

Penerapan Turunan 179
Persamaan 1, 10, 32, 33, 34, 37, 38,
39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48,
49, 50, 51, 52, 70, 71, 72, 78, 148,
165, 166, 167, 169, 175, 177,
178, 180, 190,
Garis Lurus 38, 39, 40, 41, 42,
43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52,
Lingkaran 32, 33, 34, 37, 38,
Pythagoras 2, 34, 48, 142,
Pusat Lingkaran 1, 32, 33, 34, 177

S

Segitiga 3, 22, 30, 31, 32, 36, 38, 44,
47,
Sama Kaki 36, 39,
Siku-siku 3, 30, 31, 44, 47,
Simetris 49, 68, 82

T

Titik Balik 188, 189, 191,
Trikotomi 12,
Turunan 55, 68, 73, 147, 149, 150,
151, 152, 154, 157, 161, 163,
164, 166, 167, 168, 169, 170,
171, 173, 176, 180, 185, 186,

187, 188,
Trigonometri 147, 166, 167,
Fungsi Algoritmik 147, 170
Fungsi Algoritmik 182
Fungsi Eksponensial 147,
Implisit 147, 172,
Parameter 147, 173