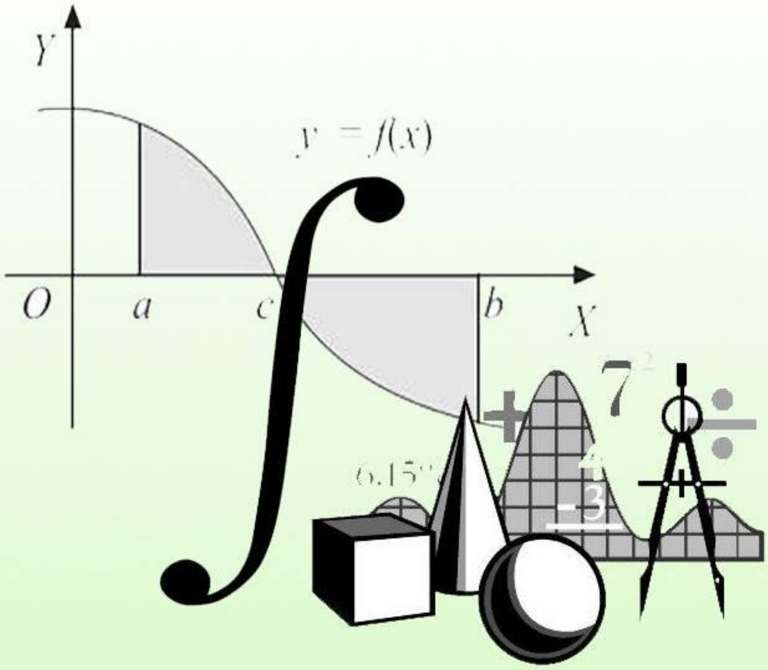
BAHAN AJAR
KALKULUS I



RESMAWAN, S.Pd, M.Si

Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan IPA

Universitas Negeri Gorontalo

2014

BAHAN AJAR KALKULUS I

RESMAWAN, S.Pd, M.Si

Bahan ajar ini berisi ringkasan materi Kalkulus I dari beberapa buku referensi yang berkaitan

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA
UNIVERSITAS NEGERI GORONTALO
2014

HALAMAN PENGESAHAN

BAHAN AJAR

Mata Kuliah	: Kalkulus I
Kode Mata Kuliah	: 411420113
SKS	: 3
Semester	: Ganjil
Program Studi	: Pendidikan matematika

Telah disahkan dan disetujui penggunaannya di Lingkungan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo.

Gorontalo, 1 Agustus 2014

Ketua Jurusan Matematika	Penyusun
Dra. Lailany Yahya, M.Si	Resmawan, S.Pd, M.Si
NIP. 196812191994032001	NIP. 198804132014041001

Mengetahui
Dekan Fakultas MIPA

Prof. Dr. Hj. Evi Hulukati, M.Pd
NIP. 19600530 198603 2 001

KATA PENGANTAR

Kalkulus memiliki keterkaitan antar topik yang sangat kuat. Oleh karena itu, mahasiswa perlu memahami konsep/materi pendukung agar dapat memahami materi dengan baik. Akibatnya, seorang mahasiswa yang mengikuti kuliah kalkulus akan mempunyai resiko kegagalan semakin kecil apabila ia belajar secara kontinu sejak hari pertama perkuliahan. Diperlukan sarana yang memadai untuk membiasakan belajar secara kontinu, baik buku-buku referensi untuk memperkaya pemahaman konsep, maupun soal-soal latihan yang dirancang untuk mempertajam pemahaman suatu konsep yang disusun bertahap dari paling mudah ke soal paling sulit. Di samping itu, soal-soal latihan yang bertahap tersebut juga untuk melatih keterampilan serta untuk memahami pentahapan dan proses dalam suatu penyelesaian soal. Bahan ajar ini disusun sebagai upaya untuk membantu mahasiswa agar dapat belajar secara kontinu dan terarah. Namun demikian, bahan ajar ini disusun bukan sebagai pengganti peranan buku referensi tetapi sebagai pendamping/pelengkap buku referensi tersebut.

Bahan ajar ini diharapkan dapat membantu dosen pengajar dan mahasiswa untuk menyamakan persepsi tentang kedalaman pembahasan dari suatu topik. Tiap topik bahasan diberikan teori singkat, contoh soal dan latihan dengan maksud agar para mahasiswa dapat menguasai setiap topik secara kontinu dan terarah.

Dalam setiap proses pembelajaran, diharapkan mahasiswa dapat melibatkan diri dan berpartisipasi aktif sehingga dapat terjadi umpan balik untuk mengetahui sejauh mana pemahaman mahasiswa terhadap materi yang sedang dipelajari.

Dengan digunakannya bahan ajar ini, diharapkan dosen dapat mengantisipasi setiap permasalahan yang dihadapi oleh mahasiswa serta mahasiswa dapat mempersiapkan evaluasi akhir jauh-jauh hari sebelumnya.

Gorontalo, Agustus 2014
Penulis

PETUNJUK BAGI PEMAKAI BAHAN AJAR

Untuk membantu mahasiswa dalam menguasai topik pembelajaran, materi dalam bahan ajar ini dibagi menjadi empat bagian besar yang setiap bagian akan terdiri dari beberapa kegiatan pembelajaran.

Mahasiswa dapat mempelajari keseluruhan bahan ajar ini dengan cara yang berurutan. Jangan memaksakan diri sebelum benar-benar menguasai bagian demi bagian dalam bahan ajar ini, karena masing-masing saling berkaitan. Setiap kegiatan belajar dilengkapi dengan contoh soal dan soal-soal latihan. Soal-soal latihan akan dijadikan sebagai alat ukur tingkat penguasaan mahasiswa setelah mempelajari materi dalam bahan ajar ini. Apabila mahasiswa masih mengalami kesulitan memahami materi yang ada dalam bahan ajar ini, silahkan diskusikan dengan teman atau menanyakan langsung dosen pengajar.

Terakhir, bahwa keberhasilan mahasiswa tergantung dari tingkat aktifitas mahasiswa dalam membaca dan memahami buku rujukan, tingkat aktifitas mahasiswa dalam membaca teori singkat pada bahan ajar ini yang merupakan rangkuman dari teori yang ada di buku rujukan, serta aktifitas mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal latihan. Pada prinsipnya dosen pengajar hanya menyediakan sarana, sementara hasil akhir tergantung dari usaha setiap mahasiswa.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Sistem Bilangan Real

Dasar dari materi kalkulus adalah sistem bilangan real dan sifat-sifatnya. Bilangan real pada prinsipnya adalah gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irrasional. Bilangan ***real*** dapat dinyatakan dalam bentuk desimal seperti

$$-\frac{3}{4} = -0{,}75000 \ldots$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots$$
$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \ldots$$

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk desimal *berulang* atau desimal *berhenti* (memiliki akhir), sedangkan ***bilangan irrasional*** adalah kebalikan dari bilangan rasional, yaitu bilangan desimal yang *tak berulang* dan *tak berhenti*. Bentuk desimal dari bilangan irrasional tidak berulang dalam siklus-siklus. Sebagai contoh,

$$\frac{3}{4} = 0{,}75000 \ldots = 0{,}75 \quad \text{atau} \quad \frac{23}{11} = 2{,}090909 \ldots = 2{,}09$$

merupakan contoh bilangan rasional, sedangkan

$$0.101001000100001 \ldots$$

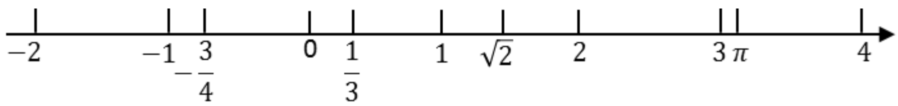
merupakan contoh bilangan irrasional.

Dengan bahasa lain, bilangan rasional dapat dinyatakan dalam bentuk p/q dengan p dan q bilangan bulat, serta $q \neq 0$ atau

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

sedangkan bilangan irrasional tidak dapat dinyatakan dalam bentuk demikian.

Sistem bilangan real R dengan operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat-sifat aljabar (*komutatif, assosiatif, distributif, …*), sifat-sifat urutan (*hukum trikotomi, transitif, …*) yang melibatkan lambang $<, =, >,$ dan sifat kelengkapan, yaitu bahwa R merupakan garis yang tak berlubang. Secara geometris bilangan real dapat digambarkan dalam garis bilangan. Perhatikan Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Bilangan Real

CONTOH 1

1) Tunjukkan bahwa $x = 0{,}136136136 \ldots$ adalah bilangan rasional.

Penyelesaian
Kita kurangkan x dari $1000x$ kemudian menghitung x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136{,}136136136 \ldots \\ x &= \quad 0{,}136136136 \ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

2) Tunjukkan bahwa $x = 3{,}929292$ ... adalah bilangan rasional.

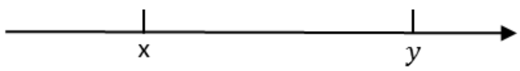
Penyelesaian
Kita kurangkan x dari $100x$ kemudian menghitung x.

$$\begin{aligned} 100x &= 39{,}292929 \ldots \\ x &= \ \ 0{,}292929 \ldots \\ \hline 99x &= 39 \\ x &= \frac{39}{99} \end{aligned}$$

1.2 Aksioma Urutan

1.2.1 Urutan pada Garis Real

Dengan menyatakan bahwa $x < y$, berarti bahwa x berada di sebelah kiri y pada garis real. Perhatikan Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Aksioma Urutan

1.2.2 Sifat-Sifat Urutan

Berikut adalah empat sifat-sifat urutan dalam sistem bilangan real:

a) Trikotomi
Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka tepat satu diantara berikut berlaku; $x < y, x = y$, dan $x > y$.

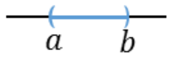
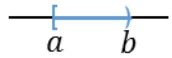
b) Ketransitifan
$x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$

c) Penambahan
$x < y$ jika dan hanya jika $x + z < y + z$

d) Perkalian
Ketika z positif, berlaku $x < y \leftrightarrow xz < yz$ dan ketika z negatif, berlaku $x < y \leftrightarrow xz > yz$.

1.3 Interval atau Selang

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dapat digambarkan sebagai suatu garis yang dinamakan garis bilangan. Interval atau selang adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, dilambangkan sebagai berikut.

Notasi Himpunan	Notasi Interval	Grafik
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x \mid x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

1.4 Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak

1.4.1 Ketaksamaan

Pertidaksamaan (*inequality*) adalah pernyataan matematis yang memuat satu variabel atau lebih dan salah satu tanda ketidaksamaan $(<, >, \leq, \geq)$. Sama halnya dengan persamaan, penyelesaikan bentuk pertidaksamaan dapat dilakukan dengan melakukan operasi-operasi tertentu pada kedua ruas pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan pemecahannya, seperti:

a) Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan.
b) Mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan suatu bilangan positif.
c) Mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan suatu bilangan negatif, tetapi dengan disertai perubahan arah tanda pertidaksamaan.

CONTOH 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan berikut:

1) $2x - 5 < 5x + 7$
2) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$

Penyelesaian

1) $$\begin{aligned} 2x - 5 < 5x + 7 &\Leftrightarrow 2x - 5x < 7 + 5 \\ &\Leftrightarrow -3x < 12 \\ &\Leftrightarrow 3x > -12 \\ &\Leftrightarrow x > -4 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah $(-4, \infty)$

2) $\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} < 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)2x < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ atau } x > 2$$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

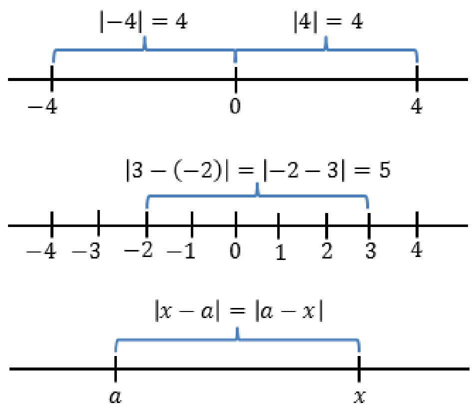
1.4.2 Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan dalam kalkulus, sehingga sangat penting untuk menguasai konsep ini sebelum masuk pada pembahasan kalkulus.

Definisi Nilai Mutlak
Nilai mutlak dari suatu bilangan real x, dinyatakan oleh $|x|$, dan didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

Nilai mutlak menyatakan jarak dari suatu titik ke titik yang lainnya, sehingga $|x|$ dapat diartikan sebagai jarak antara titik x dengan titik asalnya. Perhatikan Gambar 1.3.



Gambar 1.3 Ilustrasi Nilai Mutlak

Sebagai contoh, $|-8| = -(-8) = 8$, $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, $|3| = 3$, dst.

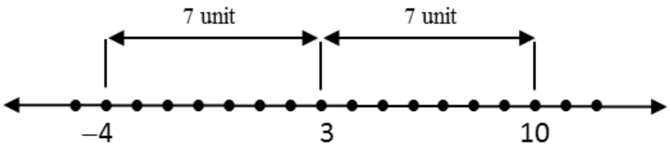
Selanjutnya, sifat-sifat nilai mutlak diterangkan sebagai berikut.

Sifat-Sifat Nilai Mutlak

1. $|ab| = |a||b|$
2. $|a|^2 = a^2$ atau $|a| = \sqrt{a^2}$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|$
4. $|a - b| = |b - a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$
6. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

(Dengan mengacu pada definisi nilai mutlak, diskusikan kebenaran sifat-sifat nilai mutlak diatas)

Secara geometris, nilai mutlak $|x-a|$ dapat diartikan sebagai jarak dari a ke x. Sebagai contoh, jika $|x-3|=7$ maka artinya x berjarak 7 unit di sebelah kanan atau di sebelah kiri 3 (lihat Gambar 1.4 berikut).



Gambar 1.4 Nilai Mutlak sebagai Jarak

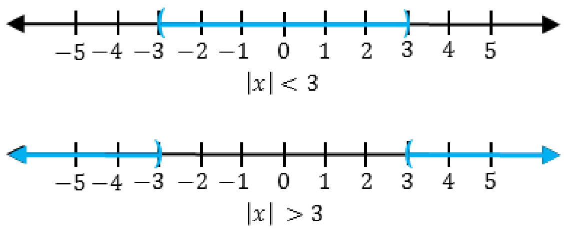
Jadi, penyelesaian $|x-3|=7$ adalah $\{-4,10\}$.

1.4.3 Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak, dapat kita gunakan fakta bahwa

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$$

Untuk lebih jelasnya, kita gunakan analogi sederhana.



Gambar 1.5 Analogi Ketaksamaan Nilai Mutlak

Jika $|x| < 3$, maka jarak antara x dengan titik asal harus lebih kecil dari 3 atau dengan kata lain, x harus lebih kecil dari 3 dan lebih besar dari -3, yaitu $-3 < x < 3$. Sebaliknya, jika $|x| > 3$, maka jarak antara x dengan titik asal haruslah paling sedikit 3. Perhatikan Gambar 1.5.

CONTOH 3

1) Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut
   a) $|x-4| \leq 1{,}5$
   b) $|2x+3| \leq |x-3|$
2) Tentukan bilangan positif δ supaya pernyataan berikut benar
   a) $|x-2| < \delta \Longrightarrow |5x-10| < 1$
   b) $|x-3| < \delta \Longrightarrow |6x-18| < \varepsilon$

Penyelesaian

1. a) $|x-4| \le 1{,}5 \Leftrightarrow -1{,}5 \le x-4 \le 1{,}5$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}5 \le x \le 5{,}5$$

Jadi, HP $= \{x|2{,}5 \le x \le 5{,}5\} = \left[2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$

1. b) $|2x+3| \le |x-3| \Leftrightarrow (|2x+3|)^2 \le (|x-3|)^2$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^2 \le (x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 \le x^2 - 6x + 9$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 18x \le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 6x \le 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+6) \le 0$$

Jadi, HP $= \{x| -6 \le x \le 0\} = [-6,0]$

2. a) $|x-2| < \delta \Longrightarrow |5x-10| < 1$

$|5x-10| = 5|x-2| < 1$ apabila $|x-2| < \dfrac{1}{5}$

Dengan demikian, Pilih $\delta = \dfrac{1}{5}$

2. b) $|x-3| < \delta \Longrightarrow |6x-18| < \varepsilon$

$|6x-18| = 6|x-3| < 24$ apabila $|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{6}$

Dengan demikian, Pilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$

LATIHAN 1

1) Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan nilai mutlak berikut

   a) $|2x-7| < 3$

   b) $|2x-7| > 3$

   c) $|x-2| < 3|x+7|$

   d) $\left|x - \dfrac{1}{x}\right| \le 2$

2) Carilah bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar

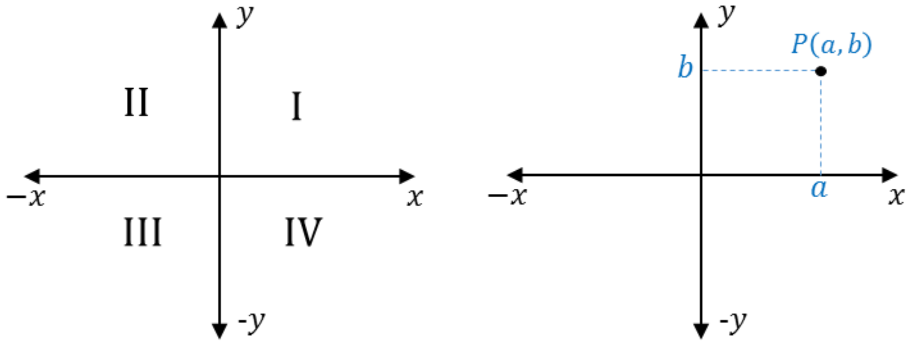
   a) $|x-5| < \delta \Longrightarrow |3x-15| < 6$

   b) $|x-4| < \delta \Longrightarrow |3x-12| < \varepsilon$

1.5 Sistem Koordinat

1.5.1 Sistem Koordinat Kartesius

Sumbu horizontal dinamakan sumbu-x (*absis*) dan sumbu vertikal dinamakan sumbu-y (*ordinat*). Setiap pasangan terurut bilangan (a, b) dapat digambarkan sebagai sebuah titik pada koordinat tersebut dan sebaliknya, setiap titik pada bidang koordinat Kartesius berkorespondensi dengan satu buah pasangan bilangan (a, b). Sumbu-sumbu koordinat membagi bidang menjadi empat daerah yang disebut sebagai kuadran I, II, III, dan IV. Perhatikan Gambar 1.6 berikut.



Gambar 1.6 Koordinat Kartesius

1.5.2 Rumus Jarak

Misalkan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dua buah titik pada bidang, jaraknya adalah $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

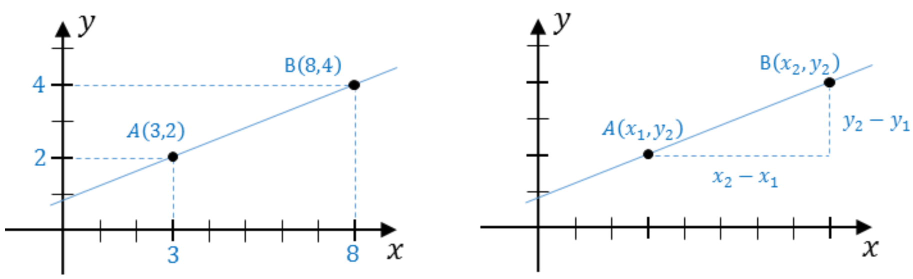
CONTOH 4

Jika diketahui antara $A(2,4)$ dan $B(-1,6)$, maka jarak antara A dan B dinyatakan sebagai

$$|AB|\sqrt{(-1-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

1.5.3 Garis Lurus dan Kemiringan

Perhatikan garis pada Gambar 1.7. Dari titik A ke titik B, terdapat suatu kenaikan sebesar 2 satuan dan suatu majuan sebesar 5 satuan.



Gambar 1.7 Garis Lurus dan Kemiringan

Pada umumnya untuk sebuah garis yang melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$, kita definisikan kemiringan (*solpe*) m dari garis itu sebagai

$$m = \frac{kenaikan}{majuan} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

CONTOH 5

Carilah persamaan garis yang melalui $(2, -5)$dan $(0, -6)$.

Penyelesaian

Pertama, kita perlu cari kemiringan garis

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - (-5)}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Selanjutnya, buat persamaan garis dengan kemiringan $m = 1/2$ yang melalui titik $(2, -5)$, yaitu

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-5) &= \frac{1}{2}(x - 2) \\ y + 5 &= \frac{1}{2}(x - 2) \\ 2y + 10 &= x - 2 \\ x - 2y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

1.6 Grafik Persamaan

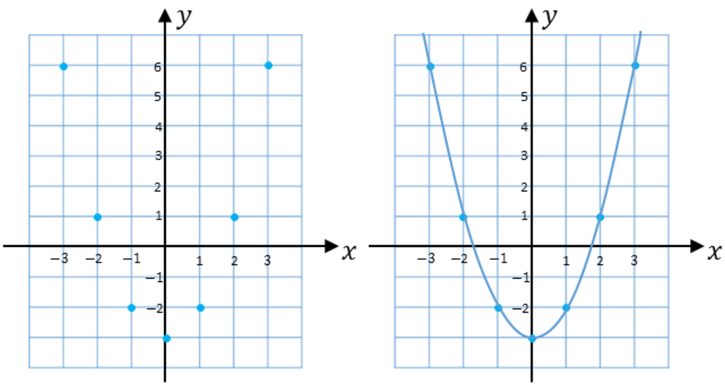
Grafik suatu persamaan dalam x dan y terdiri atas titik-titik di bidang yang koordinat (x, y)-nya memenuhi persamaan yang diberikan.

Prosedur yang dapat dilakukan untuk menggambar grafik suatu persamaan, misalnya $y = x^2 - 3$ adalah sebagai berikut (Perhatikan Gambar 1.8):

1. Dapatkan koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan
2. Buat plot dari titik-titik tersebut pada bidang
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah garis lurus

$y = x^2 - 3$

x	y
-3	6
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1
3	6



Tahap 1 **Tahap 2** **Tahap 3**

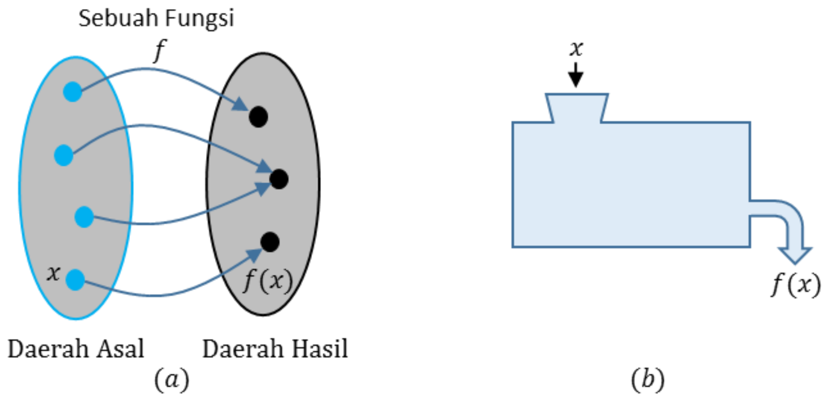
Gambar 1.8 Grafik Persamaan

1.7 Fungsi

1.7.1 Definisi Fungsi

Definisi Sebuah fungsi f adalah aturan korespondensi yang menghubungkan tiap objek x dalam suatu himpunan, yang disebut sebagai **daerah asal** (*domain*), dengan nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang disebut sebagai **daerah hasil** (*range*) fungsi (Gambar 1.9a).

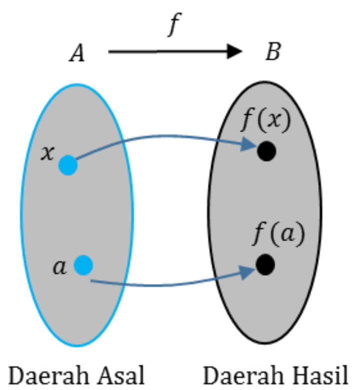
Suatu fungsi dapat dianalogikan sebagai sebuah mesin yang mengambil x sebagai inputnya dan menghasilkan $f(x)$ sebagai outputnya (Gambar 1.9b). Setiap nilai input akan dicocokan dengan tepat satu nilai output, namun dapat memungkinkan akan terjadi beberapa nilai input yang berbeda menghasilkan nilai ouput yang sama.



Gambar 1.9 Ilustrasi Fungsi

1.7.2 Penyajian Suatu Fungsi

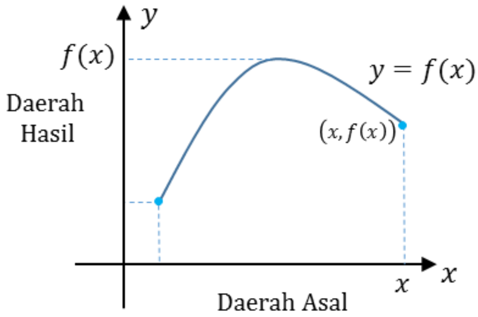
a) Diagram Panah



Gambar 1.10 Diagram Panah

Masing-masing panah mengaitkan suatu elemen dari himpunan A ke suatu elemen dari himpunan B. Arah panah menunjukkan bahwa $f(x)$ dan $f(a)$ masing-masing dipadankan dengan x dan a, dan seterusnya. (Perhatikan Gambar 1.10)

b) Grafik



Gambar 1.11 Grafik Fungsi

Cara yang paling umum digunakan untuk menggambarkan suatu fungsi adalah dengan grafik. Jika f adalah suatu fungsi dengan domain A, maka grafiknya adalah himpunan pasangan berurutan $\{(x, f(x)) | \ x \in A\}$ d. (Perhatikan Gambar 1.11)

1.7.3 Notasi Fungsi

Untuk memberikan nama pada suatu fungsi, dapat digunakan huruf tunggal seperti f, g, h, F, atau huruf tunggal lainnya. Dengan demikian, $f(x)$ dibaca "f dari x" atau "f pada x", yang menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Sebagai contoh, jika $f(x) = x^2 - 3$, maka

$$f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$
$$f(a) = a^2 - 3$$
$$f(x + y) = (x + y)^2 - 3 = x^2 + 2xy + y^2 - 3$$

1.7.4 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Secara sederhana, kita dapat membedakan fungsi genap dan fungsi ganjil dari sebuah fungsi $f(x)$ dengan memperhatikan nilai yang diberikan oleh $f(-x)$ dengan x sebagai daerah asal. Dalam hal ini,

Jika $f(-x) = f(x)$, disebut sebagai **fungsi genap**

Jika $f(-x) = -f(x)$, disebut sebagai **fungsi ganjil**

CONTOH 6

Tentukan apakah fungsi yang diberikan termasuk fungsi genap, ganjil, atau tidak keduanya:

1) $f(x) = 2x + 1$ 2) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Penyelesaian

1) Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $-f(x) = -(2x + 1)$

$f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \neq f(x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ **Bukan Keduanya**

2) Diketahui $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ dan $-h(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 4}$

$h(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2 - 4} = -f(x) \Longrightarrow$ **Fungsi Ganjil**

LATIHAN 2

1) Tentukan apakah fungsi yang diberikan termasuk fungsi genap, ganjil, atau tidak keduanya:
   a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
   b) $g(t) = |2t|$
   c) $h(w) = \frac{w^3}{4}$
2) Carilah jarak antara titik-titik berikut:
   a) $A(-3,5)$ dan $B(2,-2)$
   b) $P(4,5)$ dan $Q(5,-8)$
3) Carilah persamaan untuk tiap garis yang melalui titik-titik berikut, kemudian nyatakan dala bentuk $Ax + By + C = 0$:
   a) Melalui titik $(2, 2)$ dengan kemiringan -1
   b) Melalui titik $(4, 1)$ dan$(8, 2)$

BAB II
LIMIT DAN KEKONTINUAN FUNGSI

2.1 Konsep Limit Fungsi

2.1.1 Definisi Limit Secara Intuitif

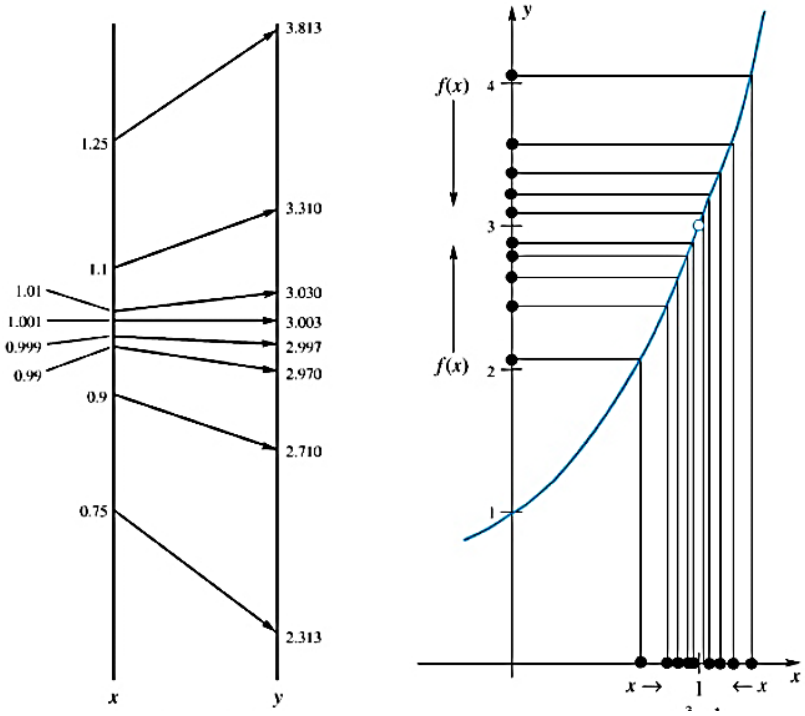
Misalkan suatu fungsi yang ditentukan oleh rumus

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Terlihat dengan jelas bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$, karena pada titik ini $f(x)$ akan berbentuk $\frac{0}{0}$. Meskipun demikian, kita dapat mengamati apa yang terjadi pada $f(x)$ ketika x mendekati 1. Hal ini dapat dilakukan dengan melakukan perhitungan pada nilai $f(x)$ ketika x mendekati 1. Perhatikan tabel, diagram skematis, dan grafik pada Gambar 2.1 berikut.

x	$y = \frac{x^3-1}{x-1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Table values



Gambar 2.1 Tabel Nilai, Diagram Skematis, dan Grafik Fungsi $f(x)$

Terlihat bahwa semua informasi yang ditunjukkan pada Gambar menunjukkan kesimpulan yang sama, yaitu nilai $f(x)$ mendekati 3 ketika nilai x mendekati 1.

Definisi Makna Limit Secara Intutisi

Dikatakan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, apabila jika x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L.

CONTOH 1

1) Carilah $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

Penyelesaian

Sesuai dengan definisi limit secara intuitif, dikatakan bahwa ketika x dekat ke 2, maka (x^2+2x-1) dekat ke $(2^2+2.2-1)=7$, ditulis

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7$$

2) Carilah $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$

Penyelesaian

Pada kasus ini terlihat bahwa fungsi yang diberikan tidak terdefini di $x=-2$, sehingga kita perlu menyederhanakan bentuk fungsi dengan sedikit manipulasi aljabar untuk mendapatkan gagasan tentang apa yang terjadi ketika x dekat ke-2. Kita tuliskan

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-3)=-2-3=-5$$

Pencoretan $x+2$ diperbolehkan karena definisi limit mengabaikan perilaku tepat di $x=-2$.

2.1.2 Limit Kanan dan Limit Kiri

Seperti halnya makna limit secara umum, limit kiri dan limit kanan juga dapat dimaknai secara intuitif sebagai berikut.

Definisi Limit Kanan
Dikatakan $\lim\limits_{x\to c+} f(x)=L$, apabila jika $x>c$ dan dekat ke c, maka $f(x)$ dekat ke L.

Definisi Limit Kiri
Dikatakan $\lim\limits_{x\to c-} f(x)=L$, apabila jika $x<c$ dan dekat ke c, maka $f(x)$ dekat ke L.

Dengan mengacu pada kedua definisi di atas, kita dapat mengetahui suatu fungsi memiliki limit atau tidak.

Teorema 2.1
$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c-} f(x)=L$ dan $\lim\limits_{x\to c+} f(x)=L$.

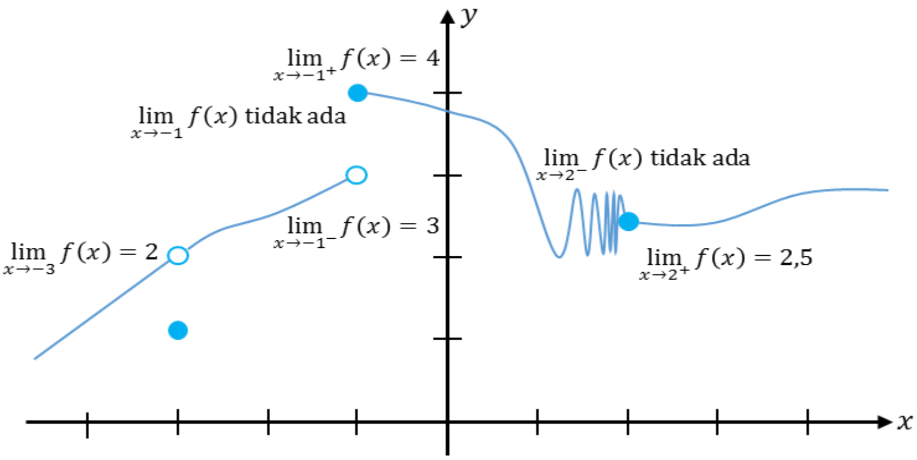
Artinya, limit suatu fungsi f di c dikatakan ***ada*** jika dan hanya jika *limit kanan* dan *limit kiri* f di c *ada* dan *nilainya sama*.

Limit f di c dikatakan ***tidak ada*** bila salah satu di antarabeberapa kemungkinan berikut terjadi:

a) Limit kanan dan limit kiri f di c ada, tetapi nilainya tidak sama.
b) Limit kanan atau limit kiri f di c tidak ada, karena
   - ✓ Nilai f di dekat c *menuju tak terhingga*.
   - ✓ Nilai f di dekat c *berosilasi*.

CONTOH 2

Perhatikan contoh pada Gambar 2.2 berikut



Gambar 2.2 Limit Kiri dan Limit Kanan

LATIHAN 1

1) Carilah limit yang ditunjukkan berikut:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x+1}$

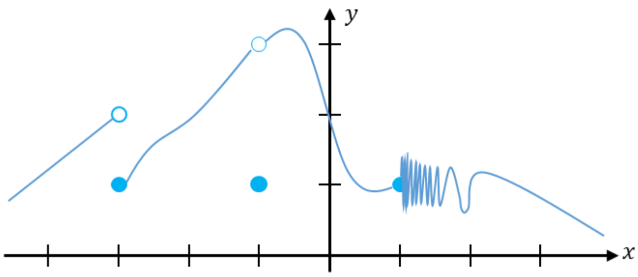
b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4+2x^3-x^2}{x^2}$ d) $\lim_{x\to -t} \dfrac{x^2-t^2}{x+t}$

2) Perhatikan Gambar 2.3. Untuk fungsi f, carilah limit atau nilai fungsi yang ditunjukkan, atau nyatakan bahwa limit tersebut tidak ada:

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ g) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ j) $f(-1)$

b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ h) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ k) $f(1)$

c) $\lim_{x\to -3} f(x)$ f) $\lim_{x\to -1} f(x)$ i) $f(-3)$



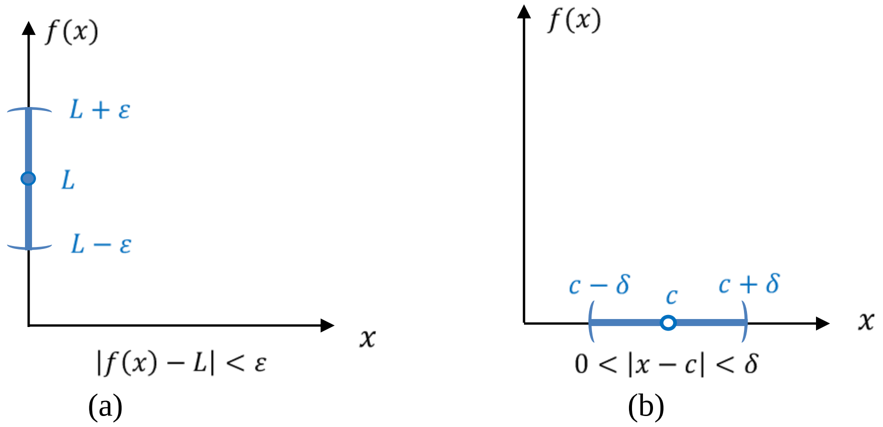
Gambar 2.3

2.2 Definisi Presisi Limit

Dikatakan bahwa $f(x)$ berbeda dari L sebesar lebih kecil dari ε, artinya $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ atau setara dengan

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $f(x)$ berada pada interval buka $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Ilustrasi ditunjukkan pada Gambar 2.4a.



Gambar 2.4 Ilustrasi Limit

Selanjutnya dapat dikatakan bahwa x cukup dekat tetapi berbeda dengan c, artinya untuk suatu δ, x terdapat pada interval buka $(c-\delta, c+\delta)$ dengan c dikecualikan atau setara dengan

$$0<|x-c|<\delta.$$

Perhatikan bahwa $|x-c|<\delta$ akan menunjukkan interval $c-\delta<x<c+\delta$, sedangkan $0<|x-c|$ menunjukkan bahwa $x=c$ dikecualikan. Ilustrasi ditunjukkan pada Gambar 2.4b.

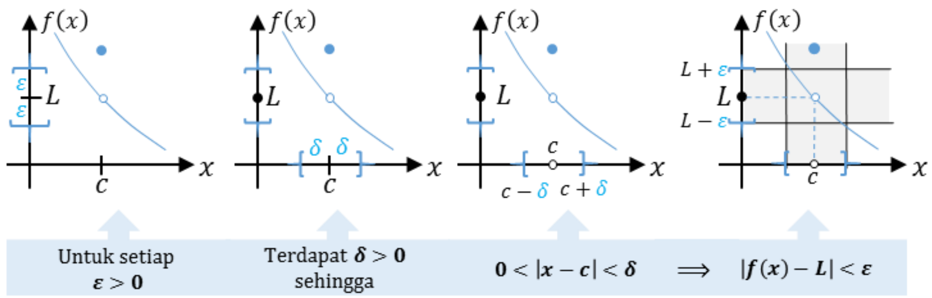
Definisi Makna Presisi Limit

Dikatakan $\lim_{x\to c} f(x)=L$, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat $\delta>0$ sehingga jika $0<|x-c|<\delta$, maka $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$\forall\, \varepsilon>0\,, \exists\, \delta>0 \ni 0<|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Gambar 2.5 berikut dapat membantu memahami definisi ini



Gambar 2.5 Defini Presisi Limit

CONTOH 3

1) Buktikan bahwa $\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$
2) Buktikan bahwa $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

3) Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

Penyelesaian

1) Menurut definisi limit,

$\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5) = 1$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0 \;\ni\; 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

Dengan demikian,

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang. Tugas kita adalah mencari suatu bilangan positif $(\delta > 0)$ sehingga

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

Untuk itu, kita bekerja mundur dari bentuk ruas kanan. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|(2x - 5) - 1| < \varepsilon &\Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |2(x - 3)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |2||x - 3| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga $0 < |x - 3| < \delta$ berakibat

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan sifat transitif, maka

$$|(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

2) Menurut definisi limit,

$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0 \;\ni\; 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$

Kita akan mencari suatu bilangan positif $(\delta > 0)$ sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$$

Untuk itu, kita bekerja mundur dari bentuk ruas kanan. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\sqrt{x} - 2 \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}\right| < \left|\frac{x - 4}{2}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{|x - 4|}{2} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |x - 4| < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = 2\varepsilon$, sehingga $0 < |x - 4| < \delta$ berakibat

$$\left|\sqrt{x} - 2\right| = \left|\sqrt{x} - 2 \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}\right| = \left|\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}\right| < \left|\frac{x - 4}{2}\right| < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Berdasarkan sifat transitif, maka

$$\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$$

3) Menurut definisi limit,
$\lim_{x \to 2} x^2 = 4 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0\ \ni\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$
Kita akan mencari suatu bilangan positif $(\delta > 0)$ sehingga
$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$$
Untuk itu, kita bekerja mundur dari bentuk ruas kanan. Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} |x^2-4| < \varepsilon &\Leftrightarrow |(x+2)(x-2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x+2||x-2| < \varepsilon \end{aligned}$$
Selanjutnya, kita perlu menaksir nilai $|x+2|$ agar $|x-2|$ dapat dibuat lebih kecil seperti yang kita inginkan. Untuk itu, kita sepakati memilih $\delta < 1$, sehingga $|x-2| < \delta$ berakibat
$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4 < 1 + 4 = 5$
Dengan demikian,
$$\begin{aligned} |x^2-4| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x+2||x-2| < 5|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$
Sampai disini, tampak ada 2 hal yang menjamin $|x^2-4| < \varepsilon$, yaitu $|x-2| < 1$ dan $|x-2| < \varepsilon/5$.

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$, sehingga $0 < |x-2| < \delta$ berakibat
$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 5\delta = 5.\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$
Berdasarkan sifat transitif, maka
$$|x^2-4| < \varepsilon$$

LATIHAN 2

1) Berikan definisi $\varepsilon - \delta$ yang sesuai untuk masing-masing ekspresi matematis berikut:
   a) $\lim_{x \to a} f(t) = M$
   b) $\lim_{x \to b} g(u) = L$
   c) $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$
   d) $\lim_{x \to a^+} g(t) = D$
2) Berikan bukti $\varepsilon - \delta$ dari masing-masing fakta limit berikut:
   a) $\lim_{x \to 0} (2x - 1) = -1$
   b) $\lim_{x \to 1} \sqrt{2x} = 2$
   c) $\lim_{x \to 1} (2x^2 + 1) = 3$

2.3 Teorema-Teorema Limit

Pada bagian sebelumnya kita telah membahas tentang pembuktian limit dengan definisi limit yang melibatkan $\varepsilon - \delta$. Hal ini cukup sulit dan memakan banyak waktu. Oleh karena itu, pada bagian ini akan kiita bahas teorema-teorema yang akan memudahkan kita dalam memecahkan masalah limit.

Teorema merupakan suatu pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya dan dapat digunakan sebagai alat untuk memecahkan masalah yang terkait.

2.3.1 Teorema Limit Utama

Teorema Teorema Limit Utama
Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c, maka

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) . \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$
8. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ketika n genap

Catatan: Teorema ini berlaku juga buat limit sepihak (limit kanan dan limit kiri)
Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 71

CONTOH 4

1) Berikut adalah beberapa contoh penggunaan teorema limit

a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} (2x^3 + 5x - 7) &= \lim_{x \to 1} 2x^3 + \lim_{x \to 1} 5x - \lim_{x \to 1} 7 \\
&= 2 \lim_{x \to 1} x^3 + 5 \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 7 \\
&= 2 \left(\lim_{x \to 1} x\right)^3 + 5 \left(\lim_{x \to 1} x\right) - \lim_{x \to 1} 7 \\
&= 2\,(1)^3 + 5(1) - 7 \\
\text{b} &= 0
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 1} &= \frac{\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 5}}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 1)} = \frac{\sqrt{\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 + \lim\limits_{x \to 2} 5}}{\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 1} \\
&= \frac{\sqrt{2^2 + 5}}{2 + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2) Diketahui $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, dan $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 8$. Tentukan, $\lim\limits_{x \to 1} f^2(x) \sqrt[3]{g(x)}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} f^2(x) \sqrt[3]{g(x)} &= \lim_{x \to 1} f^2(x) \,.\, \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{g(x)} \\
&= \left(\lim_{x \to 1} f(x)\right)^2 .\, \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} g(x)} \\
&= (3)^2 .\, \sqrt[3]{8} \\
&= 9\,.\,2 \\
&= 18
\end{aligned}$$

2.3.2 Teorema Substitusi

Teorema Teorema Subtitusi
Jika f fungsi polinomial atau fungsi rasional, maka
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$
asalkan $f(c)$ terdefinisi.

CONTOH 5

1) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+5x-1}{x^2+1} = \frac{2(2)^3+5(2)-1}{(2)^2+1} = \frac{25}{5} = 5$

2) $\lim_{x\to 1}(2x^3+5x-7) = 2(1)^3+5(1)-7 = 0$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x+1} = \frac{2^2+2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$

2.3.3 Teorema Apit

Teorema Teorema Apit
Misalkan $f, g,$ dan h adalah fungsi yang memenuhi
$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$
untuk x di sekitar c.
Jika
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$
Maka
$$\lim_{x\to c} g(x) = L$$

Catatan: Teorema ini berlaku juga buat limit sepihak (limit kanan dan limit kiri)
Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 72

CONTOH 6

Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

Penyelesaian
Pendekatan limit kanan:
Untuk $x > 0$ di dekat 0, berlaku
$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$
Jika ketiga ruas dikalikan dengan x, maka
$$-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$$
Karena $\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0,$ maka

$$\lim_{x \to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Pendekatan limit kiri:

Untuk $x < 0$ di dekat 0, berlaku

$$1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq -1$$

Jika ketiga ruas dikalikan dengan x, maka

$$x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$$

Karena $\lim_{x \to 0^-} (x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$ maka

$$\lim_{x \to 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Dengan demikian

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

LATIHAN 3

1) Dengan menggunakan teorema limit, hitunglah limit fungsi berikut:

   a) $\lim_{x \to -1} \left(x^3 - 4x + \frac{1}{x} \right)$

   b) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 - 1}$

2) Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$

2.4 Limit Fungsi Trigonometri

Aturan subtitusi pada fungsi polinomial juga berlaku pada fungsi trigonometri. Hal ini dapat dinyatakan pada Teorema berikut

Teorema Limit Fungsi Trigonometri

Untuk setiap bilangan real c di dalam daerah asal fungsi

1. $\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim_{t \to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t \to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t \to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t \to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim_{t \to c} \csc t = \csc c$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 74

CONTOH 7

Carilah $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{x + 1}$

Penyelesaian

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x + 1} . \lim_{x \to 0} \cos x = \frac{0}{0 + 1} . \cos 0 = 0.1 = 0$$

Disamping bentuk limit di atas, terdapat dua bentuk limit lain yang tidak dapat dihitung dengan cara subtitusi. Bentuk limit ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema Limit Fungsi Trigonometri Khusus

$$1. \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad\qquad 2.\ \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 75

CONTOH 8

Carilah masing – masing limit berikut

$$1. \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} \qquad\qquad 2. \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Penyelesaian

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3.\frac{\sin 3x}{3x} = 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

   Misal $y = 3x$, maka $y \to 0$ jika dan hanya jika $x \to 0$, sehingga

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 3.1 = 3$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

LATIHAN 4

1) Hitunglah masing-masing limit fungsi berikut:

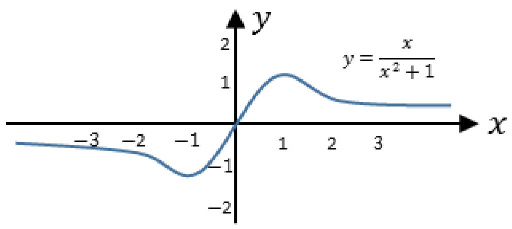
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x\tan x}{\sin x}$

   b) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin 3t + 4t}{t\sec t}$

2) Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 4x}$

2.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

2.5.1 Limit di Tak Hingga



Gambar 2.6 Ilustrasi Limit di Tak Hingga

Diberikan sebuah fungsi $f(x) = x/(x^2 + 1)$ yang grafiknya ditunjukkan pada Gambar 2.6. Apa yang terjadi pada $f(x)$ ketika x semakin besar hingga tanpa batas? Pertanyaan ini menyatakan *limit di tak hingga* yang dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}$$

Berdasarkan Gambar 2.6, jika kita muat beberapa nilai $f(x) = x/(x^2 + 1)$, maka akan nampak bahwa ketika x semakin besar, maka $f(x)$ semakin kecil. Dengan demikian, kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Definisi Limit Ketika $x \to \infty$

Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c. Dituliskan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $M \in R$ sehingga:

Jika $x > M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau secara matematis dapat ditulis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists M \in R \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Secara intuitif dapat dipahami bahwa, *"limit f di tak hingga"* sama dengan L jika untuk x cukup besar, maka nilai $f(x)$ dekat ke L.

CONTOH 9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{artinya, jika } x > ???, \text{maka } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Catatan: Jangan menuliskan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

CONTOH 10

Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

Penyelesaian

Menurut definisi, dapat kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \iff \forall\varepsilon > 0, \exists M \in R \ni x > M \Rightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right| < \varepsilon$$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, Pilih $M = \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga

Jika $x > M$, maka $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon$

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$.

Definisi Limit Ketika $x \to -\infty$

Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, c]$ untuk suatu bilangan c. Dituliskan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in R$ sehingga:

Jika $x < N$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau secara matematis dapat ditulis

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in R \ni x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Secara intuitif dapat dipahami bahwa, *"limit f di minus tak hingga"* sama dengan L jika untuk x minus besar, maka nilai $f(x)$ dekat ke L.

CONTOH 11

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{artinya, jika } x < ???\text{, maka } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Catatan: Jangan menuliskan

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

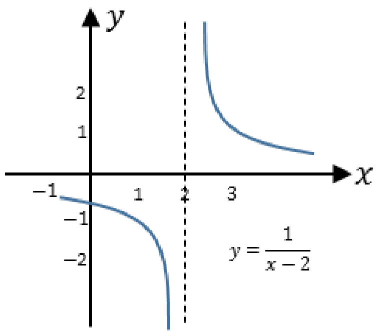
LATIHAN 5

Buktikan bahwa $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

2.5.2 Limit Tak Hingga

Diberikan sebuah fungsi $f(x) = 1/(x-2)$ yang grafiknya ditunjukkan pada Gambar 2.7. Ketika x mendekati 2 dari kiri, nampak fungsi $f(x)$ mengecil tanpa batas. Hal yang sama terjadi ketika x mendekati 2 dari kanan, nampak fungsi $f(x)$ membesar tanpa batas. Hal ini menyatakan *limit tak hingga* yang dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$



Gambar 2.7 Ilustrasi Limit Tak Hingga

Definisi Limit Tak Hingga dari Kanan

Dituliskan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

Apabila untuk setiap $M > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Atau secara matematis dapat ditulis

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Definisi Limit Tak Hingga dari Kiri

Dituliskan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Apabila untuk setiap $N < 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < c - x < \delta$, maka $f(x) < N$.

Atau secara matematis dapat ditulis

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N < 0,\ \exists \delta > 0 \ni 0 < c - x < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

CONTOH 12

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

Penyelesaian

Menurut definisi, dapat kita tuliskan

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \ni 0 < x - 0 < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > M$$

Diberikan $M > 0$ sembarang, Pilih $\delta = \frac{1}{M} > 0$

Sehingga dari $0 < x < \delta$, diperoleh $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M$

2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Penyelesaian

Menurut definisi, dapat kita tuliskan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0,\ \exists \delta > 0 \ni 0 < 0 - x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < N$$

Diberikan $N < 0$ sembarang, Pilih $\delta = -\frac{1}{N} < 0$

Sehingga dari $0 < -x < \delta$, diperoleh $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = N$

LATIHAN 6

1) Hitunglah masing-masing limit fungsi berikut:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{\sqrt{t^4-1}}{t^2+1}$

2) Hitunglah masing-masing limit fungsi berikut:

a) $\lim_{x\to2^+} \dfrac{x}{4-x^2}$ b) $\lim_{t\to-2^-} \dfrac{t}{4-t^2}$

2.6 Kekontinuan Fungsi

2.6.1 Kekontinuan Fungsi di Satu Titik

Definisi Kekontinuan di Satu Titik

Misalkan f terdefinisi di sekitar c, termasuk di c. Fungsi f dikatakan *kontinu di c* apabila

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

yaitu

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ \ni |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$$

Berdasarkan definisi ini, dikemukakan 3 syarat suatu fungsi dikatakan kontinu, yaitu

1. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada, artinya c berada dalam daerah asal f
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

CONTOH 12

1. Definisikan f di $x=2$, agar $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$ kontinu di $x=2$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to2}(x+2) = 2+2 = 4$$

Dengan demikian, didefinisikan $f(2) = 4$ agar $f(x)$ kontinu di $x=2$.

2. Nyatakan apakah fungsi − fungsi berikut kontinu atau tidak di titik $x=2$

a) $f(x) = (x-3)(x-2)$ c) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) $h(x) = \dfrac{2}{x-2}$ d) $g(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 2 \\ 2-x, & x > 2 \end{cases}$

Penyelesaian

a) $f(2) = (2-3)(2-2) = 0$

$\lim_{x\to2}(x-3)(x-2) = \lim_{x\to2}(2-3)(2-2) = 0$

Karena $\lim_{x\to2} f(x) = f(2) = 0$, maka $f(x)$ kontinu di $x=2$.

b) $h(2) = \dfrac{2}{2-2}$ dan $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x-2}$ tidak terdefinisi

maka $h(x)$ tidak kontinu di $x = 2$.

c) $g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \ni g(2) = 2 + 2 = 4$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4$

Karena $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2) = 4$, maka $g(x)$ kontinu di $x = 2$.

d) $g(2) = 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x-2) = 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2-x) = 2 - 2 = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$

Karena $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2) = 0$, maka $g(x)$ kontinu di $x = 2$.

2.6.2 Beberapa Fungsi Kontinu yang Dikenal

a) *Fungsi Polinomial*, kontinu pada setiap bilangan real R.

b) *Fungsi Rasional*, kontinu pada semua titik di daerah asalnya kecuali pada titik yang membuat penyebut nol.

c) *Fungsi Nilai Mutlak*, kontinu pada setiap bilangan real R.

d) *Fungsi Akar ke-n*, kontinu pada setiap bilangan real jika n ganjil dan kontinu pada setiap bilangan real positif jika n genap.

e) *Fungsi-Fungsi Trigonometri*; fungsi *sin* dan *cos* kontinu pada setiap bilangan real R. Adapun fungsi *tan*, *cot*, *sec*, dan *csc* kontinu pada setiap bilangan real di daerah asalnya.

2.6.3 Kekontinuan pada Operasi Fungsi

Teorema Kekontinuan pada Operasi Fungsi

Jika f dan g kontinu di c, maka operasi-operasi fungsi $kf, f+g, f.g, f/g$ (selama $g(c) \neq 0$), f^n, dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap) juga kontinu di c.

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 84

CONTOH 13

Pada bilangan apa saja fungsi $f(x) = x \sin x$ kontinu?

Penyelesaian

Karena x merupakan fungsi polinom yang kontinu pada setiap bilangan real, dan $\sin x$ merupakan fungsi trigonometri yang kontinu pada setiap bilangan real, maka $f(x)$ kontinu pada setiap bilangan real.

CONTOH 14

Tentukan pada titik mana fungsi $f(x) = \frac{\sin x}{x(1-x)}$ tidak kontinu?

Penyelesaian

sin x merupakan fungsi trigonometri yang kontinu pada setiap bilangan real, dan $x(1-x)$ merupakan fungsi polinom yang kontinu pada setiap bilangan real, namun akan menyebabkan penyebut 0 ketika $x=0$ atau $x=1$. Olehkarena itu, $f(x)$ kontinu pada setiap bilangan real, kecuali pada $x=0$ atau $x=1$.

2.6.4 Limit Komposit

Teorema Limit Komposit

Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan f kontinu di $L,$ maka

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f(L)$$

Secara khusus, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 85

CONTOH 15

Tunjukkan bahwa fungsi $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu pada setiap bilangan real.

Penyelesaian

Misal $f(x) = |x|$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 6$. Keduanya merupakan fungsi yang kontinu pada setiap bilangan real, maka fungsi komposisi dari keduanya

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = |x^2 - 3x + 6|$$

kontinu pada setiap bilangan real.

2.6.5 Kekontinuan Fungsi di Suatu Interval

a) Fungsi Kontinu pada Interval Buka

Definisi Fungsi Kontinu pada Interval Buka

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang (a, b) apabila f kontinu pada setiap titik $c \in (a, b)$.

b) Fungsi Kontinu pada Interval Tutup

Definisi Fungsi Kontinu pada Interval Tutup

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang $[a, b]$ apabila f kontinu pada (a, b), kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b.

CONTOH 16

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada selang $[-1, 2]$.

Penyelesaian

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a, b]$ tidak terputus dari titik $\big(a, f(a)\big)$ ke $\big(b, f(b)\big)$

2.6.6 Teorema Nilai Antara

Teorema Nilai Antara
Jika f kontinu pada selang $[a, b], f(a) < 0,$ dan $f(b) > 0$ (atau sebaliknya) , maka terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = 0$.

CONTOH 17

1. Tunjukkan dengan TNA bahwa $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ yang kontinu pada selang $[-1, 2]$, memiliki penyelesaian di antara -1 dan 2.
   Penyelesaian
   $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 < 0$
   $f(2) = (2)^3 - (2)^2 + 1 = 5 > 0$

   Karena f kontinu pada $[-1, 2]$, $f(-1) < 0,$ dan $f(2) > 0$, maka terdapat $c \in [-1,2]$ sehingga $f(c) = (c)^3 - (c)^2 + 1 = 0$.

2. Tunjukkan bahwa $p(x) = x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.
   Penyelesaian
   Untuk menyeselaikan soal ini, kita hanya butuh menghitung nilai $p(x)$ untuk beberapa nilai x positif sampai menemukan adanya perubahan tanda pada $p(x)$.

x	0	1	2
$p(x)$	-1	-1	29

   Dengan demikian, terdapat akar diantara 1 dan 2, dan merupakan akar positif.

LATIHAN 7

1) Nyatakan apakah fungsi yang diberikan kontinu atau tidak di titik 3:

   a) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

   b) $h(x) = \dfrac{21 - 7x}{x - 3}$

   c) $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

   d) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x \leq 3 \\ (3 - x)^2, & x > 3 \end{cases}$

2) Tentukan nilai L agar f kontinu di $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}, & x \neq 1 \\ L, & x = 1 \end{cases}$$

3) Tunjukkan bahwa persamaan $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ mempunyai paling sedikit satu penyelesaian real.

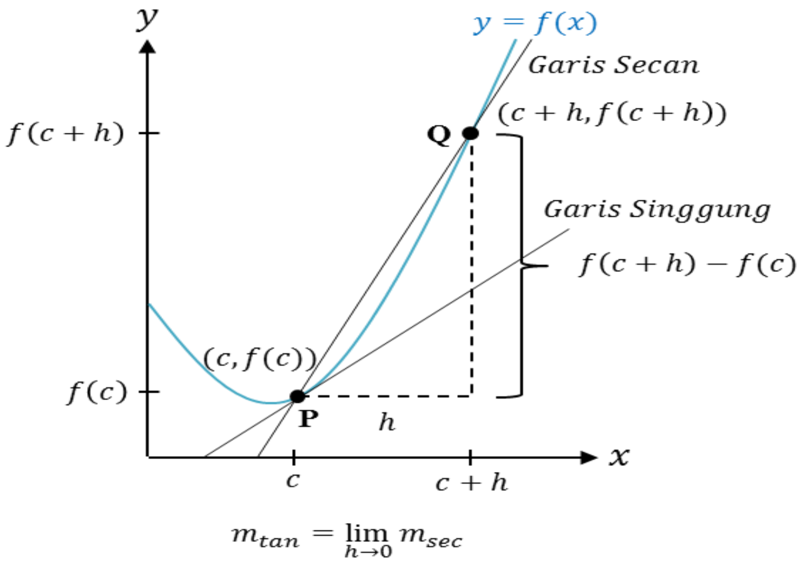
BAB III
TURUNAN

3.1 Dua Masalah Satu Tema

3.1.1 Garis Singgung

Misalkan kita mempunyai fungsi $y = f(x)$ yang grafiknya cukup mulus, khususnya di sekitar $x = c$, sehingga mempunyai garis singgung di titik $P(c, f(c))$. Perhatikan Gambar 3.1. Garis lurus yang melalui titik $P(c, f(c))$ dan $Q(c+h, f(c+h))$ disebut ***Garis Sekan*** (*Tali Busur*) mempunyai kemiringan yang diberikan oleh

$$m_{sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Gambar 3.1 Garis Singgung

Dengan menggunakan konsep limit, kita dapat membuat sebuah definisi tentang garis singgung. ***Garis singgung*** *(Garis Tangen)* di titik P adalah posisi pembatas dari garis sekan jika Q bergerak ke arah P di sepanjang kurva atau h bergerak ke arah 0.

Definisi Garis Singgung
Garis Singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P(c, f(c))$, adalah garis yang melalui P dengan kemiringan

$$m_c = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

CONTOH 1

Carilah kemiringan dan persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik $(2, 4)$.

Penyelesaian

Diketahui kemiringan di titik $(c, f(c))$ adalah

$$m_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

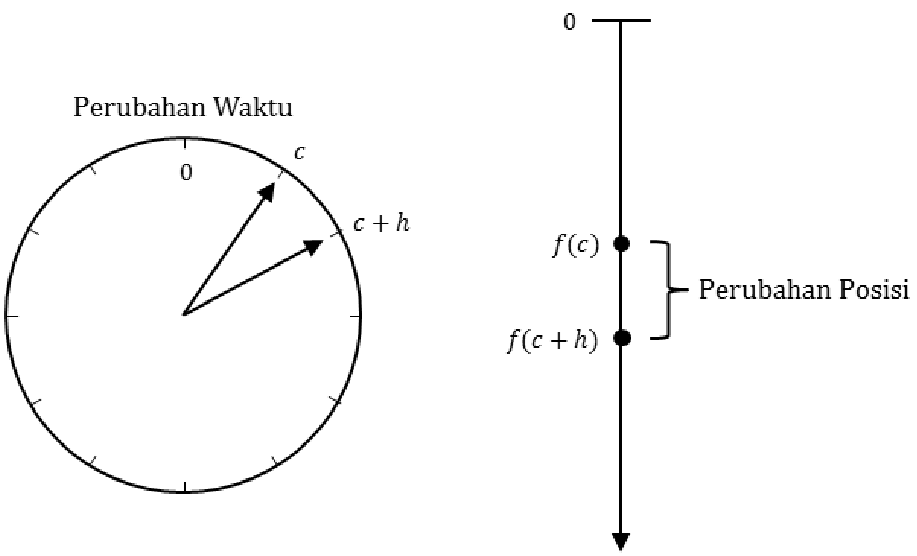
Maka, kemiringan di titik $(2, 4)$ adalah

$$m_2 = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$m_2 = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$
$$m_2 = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$
$$m_2 = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$
$$m_2 = \lim_{h \to 0} 4 + h$$
$$m_2 = 4$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung mengikuti persamaan umum $y - b = m(x - a)$ dimana $(a, b) = (2, 4)$, yaitu

$$y - 4 = 4(x - 2)$$
$$y = 4(x - 2) + 4$$
$$y = 4x - 4$$

3.1.2 Kecepatan Sesaat



Gambar 3.2 Kecepatan Sesaat

Misalkan sebuah benda P bergerak di sepanjang garis koordinat sehingga posisinya pada saat t diberikan oleh $s = f(t)$. Pada waktu c, benda berada di $f(c)$ dan pada waktu yang berdekatan $c + h$, benda berada di $f(c + h)$. Perhatikan Gambar 3.2. Jadi, kecepatan rata-rata pada interval ini adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Selanjutnya jika h semakin diperkecil hingga menuju nol, maka dengan menggunakan konsep limit kita dapat merumuskan definisi kecepatan sesaat.

Definisi Kecepatan Sesaat
Jika suatu benda bergerak di sepanjang garis koordinat dengan fungsi posisi $y = f(t)$, maka Kecepatan Sesaat pada waktu c

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

CONTOH 2

Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian $100\ m$, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatan benda jatuh pada saat $t = 1$?

Penyelesaian
Diketahui kecepatan sesaat pada waktu c adalah

$$v(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Maka, kecepatan benda jatuh pada saat $t = 1$ adalah

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{[100 - 4{,}9(1+h)^2] - [100 - 4{,}9(1)^2]}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{-4{,}9(1+h)^2 + 4{,}9}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{-4{,}9(1+2h+h^2) + 4{,}9}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{-9{,}8h - 4{,}9h^2}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(-9{,}8 - 4{,}9h)h}{h}$$

$$v(1) = -9{,}8 \quad \text{m/dtk}$$

LATIHAN 1

1) Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3$ di titik $(2, 8)$.

2) Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian $50\ m$, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 50 - 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatan benda jatuh pada saat $t = 2$?

3.2 Turunan

3.2.1 Definisi Turunan

Sebelumnya kita telah membahas tentang *garis singgung* dan *kecepatan sesaat* yang merupakan dua topik dengan pemikiran dasar yang sama. Dari pembahasan ditemukan bahwa kedua topik ini ternyata memiliki bentuk limit yang sama. Hal yang memotivasi kita untuk mengkaji bentuk limit tersebut secara khusus, yang kita sebut sebagai *turunan* (*derivatif*).

Definisi Turunan
Fungsi f dikatakan mempunyai turunan di c yaitu f' (dibaca f aksen) yang dirumuskan sebagai

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

Jika limit ini ada, dikatakan bahwa ***f* terdiferensiasi di *c***.

CONTOH 3

1) Dengan menggunakan definisi limit, tentukan turunan fungsi berikut:
   a) $f(x) = x^2 + 5x$
   b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
2) Jika $h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, carilah $h'(2)$.

Penyelesaian

1) Diketahui definisi turunan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Maka,

a) $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^2 + 5(x+h)\right] - [x^2 + 5x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^2 + 2xh + h^2 + 5x + 5h\right] - [x^2 + 5x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5x + 5h - x^2 - 5x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 5)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h + 5) \\ &= (2x + 5) \end{aligned}$$

b) $$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sqrt{(x+h)^2+4}\right] - \left[\sqrt{x^2+4}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{(x+h)^2+4} - \sqrt{x^2+4}}{h} \times \frac{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2+4) - (x^2+4)}{h\left[\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2+4) - (x^2+4)}{h\left[\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+4 - x^2 - 4}{h\left[\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h\left[\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+4} + \sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

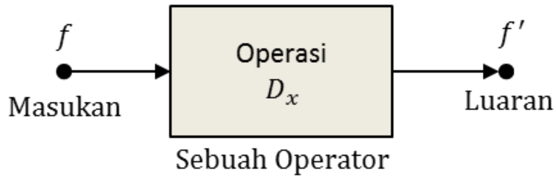
2) Dengan cara yang sama dengan 1.b diperoleh

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}, \qquad \text{sehingga} \qquad h'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+5}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

3.2.2 Notasi Turunan dan Notasi *Leibniz*

Notasi Turunan

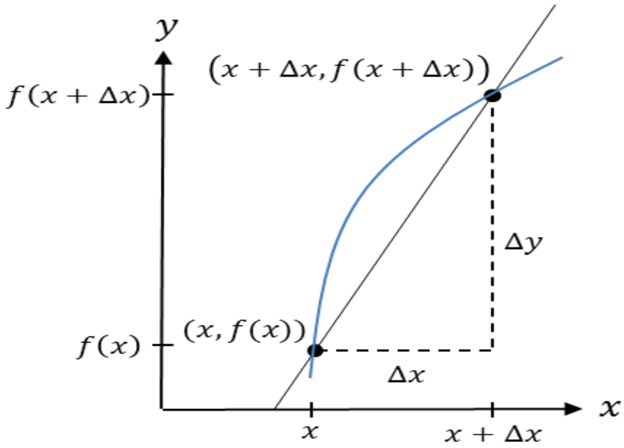
Perlu diingat kembali bahwa turunan suatu fungsi f adalah fungsi lain yang dinamai f'. Kita perhatikan bahwa jika $f(x) = x^3$ adalah rumus untuk f, maka $f'(x) = 3x^2$ adalah rumus untuk f'. Ketika kita mengambil turunan dari f, kita katakan bahwa kita menurunkan f. Turunan beroperasi pada f untuk menghasilkan f'. Lambang D_x sering digunakan untuk menunjukkan operasi turunan (Perhatikan Gambar 3.3).



Gambar 3.3 Operator Turunan

Lambang D_x menyatakan bahwa kita harus mengambil turunan terhadap variabel x dari apa yang mengikuti. Jadi, dapat kita tuliskan $D_x f(x) = f'(x)$. Langbang ini disebut juga sebagai *operator* turunan.

Notasi *Leibniz*



Gambar 3.4 **Notasi *Leibniz***

Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa pertambahan sebesar Δx pada x, menyebabkan terjadinya pertambahan sebesar Δy pada y, dengan

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Apabila kedua ruas dibagi dengan Δx, maka diperoleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bentuk terakhir ini menggambarkan kemiringan sebuah garis secan yang melalui $(x, f(x))$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.4.

Ketika $\Delta x \to 0$, maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Leibniz menggunakan notasi dy/dx untuk menyatakan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, sehingga apabila $y = f(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

sebagai catatan bahwa notasi ini merupakan satu kesatuan, bukan hasil bagi dari dy dan dx.

Dengan demikian, kita mempunyai tiga notasi untuk melambangkan turunan. Jika $y = f(x)$, turunan dari f dapat dinyatakan oleh

$$f'(x) \quad \text{atau} \quad D_x f(x) \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx}$$

3.2.3 Hubungan antara Turunan dan Kekontinuan

Keterdiferensialan berimplikasi pada kontinuitas suatu fungsi. Keterdiferensialan merupakan syarat cukup terjadinya kontinuitas, sementara kontinuitas merupakan syarat perlu keterdiferensialan.

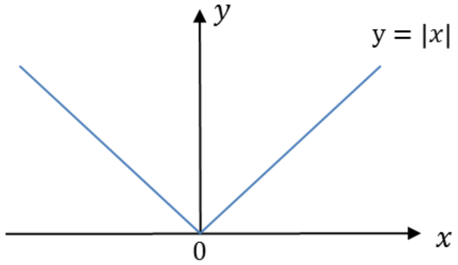
Teorema Keterdiferensialan Mengimplikasikan Kontinuitas
Jika f mempunyai turunan di c maka f kontinu di c, atau dengan kata lain "Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c "

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 102

Sederhananya, jika suatu fungsi tidak kontinu di suatu titik, maka pasti fungsi tersebut tidak terturunkan di titik yang dimaksud. Jika suatu fungsi kontinu pada suatu titik, belum tentu ia terturunkan di titik tersebut.

CONTOH 4

Fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tapi tidak mempunyai turunan di 0.



Dari grafik terlihat dengan jelas bahwa f(x) pasti kontinu di nol, namun tidak mempunyai turunan disana. Perhatikan bahwa

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h^+\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h^+\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h^-\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h^-\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Karena limit kiri dan limit kanan berbeda, berarti $f'(0)$ tidak ada.

3.3 Aturan Pencarian Turunan

Proses pencarian turunan dengan menggunakan definisi sebelumnya dapat memakan waktu yang cukup banyak. Pada bagian ini, akan dikembangkan cara yang memungkinkan kita untuk menyelesaikan persoalan turunan dengan waktu yang lebih singkat.

Teorema Aturan Dasar Turunan
Jika f dan g fungsi-fungsi yang terturunkan dan k suatu konstanta, maka:

1) Jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0$; *Aturan Fungsi Konstanta*

2) Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; *Aturan Fungsi Satuan*

3) Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

; $Aturan\ Pangkat$

4) $(kf)'(x) = kf'(x)$; $Aturan\ Kelipatan\ Konstanta$

5) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; $Aturan\ Penjumlahan$

6) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; $Aturan\ Pengurangan$

7) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$; $Aturan\ Perkalian$

8) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}{g^2(x)}$; $Aturan\ Pembagian$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 107-112

CONTOH 5

Dengan menggunakan aturan turunan yang sesuai, tentukan turunan fungsi berikut:

1) $f(x) = x(x^2+1)$
2) $f(x) = \frac{5x-4}{3x^2+1}$

Penyelesaian:

1) Dengan menggunakan aturan pangkat, jumlah, dan hasil kali:
$f'(x) = 1.(x^2+1) + x(2x) = x^2 + 1 + 2x^2 = 3x^2 + 1$
2) Dengan menggunakan aturan pangkat, kelipatan, jumlah, selisih, dan hasil bagi:
$$f'(x) = \frac{5.(3x^2+1) - (5x-4).6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{15x^2 + 5 - 30x^2 + 24x}{(3x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-15x^2 + 24x + 5}{(3x^2+1)^2}$$

LATIHAN 2

1) Dengan menggunakan definsi turunan, carilah nilai dari turunan fungsi berikut:
   a) $s(x) = \frac{3x}{x^2 - x}$
   b) $g(x) = \frac{1}{x}$
   c) $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$
2) Dengan menggunakan aturan turunan yang sesuai, tentukan turunan fungsi berikut:
   a) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{x}$
   b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

3.4 Turunan Fungsi Trigonometri

3.4.1 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

Teorema Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ dan keduanya terturunkan, maka:

1) $f'(x) = \cos x \quad ;\ \mathit{Turunan\ Fungsi\ Sinus}$

2) $g'(x) = -\sin x\ ;\ \mathit{Turunan\ Fungsi\ Cosinus}$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 115

CONTOH 6

1) Tentukan turunan dari fungsi
   a) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$
   b) $g(x) = x^2 \cos x$

2) Carilah persamaan garis singgung pada grafik fungsi $y = 3\sin x$ di titik $(\pi, 0)$.

Penyelesaian

1) a) $f'(x) = 2.D_x(\sin x) + 3.D_x(\cos x)$
$= 2.\cos x + 3.(-\sin x)$
$= 2\cos x - 3\sin x$

   b) $f'(x) = D_x(x^2).\cos x + x^2.D_x(\cos x)$
$= 2x.\cos x + x^2(-\sin x)$
$= 2x\cos x - x^2 \sin x$

2) Diketahui $y = 3\sin x$
$y'(x) = 3\cos x$
Karena melalui titik $(\pi, 0)$, maka kemiringannya adalah $y'(\pi) = 3\cos \pi = -3$
Dengan demikian, persamaan garis singgung diperoleh
$y - 0 = -3(x - \pi)$ atau $y = -3x + \pi$

3.4.2 Turunan Fungsi Trigometri Lainnya

Teorema Turunan Fungsi Trigonometri

Dengan aturan hasil bagi, untuk semua titik x dalam daerah asal fungsi berlaku:

1) Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$

2) Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$

3) Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$

4) Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$

Bukti sebagai latihan

CONTOH 7

Tentukan turunan dari

1) $f(x) = x^3 \tan x$ 2) $g(x) = \sin x \tan x$

Penyelesaian

1) Dengan menggunakan aturan kali dan teorema fungsi trigonometri

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(x^3)\tan x + x^3 D_x(\tan x) \\ &= 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x \end{aligned}$$

2) Dengan menggunakan aturan kali, teorema fungsi trigonometri, dan identitas trigonometri

$$\begin{aligned} g'(x) &= D_x(\sin x)\tan x + \sin x\, D_x(\tan x) \\ &= \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x \\ &= \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) + \sin x \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \\ &= \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} \\ &= \sin x + \tan x \sec x \end{aligned}$$

LATIHAN 3

1) Buktikan bahwa turunan dari $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.
2) Tentukan turunan dari
   a) $f(x) = \sin^2 x$
   b) $g(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$

3.5 Aturan Rantai

Sebelumnya telah dibahas tentang defini dan aturan-aturan pencarian turunan. Hanya saja tidak semua jenis fungsi dapat dengan mudah dihitung turunannya hanya dengan menggunakan defini ataupun aturan-aturan umum yang telah dibahas sebelumnya. Sebagai contoh, bagaimana menghitung turunan fungsi

$$f(x) = (x^2 + 1)^{10}?$$

Kita dapat menentukan turunan fungsi ini namun harus memperkalikan 10 faktor kuadrat kemudian menurunkan polinomial yang dihasilkan. Bagaimana pula dengan fungsi

$$g(x) = \sin 4x\,?$$

Hal ini juga masih dapat dihitung turunannya namun dengan menggunakan beberapa identitas trigonometri untuk mereduksinya menjadi suatu fungsi yang tergantung pada $\sin x$ serta $\cos x$ dan kemudian menggunakan aturan-aturan yang telah dibahas sebelumnya. Semua itu tentu akan memakan banyak waktu. Perhatikan bahwa fungsi-fungsi tersebut dapat dipandang sebagai hasil komposisi dua fungsi yang diketahui turunannya.

Paga bagian ini, kita akan gunakan cara yang lebih baik. Setelah menggunakan *aturan rantai*, kita akan mampu menuliskan jawaban

$$f'(x) = 20x(x^2+1)^9 \qquad \text{dan} \qquad g'(x) = 4\cos 4x.$$

Teorema Aturan Rantai
Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ Jika g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di $u = g(x)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ mempunyai turunan di x, yaitu

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) \quad \text{atau} \quad D_x\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 115

CONTOH 8

1) Diketahui $h(x) = (x^2+1)^{10}$, tentukan $h'(x)$.
2) Diketahui $h(x) = \sin 4x$, tentukan $h'(x)$.

Penyelesaian

1) Misalkan $u = g(x) = x^2 + 1$ dan $f(u) = u^{10}$, maka $h(x) = (f \circ g)(x)$
   Selanjutnya dapat dihitung $g'(x) = 2x$ dan $f'(u) = 10u^9$
   Menurut aturan rantai,
   $$h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = 10[g(x)]^9.2x = 10(x^2+1)^9.2x$$
   $$= 20x(x^2+1)$$

2) Misalkan $u = g(x) = 4x$ dan $f(u) = \sin u$, maka $h(x) = (f \circ g)(x)$
   Selanjutnya dapat dihitung $g'(x) = 4$ dan $f'(u) = \cos u$
   Menurut aturan rantai,
   $$h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = \cos\big(g(x)\big).4 = 4.\cos 4x$$

LATIHAN 4

1) Dengan menggunakan aturan rantai, tentukan turunan dari
   a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
   b) $g(x) = \cos 4x$
2) Nyatakan $h(x) = \cos^3 5x$ sebagai hasil komposisi dari beberapa fungsi, kemudian tentukan $h'(x)$.

3.6 Turunan Tingkat Tinggi

Suatu fungsi f dapat diturunkan menghasilkan fungsi baru f'. Fungsi f' diturunkan menghasilkan fungsi lain f'' (dibaca f dua aksen) dan disebut turunan kedua dari f. Dari f'' dapat diperoleh turunan ketiga dari f, yaitu f'''. Untuk selanjutnya, turunan keempat dinyatakan dengan $f^{(4)}$, turunan kelima dinyatakan dengan $f^{(5)}$, dan seterusnya.

Turunan ke-$\boldsymbol{n}$ dari fungsi $y = f(x)$ dinotasikan dengan $f^{(n)}$ atau dengan notasi *Leibniz* $d^n y/dx^n$ atau dengan operator diferensial $D_x^n y$.

Cara penulisan turunan tingkat tinggi secara lengkap pada Tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Notasi Turunan

Turunan	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D	Notasi *Leibniz*
Pertama	$f'(x)$	$y'(x)$	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	$y''(x)$	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	$y'''(x)$	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Keempat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}(x)$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ke$-n$	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(x)$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

CONTOH 9

1) Diketahui $y = \sin 2x$, tentukan $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, dan $y^{10}(x)$.
2) Tentukan rumus umum turunan ke $-n$ dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$.
3) Jika diketahui $g(t) = at^2 + bt + c, g(1) = 5$, $g'(1) = 3,$ dan $g''(1) = -4$, carilah $a, b, dan\ c$.

Penyelesaian

1) Diketahui $y = \sin 2x$, maka

$y'(x) = 2\cos 2x = 2^1 \cos 2x$

$y''(x) = -4\sin 2x = -2^2 \sin 2x$

$y'''(x) = -8\cos 2x = -2^3 \cos 2x$

$y^{(4)}(x) = 16\sin 2x = 2^4 \sin 2x$

$y^{(5)}(x) = 32\cos 2x = 2^5 \cos 2x$

$y^{(6)}(x) = -64\cos 2x = -2^6 \sin 2x$

$y^{(7)}(x) = -2^7 \cos 2x$

$y^{(8)}(x) = 2^8 \sin 2x$

$\vdots$

$y^{(10)}(x) = -2^{10} \sin 2x$

2) Diketahui $y = x^{-1}$ maka

$$y'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$y''(x) = 2x^{-3} = x^{-3} = \frac{2.1}{x^3}$$
$$y'''(x) = -6x^{-4} = -\frac{3.2.1}{x^4}$$
$$y^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \frac{4.3.2.1}{x^5}$$
$$y^{(5)}(x) = -120x^{-6} = -\frac{5.4.3.2.1}{x^6}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

3) Diketahui $g(t) = at^2 + bt + c$ dan $g(1) = 5$, maka $a + b + c = 5$

$g'(t) = 2at + b$ dan $g'(1) = 3$, maka $2a + b = 3$

$g''(t) = 2a$ dan $g''(1) = -4$, maka $2a = -4$

Sehingga diperoleh

$\boldsymbol{a = -2}$

$2a + b = 3 \leftrightarrow 2(-2) + b = 3 \leftrightarrow \boldsymbol{b = 3 + 4 = 7}$

$a + b + c = 5 \leftrightarrow -2 + 7 + c = 5 \leftrightarrow \boldsymbol{c = 5 - 5 = 0}$

LATIHAN 5

1) Carilah d^3y/dy^3 dari fungsi berikut

a) $y = \dfrac{3x}{1-x}$ b) $y = \sin x^3$

2) Carilah nilai $f''(2)$, dari fungsi berikut

a) $f(u) = \dfrac{2u^2}{5-u}$ b) $f(t) = t \sin\dfrac{\pi}{t}$

3) Misalkan $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$. Sebagai contoh, $4! = 4.3.2.1 = 24$. Buktikan bahwa $D_x^n(x^n) = n!$

3.7 Turunan Implisit

Misalkan kita mempunyai persamaan

$$7y^3 + y = x^3$$

dan kita ingin menentukan persamaan garis singgung pada grafik persamaan tersebut di titik $(2,1)$. Permasalahannya adalah kita tidak mempunyai rumus eksplisit untuk y dalam x, sehingga kita akan menemukan kesulitan dalam menghitung dy/dx.

Dalam hal ini, apabila kita nyatakan fungsi ini sebagai fungsi dari x, kita dapat mencari turunan secara eksplisit dengan menurunkan kedua ruas terhadap x mengikuti aturan rantai.

$$\frac{d}{dx}(7y^3) + \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x^3)$$
$$21y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(21y^2+1)}$$

Dengan demikian, dapat kita hitung di titik $(2,1)$ sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{21(1)^2+1} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

Sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = \frac{6}{11}(x-2) \quad \text{atau} \quad 6x - 11y - 1 = 0$$

CONTOH 10

Dengan asumsi bahwa setiap persamaan merupakan fungsi x yang terturunkan, carilah $D_x y$ jika :

1) $x^2y = 1 + yx$ 2) $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

Penyelesaian

1) Cara I

Kita dapat mengubah fungsi ke bentuk eksplisit, kemudian menentukan turunannya sesuai dengan aturan pencarian turunan yang berlaku:

$$\begin{aligned} x^2y = 1 + yx &\Leftrightarrow x^2y - yx = 1 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x)y = 1 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 - x} \\ &\Leftrightarrow y = (x^2 - x)^{-1} \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = -1(x^2 - x)^{-2}(2x - 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}$$

Cara II

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) = \frac{d}{dx}(1 + yx) &\Leftrightarrow 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}x + y \\ &\Leftrightarrow x^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2xy \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x)\frac{dy}{dx} = y - 2xy \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2xy}{x^2 - x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-2x)}{x^2-x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}$$

2) $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(4x^3 + 7xy^2) = \frac{d}{dx}(2y^3)$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(7xy^2) = \frac{d}{dx}(2y^3)$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 + 7y^2 + 7x.2y\frac{dy}{dx} = 6y^2$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 + 7y^2 + 14\,xy\frac{dy}{dx} = 6y^2$$
$$\Leftrightarrow 14\,xy\frac{dy}{dx} = 6y^2 - 12x^2 + 7y^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6y^2 - 12x^2 + 7y^2}{14\,xy}$$

3.8 Aturan Pangkat Rasional

Aturan pangkat rasional adalah bentuk perluasan dari aturan pangkat $D_x(x^n) = nx^{n-1}$ dimana n bilangan bulat. Kali ini kita akan bahas aturan yang sama dengan n merupakan bilangan rasional.

Teorema Aturan Pangkat Rasional
Misalkan r sembarang bilangan rasional. Untuk $x > 0$, berlaku:

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Untuk setiap x, berlaku

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Jika r dapat dituliskan dalam bentuk suku terendah sebagai $r = p/q$, dimana q ganjil.

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 133

CONTOH 11

Carilah dy/dx jika

1) $y = 3x^{5/3}$ 2) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Penyelesaian

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}.3x^{(5/3)-1} = 5x^{(5-3)/3} = 5x^{2/3}$

2) $y = x^{1/3} + x^{-1/3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{1}{3}\right)-1} - \frac{1}{3}x^{-\left(\frac{1}{3}\right)-1} = \frac{x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}}{3}$

LATIHAN 6

1) Dengan asumsi bahwa setiap persamaan merupakan fungsi x yang terturunkan, carilah $D_x y$ jika :
   a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ b) $x^2 + 2x^2y + 3xy = 0$
2) Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $x^3y + y^3x = 30$ di titik $(1,3)$.
3) Carilah $D_x y$ jika dari soal-soal berikut:
   a) $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{\frac{7}{2}}$ b) $y = \sqrt[4]{2x+1}$ c) $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$

BAB IV
APLIKASI TURUNAN

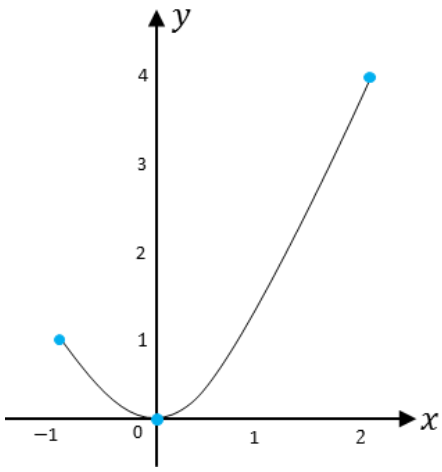
4.1 Maksimum dan Minimum

Banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan langsung dengan fungsi maksimum dan minimum. Sebagai contoh, seorang petani ingin memperoleh kombinasi tanaman agar dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter berharap dapat memberikan dosis terkecil suatu obat untuk menyembuhkan penyakit pasien. Seorang pengusaha yang ingin menekan biaya distribusi produknya menjadi sekecil mungkin. Kendala-kendala semacam ini dapat dirumuskan sedemikian rupa sehingga melibatkan pemaksimuman atau peminimuman suatu fungsi pada suatu himpunan yang telah ditentukan.

Definisi Maksimum dan Minimum
Misalkan I adalah suatu selang di R yang memuat titik c dan I merupakan daerah asal f, maka
(i) $f(c)$ disebut ***Nilai Maksimum*** f pada I jika $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I$
(ii) $f(c)$ disebut ***Nilai Minimum*** f pada I jika $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in I$
(iii) Nilai maksimum atau minimum disebut ***Nilai Ekstrim***.

CONTOH 1

Misalkan $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 2]$. Nilai maksimumnya adalah $f(2) = 4$, sedangkan nilai minimumnya adalah $f(0) = 0$. Perhatikan grafiknya pada Gambar 4.1 berikut



Gambar 4.1 Contoh Nilai Maksimum dan Minimum

Teorema Keberadaan Nilai Ekstrim
Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f akan mencapai nilai maksimum dan minimum pada $[a, b]$.

Catatan:

1. Teorema ini mengatakan bahwa kekontinuan merupakan *syarat cukup* untuk keberadaan (*eksistensi*) nilai ekstrim (maksimum dan minimum).

CONTOH 2

Contoh untuk kasus ini bisa dilihat pada Contoh 1. Pada contoh 1, f merupakan fungsi yang kontinu pada $[-1, 2]$ sehingga mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[-1, 2]$.

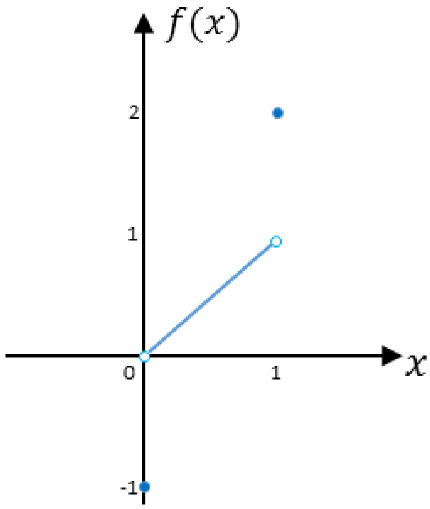
2. Fungsi yang tidak kontinu bisa saja mempunyai *nilai ekstrim* (maksimum dan minimum).

CONTOH 3

Suatu fungsi didefinisikan sebagai berikut,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ x\,, & 0 < x < 1 \\ 2\,, & x = 1 \end{cases}$$

Fungsi ini mempunyai nilai maksimum $f(1) = 2$, sedangkan nilai minimumnya adalah $f(0) = -1$. Perhatikan grafiknya pada Gambar 4.2 berikut



Gambar 4.2 Contoh Fungsi Diskontinu Memiliki Nilai Ekstrim

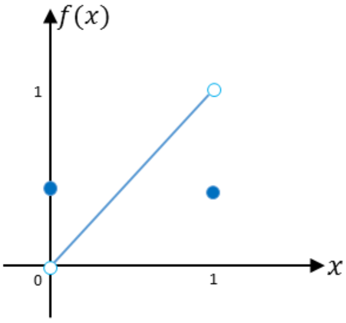
3. Ketidakkontinuan *tidak menjamin* keberadaan *nilai ekstrim* (maksimum dan minimum).

CONTOH 4

Suatu fungsi didefinisikan sebagai berikut,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0 \text{ atau } 1\\ x, & 0<x<1\end{cases}$$

Meskipun tidak kontinu, fungsi ini tidak mempunyai nilai ekstrim, baik maksimum maupun minimum. Perhatikan grafiknya pada Gambar 4.3 berikut



Gambar 4.3 Contoh Fungsi Diskontinu Tidak Memiliki Nilai Ekstrim

Teorema Lokasi Titik Kritis
Misalkan daerah asal f adalah selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah *nilai ekstrim*, maka c harus merupakan *titik kritis*, yaitu c merupakan salah satu dari:
(i) *titik ujung* selang I ; atau
(ii) *titik stasioner* f, yaitu $f'(c)=0$; atau
(iii) *titik singular* f, yaitu $f'(c)$ tidak ada.

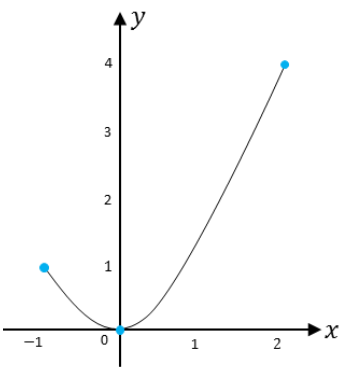
Catatan:
Teorema ini mengatakan bahwa nilai ekstrim hanya mungkin tercapai di titik kritis, karena itu teorema ini dikenal pula sebagai **Teorema Titik Kritis**. Untuk menentukan nilai ekstrim suatu fungsi, teorema ini menganjurkan untuk mencari titik-titik kritisnya dulu.

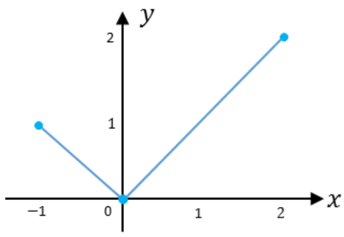
CONTOH 5

Perhatikan Gambar 4.4 berikut:

Fungsi $f(x)=x^2,\ x\in[-1,2]$, mencapai nilai maksimum 4 di $x=2$ (titik ujung kanan) dan nilai minimum 0 di $x=0$ (titik stasioner).

Fungsi $f(x)=|x|,\ x\in[-1,2]$, mencapai nilai maksimum 2 di $x=2$ (titik ujung kanan) dan nilai minimum 0 di $x=0$ (titik singular).





Gambar 4.4 Contoh Titik Stasioner dan Titik Singular

Langkah Menghitung Nilai Ekstrim
Berdasarkan teorema keberadaan nilai ekstrim dan teorema lokasi titik ekstrim, kita dapat merumuskan prosedur sederhana untuk menghitung nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi f yang kontinu pada interval tertutup I:
(i) Cariah *titik kritis* f pada selang I ;
(ii) Hitunglah f disetiap titik kritis. Nilai terbesar diantaranya merupakan nilai maksimum, sementara yang terkecil adalah nilai minimum.

CONTOH 6

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ pada $[-1, 2]$.

Penyelesaian
Tentukan titik kritis dengan terlebih dahulu mencari turunan fungsi

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -6x^2 + 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 6x(1-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ dan } x = 1 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh dua titik stasioner, yaitu 0 dan 1, sementara titik singular tidak ada. Dengan demikian, ada 4 titik kritis (2 titik stasioner dan 2 titik ujung interval), yaitu $-1, 0, 1,$ dan 2.

Menurut teorema keberadaan nilai ekstrim dan teorema lokasi titik kritis, f mencapai nilai ekstrim di titik kritis tersebut. Dengan membandingkan nilai f di titik kritis,

$$f(-1) = 6, \qquad f(0) = 1, \qquad f(1) = 2, \qquad f(2) = -3$$

Diketahui bahwa f mencapai nilai maksimum 6 di $x = -1$ (titik ujung kiri) dan nilai minimum -3 di $x = 2$ (titik ujung kanan).

LATIHAN 1

1) Tentukan nilai ekstrim fungsi $f(x) = x^3 - 12x$ pada $[-3,3]$
2) Tentukan titik-titik kritis dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 50x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2, & 20 < x \le 60 \end{cases}$$

Tentukan nilai maksimum dan minimumnya.

4.2 Kemonotonan, Kecekungan dan Titik Belok

Pada bagian ini akan ditentukan selang kemonotonan dan titik ekstrim, serta selang kecekungan dan titik belok dari suatu fungsi yang diberikan.

Definisi Kemonotonan

Misalkan f terdefinisi pada interval I.

(i) Fungsi f dikatakan ***naik*** pada selang I , apabila untuk setiap $x, y \in I$, dengan $x < y$, berlaku

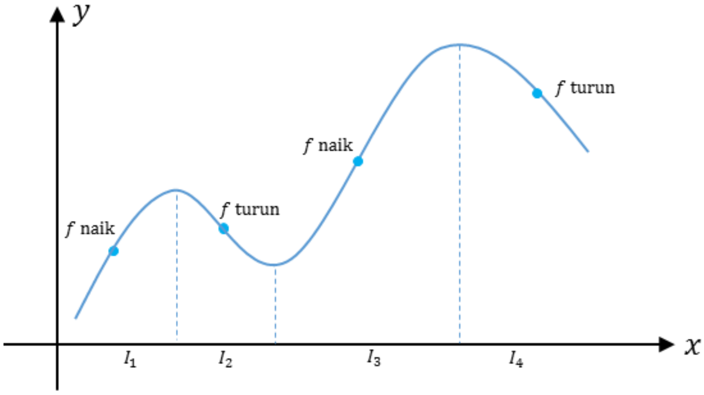
$$f(x) < f(y)$$

(ii) Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I , apabila untuk setiap $x, y \in I$, dngan $x < y$, berlaku

$$f(x) > f(y)$$

(iii) Fungsi f dikatakan ***monoton*** pada selang I, apabila fungsi f naik atau turun pada selang I.

Perhatikan Gambar 4.5 berikut:



Gambar 4.5 Ilustrasi Fungsi Naik dan Fungsi Turun

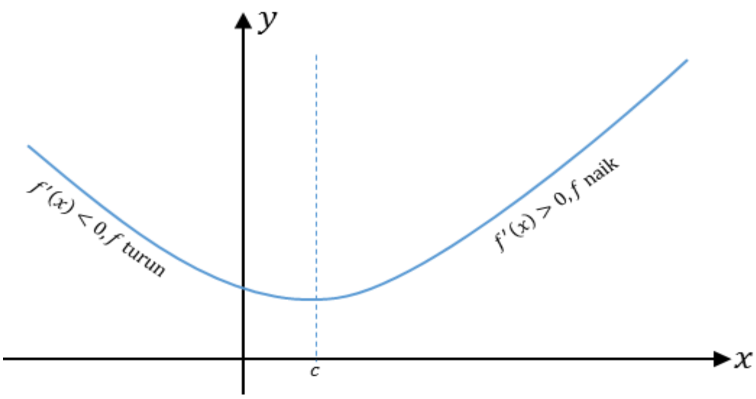
Teorema Kemonotonan

Misalkan f kontinu dan terturunkan pada interval I.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f ***naik*** pada I.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f ***turun*** pada I.

Ilustrasi diberikan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Ilustrasi Kemonotonan

CONTOH 7

Tentukan dimana letak f naik dan f turun jika diketahui $f(x) = x^3 - 12x$?

Penyelesaian

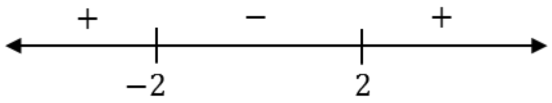
Hitung turunan pertama dari fungsi yang diberikan

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Tentukan titik-titik pemisah untuk memeriksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x+2)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ dan } x = 2 \end{aligned}$$

Dari titik-titik tersebut diperoleh tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real



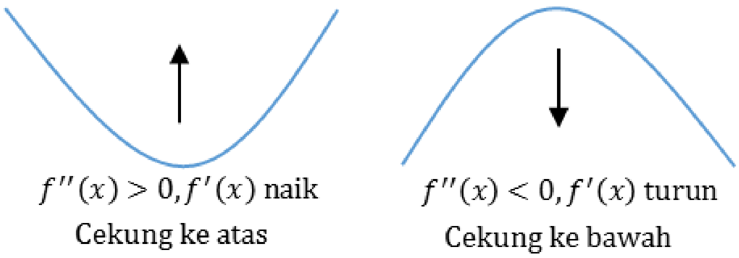
Menurut Teorema Kemonotonan fungsi, f naik pada interval $(-\infty, -2)$ dan juga pada interval $(2, \infty)$. Fungsi f turun pada interval $(-2,2)$. Adapun titik maksimum yaitu $x = -2$ dan titik minimum yaitu $x = 2$.

Definisi Kecekungan (Cekung Atas dan Cekung Bawah)
Misalkan f terturunkan pada interval terbuka $I = (a, b)$.
(i) Jika f' naik pada interval I, maka grafik fungsi f ***cekung ke atas*** pada I.
(ii) Jika f' turun pada interval I, maka grafik fungsi f ***cekung ke bawah*** pada I.

Sehubungan dengan Teorema Kemonotonan, kita dapatkan kriteria sederhana untuk memutuskan dimana kurva akan cekung ke atas dan dimana kurva akan cekung ke bawah. Perlu diingat bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f', sehingga f' naik apabila f'' positif dan f' turun apabila f'' negatif.

Teorema Kecekungan
Misalkan f terturunkan dua kali pada interval terbuka I.
(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f ***cekung ke atas*** pada I.
(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f ***cekung ke bawah*** pada I.

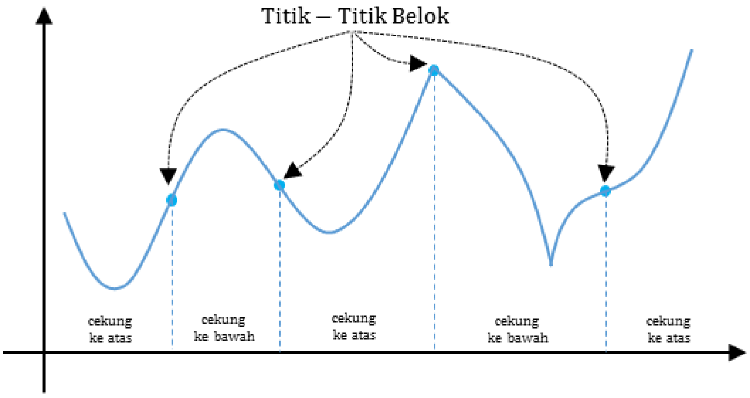
Diagram pada Gambar 4.7 akan memperjelas teorema ini



Gambar 4.7 Ilustrasi Teorema Kecekungan

Definisi Titik Belok (*Inflection Point*)
Misalkan f kontinu di c. $(c, f(c))$ disebut sebagai titik belok dari grafik fungsi f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan f cekung ke bawah pada sisi yang lain dari c.

Grafik pada Gambar 4.8 akan memperjelas definisi ini



Gambar 4.8 Ilustrasi Titik Infleksi

CONTOH 8

Gunakan Teorema Kecekungan untuk menententukan dimana letak fungsi f cekung ke atas dan dimana fungsi f cekung kebawah jika diketahui

$$f(x) = x^3 - 12x$$

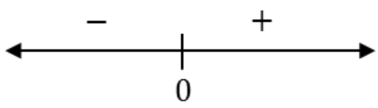
Penyelesaian
Hitung turunan kedua dari fungsi yang diberikan

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \Longrightarrow f''(x) = 6x$$

Tentukan titik-titik pemisah untuk memeriksa tanda $f''(x)$ pada garis bilangan real

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Dari titik tersebut diperoleh tanda $f''(x)$ pada garis bilangan real



Menurut Teorema Kecekungan fungsi, f cekung ke bawah pada interval $(-\infty, 0)$ dan cekung ke atas pada interval $(0, \infty)$.
Catatan: Titik $x = 0$ merupakan titik belok (titik infleksi) pada grafik fungsi f, karena pada titik ini grafik fungsi f mengalami perubahan kecekungan.

LATIHAN 2

1) Diketahui fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Tentukan:
   a) Pada selang mana grafik fungsi naik atau turun
   b) Pada selang mana fungsi cekung ke atas dan cekung cekung ke bawah
   c) Tentukan titik belok jika ada

2) Diketahui fungsi $f(x) = x\sqrt{x-2}$. Tentukan:
   d) Pada selang mana grafik fungsi naik atau turun
   e) Pada selang mana fungsi cekung ke atas dan cekung cekung ke bawah
   f) Tentukan titik belok jika ada

4.3 Maksimum dan Minimum Lokal

Definisi Maksimum dan Minimum Lokal

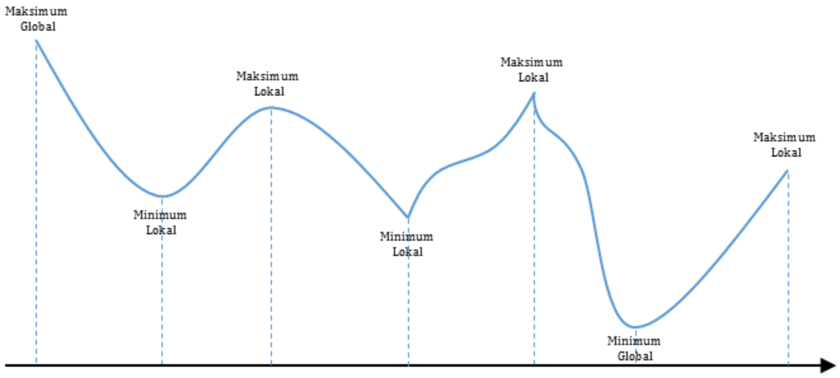
Misalkan I adalah suatu selang di R yang memuat titik c dan I merupakan daerah asal f, maka

(i) $f(c)$ disebut ***Nilai Maksimum Lokal*** f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap I$.

(ii) $f(c)$ disebut ***Nilai Minimum Lokal*** f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap I$.

(iii) $f(c)$ disebut ***Nilai Ekstrim Lokal*** f jika ia berupa nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

Perhatikan ilustrasi pada Gambar 4.9



Gambar 4.9 Ilustrasi Nilai Ekstrim Lokal

Teorema Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di c .

(i) Jika $f'(c) > 0$ disekitar kiri c dan $f'(c) < 0$ disekitar kanan c, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.

(ii) Jika $f'(c) < 0$ disekitar kiri c dan $f'(c) > 0$ disekitar kanan c, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

(iii) Jika $f'(c)$ bertanda sama di sekitar kiri dan kanan c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim lokal.

CONTOH 9

Tentukan nilai maksimum lokal dan nilai minimum lokal f jika diketahui

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Penyelesaian

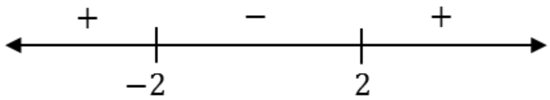
Hitung turunan pertama dari fungsi yang diberikan

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Tentukan titik-titik pemisah untuk memeriksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x+2)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ dan } x = 2 \end{aligned}$$

Dari titik-titik tersebut diperoleh tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real



Menurut Teorema Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

Teorema Uji Turunan Kedua
Misalkan $f'(c) = 0$ dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat c.
(i) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f.
(ii) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f.

CONTOH 10

Tentukan nilai maksimum lokal dan nilai minimum lokal f jika diketahui

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Penyelesaian
Hitung turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi yang diberikan

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \implies f''(x) = 6x$$

Tentukan titik-titik pemisah untuk memeriksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x+2)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ dan } x = 2 \end{aligned}$$

Lakukan pengujian pada turunan kedua untuk melihat nilai $f''(x)$.
Menurut Teorema Uji Turunan kedua, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal karena $f''(-2) = 6(-2) = -12 < 0$ dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal karena $f''(2) = 6(2) = 12 > 0$.

LATIHAN 3

1) Dengan menggunakan Teorema Uji Turunan Pertama, tentukan nilai ekstrim lokal dari fungsi berikut:

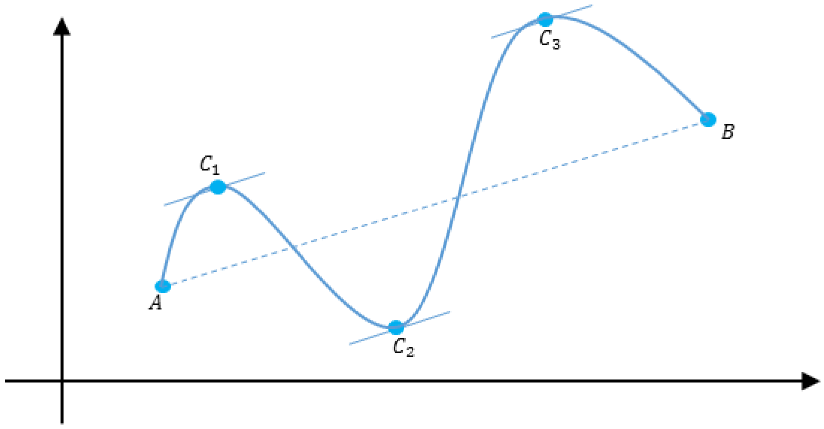
   a) $f(x) = x^4 + x^2 + 3$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$

2) Dengan menggunakan Teorema Uji Turunan Kedua, tentukan nilai ekstrim lokal dari fungsi berikut:

   a) $f(x) = x\sqrt{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x};\ \ x \neq 0$

4.4 Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema nilai rataan menyatakan bahwa jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung taktegak pada setiap titik antara A dan B, maka terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik diantara A dan B sehingga garis singgung di titik C sejajar dengan tali busur AB. Perhatikan ilustrasi pada Gambar 4.10 berikut



Gambar 4.10 Ilustrasi Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema Nilai Rata-Rata
Misalkan f kontinu pada selang $[a, b]$ dan mempunyai turunan pada (a, b), maka terdapat paling sedikit satu $c \in (a, b)$ sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{atau setara} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Bukti Purcell & Varberg Ed-9 Jilid 1: halaman 185

Catatan

$[f(b) - f(a)]/[b - a]$ disebut nilai rata-rata f pada $[a, b]$. Secara fisis, dapat dibayangkan kecepatan rata-rata pada suatu selang waktu.

CONTOH 11

Carilah bilangan c yang dijamin oleh TNR untuk $f(x) = 2\sqrt{x}$ pada [1,4].

Penyelesaian

Menurut TNR,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Kita perlu menghitung ruas kiri dengan terlebih dahulu menghitung turunan f

$$f(x) = 2\sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Sehingga

$$f'(c) = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Sementara ruas kanan menghasilkan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3} \iff \sqrt{c} = \frac{3}{2} \iff c = \frac{9}{4}$$

CONTOH 12

Diketahui $f(x) = x^2$ untuk $x \in [0,1]$. Hitunglah nilai rata-rata f pada $[0,1]$ dan tentukan $c \in (0,1)$ sehingga $f'(c)$ sama dengan nilai rata-rata f pada $[0,1]$.

Penyelesaian

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$$

sehingga

$$f'(c) = 2c$$

Nilai rata-rata f pada $[0,1]$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

Dengan demikian,

$$1 = 2c \iff c = \frac{1}{2}$$

CONTOH 13

Misalkan $f(x) = x^{2/3}$ untuk $x \in [-8,27]$. Tunjukkan bahwa kesimpulan terhadap TNR gagal. Jelaskan mengapa demikian?

Penyelesaian

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad x \neq 0$$

sehingga

$$f'(c) = \frac{2}{3}c^{-1/3}$$

Nilai rata-rata f pada $[-8,27]$ adalah

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 + 8} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Dengan demikian,

$$\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7} \iff c = 102$$

Diketahui $c = 102$ tidak berada pada selang $(-8,27)$ sebagaimana yang disyaratkan TNR, sehingga TNR tidak berlaku.

LATIHAN 4

1) Diketahui $f(x) = x^3/3$ untuk $x \in [-2,2]$. Hitunglah nilai rata-rata g pada $[-2,2]$ dan tentukan $c \in (-2,2)$ sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g pada $[-2,2]$.
2) Tunjukkan bahwa TNR dapat diterapkan pada fungsi-fungsi yang diketahui pada inteval yang diberikan. Cari nilai c yang mungkin.

   a) $f(x) = x^{5/3}; \quad x \in [-1,1]$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x-3}; \quad x \in [0,2]$

DAFTAR PUSTAKA

Anton H. 1981. *Calculus with Analytic Geometry*. Brief Edition

Djohan W, Budi WS. 2007. *Kalkulus I*. Bandung: Departemen Matematika FMIPA ITB

Gunawan H. 2007. *Seri Kuliah Kalkulus*. Bandung: Departemen Matematika FMIPA ITB

Stewart J. 1998. *Kalkulus Edisi keempat*. Jakarta: Erlangga. (Terjemahan)

Varberg D, Purcell EJ, Rigdon SE. 2007. *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga. (Terjemahan)