

ALJABAR LINEAR

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA – UHO

(Dr. Arman, S.Si., M.Si.)

“DETERMINAN MATRIKS”

Determinan matriks

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut **determinan**

Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari matriks A dan dinyatakan dengan $\det(A)$ atau $|A|$

Determinan Matriks Orde 2 x 2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

maka

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \times 8) - (2 \times 3)$$

$$= 8 - 6$$

$$= \mathbf{2}$$

Determinan matriks berordo 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai determinan dari $[A]$ yang berordo 3×3 , digunakan Metode Sarrus. Adapun langkah-langkah Metode Sarrus adalah sebagai berikut:

Adapun langkah-langkah Metode Sarrus adalah

- Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah kanan kolom ketiga,
- Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_1 .
- Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_2 .
- Determinan dari matriks A adalah pengurangan D_1 oleh D_2 , maka:
$$\det A = D_1 - D_2$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 &= D_1 - D_2
 \end{aligned}$$

Dimana:

$$D_1 = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

$$D_2 = (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [((-1) \times (-3) \times 3) + (2 \times 1 \times 0) + (5 \times 4 \times 2)] - \\ &\quad [(5 \times (-3) \times 0) + ((-1) \times 1 \times 2) + (2 \times 4 \times 3)] \\ &= [9 + 0 + 40] - [0 - 2 + 24] \\ &= 49 - 22 \\ &= \mathbf{27} \end{aligned}$$

Determinan matriks berordo lebih besar atau sama dengan 3 x 3

Untuk menghitung determinan matriks berordo lebih besar atau sama dengan 3 x 3 ($\geq 3 \times 3$) dipergunakan ekspansi atau pembubaran menurut elemen baris atau elemen kolom.

Jika ekspansi menurut elemen baris maka:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Jika ekspansi menurut elemen kolom maka:

$$|A| = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Dimana:

a_{ij} = elemen dari matriks A yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j

M_{ij} = minor (determinan sisa apabila baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan).

Berdasarkan langkah-langkah diatas diperoleh determinan dari [A] sebagai berikut:

Misalkan [A] adalah matriks persegi berordo 4 x 4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Jika ekspansi menurut elemen baris pertama maka:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot M_{14}$$

Dimana:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Contoh: Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot M_{13} \\ &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\ &= -1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-9-2) - 2(12-0) + 5(8-0) \\ &= -1(-11) - 2(12) + 5(8) \\ &= 11 - 24 + 40 \\ &= \mathbf{27} \end{aligned}$$

Contoh: Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Silakan Dikerjakan sebagai Latihan mandiri

Sifat – Sifat Determinan.

- 1) Jika suatu determinan salah satu elemen baris atau elemen kolomnya mempunyai elemen nol semua, maka harga determinannya sama dengan nol.

Contoh : $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Maka:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\ &= 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 2) Jika suatu determinan elemen – elemen barisnya ditukarkan menjadi elemen kolom yang bersesuaian atau ditransposkan maka harga determinannya tidak berubah.
- 3) Jika dalam suatu determinan dua baris atau dua kolom ditukar tempatnya maka harga determinan baru sama dengan negatif harga determinan yang lama.
- 4) Jika dua baris atau kolom dalam satu determinan mempunyai elemen-elemen yang sama (identik) maka harga determinannya sama dengan nol.

- 5) Bila setiap elemen dari satu baris atau kolom dalam satu determinan digandakan dengan suatu konstanta k , maka harga determinan baru sama dengan k kali harga determinan lama.
- 6) Bila elemen – elemen yang bersesuaian dari 2 baris atau kolom dalam satu determinan adalah sebanding maka harga determinannya sama dengan nol.
- 7) Bila setiap elemen dari suatu baris atau kolom dalam suatu determinan merupakan penjumlahan dua suku maka bentuk determinan baru dapat dinyatakan dalam penjumlahan dua determinan yang elemen-elemennya merupakan pemisah dari dua suku pada baris atau kolom tersebut, sedangkan elemen-elemennya sama dengan elemen determinan semula.

Latihan Soal.

Tentukan determinan dari matriks dibawah ini:

$$1. [A] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 10 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4. [D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ 4 & 10 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2. [B] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 10 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5. [E] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & 7 & 6 \\ 4 & 10 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 6 & -4 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3. [C] = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 4 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$