Kalkulus II

Nanda Arista Rizki, M.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Mulawarman

2018

Referensi:

1. Dale Varberg, Edwin Purcell, dan Steve Rigdon. (2007). *Calculus*. Edisi ke 9. Addison Wesley.
2. James Stewart. (2015). *Calculus*. Edisi ke 8. Cengage Learning.

Outline

1. Teknik Integrasi
   - Substitusi yang merasionalkan
   - Integrasi parsial
   - Integrasi fungsi rasional
2. Penggunaan Integral
   - Luas daerah bidang datar
   - Volume benda putar
   - Panjang kurva pada bidang dan luas permukaan benda putar

Aturan Integrasi Dasar: konstanta, pangkat

1. $\int k \; du = ku + C$
2. $\int u^r \; du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$

Aturan Integrasi Dasar: eksponensial

3. $\int e^u \; du = e^u + C$
4. $\int a^u \; du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

Aturan Integrasi Dasar: fungsi trigonometri

5. $\int \sin u \;\; du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u \;\; du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u \;\; du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u \;\; du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \cdot \tan u \;\; du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cdot \cot u \;\; du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u \;\; du = -\ln|\cos u| + C$
12. $\int \cot u \;\; du = \ln|\sin u| + C$
13. $\int \sec u \;\; du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
14. $\int \csc u \;\; du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

Aturan Integrasi Dasar: fungsi aljabar

15. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
16. $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
17. $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$
18. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$$

Aturan Integrasi Dasar: fungsi hiperbolik

19. $\int \sinh u \;\; du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u \;\; du = \sinh u + C$

Integran yang memuat $\sqrt[n]{ax+b}$

Jika muncul $\sqrt[n]{ax+b}$ dalam soal integral, maka substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$ akan menghilangkan akar.

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$!

   Jawab:

   Misalkan

$$u = \sqrt{x}$$
$$u^2 = x \Rightarrow 2u \; du = dx.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$!

   Jawab:

   Misalkan

$$u = \sqrt{x}$$
$$u^2 = x \Rightarrow 2u \; du = dx.$$

   Maka

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u} du = 2\int \frac{1}{u-1} du$$
$$= 2\ln|u-1| + C = 2\ln|\sqrt{x}-1| + C.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x-4}\ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x-4}\;\; dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = \sqrt[3]{x-4}$$
$$u^3 = x - 4 \Rightarrow 3u^2 \;\; du = dx$$
$$x = u^3 + 4.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x-4}\ dx$!

Jawab:

Misalkan

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{x-4} \\ u^3 &= x-4 \Rightarrow 3u^2\ du = dx \\ x &= u^3+4. \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} \int x\sqrt[3]{x-4}\ dx &= \int (u^3+4)u\cdot(3u^2\ du) = 3\int (u^6+4u^3)du \\ &= 3\left[\frac{u^7}{7}+u^4\right]+C = \frac{3}{7}(x-4)^{7/3}+3(x-4)^{4/3}+C. \end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\ \ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = (x+1)^{1/5}$$
$$u^5 = x+1 \Rightarrow 5u^4\ du = dx$$
$$x = u^5 - 1.$$

Maka

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\;dx &= \int (u^5-1)u^2\cdot 5u^4\;du\\
&= 5\int (u^{11}-u^6)du = \frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+C\\
&= \frac{5}{12}(x+1)^{12/5}-\frac{5}{7}(x+1)^{7/5}+C.
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\ \ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\ \ dx$!
   Jawab:
   Misalkan

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{x+\pi} \\ u^3 &= x+\pi \Rightarrow 3u^2\ \ du = dx \\ x &= u^3 - \pi. \end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\ \ dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = \sqrt[3]{x+\pi}$$
$$u^3 = x+\pi \Rightarrow 3u^2\ \ du = dx$$
$$x = u^3 - \pi.$$

Maka

$$\int x\sqrt[3]{x+\pi}\ \ dx = \cdots = \frac{3}{7}(x+\pi)^{7/3} - \frac{3\pi}{4}(x+\pi)^{4/3} + C.$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x+4}} dx$!

Jawab:

Misalkan

$$u = \sqrt{x+4}$$
$$u^2 = x + 4 \Rightarrow 2u \ \ du = dx$$
$$x = u^2 - 4 \Rightarrow x^2 + 3x = (u^2 - 4)^2 + 3(u^2 - 4).$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}dx$!

Jawab:

Misalkan

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x+4} \\ u^2 &= x+4 \Rightarrow 2u \;\; du = dx \\ x &= u^2-4 \Rightarrow x^2+3x = (u^2-4)^2+3(u^2-4). \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}dx &= \cdots \\ &= \frac{2}{5}(x+4)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+4)^{3/2} + 8(x+4)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$!

   Jawab:

   Misalkan

$$u = \sqrt{t}$$
$$u^2 = t \Rightarrow 2u\ du = dt.$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$!

   Jawab:

   Misalkan

$$u = \sqrt{t}$$
$$u^2 = t \Rightarrow 2u \ du = dt.$$

   Perhatikan batasnya:

$$t = 1 \Rightarrow u = 1$$
$$t = 2 \Rightarrow u = \sqrt{2}.$$

Contoh Soal

Maka

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u \ du}{u+e}\\ &= 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{u+e-e}{u+e} du\\ &= 2\int_1^{\sqrt{2}} du - 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{e}{u+e} du\\ &= \cdots\\ &= 2\sqrt{2} - 2 - 2e\ln\left(\frac{\sqrt{2}+e}{1+e}\right).\end{aligned}$$

Contoh Soal

7. Tentukan $\int t(3t+2)^{3/2} \; dt$!
   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$!

   Jawab:

Integran yang memuat $\sqrt{a^2 - x^2}$

Perhatikan bahwa $\sqrt{a^2 - x^2}$, jika $x = a \sin t$ untuk $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ maka

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 t} \\ &= |a \cos t|. \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$!
   Jawab:
   Misalkan $x = a \sin t$ untuk $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, maka
   $dx = a \cos t\ dt$ dan $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$.

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$!
   Jawab:
   Misalkan $x = a \sin t$ untuk $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, maka $dx = a \cos t\ dt$ dan $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Jadi

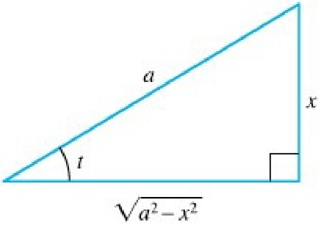
$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx &= \int a \cos t \cdot a \cos t\ dt = a^2 \int \cos^2 t\ dt \\
&= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\
&= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) + C.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\sin t = \frac{x}{a}$. Karena $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ maka fungsi sinus memiliki invers,

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Perhatikan bahwa $\sin t = \frac{x}{a}$. Karena $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ maka fungsi sinus memiliki invers,

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right).$$



Maka

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

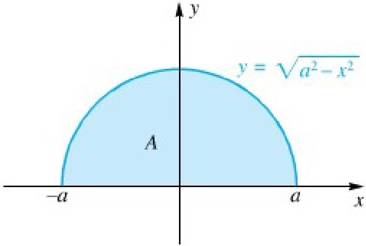
Maka

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

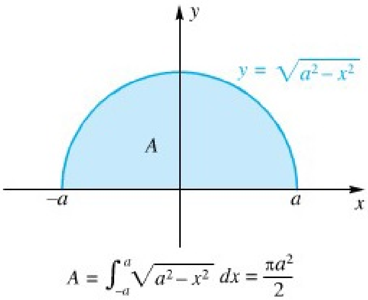
Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx &= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cdot \cos t) + C \\ &= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut, maka dengan memberi batas tertentu pada integral, akan tetap memberikan hasil yang valid. Misal diketahui sebuah lingkaran yang berjari-jari a satuan. Lalu ingin menghitung luas daerah setengah lingkarannya. Maka kalkulus mempertegas hasil yang telah diketahui sebelumnya.



$$A=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}$$



$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$!

Jawab:

Misalkan $x = 2\sin t$ untuk $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, maka $dx = 2\cos t \; dt$ dan $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$.

Contoh Soal

Jadi

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx &= \int \frac{2\cos t}{2\sin t}(2\cos t \;\; dt) \\
&= 2\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt \\
&= 2\int \csc t \;\; - 2\int \sin t \;\; dt \\
&= 2\ln|\csc t - \cot t| + 2\cos t + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} dx$!

   Jawab:

   Misalkan $x = 4\sin t$ untuk $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, maka
   $dx = 4\cos t \;\; dt$ dan $\sqrt{16-x^2} = 4\cos t$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} dx &= 16 \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt \\
&= 16 \int \sin^2 t \;\; dt \\
&= 8 \int (1 - \cos 2t) dt \\
&= 8t - 4 \sin 2t + C \\
&= 8t - 8 \sin t \cos t + C \\
&= 8 \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$!

Jawab:

Misalkan $t = \sin x$ untuk $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, maka $dt = \cos x \ \ dx$ dan $\sqrt{1-t^2} = \cos x$. Sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \int \sin x \ \ dx \\ &= -\cos x + C \\ &= -\sqrt{1-t^2} + C.\end{aligned}$$

Integran yang memuat $\sqrt{a^2 + x^2}$

Perhatikan bahwa $\sqrt{a^2 + x^2}$, jika $x = a \tan t$ untuk $-\pi/2 < t < \pi/2$ maka

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 t} \\ &= |a \sec t|. \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$!

   Jawab:

   Misalkan

$$\begin{aligned} x &= 3\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \le t \le \pi/2 \\ dx &= 3\sec^2 t \;\; dt. \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$!

   Jawab:

   Misalkan

   $$\begin{aligned} x &= 3\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ dx &= 3\sec^2 t \;\; dt. \end{aligned}$$

   Maka $\sqrt{9+x^2} = \sqrt{3^2+3^2\tan^2 t} = \sqrt{3^2\sec^2 t} = 3\sec t.$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$!

Jawab:

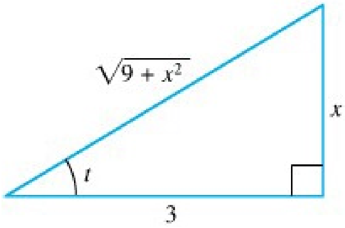
Misalkan

$$x = 3\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$
$$dx = 3\sec^2 t \; dt.$$

Maka $\sqrt{9+x^2} = \sqrt{3^2 + 3^2\tan^2 t} = \sqrt{3^2\sec^2 t} = 3\sec t$. Jadi

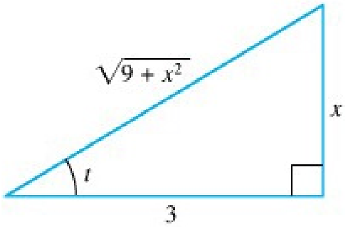
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{3\sec^2 t}{3\sec t} dt \\
&= \int \sec t \; dt \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C.
\end{aligned}$$

Perhatikan kembali bahwa $\tan t = x/3$.



Sehingga diperoleh $\sec t = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$.

Perhatikan kembali bahwa $\tan t = x/3$.



Sehingga diperoleh $\sec t = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \ln|\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9+x^2} + x\right| - \ln 3 + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9+x^2} + x\right| + K.\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$!

Jawab:

Misalkan

$$\begin{aligned} x &= 2\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ dx &= 2\sec^2 t \;\; dt. \end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$!

Jawab:

Misalkan

$$\begin{aligned} x &= 2\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ dx &= 2\sec^2 t \; dt. \end{aligned}$$

Maka $\sqrt{x^2+4} = 2\sec t$.

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$!

Jawab:

Misalkan

$$x = 2\tan t \text{ untuk } -\pi/2 \le t \le \pi/2$$
$$dx = 2\sec^2 t \;\; dt.$$

Maka $\sqrt{x^2+4} = 2\sec t$. Jadi

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2 t \;\; dt}{(4\sec^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \cos t \;\; dt$$
$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C.$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2 + \pi^2}} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2 + \pi^2}} dx$!

Jawab:

Misalkan

$$x = \pi \tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$
$$dx = \pi \sec^2 t \;\; dt.$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2 + \pi^2}} dx$!

Jawab:

Misalkan

$$x = \pi \tan t \text{ untuk } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$
$$dx = \pi \sec^2 t \ \ dt.$$

Maka $\sqrt{x^2 + \pi^2} = \pi \sec t$.

Jadi

$$\begin{aligned}
\int \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}} dx &= \int (\pi^2 \tan t - 1) \sec t \ \ dt \\
&= \pi^2 \int \tan t \sec t \ \ dt - \int \sec t \ \ dt \\
&= \pi^2 \sec t - \ln|\sec t + \tan t| + C \\
&= \pi \sqrt{x^2 + pi^2} - \ln \left| \frac{1}{\pi} \sqrt{x^2+\pi^2} + \frac{x}{\pi} \right| + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2 + \pi^2}} dx$!

Jawab:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\pi x - 1}{\sqrt{x^2+\pi^2}} dx &= \left[\pi\sqrt{x^2+\pi^2} - \ln\left|\frac{1}{\pi}\sqrt{x^2+\pi^2} + \frac{x}{\pi}\right|\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\sqrt{2}\pi^2 - \ln(\sqrt{2}+1)\right] - \left[\pi^2 - \ln 1\right] \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right)\pi^2 - \ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

Integran yang memuat $\sqrt{x^2 - a^2}$

Perhatikan bahwa $\sqrt{x^2 - a^2}$, jika $x = a \sec t$ untuk $0 \leq t \leq \pi$ dan $t \neq \pi/2$ maka

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 \tan^2 t} \\ &= |a \tan t| \\ &= \pm a \tan t.\end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$!

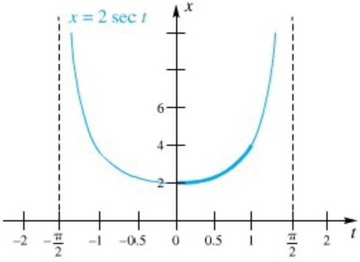
   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$!

   Jawab:

   Misalkan $x = 2\sec t$ untuk $0 \leq t < \pi/2$,

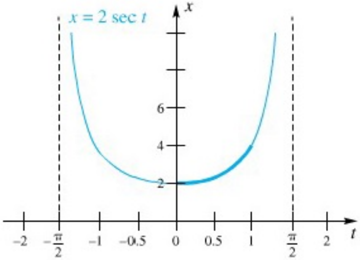


Contoh Soal

1. Tentukan $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$!

   Jawab:

   Misalkan $x = 2\sec t$ untuk $0 \leq t < \pi/2$,



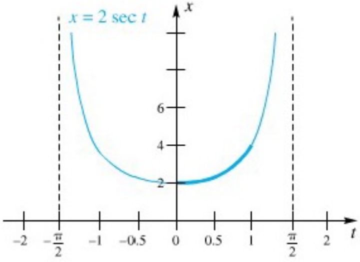
   Perhatikan bahwa $2 \leq x \leq 4$.

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$!

   Jawab:

   Misalkan $x = 2\sec t$ untuk $0 \leq t < \pi/2$,



   Perhatikan bahwa $2 \leq x \leq 4$.

   Maka $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{2^2\sec^2 t - 2^2} = \sqrt{2^2\tan^2 t} = 2\tan t$.

Jadi

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{2\tan t}{2\sec t} \cdot 2\sec t \tan t \;\; dt \\
&= \int_0^{\pi/3} 2\tan^2 t \;\; dt \\
&= 2\int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1)dt \\
&= 2\left[\tan t - t\right]_0^{\pi/3} \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$!

Jawab:

Misalkan $t = \sec x$ untuk $0 \leq x < \pi/2$.

Maka $\sqrt{t^2-1} = |\tan x| = \tan x$.

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$!

Jawab:

Misalkan $t = \sec x$ untuk $0 \le x < \pi/2$.

Maka $\sqrt{t^2-1} = |\tan x| = \tan x$. Sehingga

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} &= \int_{\pi/3}^{\sec^{-1}(3)} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x \tan x} dx = \int_{\pi/3}^{\sec^{-1}(3)} \cos x dx \\ &= [\sin x]_{\pi/3}^{\sec^{-1}(3)} = \sin\left[\sec^{-1}(3)\right] - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3} dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}dt$!
   Jawab:
   Misalkan $t = \sec x$ untuk $\pi/2 < x \leq \pi$.
   Maka $\sqrt{t^2-1} = |\tan x| = -\tan x$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}dt &= \int \frac{-\tan x}{\sec^3 x} \cdot \sec x \tan x \;\; dx \\
&= \int -\sin^2 x \;\; dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + C \\
&= \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{1}{2}x + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3} dt$!

   Jawab:

   Misalkan $t = \sec x$ untuk $\pi/2 < x \leq \pi$.

   Maka $\sqrt{t^2-1} = |\tan x| = -\tan x$.

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt$!

Jawab:

Misalkan $t = \sec x$ untuk $\pi/2 < x \leq \pi$.

Maka $\sqrt{t^2-1} = |\tan x| = -\tan x$.

Perhatikan batasnya:

$$t = -2 \Rightarrow x = \sec^{-1}(-2) = 2\pi/3$$
$$t = -3 \Rightarrow x = \sec^{-1}(-3)$$

Sehingga

$$\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3} dt = \left[\frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{1}{2}x\right]_{2\pi/3}^{\sec^{-1}(-3)}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{2}\sec^{-1}(-3) + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}.$$

Melengkapi kuadrat

Jika ekspresi kuadrat berada di bawah tanda akar dalam integran, maka metode melengkapi kuadrat akan mempermudah dilakukannya substitusi trigonometri:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Ilustrasi:

$$x^2 + 8x + 4^2 = (x+4)^2$$
$$x^2 - 16x + (-8)^2 = (x-8)^2.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$!
   Jawab:
   Perhatikan bahwa
   $$x^2+2x+26 = x^2+2x+1+25 = (x+1)^2+25.$$
   Misalkan
   $$\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa

   $$x^2+2x+26 = x^2+2x+1+25 = (x+1)^2+25.$$

   Misalkan

   $$u = x+1$$
   $$du = dx.$$

   Maka

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}}.$$

Karena memiliki bentuk $\sqrt{a^2+x^2}$ selanjutnya dimisalkan

$$\begin{aligned} u &= 5\tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ du &= 5\sec^2 t \;\; dt \end{aligned}$$

maka

$$\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5\sqrt{\sec^2 t}.$$

Karena memiliki bentuk $\sqrt{a^2+x^2}$ selanjutnya dimisalkan

$$\begin{aligned} u &= 5\tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ du &= 5\sec^2 t \;\; dt \end{aligned}$$

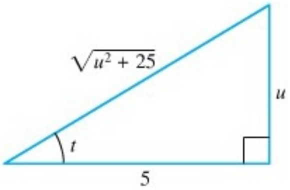
maka

$$\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5\sqrt{\sec^2 t}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} &= \int \frac{5\sec^2 t \;\; dt}{5\sec t} \\ &= \int \sec t \;\; dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C. \end{aligned}$$

Perhatikan gambar berikut.



Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} &= \ln|\sec t + \tan t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{u^2+25} + u\right| - \ln(5) + C \\ &= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K.\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}}\,dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx.$$

Integran yang pertama di ruas kanan dikerjakan dengan substitusi

$$u = x^2+2x+26$$
$$du = (2x+2)dx.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx =& \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx\\ &-2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx\\ =&2\sqrt{x^2+2x+26}\\ &-2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right|+K.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$. Lalu misalkan

$$u = x + 1$$
$$du = dx.$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Lalu misalkan

$$u = x+1$$
$$du = dx.$$

Diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}.$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}.$$

Kemudian misalkan $u=2\tan t$, maka $du=2\sec^2 t \; dt$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}} \\
&= \int \sec t \;\; dt = \ln|\sec t + \tan t| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+4}}{2} + \frac{u}{2}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right| + K.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$!

Jawab:
Perhatikan bahwa $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$. Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x + 1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx &= \int \frac{3u-3}{\sqrt{u^2+4}}du \\ &= 3\int \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}du - 3\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hasil sebelumnya, maka

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx =& 3\int \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}du - 3\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}\\ =& 3\sqrt{u^2+4} - 3\ln\left|\sqrt{u^2+4}+u\right| + C\\ =& 3\sqrt{x^2+2x+5}\\ &- 3\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}+x+1\right| + C.\end{aligned}$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \sqrt{5-4x-x^2}\ dx$!
Jawab:
Perhatikan bahwa
$5-4x-x^2 = 9-(4+4x+x^2) = 9-(x+2)^2$.
Lalu misalkan

$$u = x+2$$
$$du = dx.$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \sqrt{5-4x-x^2}\ dx$!
Jawab:
Perhatikan bahwa
$5-4x-x^2 = 9-(4+4x+x^2) = 9-(x+2)^2$.
Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x+2 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\int \sqrt{5-4x-x^2}\ dx = \int \sqrt{9-u^2}\ du.$$

Selanjutnya misalkan $u = 3\sin t$, maka $du = 3\cos t \; dt$.

Selanjutnya misalkan $u = 3\sin t$, maka $du = 3\cos t \ dt$.
Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-u^2} \ du &= 9\int \cos^2 t \ dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t) \ dt \\
&= \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{9}{2}(t + \sin t\cos t) + C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{1}{2}u\sqrt{9-u^2} + C \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$!
   Jawab:
   Perhatikan bahwa $4x - x^2 = 4 - (4 - 4x + x^2) = 4 - (x - 2)^2$.
   Lalu misalkan

$$u = x - 2$$
$$du = dx.$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$!
Jawab:
Perhatikan bahwa $4x - x^2 = 4 - (4 - 4x + x^2) = 4 - (x-2)^2$.
Lalu misalkan

$$u = x - 2$$
$$du = dx.$$

Diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}}.$$

Kemudian misalkan

$$\begin{aligned} u &= 2\sin t \\ du &= 2\cos t \ \ dt. \end{aligned}$$

Kemudian misalkan

$$\begin{aligned} u &= 2\sin t \\ du &= 2\cos t \;\; dt. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} &= \int dt = t + C \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Contoh Soal

7. Tentukan $\int \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.

Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x + 1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{2u-1}{u^2+1}du \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

Integrasi parsial

Ingat kembali persamaan differensial berikut.

$$d\frac{u(x)v(x)}{dx} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x),$$

atau

$$u(x)v'(x) = d\frac{u(x)v(x)}{dx} - v(x)u'(x).$$

Integrasi parsial

Ingat kembali persamaan differensial berikut.

$$d\frac{u(x)v(x)}{dx} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x),$$

atau

$$u(x)v'(x) = d\frac{u(x)v(x)}{dx} - v(x)u'(x).$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan tersebut, diperoleh

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Karena $dv = v'(x)\ dx$ dan $du = u'(x)\ dx$, lalu dimisalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, Karena $dv = v'(x)\ dx$ dan $du = u'(x)\ dx$, lalu dimisalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, maka dapat ditulis kembali menjadi

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

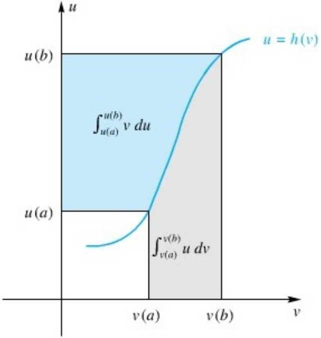
Karena $dv = v'(x)\ dx$ dan $du = u'(x)\ dx$, lalu dimisalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, maka dapat ditulis kembali menjadi

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$
$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Hal ini dapat disesuaikan untuk rumus integral tentu:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Secara geometri, interpretasi integrasi parsial dapat dilukiskan melalui gambar berikut.



$$\int_{v(a)}^{v(b)} u \;\; dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_{u(a)}^{u(b)} v \;\; du.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int x \cos x \ \ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int x \cos x \; dx$!
   Jawab:
   Misalkan

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = \cos x \; dx \Rightarrow v = \sin x.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int x \cos x \; dx$!
   Jawab:
   Misalkan
   $$u = x \Rightarrow du = dx$$
   $$dv = \cos x \; dx \Rightarrow v = \sin x.$$
   Maka
   $$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x \; dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du}$$
   $$= x \sin x + \cos x + C.$$

Cara lainnya juga dapat memisalkan

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \ \ dx$$
$$dv = x \ \ dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Cara lainnya juga dapat memisalkan

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \ \ dx$$
$$dv = x \ \ dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Maka

$$\int \underbrace{\cos x}_{u} \underbrace{x \ \ dx}_{dv} = \underbrace{\cos x}_{u} \underbrace{x^2/2}_{v} - \int \underbrace{x^2/2}_{v} \underbrace{-\sin x \ \ dx}_{du}.$$

Namun hal ini tidak membantu, karena menghasilkan integral yang lebih rumit. Oleh karena itu, pemilihan yang tepat untuk u dan dv sangat dianjurkan.

Contoh Soal

2. Tentukan $\int_{1}^{2} \ln x \;\, dx$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int_1^2 \ln x \ dx$!

Jawab:

Misalkan

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \ \ dx \Rightarrow v = x.$$

Maka

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \; dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{dx}{x} \\ &= 2 \ln 2 - \int_1^2 dx \\ &= 2 \ln 2 - 1.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int xe^{2x}\ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int xe^{2x} \, dx$!
   Jawab:
   Misal, $u = x$ dan $dv = e^{2x} \, dx$. Maka,

$$\begin{aligned}\int xe^{2x} \, dx &= \cdots \\ &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.\end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int x \ln(1+x) \ dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int x \ln(1+x) \; dx$!
Jawab:

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+C.$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \arcsin x \; dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \arcsin x \ \ dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$dv = dx \ \ dx \Rightarrow v = x.$$

Maka

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \ dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2}(-2x \ dx) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{1/2} + C \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\int_1^2 t^6 \ln t \; dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\int_1^2 t^6 \ln t \ \ dt$!

Jawab:

Misalkan

$$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$$
$$dv = t^6 \ \ dt \Rightarrow v = \frac{1}{7}t^7.$$

Contoh Soal

6. Tentukan $\int_1^2 t^6 \ln t \; dt$!

Jawab:

Misalkan

$$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$$
$$dv = t^6 \; dt \Rightarrow v = \frac{1}{7} t^7.$$

Maka

$$\int_1^2 t^6 \ln t \; dt = \cdots .$$

Contoh Soal

7. Tentukan $\int z^3 e^z \ dz$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $\int z^3 e^z \; dz$!
Jawab:

$$z^3e^z - 3z^2e^z + 6ze^z - 6e^z + C.$$

Contoh Soal

8. Tentukan $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx$!

Jawab:

$$\frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C.$$

Contoh Soal

9. Tentukan $\int (x^2 + 2x) \cos x \;\; dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan $\int (x^2 + 2x) \cos x \;\; dx$!
Jawab:

$$\int (x^2 + 2x) \cos x \;\; dx = \cdots$$
$$= (x^2 + 2x) \sin x + (2x + 2) \cos x - 2 \sin x + C.$$

Contoh Soal

10. Tentukan $\int t \csc^2 t \ \ dt$!
Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan $\int t \csc^2 t \; dt$!
Jawab:

$$-t \cot t + \ln|\sin t| + C.$$

Contoh Soal

11. Tentukan $\int x^2 \sin x \ \ dx$!
    Jawab:

Contoh Soal

11. Tentukan $\int x^2 \sin x \ \ dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \ \ dx$$
$$dv = \sin x \ \ dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Contoh Soal

11. Tentukan $\int x^2 \sin x \; dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \; dx$$
$$dv = \sin x \; dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Maka

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \; dx.$$

Untuk $\int x \cos x \, dx$, jika dimisalkan $u = x$ dan $dv = \cos x$, maka menghasilkan

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K.\end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Tentukan $\int_{0}^{1/2} x \cos \pi x \ dx$!

Jawab:

Contoh Soal

12. Tentukan $\int_0^{1/2} x \cos \pi x \; dx$!

Jawab:

$$\frac{\pi - 2}{2\pi^2}.$$

Contoh Soal

13. Tentukan $\int_{1}^{2} x^4 (\ln x)^2 \; dx$!

Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 \ dx$!

Jawab:

$$\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}.$$

Contoh Soal

14. Tentukan $\int_1^5 \frac{\ln \theta}{\theta^2} d\theta$!

Jawab:

Contoh Soal

14. Tentukan $\int\limits_1^5 \frac{\ln\theta}{\theta^2} d\theta$!

Jawab:

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\ln 5.$$

Contoh Soal

15. Tentukan $\int_{0}^{\pi} x \sin x \cos x \ \ dx$!

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan $\int_0^{\pi} x \sin x \cos x \; dx$!

    Jawab:

    $-\pi/4$.

Contoh Soal

16. Tentukan $\int_{0}^{2} y \sinh y \ \ dy$!

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan $\int_0^2 y \sinh y \ dy$!

Jawab:

$$2\cosh 2 - \sinh 2.$$

Contoh Soal

17. Tentukan $\int e^x \sin x \ dx$!
Jawab:

Contoh Soal

17. Tentukan $\int e^x \sin x \;\, dx$!
Jawab:
Misalkan

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x \;\, dx$$
$$dv = \sin x \;\, dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Contoh Soal

17. Tentukan $\int e^x \sin x \; dx$!

Jawab:

Misalkan

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x \; dx$$
$$dv = \sin x \; dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Jadi,

$$\int e^x \sin x \; dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx.$$

Lalu temukan hasil integral $\int e^x \cos x \ dx$. Dengan memisalkan

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x \ dx$$
$$dv = \cos x \ dx \Rightarrow v = \sin x,$$

maka

$$\int e^x \cos x \ dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \ dx.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx \\
\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \; dx \\
2\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x + C \\
\int e^x \sin x \; dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + K.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

18. Tentukan $\int \sin^n x \; dx$!

    Jawab:

Contoh Soal

18. Tentukan $\int \sin^n x \;\; dx$!
Jawab:
Perhatikan bahwa $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$.

Contoh Soal

18. Tentukan $\int \sin^n x \ dx$!
Jawab:
Perhatikan bahwa $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$.Lalu misalkan

$$u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \ dx$$
$$dv = \sin x \ dx \Rightarrow v = -\cos x.$$

Contoh Soal

18. Tentukan $\int \sin^n x \ dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$.Lalu misalkan

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \ dx \\ dv &= \sin x \ dx \Rightarrow v = -\cos x. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\int \sin^n x \ dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \ dx.$$

Karena $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, maka

$$\int \sin^n x \ \ dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \ \ dx$$

$$\int \sin^n x \ \ dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \ \ dx$$

$$- (n-1) \int \sin^n x$$

$$n \int \sin^n x \ \ dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \ \ dx$$

$$\int \sin^n x \ \ dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \ \ dx.$$

Contoh Soal

19. Tentukan $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \ \ dx$!

Jawab:

Contoh Soal

19. Tentukan $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^8 x \ dx$!

Jawab:

Karena

$$\int \sin^n x \ dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \ dx,$$

maka

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x \ dx &= \left[\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{(n-1)}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \ dx \\ &= 0 + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \ dx.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx &= \frac{7}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx \\
&= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx \\
&= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \\
&= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

20. Berdasarkan hasil dari contoh soal no. 19, tunjukkan bahwa (untuk $n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \ dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}.$$

Jawab:

Integrasi fungsi rasional

Fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinomial. Contohnya:

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^5}, \quad g(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}, \quad h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}.$$

Perhatikan fungsi rasional berikut.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}.$$

Perhatikan fungsi rasional berikut.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

Secara umum, fungsi rasional memiliki bentuk

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ dengan } P(x) \text{ dan } Q(x) \text{ polinomial.}$$

Ingat bahwa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

adalah polinomial berderajat n dan ditulis $deg(P) = n$. Selanjutnya

1. jika $deg(P) < deg(Q)$, maka f disebut *proper*
2. jika $deg(P) \geq deg(Q)$, maka f disebut *improper*.

Jika fungsi rasional adalah *improper*

Jika f adalah *improper*, maka lakukan proses pembagian. Jadi,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dimana S dan R juga polinomal.

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$!

Jawab:

Proses pembagian dapat menggunakan metode Horner.

$$\begin{array}{c|cccc} x=1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$!

Jawab:

Proses pembagian dapat menggunakan metode Horner.

$$\begin{array}{c|cccc} x=1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x}{x-1} dx &= \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C. \end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} dx!$

   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x}\,dx$!

Jawab:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrrr}
 & x^2 & - & 3 & & & & \\
\hline
x^3 + 5x & x^5 & + & 2x^3 & - & x & + & 1 \\
 & x^5 & + & 5x^3 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & - & 3x^3 & - & x & & \\
 & & - & 3x^3 & - & 15x & & \\
\cline{2-8}
 & & & & & 14x & + & 1
\end{array}
$$

Perhatikan kembali persamaan berikut

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Jika Q lebih rumit, maka faktorkanlah sejauh bisanya.
Misalkan $Q(x) = x^4 - 16$, maka

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} dx &= \int \left(x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} - 3x + \int \frac{14x + 1}{x^3 + 5x} dx \\
&= \frac{x^3}{3} - 3x + \int \frac{14x + 1}{x(x^2 + 5)} dx.
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}dx &= \int \left(x^2-3+\frac{14x+1}{x^3+5x}\right)dx\\ &= \frac{x^3}{3}-3x+\int \frac{14x+1}{x^3+5x}dx\\ &= \frac{x^3}{3}-3x+\int \frac{14x+1}{x(x^2+5)}dx.\end{aligned}$$

Catatan:
Integrasi untuk $\int \frac{14x+1}{x(x^2+5)}dx$ akan dibahas sebagai fungsi *proper*.

Jika fungsi rasional adalah *proper*

Selanjutnya menyatakan fungsi *proper* untuk $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ sebagai jumlahan dari pecahan parsial:

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \text{ atau } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}.$$

Teorema aljabar menjamin bahwa selalu mungkin untuk mengubah ke bentuk tersebut.

Untuk menyelesaikan hal ini, dibagi menjadi 4 kasus. Yaitu jika penyebut $Q(x)$ merupakan:

1. dekomposisi faktor linier yang berbeda
2. dekomposisi faktor linier yang berbeda, namun beberapa berulang
3. dekomposisi faktor kuadrat tunggal
4. dekomposisi faktor kuadrat berulang.

$Q(x)$ = dekomposisi faktor linier yang berbeda

Dalam hal ini, penyebut Q dapat ditulis menjadi

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k),$$

dengan tidak ada faktor yang berulang (dan tidak ada faktor yang merupakan perkalian antara skalar dan faktor yang lain). Sehingga fungsi rasional *proper* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2),$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa

   $$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2),$$

   sehingga

   $$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

   Lalu temukan A, B, dan C.

Fokus pada pembilangnya:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A. \end{aligned}$$

Fokus pada pembilangnya:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A. \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\begin{array}{ccccccc} 2A & + & B & + & 2C & = & 1 \\ 3A & + & 2B & - & C & = & 2 \\ -2A & & & & & = & -1. \end{array}$$

Fokus pada pembilangnya:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A. \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2A & + & B & + & 2C & = & 1 \\ 3A & + & 2B & - & C & = & 2 \\ -2A & & & & & = & -1. \end{array}$$

Diperoleh $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, dan $C = -\frac{1}{10}$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+K.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}\right)dx\\ &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+K.\end{aligned}$$

Hal ini dikarenakan pada perhitungan $\int \frac{1}{2x-1}dx$, dimisalkan $u = 2x-1$ maka $du = 2dx$ atau $dx = \frac{1}{2}du$.

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$! dengan $a \neq 0$.

   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$! dengan $a \neq 0$.
   Jawab:
   Perhatikan bahwa
   $$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$
   Lalu temukan koefisien A dan B.

Maka
$$A(x+a)+B(x-a)=1.$$
Perhatikan jika diambil $x=a$, maka $A(2a)=1$, sehingga $A=\frac{1}{2a}$.
Lalu jika diambil $x=-a$, diperoleh $B(-2a)=1$, sehingga $B=-\frac{1}{2a}$.

Maka
$$A(x+a)+B(x-a)=1.$$
Perhatikan jika diambil $x=a$, maka $A(2a)=1$, sehingga $A=\frac{1}{2a}$. Lalu jika diambil $x=-a$, diperoleh $B(-2a)=1$, sehingga $B=-\frac{1}{2a}$. Oleh karena itu,
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx\\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{2}{x^2+3x}dx$! dengan $a \neq 0$.

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{2}{x^2+3x} dx$! dengan $a \neq 0$.

   Jawab:

   Perhatikan bahwa $x^2 + 3x = x(x+3)$. Maka

$$\int \frac{2}{x^2+3x} dx = \cdots .$$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{5x}{2x^3 + 6x^2} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\displaystyle\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}dx$!

Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x+\pi}{x^2-3\pi x+2\pi^2}dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $\int \frac{2x+21}{2x^2+9x-5} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6} dx$!

   Jawab:

$Q(x)$ = dekomposisi faktor linier yang berbeda, beberapa berulang

Misalkan faktor linier pertama $(a_1x + b_1)$ berulang sebanyak r kali. Dengan kata lain bahwa $(a_1x + b_1)^r$ terjadi dalam faktorisasi $Q(x)$. Dalam hal ini dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}.$$

Sebagai ilustrasi,

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

   Lakukan dekomposisi (faktorisasi) untuk

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Karena $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, maka

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Karena $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, maka

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

Lalu samakan koefisiennya, diperoleh

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & & & + & C & = & 0 \\ & & B & - & 2C & = & 4 \\ -A & + & B & + & C & = & 0. \end{array}$$

Sehingga $A = 1$, $B = 2$, dan $C = -1$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\
&= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \\
&= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{x^2+1}{3x-x^2} dx$!
   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{x+1}{x^2-6x+9}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+1}dx!$

   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x^3 - 8x^2 + 16x} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $\int \frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\int \frac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}dx$!

   Jawab:

$Q(x)$ = dekomposisi faktor kuadrat tunggal

Jika $Q(x)$ memiliki faktor $ax^2 + bx + c$, dengan $b^2 - 4ac < 0$, maka pecahan parsial yang bersesuaian berbentuk

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Sebagai contoh,

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}.$$

Lalu bentuk tersebut dapat diintegralkan dengan **melengkapi kuadrat (jika perlu) dan menggunakan formula berikut**.

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$!

   Jawab:

   Karena $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, maka

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

   Sehingga

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + K.\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$!

Jawab:

Karena $deg(P) \geq deg(Q)$, maka

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$!

Jawab:

Karena $deg(P) \geq deg(Q)$, maka

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}.$$

Karena determinan dari penyebut adalah $b^2 - 4ac = -32 < 0$, maka $4x^2 - 4x + 3$ sudah tidak dapat difaktorkan lagi. Oleh karena itu, maka pengintegralan fungsi ini dilakukan dengan melengkapi kuadrat dalam penyebut:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2.$$

Misalkan $u = 2x - 1$ maka $x = \frac{1}{2}(u+1)$ dan $du = 2dx$. Sehingga

$$\begin{aligned}
&\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}dx \\
&= \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2 + 2}du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}du \\
&= x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}du \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{14x+1}{x^3+5x} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{14x+1}{x^3+5x} dx$!

   Jawab:

   Clue: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}dx!$

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)} dx$!

   Jawab:

   Clue: $u = x^3 + 3x$.

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+2)^2+16x}dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $\int \frac{1}{x^4 - 16} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int \frac{(\sin^3 t - 8\sin^2 - 1)\cos t}{(\sin t + 3)(\sin^2 t - 4\sin t + 5)} dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int \frac{(\sin^3 t - 8\sin^2 - 1)\cos t}{(\sin t + 3)(\sin^2 t - 4\sin t + 5)} dt$!

Jawab:

Misalkan $x = \sin t$ maka $dx = \cos t \;\; dt$.

$Q(x)$ = dekomposisi faktor kuadrat berulang

Jika $Q(x)$ memiliki faktor $(ax^2+bx+c)^r$ dengan $b^2-4ac<0$, maka jumlahan

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^r}$$

terjadi dalam dekomposisi pecahan parsial dari $R(x)/Q(x)$. Setiap pecahan parsial tersebut dapat diintegralkan dengan menggunakan substitusi atau melengkapi kuadrat (jika perlu).

Contoh Soal

1. Tuliskan bentuk dekomposisi pecahan parsial dari fungsi

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}.$$

Jawab:

Contoh Soal

1. Tuliskan bentuk dekomposisi pecahan parsial dari fungsi

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}.$$

Jawab:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$!

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Lalu

$$\begin{aligned}
&-x^3+2x^2-x+1 \\
&= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \cdots .$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{x^5 + 8x^3 + 16x} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x + 1)^2} dx$!

   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x + 1)^2} dx$!

   Jawab:

   Misalkan $u = \sin x$, maka $du = \cos x \ dx$.

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{(\sin t)(4\cos^2 t - 1)}{(\cos t)(1 + 2\cos^2 t + \cos^4 t)} dt$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan $\displaystyle\int \frac{(\sin t)(4\cos^2 t - 1)}{(\cos t)(1 + 2\cos^2 t + \cos^4 t)} dt$!

   Jawab:

   Misalkan $x = \cos t$, maka $dx = -\sin t \;\; dt$.

Contoh Soal

7. Tentukan $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)(\sin^2\theta+1)^2}\,d\theta!$

   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)(\sin^2\theta+1)^2}d\theta$!

   Jawab:

   Misalkan $u = \sin\theta$, maka $du = \cos\theta \;\; d\theta$.

Contoh Soal

8. Tentukan $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)(\sin^2\theta+1)^2}\,d\theta$!

   Jawab:

Strategi untuk integrasi

1. Sederhanakan integran jika memungkinkan.

Strategi untuk integrasi

1. Sederhanakan integran jika memungkinkan.
   Contoh:

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx = \int (\sqrt{x}+x)dx. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}d\theta &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta \; d\theta \\ &= \int \sin\theta\cos\theta \; d\theta = \frac{1}{2}\int \sin 2\theta \; d\theta.\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\int (\sin x+\cos x)^2 \; dx &= \int (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)dx \\ &= \int (1+2\sin x\cos x)dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Strategi untuk integrasi

2. Temukan substitusi yang jelas.

Strategi untuk integrasi

2. Temukan substitusi yang jelas.
   Contoh:

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ du &= 2x \ \ dx \end{aligned}$$

$$\int \sin 2x \ \ dx \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2 \ \ dx \end{aligned}$$

$$\int xe^{-2x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= -2x^2 \\ du &= -4x \ \ dx. \end{aligned}$$

Strategi untuk integrasi

3. Klasifikasikan integran sesuai dengan bentuk-bentuk berikut:
   (a) fungsi trigonometri
   (b) fungsi rasional
   (c) integral parsial u dan dv
   (d) $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ atau $\sqrt[n]{ax+b}$.

Strategi untuk integrasi

4. *Try Again*!

Strategi untuk integrasi

4. *Try Again*!
   (a) Carilah substitusinya
   (b) Lakukan integrasi parsial
   (c) Manipulasi integran.
   Contoh:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx.$$

   (d) Hubungkan soal dengan jawaban soal yang telah dikerjakan
   (e) Gunakan beberapa metode.

Apakah semua fungsi kontinu dapat diintegrasikan?

Apakah semua fungsi kontinu dapat diintegrasikan?

Jawabannya **tidak**. Contohnya $\int e^{x^2}\,dx$. Karena tidak ada satupun bentuk yang dikenal.

Semua fungsi yang diajarkan dalam kuliah kalkulus merupakan fungsi dasar. Yaitu fungsi polinomial, rasional, pangkat, eksponensial, logaritmik, trigonometri, invers trigonometri, hiperbolik, invers hiperbolik, dan semua fungsi yang diperoleh dari 5 operasi dasar (jumlah, kurang, kali, bagi, dan komposisi).

Jika f adalah fungsi dasar, maka f' adalah fungsi dasar, namun $\int f(x)\,dx$ belum tentu merupakan fungsi dasar.

Jika f adalah fungsi dasar, maka f' adalah fungsi dasar, namun $\int f(x)\,dx$ belum tentu merupakan fungsi dasar. Ambil contoh, $f(x) = e^{x^2}$. Karena f kontinu, maka integralnya ada, dan dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Lalu berdasarkan teorema dasar kalkulus bahwa

$$F'(x) = e^{x^2}.$$

Maka f memiliki anti turunan dari F.

Jika f adalah fungsi dasar, maka f' adalah fungsi dasar, namun $\int f(x)\ dx$ belum tentu merupakan fungsi dasar. Ambil contoh, $f(x) = e^{x^2}$. Karena f kontinu, maka integralnya ada, dan dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\ dt.$$

Lalu berdasarkan teorema dasar kalkulus bahwa

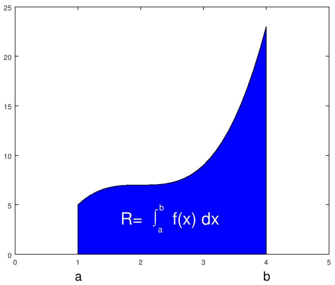
$$F'(x) = e^{x^2}.$$

Maka f memiliki anti turunan dari F. Tetapi hal ini belum dapat membuktikan bahwa F adalah fungsi dasar. Namun demikian, $\displaystyle\int e^{x^2}$ dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga.

Beberapa fungsi tersebut, dapat diaproksimasi dan biasanya diberi nama tertentu. Contohnya,

1. fungsi *error*:
$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
2. integral sinus:
$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$
3. integral sinus Fresnel:
$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$
4. integral kosinus Fresnel:
$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Luas daerah bidang datar



Jika f kontinu dan non negatif pada interval $a \leq x \leq b$, maka luas daerah R yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ dinyatakan dengan

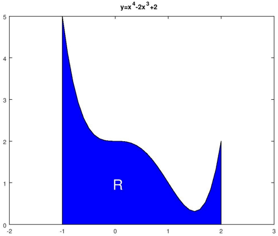
$$\text{Luas}(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

Contoh Soal

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^4 - 2x^3 + 2$ dan sumbu X di antara $x = -1$ dan $x = 2$!
   Jawab:

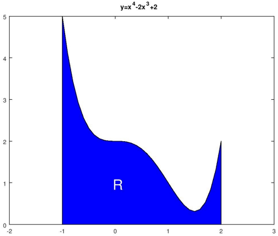
Contoh Soal

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^4 - 2x^3 + 2$ dan sumbu X di antara $x = -1$ dan $x = 2$!
   Jawab:



Contoh Soal

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^4 - 2x^3 + 2$ dan sumbu X di antara $x = -1$ dan $x = 2$!
   Jawab:



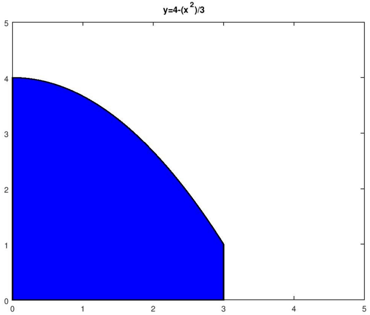
$$\begin{aligned}\text{Luas}(R) &= \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) \\ &= \frac{51}{10}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

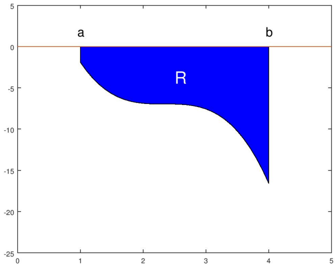
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - \frac{1}{3}x^2$ dan $y = 0$ antara $x = 0$ dan $x = 3$!
   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - \frac{1}{3}x^2$ dan $y = 0$ antara $x = 0$ dan $x = 3$!
Jawab:



Daerah di bawah sumbu X



Jika f kontinu dan merupakan fungsi yang bernilai negatif pada interval $a \leq x \leq b$, maka luas daerah R yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ dinyatakan dengan

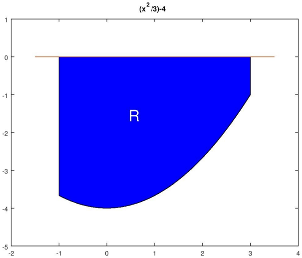
$$\text{Luas}(R) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Contoh Soal

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$ dan sumbu X diantara $x = -2$ dan $x = 3$!
   Jawab:

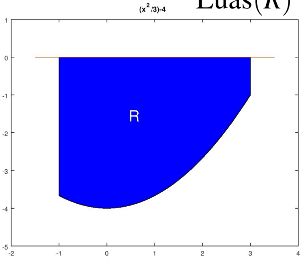
Contoh Soal

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$ dan sumbu X diantara $x = -2$ dan $x = 3$!
Jawab:



Contoh Soal

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$ dan sumbu X diantara $x = -2$ dan $x = 3$!
Jawab:



$$
\begin{aligned}
\text{Luas}(R) &= -\int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx = \int_{-2}^{3} \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) dx \\
&= \left[4x - \frac{x^3}{9}\right]_{-2}^{3} \\
&= \left(12 - \frac{27}{9}\right) - \left(-8 + \frac{8}{9}\right) \\
&= \frac{145}{9}.
\end{aligned}
$$

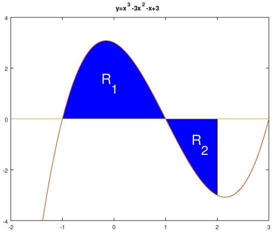
Contoh Soal

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dan $y = 0$ diantara $x = -1$, dan garis $x = 2$!
Jawab:

Contoh Soal

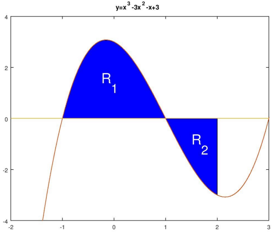
4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dan $y = 0$ diantara $x = -1$, dan garis $x = 2$!

   Jawab:



Contoh Soal

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dan $y = 0$ diantara $x = -1$, dan garis $x = 2$!
Jawab:



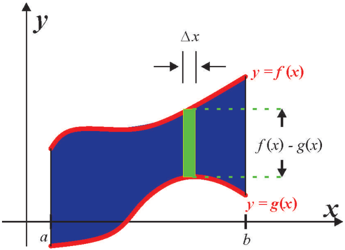
$$\begin{aligned}\text{Luas}(R) =& \text{Luas}(R_1) + \text{Luas}(R_2)\\ =& \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) dx\\ &- \int_{1}^{2} \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) dx\\ =& 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}.\end{aligned}$$

Dalam hal perhitungan integral, lebih baik menggunakan nilai mutlak-nya:

$$\text{Luas}(R) = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 3x^2 - x + 3 \right| dx.$$

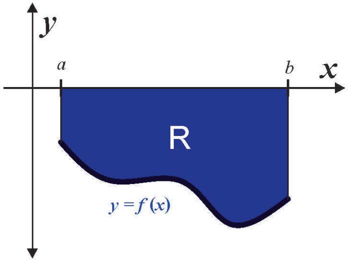
Daerah antara dua kurva

Pandang kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang interval $a \leq x \leq b$. Misal daerahnya ditunjukkan pada gambar berikut.



Maka,

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



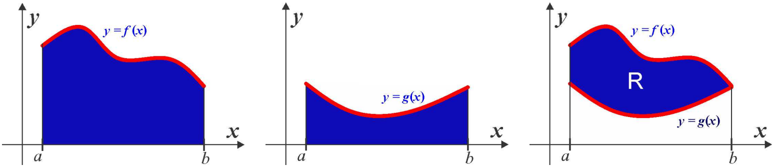
Dalam kasus ketika $g(x) = 0$ sementara $f(x) < 0$ (berada di bawah sumbu X) pada interval $a \leq x \leq b$, maka perhitungan luas dinyatakan dengan

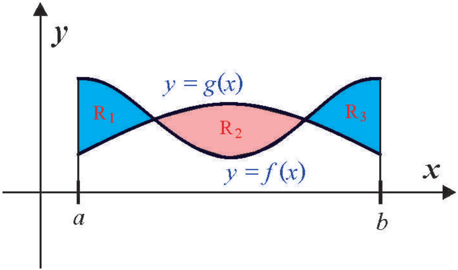
$$\text{Luas}(R) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Lalu untuk kasus ketika masing-masing fungsi f dan g bernilai positif, maka

$$\begin{aligned}\text{Luas } =& [\text{Luas daerah dibawah kurva } f(x)] \\ & - [\text{Luas daerah dibawah kurva } g(x)] \\ =& \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.\end{aligned}$$

Perhatikan ilustrasi berikut.





Jika ingin ada suatu daerah integral antara kurva $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $f(x) \geq g(x)$ untuk beberapa nilai x, juga berlaku $g(x) \geq f(x)$ untuk nilai x yang lain, maka daerah tersebut dapat dihitung dengan memisahnya menjadi beberapa daerah $R_1, R_2, \ldots$. Lalu jumlahkan semua daerah-daerah tersebut.

Karena

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{ketika } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{ketika } g(x) \geq f(x), \end{cases}$$

maka luas daerah keseluruhan dapat dinyatakan dengan

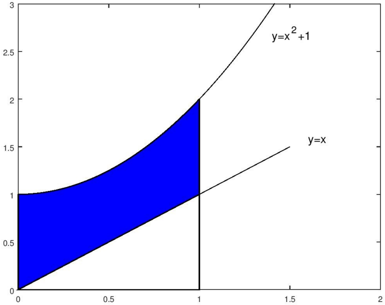
$$\text{Luas}(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Contoh Soal

5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x$ pada interval $0 \leq x \leq 1$!
Jawab:

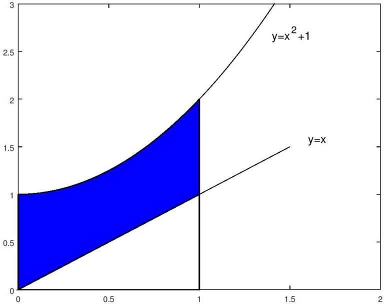
Contoh Soal

5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x$ pada interval $0 \leq x \leq 1$!
   Jawab:



Contoh Soal

5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x$ pada interval $0 \leq x \leq 1$!
Jawab:



$$\text{Luas} = \int_0^1 \left[(x^2+1) - x\right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Contoh Soal

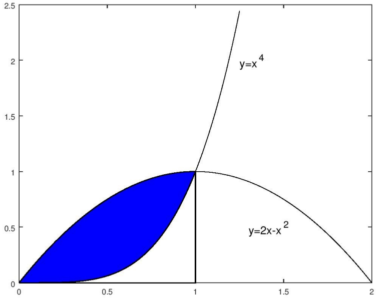
6. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = x + 2$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$!
   Jawab:

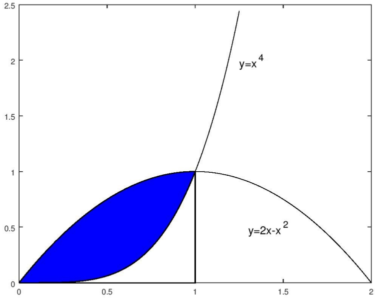
Contoh Soal

7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$!
Jawab:



Contoh Soal

7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$!
   Jawab:



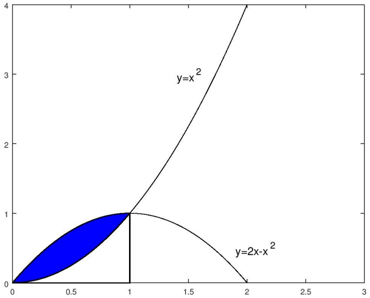
$$\text{Luas} = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)dx$$
$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$= \frac{7}{15}.$$

Contoh Soal

8. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x - x^2$ dan $y = x^2$!
   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x - x^2$ dan $y = x^2$!
Jawab:



Contoh Soal

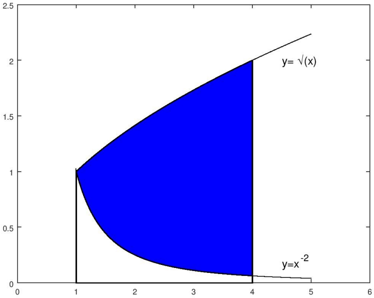
9. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x$ dan $y = -x^2$!
   Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{1}{x^2}$ pada interval $1 \leq x \leq 4$!
Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{1}{x^2}$ pada interval $1 \leq x \leq 4$!
Jawab:



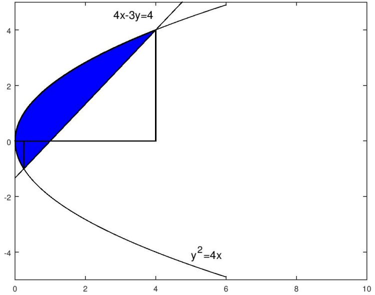
Contoh Soal

11. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$!
Jawab:

Contoh Soal

11. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$!

Jawab:



Tentukan titik potong,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
\frac{1}{4}y^2 &= \frac{3y+4}{4} \\
y^2 &= 3y+4 \\
y^2 - 3y + 4 &= 0 \\
(y+1)(y-4) &= 0.
\end{aligned}$$

Maka titik potongnya adalah $(1/4, -1)$ dan $(4, 4)$.

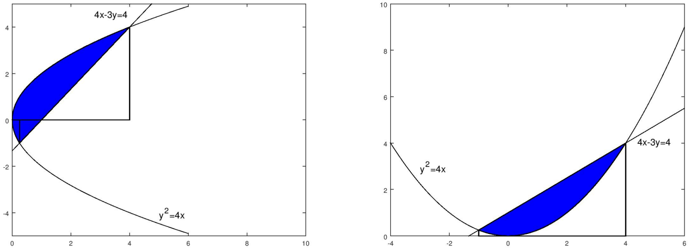
Tentukan titik potong,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ \frac{1}{4}y^2 &= \frac{3y+4}{4} \\ y^2 &= 3y+4 \\ y^2 - 3y + 4 &= 0 \\ (y+1)(y-4) &= 0. \end{aligned}$$

Maka titik potongnya adalah $(1/4, -1)$ dan $(4, 4)$. Sehingga,

$$\text{Luas} = 2\int_0^{1/4} 2\sqrt{x}\ dx + \int\limits_{1/4}^{4} \left(\left[2\sqrt{x}\right] - \left[\frac{1}{3}(4x-4)\right] \right) dx.$$

Perhatikan bahwa dalam menghitung luas daerah tersebut, akan terlihat lebih mudah dikerjakan ketika mengambil y sebagai peubah dalam integral.



Karena titik potong dari kedua kurva tersebut adalah $(1/4,-1)$ dan $(4,4)$, maka

$$\text{Luas} = \int_{-1}^{4} \left(\left[\frac{3y+4}{4}\right] - \left[\frac{y^2}{4}\right] \right) dy.$$

Contoh Soal

12. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x + 6$, $y = x^3$ dan $2y + x = 0$!
    Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sec^2 x$ dan $y = 8\cos x$ pada interval $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$!
Jawab:

Contoh Soal

14. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \cos \pi x$ dan $y = 4x^2 - 1$!
    Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \cos x$ dan $y = 1 - \frac{2x}{\pi}$!
Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ pada interval $0 \leq x \leq \pi/2$!
Jawab:

Contoh Soal

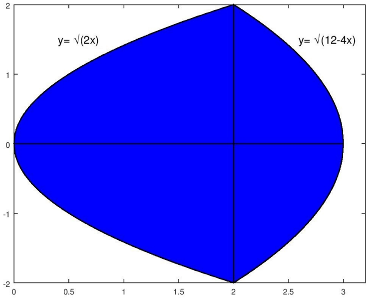
17. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x - 1$ dan parabola $y^2 = 2x + 6$!
Jawab:

Contoh Soal

18. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 - 2x = 0$ dan $y^2 + 4x - 12 = 0$!
Jawab:

Contoh Soal

18. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 - 2x = 0$ dan $y^2 + 4x - 12 = 0$!
Jawab:



Jarak dan perpindahan

Pandang suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t)$ pada saat t. Jika $v(t) \geq 0$, maka $\int_a^b v(t)\, dt$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam interval waktu $a \leq t \leq b$. Namun jika $v(t) < 0$, maka suatu benda tersebut bergerak dalam arah sebaliknya.

Oleh karena itu,

$$\int_a^b v(t) \ dt = s(b) - s(a)$$

menyatakan perpindahan dari titik a ke titik b. Dengan demikian,

$$\int_a^b |v(t)| \ dt$$

menyatakan jarak total yang ditempuh dari titik a ke titik b.

Contoh Soal

19. Tentukan perpindahan suatu benda yang ditempuh untuk $-1 \leq t \leq 9$ jika fungsi kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{(t-2)(t-6)}{10} cm \text{ per } detik.$$

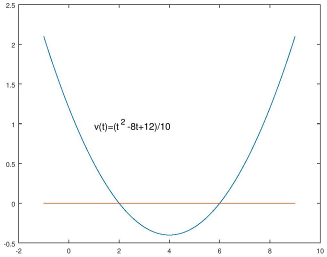
Jawab:

Contoh Soal

19. Tentukan perpindahan suatu benda yang ditempuh untuk $-1 \leq t \leq 9$ jika fungsi kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{(t-2)(t-6)}{10} cm \text{ per } detik.$$

Jawab:



Perpindahan benda tersebut dapat dihitung dengan cara

$$\int_{-1}^{9} v(t)\ dt = \int_{-1}^{9} \frac{(t-2)(t-6)}{10}\ dt.$$

Contoh Soal

20. Tentukan jarak total suatu benda yang ditempuh untuk $-1 \leq t \leq 9$ jika fungsi kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{(t-2)(t-6)}{10} cm \text{ per } detik.$$

Jawab:

Contoh Soal

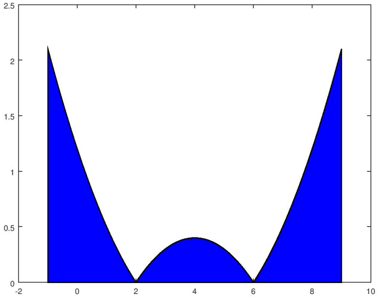
20. Tentukan jarak total suatu benda yang ditempuh untuk $-1 \leq t \leq 9$ jika fungsi kecepatannya adalah

$$v(t) = \frac{(t-2)(t-6)}{10} cm \text{ per } detik.$$

Jawab:

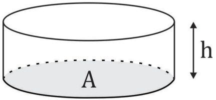
$$\int_{-1}^{9} |v(t)| \; dt = \int_{-1}^{2} \frac{(t-2)(t-6)}{10} \; dt - \int_{2}^{6} \frac{(t-2)(t-6)}{10} \; dt + \int_{6}^{9} \frac{(t-2)(t-6)}{10} \; dt.$$

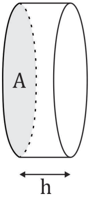
Secara visual, daerah integralnya adalah sebagai berikut.



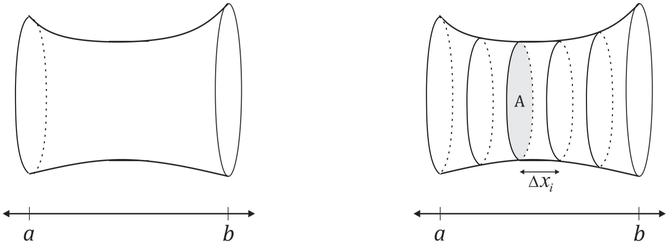
Volume benda putar

Perhatikan bahwa, volume suatu benda di bawah ini dapat ditentukan dengan cara menghitung perkalian antara luas alas A dan tinggi h.

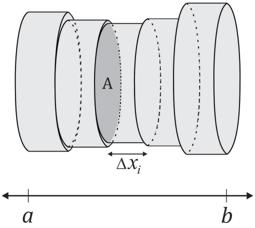




Perhatikan gambar berikut.



Volume dari benda tersebut dapat diaproksimasi dengan mempartisi menjadi beberapa bagian, lalu menghitungnya volume setiap bagiannya, selanjutnya menjumlahkan semua volume bagiannya.



Misalkan selang interval $[a, b]$ dipartisi sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Maka volume bagian ΔV_i ditaksir dengan $\Delta V_i \approx A(x_i^*)\Delta x_i$ dimana $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ dan, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Kemudian volume keseluruhannya dapat diaproksimasi dengan jumlahan Riemann berikut

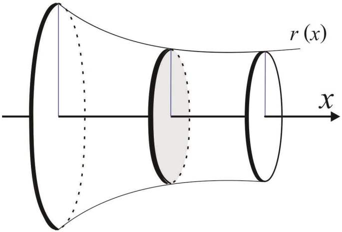
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Jika banyaknya partisi diperbanyak (menuju tak hingga), atau dengan kata lain Δx_i diperkecil (menuju nol), maka volume benda tersebut dapat dihitung dengan mendefinisikan integral berikut.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Jika alas yang dimaksud berbentuk lingkaran yang berjari-jari r dan tinggi $h = dx$, maka volume bagiannya adalah $\pi r^2\, dx$.

Lebih lanjut, jika jari-jari lingkaran selalu berubah (bergantung pada posisi x), maka volume keseluruhannya adalah $V = \int_a^b \pi\, [r(x)]^2\; dx$.



Ada beberapa teknik perhitungan volume benda putar:

1. metode cakram
2. metode cincin
3. metode kulit tabung.

Metode cakram dan metode cincin

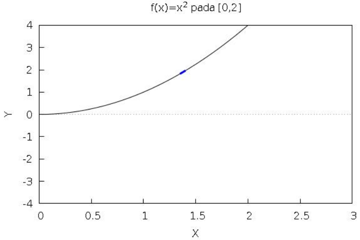
Baik metode cakram maupun metode cincin, menggunakan semua elemen volume yang terbuat dari irisan-irisan silindris yang tipis. Irisan-irisan tersebut berbentuk menyerupai cakram ketika padatnya benda yang diputar, sedangkan berbentuk mirip cincin ketika irisan-irisan tersebut memiliki lubang sepanjang sumbu yang tentukan (sumbu X atau Y).

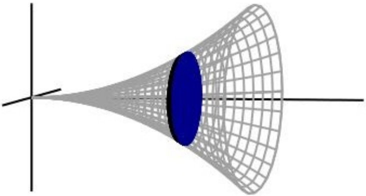
Contoh Soal

1. Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ diputar terhadap sumbu X pada $[0,2]$. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:

Contoh Soal

1. Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ diputar terhadap sumbu X pada $[0, 2]$. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:





Perhatikan bahwa cakram tipis yang terbentuk memiliki jari-jari x^2 dan ketebalan dx. Sehingga volume untuk dV adalah

$$dV = \pi \cdot (x^2)^2 \cdot dx.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} V &= \int dV \\ &= \int_0^2 \pi \cdot x^4 \, dx \\ &= \frac{32}{5}\pi. \end{aligned}$$

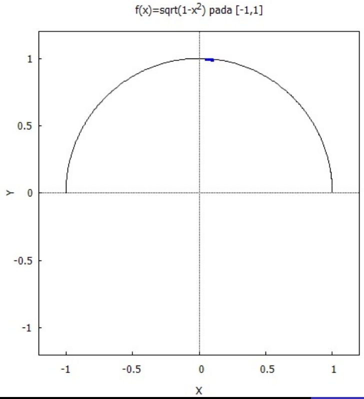
Contoh Soal

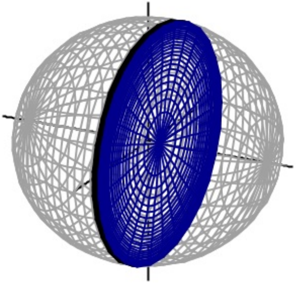
2. Tunjukkan bahwa volume sebuah bola yang berjari-jari r adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$!
   Jawab:

Contoh Soal

2. Tunjukkan bahwa volume sebuah bola yang berjari-jari r adalah $\frac{4}{3}\pi r^3$!

Jawab:





Perhatikan bahwa sebuah bola dapat dibentuk dari fungsi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yang diputar terhadap sumbu X. Kemudian luas daerah yang diarsir berwarna biru adalah

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

Menggunakan definisi volume dengan batas bawah $a = -r$ dan batas atas $b = r$, diperoleh

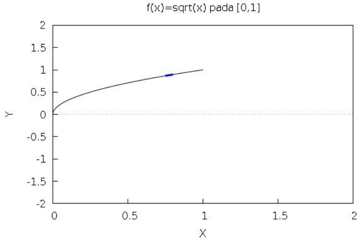
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

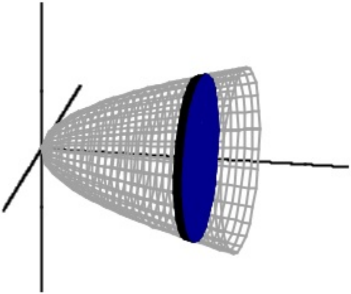
Contoh Soal

3. Misalkan fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ diputar terhadap sumbu X pada $0 \leq x \leq 1$. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:

Contoh Soal

3. Misalkan fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ diputar terhadap sumbu X pada $0 \leq x \leq 1$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:





Ketika titik x pada fungsi $y = \sqrt{x}$ diputar terhadap sumbu X, maka daerah yang dihasilkan memiliki luas

$$A(x) = \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x.$$

Lalu volume cakram yang diperoleh adalah

$$dV = A(x)\, dx = \pi x\, dx.$$

Sehingga

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi x\, dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Contoh Soal

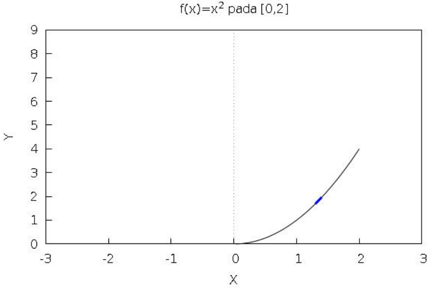
4. Misalkan fungsi $y = x + 1$ diputar terhadap sumbu X pada $0 \leq x \leq 2$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

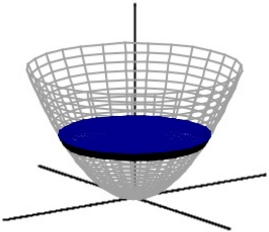
Contoh Soal

5. Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ diputar terhadap sumbu Y pada $0 \leq x \leq 2$. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:

Contoh Soal

5. Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ diputar terhadap sumbu Y pada $0 \leq x \leq 2$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:





Berbeda dengan soal sebelumnya, cakram yang terbentuk memiliki ketebalan dy. Panjang jari-jari cakram tersebut adalah $x = \sqrt{y}$. Sehingga volume cakram yang terbentuk adalah

$$dV = \pi \cdot (\sqrt{y})^2 \cdot dy.$$

Oleh karena itu, volume keseluruhannya adalah

$$V = \int dv = \int_0^4 \pi \cdot y \, dy = 8\pi.$$

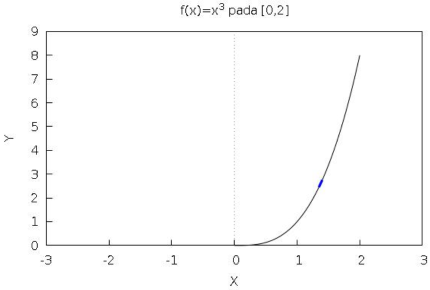
Contoh Soal

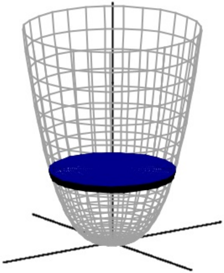
6. Tentukan volume yang diperoleh dengan memutar daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, $y = 8$, dan $x = 0$, jika diputar terhadap sumbu Y!
   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan volume yang diperoleh dengan memutar daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, $y = 8$, dan $x = 0$, jika diputar terhadap sumbu Y!

Jawab:





Perhatikan bahwa ketika ketinggian di y diputar terhadap sumbu Y, maka akan menghasilkan daerah dengan jari $x = \sqrt[3]{y}$. Daerah tersebut memiliki luas

$$A(y) = \pi x^2 = \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}.$$

Perhatikan bahwa ketika ketinggian di y diputar terhadap sumbu Y, maka akan menghasilkan daerah dengan jari $x = \sqrt[3]{y}$. Daerah tersebut memiliki luas

$$A(y) = \pi x^2 = \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}.$$

Volume cakram yang dihasilkan jika diketahui ketebalan sebesar dy, adalah

$$A(y)\, dy = \pi y^{2/3}\, dy.$$

Oleh karena itu,

$$V = \int_0^8 A(y)\, dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\, dy = \frac{96\pi}{5}.$$

Contoh Soal

7. Misalkan fungsi $x = 2\sqrt{y}$ diputar terhadap sumbu Y pada $0 \leq x \leq 6$. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:

Contoh Soal

8. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap sumbu X. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:

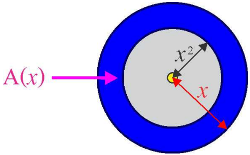
Contoh Soal

8. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap sumbu X. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:
   Ingat bahwa titik potong antara kedua kurva tersebut adalah $(0, 0)$ dan $(1, 1)$.

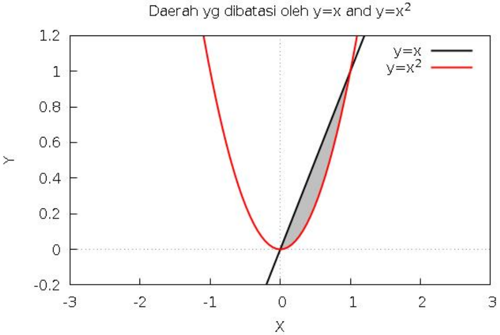
Contoh Soal

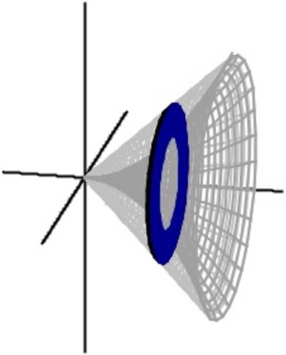
8. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap sumbu X. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:
Ingat bahwa titik potong antara kedua kurva tersebut adalah $(0, 0)$ dan $(1, 1)$. Lalu kurangkan luas lingkaran luar dengan lingkaran dalam, menghasilkan luas penampang cincin

$$A(x) = \pi x^2 - \pi (x^2)^2 = \pi (x^2 - x^4).$$



Lalu perhatikan bahwa jika daerah irisan tersebut diputar maka akan menyerupai sebuah cincin.





Sehingga

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx \\ &= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

Contoh Soal

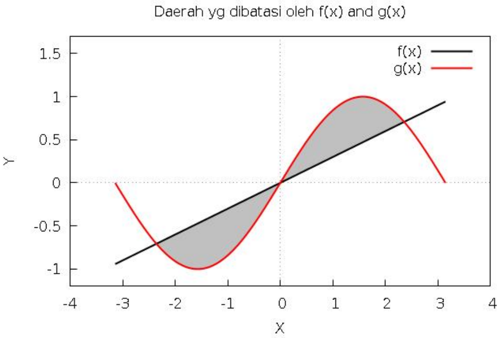
9. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = 0,3x$ dan $g(x) = \sin x$ diputar terhadap sumbu X. Tentukan volume yang terbentuk!

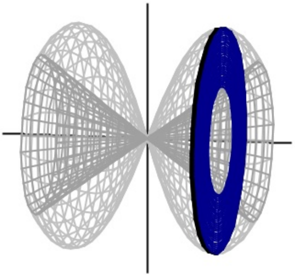
   Jawab:

Contoh Soal

9. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = 0,3x$ dan $g(x) = \sin x$ diputar terhadap sumbu X. Tentukan volume yang terbentuk!
   Jawab:
   Karena batas tidak ditentukan oleh soal, maka perlu dicari perpotongan antar kedua fungsi tersebut. Berdasarkan metode numerik, diperoleh perpotongannya adalah $x = -2,356$, $x = 0$ dan $x = 2,356$.

Lalu perhatikan bahwa irisan benda putar menyerupai sebuah cincin.





Karena volume yang terbentuk adalah simetris terhadap sumbu Y, maka volume yang dihitung hanya bagian setengah sebelah kanan lalu dikali 2. Volume cincin dihitung berdasarkan jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam.

$$A = \pi \cdot r_{\text{luar}}^2 - \pi \cdot r_{\text{dalam}}^2.$$

Karena volume yang terbentuk adalah simetris terhadap sumbu Y, maka volume yang dihitung hanya bagian setengah sebelah kanan lalu dikali 2. Volume cincin dihitung berdasarkan jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam.

$$A = \pi \cdot r_{\text{luar}}^2 - \pi \cdot r_{\text{dalam}}^2.$$

Maka $dV = \left(\pi \cdot (\sin x)^2 - \pi \cdot (0,3x)^2\right) dx$. Sehingga

$$\begin{aligned} V &= \int dV \\ &= 2\int_0^{2,356} \left[\pi(\sin x)^2 - \pi(0,3x)^2\right] dx \\ &\approx 6,5. \end{aligned}$$

Contoh Soal

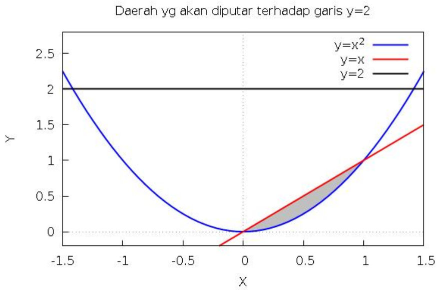
10. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $y^2 = x$ dan $x = 2y$ diputar terhadap sumbu Y. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

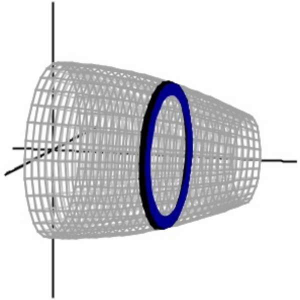
Contoh Soal

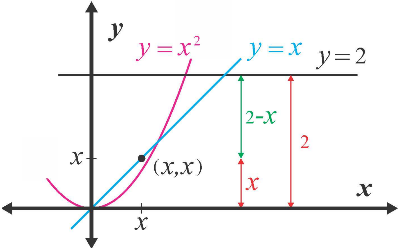
11. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap garis $y = 2$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

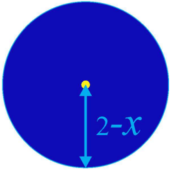
Contoh Soal

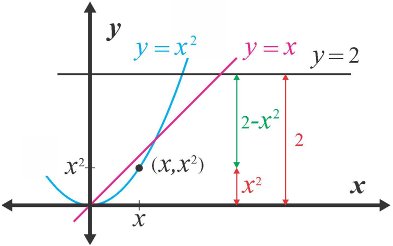
11. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap garis $y = 2$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

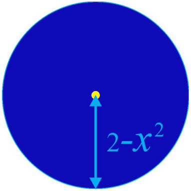





y
y = x^2
y = x
y = 2
2-x
2
x
(x,x)
x
x
x


2-x


y
y = x^2
y = x
y = 2
2-x^2
2
x^2
(x,x^2)
x^2
x
x


2-x^2

Perhatikan bahwa jari-jari lingkaran semula adalah x dan x^2, namun karena diputar terhadap garis $y = 2$ maka masing-masing menjadi $2-x$ dan $2 - x^2$. Maka luas penampang cincinnya adalah

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2.$$

Oleh karena itu, volumenya adalah

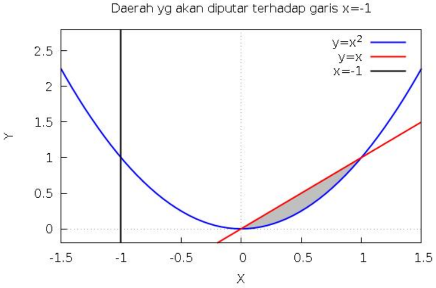
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[(2-x^2)^2 - (2-x)^2\right]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap garis $x = -1$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

Contoh Soal

12. Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap garis $x = -1$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:



Perhatikan bahwa jari-jari untuk lingkaran luar dan lingkaran dalam masing-masing adalah $1+\sqrt{y}$ dan $1+y$. Sehingga luas penampang cincinnya adalah

$$A(y)=\pi(1+\sqrt{y})^2-\pi(1+y)^2.$$

Perhatikan bahwa jari-jari untuk lingkaran luar dan lingkaran dalam masing-masing adalah $1+\sqrt{y}$ dan $1+y$. Sehingga luas penampang cincinnya adalah

$$A(y)=\pi(1+\sqrt{y})^2-\pi(1+y)^2.$$

Maka volume benda putarnya adalah

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 A(y)dy=\pi\int_0^1\left[(1+\sqrt{y})^2-(1+y)^2\right]dy\\&=\pi\int_0^1(2\sqrt{y}-y-y^2)dy=\pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3}-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

13. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = x^2$ dan $x = y^2$ diputar terhadap garis $y = 1$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

Contoh Soal

14. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = 1 + \sec x$ dan $y = 3$ diputar terhadap garis $y = 1$. Tentukan volume yang terbentuk!
    Jawab:

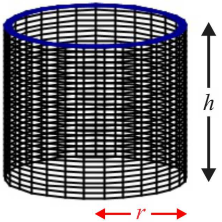
Contoh Soal

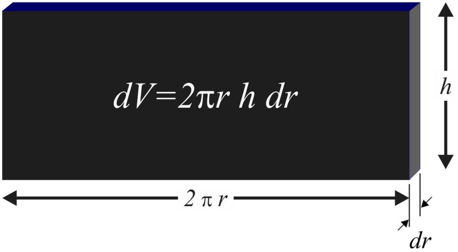
15. Misalkan daerah yang dibatasi oleh fungsi $x = y^2$ dan $x = 1 - y^2$ diputar terhadap garis $x = 3$. Tentukan volume yang terbentuk!
Jawab:

Metode kulit tabung

Volume benda putar juga dapat didekomposisi menjadi elemen-elemen volume yang diperoleh dari kulit tabung tersarang. Volume kulit tabung tersebut dihitung berdasarkan tinggi h, jari-jari r, dan ketebalan dr yang diperoleh dengan membuka gulugan kulit tersebut menjadi sebuah irisan yang menyerupai papan persegi panjang.

Ketika kulit tabung direntangkan, maka panjangnya menjadi $2\pi r$. Sehingga volume kulit tabung adalah $dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$.





Dengan demikian, diperolehlah volume benda putar, yaitu

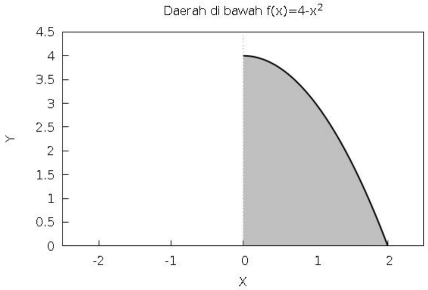
$$V = \int dV = \int 2\pi r \cdot h \cdot dr.$$

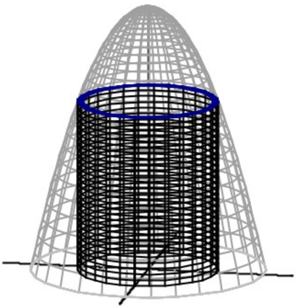
Contoh Soal

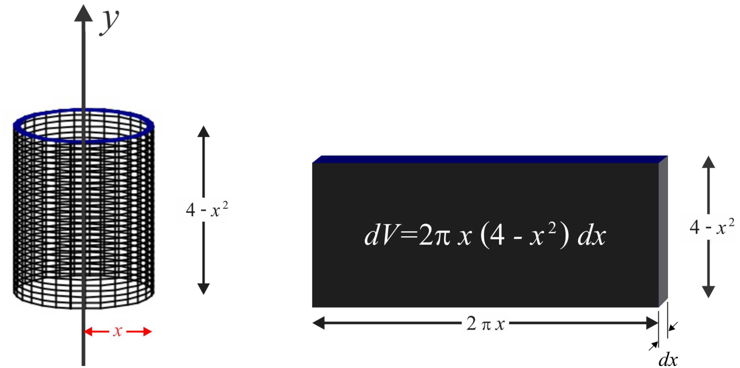
16. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = 4 - x^2$, sumbu X, dan sumbu Y, jika diputar mengelilingi sumbu Y!
Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = 4 - x^2$, sumbu X, dan sumbu Y, jika diputar mengelilingi sumbu Y!
Jawab:






y
4 - x²
x
dV=2π x (4 - x²) dx
4 - x²
2 π x
dx

Perhatikan bahwa jari-jari kulit tabung adalah x, dengan tinggi $4 - x^2$ dan ketebalan dx. Sehingga $dV = 2\pi x(4 - x^2)\, dx$. Oleh karena itu,

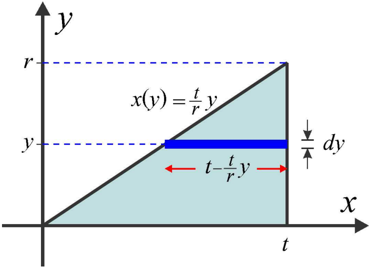
$$\begin{aligned} V &= \int dV \\ &= \int_0^2 2\pi x(4 - x^2)\, dx. \end{aligned}$$

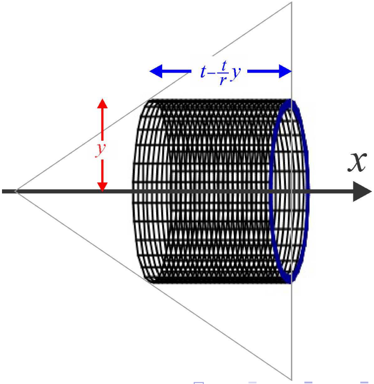
Contoh Soal

17. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = (r/t)x$, sumbu X, dan garis $x = t$, jika diputar mengelilingi sumbu X!
Jawab:

Contoh Soal

17. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = (r/t)x$, sumbu X, dan garis $x = t$, jika diputar mengelilingi sumbu X!
Jawab:





Perhatikan bahwa jari-jari kulit tabung adalah y, dengan tinggi $t - \frac{t}{r}y$ dan ketebalan dy. Sehingga

$$\begin{aligned} V &= \int_0^r 2\pi y \left(t - \frac{t}{r}y\right) dy \\ &= 2\pi t \int_0^r \left(y - \frac{1}{r}y^2\right) dy \\ &= 2\pi t \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r}\right]_0^r \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 t. \end{aligned}$$

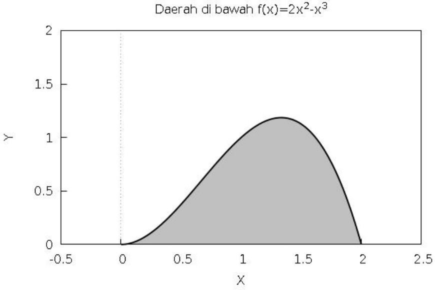
Cara lain untuk menghitung volume benda putar tersebut adalah dengan menggunakan metode cakram.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^t \pi \left(\frac{r}{t}x\right)^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{t^2} \int_0^t x^2 \, dx \\ &= \pi \frac{r^2}{t^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 t. \end{aligned}$$

18. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = 2x^2 - x^3$ dan sumbu X, jika diputar mengelilingi sumbu Y!
Jawab:

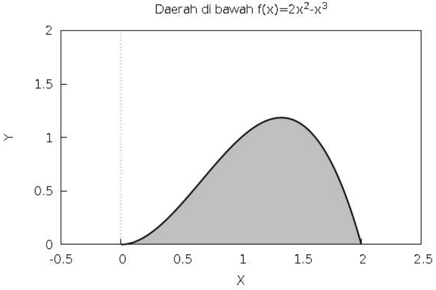
18. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = 2x^2 - x^3$ dan sumbu X, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:



18. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh $f(x) = 2x^2 - x^3$ dan sumbu X, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:



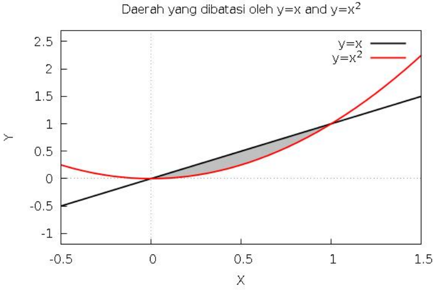
$$V = \int_0^2 2\pi x(2x^2 - x^3)dx.$$

19. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan kurva $y = x^2$, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:

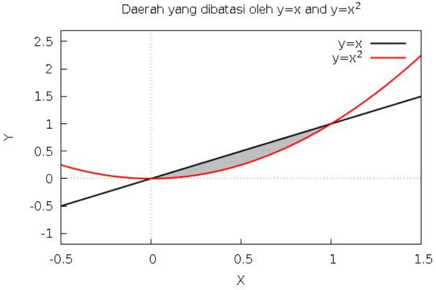
19. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan kurva $y = x^2$, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:



19. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan kurva $y = x^2$, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:



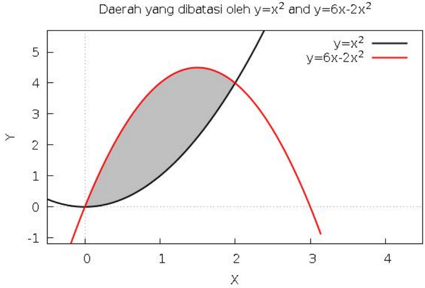
$$V = \int_0^1 2\pi x(x - x^2)dx.$$

20. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y_1 = x^2$ dan kurva $y_2 = 6x - 2x^2$, jika diputar mengelilingi sumbu Y!
Jawab:

20. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y_1 = x^2$ dan kurva $y_2 = 6x - 2x^2$, jika diputar mengelilingi sumbu Y!

Jawab:

Pertama, buatlah gambarnya terlebih dahulu.



Kedua, tentukan titik potong antara kedua kurva tersebut untuk menentukan batas integrasi dan ketinggian kulit tabung.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ x^2 &= 6x - 2x^2 \\ 3x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Diperoleh titik potong $(0,0)$ dan $(2,4)$. Selanjutnya, perhatikan bahwa kurva y_2 berada di atas kurva y_1 ketika $0 < x < 2$. Oleh karena itu,

$$V = \int_0^2 2\pi x(6x - 2x^2 - x^2)dx = 8\pi.$$

21. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x^{3/2}$ dan garis $y = 8$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

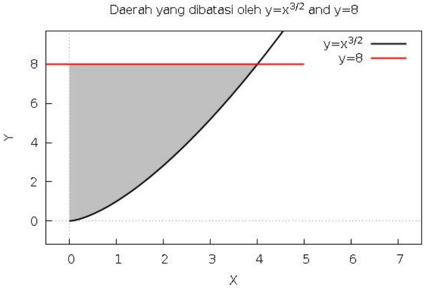
Jawab:

Perhatikan bahwa domain untuk $f(x) = x^{3/2}$ adalah $x \geq 0$.

21. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x^{3/2}$ dan garis $y = 8$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

Jawab:

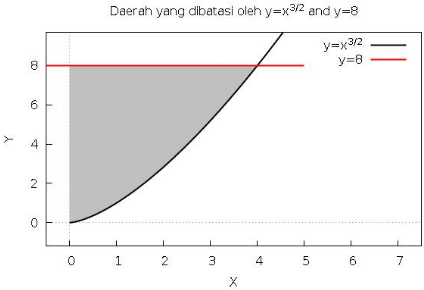
Perhatikan bahwa domain untuk $f(x) = x^{3/2}$ adalah $x \geq 0$.



21. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = x^{3/2}$ dan garis $y = 8$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

Jawab:

Perhatikan bahwa domain untuk $f(x) = x^{3/2}$ adalah $x \geq 0$.



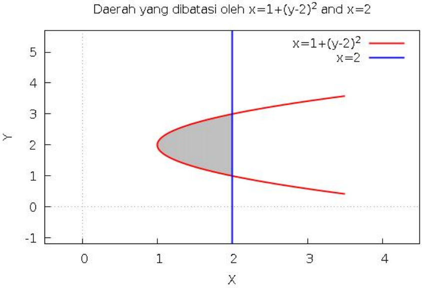
$$V = \int_0^8 2\pi y(y^{2/3})dy.$$

22. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = 1 + (y-2)^2$ dan garis $x = 2$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

Jawab:

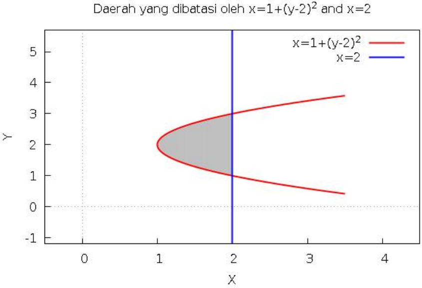
22. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = 1 + (y-2)^2$ dan garis $x = 2$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

Jawab:



22. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = 1 + (y-2)^2$ dan garis $x = 2$, jika diputar mengelilingi sumbu X!

Jawab:

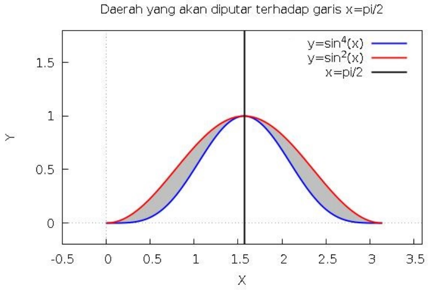


$$V = \int_0^2 2\pi y(2 - [1 + (y-2)^2])dy.$$

23. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = \sin^2 x$ dan kurva $y = \sin^4 x$ pada interval $0 \leq x \leq \pi$, jika diputar mengelilingi garis $x = \pi/2$!

Jawab:

23. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = \sin^2 x$ dan kurva $y = \sin^4 x$ pada interval $0 \leq x \leq \pi$, jika diputar mengelilingi garis $x = \pi/2$!
Jawab:



Perhatikan bahwa volume benda putar untuk kasus ini, dihitung dengan memutar kurva pada interval $0 \leq x \leq \pi/2$. Sehingga,

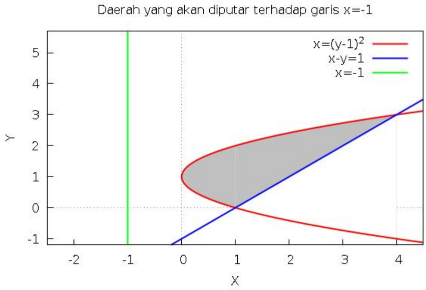
$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x([\sin^2 x] - [\sin^4 x])dx.$$

24. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = (y-1)^2$ dan garis $x - y = 1$, jika diputar mengelilingi garis $x = -1$!

Jawab:

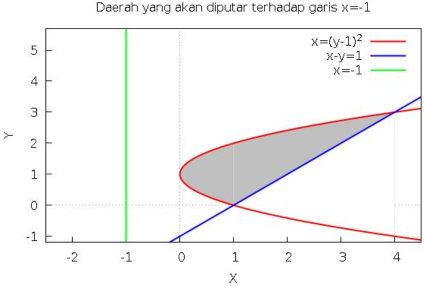
24. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = (y-1)^2$ dan garis $x - y = 1$, jika diputar mengelilingi garis $x = -1$!

Jawab:



24. Tentukan volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = (y-1)^2$ dan garis $x - y = 1$, jika diputar mengelilingi garis $x = -1$!

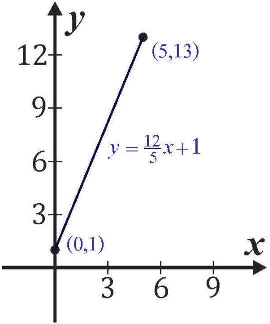
Jawab:



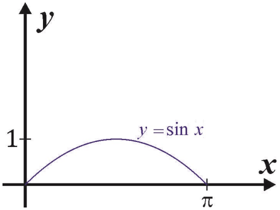
$$V = \frac{117\pi}{5}.$$

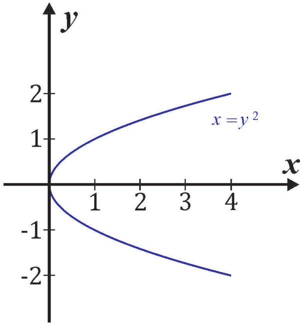
Panjang kurva pada bidang

Berapakah panjang ruas garis berikut?

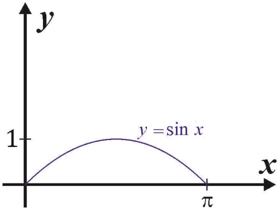


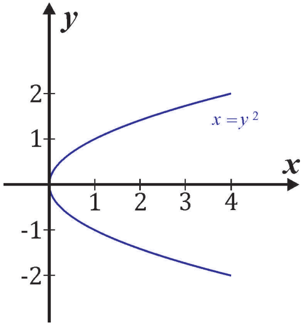
Berapakah panjang dari masing-masing kurva berikut?





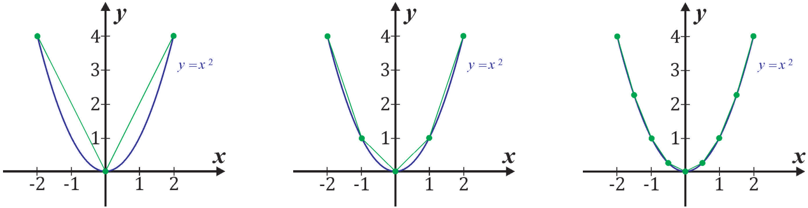
Berapakah panjang dari masing-masing kurva berikut?



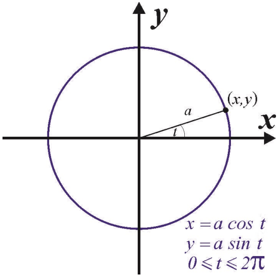


Sebelumnya, perhatikan bahwa semua kurva tersebut memiliki bentuk $y = f(x)$ atau $x = g(y)$.

Untuk mempermudah memahami materi ini, ambil contoh $y = x^2$. Panjang kurvanya dapat diaproksimasi dengan cara berikut.



Selanjutnya, berapakah panjang dari kurva lingkaran berikut?



Perhatikan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, tidak memiliki salah satu dari bentuk $y = f(x)$ atau $x = g(y)$. Walaupun, dapat dikatakan bahwa lingkaran tersebut merupakan gabungan grafik $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ dan $y = g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

Dari trigonometri, diketahui bahwa lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ dapat dilukiskan dengan

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t,$$

dimana $0 \leq t \leq 2\pi$. Dalam persamaan ini, t merupakan peubah yang nilainya variatif berkisar dari 0 hingga 2π. Selanjutnya, peubah t ini dinamakan **parameter**.

Contoh Soal

1. Gambarlah kurva yang persamaan parameternya adalah $x(t) = 2t + 1, y(t) = t^2 - 1, 0 \leq t \leq 3!$
   Jawab:

Contoh Soal

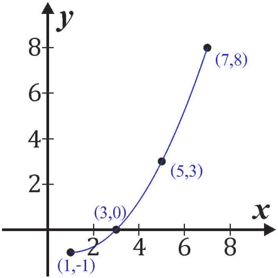
1. Gambarlah kurva yang persamaan parameternya adalah $x(t) = 2t + 1, y(t) = t^2 - 1, 0 \leq t \leq 3$!
   Jawab:
   Perhatikan bahwa t merupakan parameter dari fungsi $x(t)$ dan $y(t)$. Maka

t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8

Contoh Soal

1. Gambarlah kurva yang persamaan parameternya adalah $x(t) = 2t + 1$, $y(t) = t^2 - 1$, $0 \leq t \leq 3$!
   Jawab:
   Perhatikan bahwa t merupakan parameter dari fungsi $x(t)$ dan $y(t)$. Maka

t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8



Contoh Soal

2. Gambarlah kurva yang persamaan parameternya adalah $x(t) = 2t - 4, y(t) = 4t^2 + 1, -1 \leq t \leq 2$!
   Jawab:

Contoh Soal

2. Gambarlah kurva yang persamaan parameternya adalah $x(t) = 2t - 4$, $y(t) = 4t^2 + 1$, $-1 \leq t \leq 2$!

Jawab:

Selain menggunakan tabel, metode lainnya adalah dengan mencari hubungan antara peubah x dan peubah y.

Dari $x = 2t - 4$, diperoleh

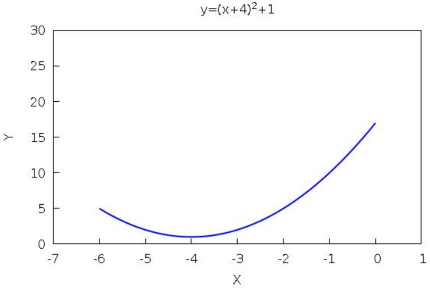
$$t = \frac{x+4}{2}.$$

Sehingga

$$y = 4t^2 + 1 = 4\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + 1 = (x+4)^2 + 1.$$

Maka kurva dari persamaan parameter tersebut adalah parabola $y = (x+4)^2 + 1$. Karena $-1 \le t \le 2$, maka

$$\begin{aligned} -1 &\le t \le 2 \\ -2 &\le 2t \le 4 \\ -6 &\le 2t - 4 \le 0 \\ -6 &\le x \le 0. \end{aligned}$$



Kurva yang telah digambar sebelumnya merupakan kurva mulus, yaitu kurva yang ditentukan oleh persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
x &= f(t), \\
y &= g(t),
\end{aligned}
$$

dimana $a \leq t \leq b$. Dengan ketentuan bahwa turunan-turunan $\frac{df}{dt}$ dan $\frac{dg}{dt}$ kontinu pada interval $[a,b]$, sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di interval selang buka (partikel tidak berhenti atau berbalik arah).

Perhatikan kembali persamaan parameter berikut

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Selanjutnya partisi pada interval $[a,b]$ menjadi n sub-interval dengan titik-titik ujung

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Perhatikan kembali persamaan parameter berikut

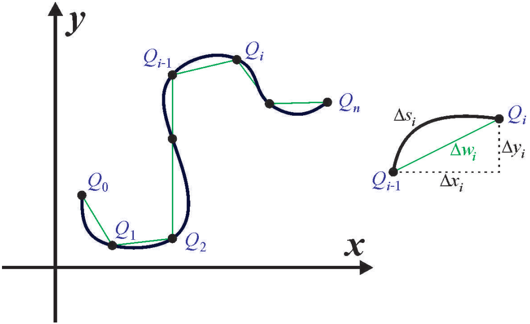
$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Selanjutnya partisi pada interval $[a, b]$ menjadi n sub-interval dengan titik-titik ujung

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Akibatnya, kurva dari persamaan parameter tersebut terpartisi oleh titik-titik Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}, dan Q_n.

Perhatikan ilustrasi berikut.



Panjang Δs_i dapat diaproksimasi oleh

$$\begin{aligned}\Delta s_i \approx \Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan, bahwa

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(\tilde{t}_i) \text{ atau } f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$
$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = g'(\hat{t}_i) \text{ atau } g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t_i.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{[f'(\tilde{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\tilde{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\Delta t_i.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, jumlah keseluruhannya menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\tilde{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\, \Delta t_i.$$

Dengan demikian, jika banyaknya sub interval semakin besar (menuju tak hingga) maka diperoleh panjang kurva yang diinginkan. Jadi,

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(\tilde{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Dari persamaan berikut

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Jika $x = t$, maka persamaan kurvanya menjadi

$$y = f(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

Sehingga $dx = dt$ dan

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Dari persamaan berikut

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Jika $y = t$, maka persamaan kurvanya menjadi

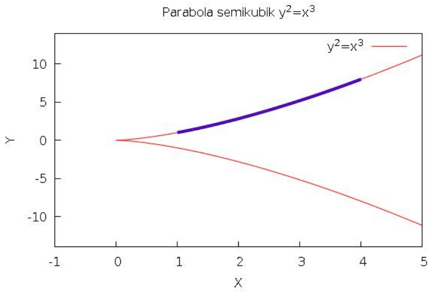
$$x = g(y), \qquad a \leq y \leq b.$$

Sehingga $dy = dt$ dan

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Contoh Soal

3. Tentukan panjang busur dari parabola semikubik $y^2 = x^3$, antara titik $(1,1)$ dan $(4,8)$! (Lihat gambar)



Jawab:

Untuk setengah bagian atas dari kurva, diperoleh

$$y = x^{3/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2},$$

dan

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx.$$

Subtitusikan $u = 1 + \frac{9}{4}x$, maka $du = \frac{9}{4}\,dx$. Ketika $x = 1$, maka $u = \frac{13}{4}$. Lalu ketika $x = 4$, maka $u = 10$. Sehingga

$$\begin{aligned} s = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx &= \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\ du \\ &= \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13/4}^{10} \\ &= \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right] \\ &\approx 7,633705. \end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan panjang keliling lingkaran yang berjari-jari r!
   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan panjang keliling lingkaran yang berjari-jari r!
Jawab:
Ingat bahwa lingkaran berjari-jari r, dapat dilukiskan dengan

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$

dimana $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta.$$

Dengan demikian,

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin\theta]^2 + [r\cos\theta]^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, d\theta \\
&= 2\pi r.
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

5. Tentukan panjang busur dari parabola $y^2 = x$, dari titik $(0, 0)$ dan $(1, 1)$!
   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan panjang busur dari parabola $y^2 = x$, dari titik $(0,0)$ dan $(1,1)$!

   Jawab:

   Karena $x = y^2$, maka diperoleh $\frac{dx}{dy} = 2y$ dan

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy.$$

Gunakan substitusi trigonometri:

$$y = \frac{1}{2}\tan\theta$$
$$dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta \; d\theta.$$

Maka $\sqrt{1+4y^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta$.
Ketika $y = 0$, maka $\tan\theta = 0$, jadi $\theta = 0$.
Ketika $y = 1$, maka $\tan\theta = 2$, jadi $\theta = \tan^{-1}(2)$.

Misal $\alpha = \tan^{-1}(2)$, maka

$$\begin{aligned} s = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\ dy &= \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \frac{1}{2}\sec^2\theta\ \ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\ \ d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left(\sec\alpha\tan\alpha + \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|\right). \end{aligned}$$

Karena $\tan\alpha = 2$, maka $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$.
Sehingga $\sec\alpha = \sqrt{5}$. Oleh karena itu,

$$s = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{4}.$$

Karena ada tanda akar pangkat 2 dalam formula panjang kurva, membuat perhitungan integral menjadi sangat sulit atau bahkan tidak mungkin untuk memperkirakannya dengan tegas. Sehingga aproksimasi sering digunakan dalam perhitungannya.

Contoh Soal

6. Tentukan panjang busur dari hiperbola $xy = 1$, dari titik $(1, 1)$ dan $(2, \frac{1}{2})$!
   Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan panjang busur dari hiperbola $xy = 1$, dari titik $(1, 1)$ dan $(2, \frac{1}{2})$!

Jawab:

Karena $y = \frac{1}{x}$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$. Sehingga

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx.$$

Selanjutnya, gunakan aturan Simpson (metode numerik), dengan $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0,1$; dan $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{3} [f(1) + 4f(1,1) + 2f(1,2) + 4f(1,3) + \cdots \\ &\quad +2f(1,8) + 4f(1,9) + f(2)] \\ &\approx 1,1321. \end{aligned}$$

Contoh Soal

7. Tentukan panjang busur dari kurva $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$ dari titik $(1, \frac{2}{3})$ ke titik $(2, \frac{4\sqrt{2}}{3})$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan panjang busur dari kurva $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$ dari titik $(1, \frac{2}{3})$ ke titik $(2, \frac{4\sqrt{2}}{3})$!
Jawab:
Karena $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$, maka $dy/dx = \sqrt{x}$. Sehingga

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \cdots .$$

Contoh Soal

8. Tentukan panjang busur dari kurva $y = e^x$ pada interval $0 \leq x \leq 2$!
   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan panjang busur dari kurva $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pada interval $0 \leq x \leq 2$!

   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan panjang busur dari kurva $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ pada interval $0 \leq x \leq 2$!
   Jawab:
   Karena $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, maka $f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Sehingga

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \cdots .$$

Contoh Soal

10. Tentukan panjang busur dari kurva $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$ pada interval $1 \leq y \leq 9$!
Jawab:

Contoh Soal

11. Tentukan panjang busur dari persamaan parameter

$$x(t) = 3\sin t$$
$$y(t) = 3\cos t - 3$$

pada interval $0 \leq t \leq 2\pi$!
Jawab:

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

Sehingga

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \cdots .$$

Contoh Soal

12. Tentukan panjang busur dari persamaan parameter

$$x(t) = 3t^2 + 2$$
$$y(t) = 2t^3 - 1$$

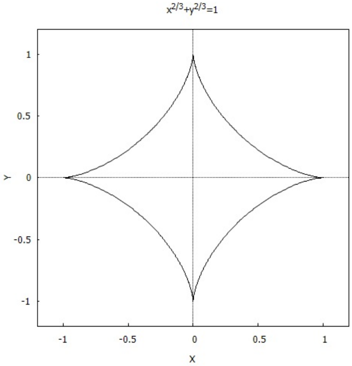
pada interval $1 \leq t \leq 3$!
Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan panjang busur dari persamaan parameter $x(\theta) = \cos^3 \theta$ dan $y(\theta) = \sin^3 \theta$ pada interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$!
Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan panjang busur dari persamaan parameter $x(\theta) = \cos^3\theta$ dan $y(\theta) = \sin^3\theta$ pada interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$!
Jawab:



Contoh Soal

14. Tentukan **fungsi** panjang busur dari kurva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, jika dimulai dari titik awal $(1, 1)$!
Jawab:

Contoh Soal

14. Tentukan **fungsi** panjang busur dari kurva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, jika dimulai dari titik awal $(1, 1)$!

Jawab:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x} \quad \text{(karena } x > 0\text{)}.$$

Oleh karena itu, fungsi panjang busurnya adalah

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_1^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\, dt \\ &= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right)\, dt \\ &= x^2 + \frac{1}{8}\ln x - 1. \end{aligned}$$

Sebagai contoh, panjang kurva dari titik $(1,1)$ ke titik $(3,f(3))$ adalah

$$s(3) = 3^2 + \frac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8,1373.$$

Contoh Soal

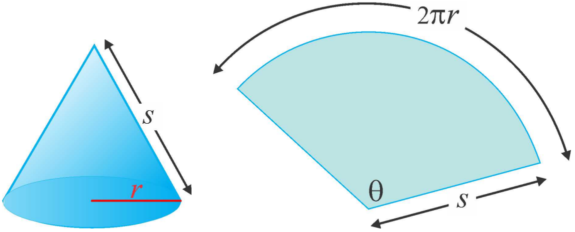
15. Tentukan **fungsi** panjang busur dari kurva $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$, jika dimulai dari titik awal $(1, 3/2)$!
Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan **fungsi** panjang busur dari kurva $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$, jika dimulai dari titik awal $(1, 3/2)$!
Jawab:

$$s(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

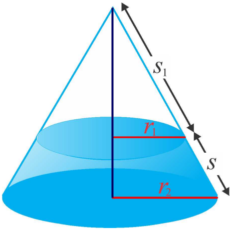
Luas permukaan benda putar



Ingat bahwa luas selimut sebuah kerucut berjari-jari r adalah

$$A = \frac{1}{2}s^2\theta = \frac{1}{2}s^2\left(\frac{2\pi r}{s}\right) = \pi rs.$$

Selanjutnya, perhatikan kerucut terpancung berikut.



Luas permukaannya dapat diperoleh dengan cara

$$A = \pi r_2(s_1 + s) - \pi r_1 s_1 = \pi[(r_2 - r_1)s_1 + r_2 s].$$

Dengan menggunakan konsep bangun datar sebangun, maka

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_1 + s}{r_2}.$$

Kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} r_2 s_1 &= r_1 s_1 + r_1 s \\ (r_2 - r_1) s_1 &= r_1 s. \end{aligned}$$

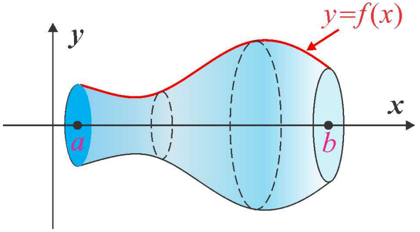
Sehingga

$$\begin{aligned} A &= \pi[(r_2 - r_1)s_1 + r_2 s] \\ &= \pi[r_1 s + r_2 s] \end{aligned}$$

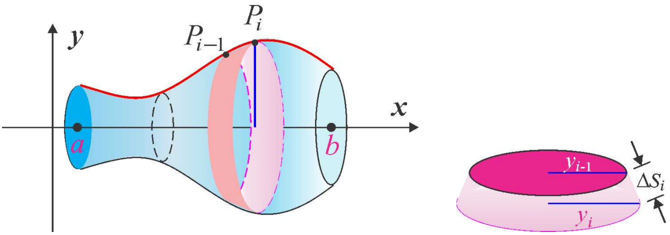
Jika $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, maka

$$A = 2\pi r s.$$

Selanjutnya, perhatikan permukaan benda putar berikut.



Luas permukaan benda putar dapat dihitung dengan mengirisnya menjadi pita-pita tipis. Setiap pita membentuk daerah dA. Lalu luas daerah dA dapat dihitung dengan membuka gulungan pita tersebut.



Jika $y_i = f(x_i)$ maka titik $P_i(x_i, y_i)$ terletak pada kurva. Lalu luas permukaan pita tipis dapat ditaksir oleh

$$\Delta A_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i,$$

dimana Δs_i adalah panjang garis antara titik P_{i-1} dan P_i.

Sehingga luas permukaan seluruhnya adalah

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i = \int 2\pi y \; ds.$$

Berdasarkan rumus panjang suatu kurva, jika dibentuk oleh perputaran $y = f(x)$ terhadap sumbu X pada interval $a \leq x \leq b$, maka

$$A = \int 2\pi y \ ds = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \ dx.$$

Jika kurva yang diputar terhadap sumbu X adalah fungsi $x = g(y)$ pada interval $c \leq y \leq d$, maka luas permukaan benda putarnya adalah

$$A = \int 2\pi y \ ds = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \ dy.$$

Jika suatu kurva diputar terhadap sumbu Y, maka luas permukaan benda putarnya adalah

$$A = \int 2\pi x \, ds.$$

Dalam hal ini,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

atau

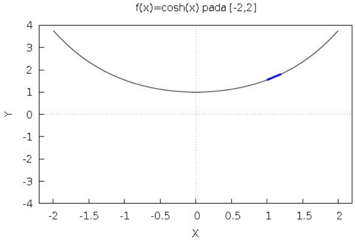
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy.$$

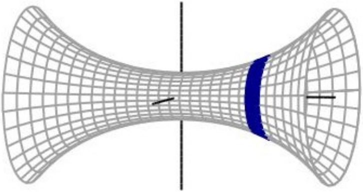
Contoh Soal

1. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $f(x) = \cosh x$ mengelilingi sumbu X pada $-2 \leq x \leq 2$!
   Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $f(x) = \cosh x$ mengelilingi sumbu X pada $-2 \leq x \leq 2$!
   Jawab:





Perhatikan bahwa ds merupakan elemen kecil dari lengkungan grafik $f(x) = \cosh x$. Dalam hal ini,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Karena $\cosh x$ adalah radius dari elemen daerah di titik x, maka panjang gulungan pita yang dibuka dari elemen daerah tersebut adalah $2\pi \cdot \cosh x$.

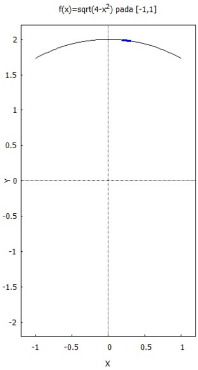
Selanjutnya adalah menghitung semua daerah permukaan menggunakan integral.

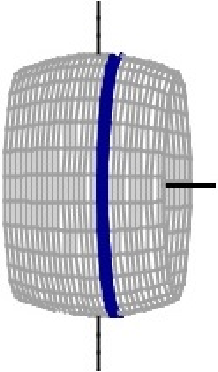
$$\begin{aligned} A &= \int dA \\ &= \int_{-2}^{2} 2\pi \cdot \cosh x \sqrt{(\sinh x)^2 + 1}\, dx \\ &\approx 98,3. \end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Sebuah kurva $y = \sqrt{4 - x^2}$ pada interval $-1 \leq x \leq 1$, yang merupakan sisi lengkung dari lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ diputar mengelilingi sumbu X. Tentukan luas permukaan yang diperoleh!

   Jawab:


f(x)=sqrt(4-x2) pada [-1,1]
2
1.5
1
0.5
y 0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
-0.5
0
0.5
1
x



Karena $y = \sqrt{4 - x^2}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Karena $y = \sqrt{4 - x^2}$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \sqrt{\frac{4 - x^2 + x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 8\pi. \end{aligned}$$

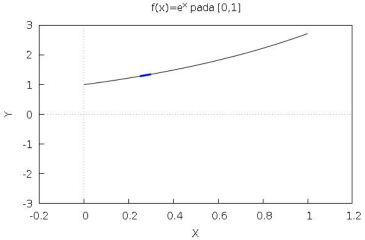
Contoh Soal

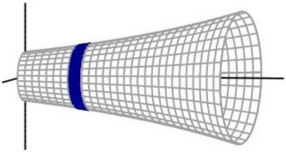
3. Tentukan luas permukaan yang dibentuk dengan memutar kurva $y = e^x$ pada $0 \leq x \leq 1$ terhadap sumbu X!
   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan luas permukaan yang dibentuk dengan memutar kurva $y = e^x$ pada $0 \leq x \leq 1$ terhadap sumbu X!

Jawab:





Karena $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$. Sehingga

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \text{ (dengan } u = e^x) \\
&= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta \;\; d\theta \text{ (dengan } u = \tan\theta \text{ dan } \alpha = \tan^{-1} e) \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\sec\theta \cdot \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \\
&= \pi \left[\sec\alpha \cdot \tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right].
\end{aligned}$$

Karena $\tan\alpha = e$, maka diperoleh

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$$

dan

$$\begin{aligned} A &= \pi\left[\sec\alpha\cdot\tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right] \\ &= \pi\left[e\sqrt{1+e^2} + \ln(e + \sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right]. \end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = e^{-x^2}$ mengelilingi sumbu X pada $-1 \leq x \leq 1$!
   Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = e^{-x^2}$ mengelilingi sumbu X pada $-1 \leq x \leq 1$!
Jawab:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} 2\pi e^{-x^2} \sqrt{1 + 4x^2 e^{-2x^2}}\, dx \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

Contoh Soal

5. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $x = y + y^3$ mengelilingi sumbu X pada $0 \leq y \leq 1$!
   Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $x = y + y^3$ mengelilingi sumbu X pada $0 \leq y \leq 1$!
Jawab:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + (1 + 3y^2)^2}\, dy \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

Contoh Soal

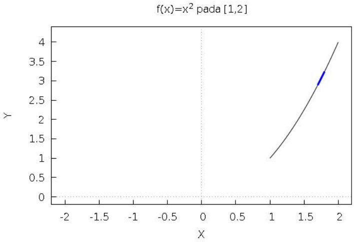
6. Sisi lengkung parabola $y = x^2$ dari titik $(1, 1)$ ke titik $(2, 4)$ diputar terhadap sumbu Y. Tentukan luas permukaan yang dihasilkan!

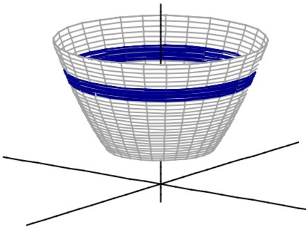
   Jawab:

Contoh Soal

6. Sisi lengkung parabola $y = x^2$ dari titik $(1, 1)$ ke titik $(2, 4)$ diputar terhadap sumbu Y. Tentukan luas permukaan yang dihasilkan!

Jawab:





Gunakan

$$y = x^2 \text{ dan } \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Lalu diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \int 2\pi x \, ds \\ &= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \\ &= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+4x^2} \, dx. \end{aligned}$$

Subtitusikan $u = 1 + 4x^2$, diperoleh $du = 8x\,dx$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_5^{17} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}\;du \\
&= \frac{\pi}{4}\int_5^{17} u^{1/2}\;du \\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Cara lain untuk menghitung luas permukaan benda putar ini, adalah dengan menggunakan

$$x = \sqrt{y} \text{ dan } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Cara lain untuk menghitung luas permukaan benda putar ini, adalah dengan menggunakan

$$x = \sqrt{y} \text{ dan } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
A &= \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y + \frac{1}{4}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \text{ (karena } u = 1 + 4y) \\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

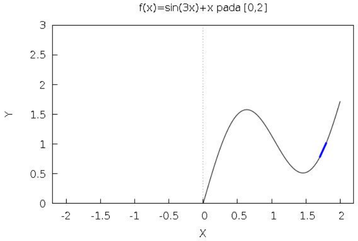
Contoh Soal

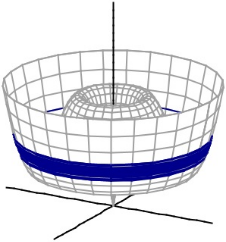
7. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $f(x) = \sin 3x + x$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq x \leq 2$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $f(x) = \sin 3x + x$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq x \leq 2$!

Jawab:





Lalu tulis $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Perhatikan bahwa setiap cincin memiliki radius x, sehingga panjang dA adalah $2\pi x$. Diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \int dA \\ &= \int_0^2 2\pi x \sqrt{(3\cos(3x) + 1)^2 + 1}\, dx \\ &\approx 27,2. \end{aligned}$$

Contoh Soal

8. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = e^{-x^2}$ mengelilingi sumbu Y pada $-1 \leq x \leq 1$!
   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = e^{-x^2}$ mengelilingi sumbu Y pada $-1 \leq x \leq 1$!
   Jawab:

$$A = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2 e^{-2x^2}}\, dx$$
$$= \cdots .$$

Contoh Soal

9. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $x = y + y^3$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq y \leq 1$!
   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $x = y + y^3$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq y \leq 1$!
Jawab:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2\pi(y + y^3)\sqrt{1 + (1 + 3y^2)^2}\, dy \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

Contoh Soal

10. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = \frac{1}{3}x^{3/2}$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq x \leq 12$!
    Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan luas permukaan yang diperoleh dengan memutar $y = \frac{1}{3}x^{3/2}$ mengelilingi sumbu Y pada $0 \leq x \leq 12$!
Jawab:

$$A = \frac{3712}{15}\pi.$$