ALJABAR LINEAR

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA – UHO

“SISTEM PERSAMAAN LINEAR”

(Dr. Arman, S.Si., M.Si)

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Pengertian Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah suatu sistem persamaan yang peubah-peubahnya atau variabel-variabelnya berpangkat satu. Sistem persamaan linear dapat terdiri dari dua atau lebih variabel.

Bentuk umum dari sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$$

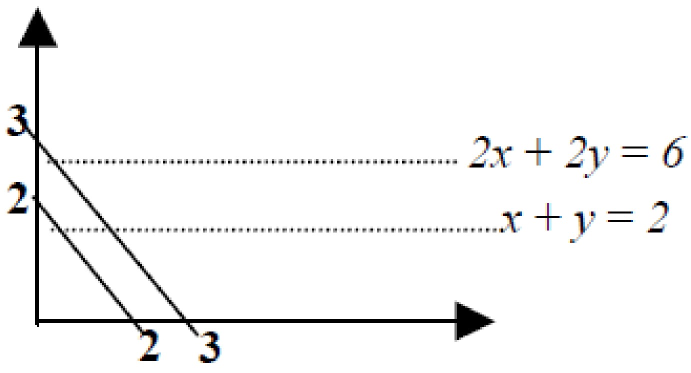
dengan a, b, c *dan* $k \in R$

Tidak semua sistem persamaaan linear memiliki penyelesaian(solusi) , sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada diagram berikut ·

$$SPL\begin{cases} \textit{Tidak memiliki penyelesaian}\,(\textit{tidak konsisten}) \\ \textit{memiliki penyelesaian}\,(\textit{konsisten})\begin{cases} \textit{solusi tunggal} \\ \textit{solusi banyak} \end{cases} \end{cases}$$

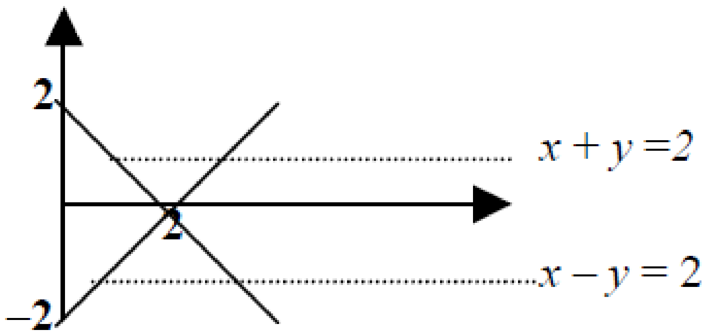
Pada sistem persamaaan linear dengan dua peubah, secara geometris jika SPL tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar, jika penyelesaiannya tunggal maka himpunan penyelesaiannya berupa sebuah titik hasil perpotongan dua garis sedangkan jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit.

a. $x + y = 2$, Grafiknya :
$2x + 2y = 6$



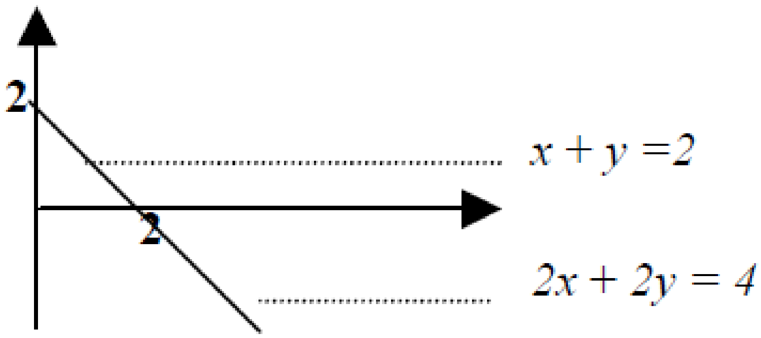
Grafik tersebut menunjukkan bahwa kedua garis sejajar sehingga tidak penyelesaian yang memenuhi sehingga disimpulkan bahwa SPL tidak konsisten.

b. $x - y = 2$, Grafiknya :
$x + y = 2$



Grafik tersebut menunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari SPL adalah titik potong antara $x - y = 2$ dan $x + y = 2$ yaitu titik (2,0). Jadi penyelesaian dari SPL adalah tunggal yaitu $x = 2$ dan $y = 0$.

c. $x + y = 2$, Grafiknya :
$2x + 2y = 4$



Grafik diatas bahwa $x + y = 2$ dan $2x + 2y = 4$ saling berhimpit sehingga hanya terlihat seperti satu garis saja. Himpunan penyelesaian dari SPL semua titik yang terletak disepanjang garis tersebut. Misalkan diambil x = 0 maka didapatkan y = 2 yang memenuhi persamaan, jika x = 1 maka nilai y = 1 adalah nilai yang memenuhi . Secara matematis dapat dituliskan sebagai : $\{ (x,y) \mid x = 2 - y , x \in R , y \in R \}$

Dalam sistem persamaan linear besarnya variabel yang belum diketahui bisa dicari dengan syarat banyaknya variabel yang belum diketahui harus sama dengan jumlah persamaan linearnya.

Sehingga sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah bilangan yang belum diketahui bisa diselesaikan dengan berbagai metode seperti: metode grafik, metode eleminasi, metode substitusi, metode eleminasi Gauss, metode operasi baris elemen, metode Cramer (determinan) dan metode invers.

Pada pembahasan kali ini kita akan menggunakan empat metode untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear yaitu metode eleminasi Gauss, metode operasi baris elemen, metode Cramer (determinan) dan metode invers matriks.

Metode Eliminasi Gauss

Metode ini lebih dikenal dengan metode substitusi balik (back substitution). Metode ini memecahkan sistem persamaan linear dengan mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris.

Sehingga langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode eleminasi Gauss adalah:

e) Rubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar.
f) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks segi tiga atas atau matriks segitiga bawah.
g) Kembalikan dalam bentuk matriks.
h) Kembalikan ke dalam bentuk sistem persamaan linear.
i) Substitusikan nilai variabel yang telah didapat ke persamaan liniar yang lainnya.

Contoh:

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Langkah:

a) Rubah dalam bentuk matriks yang diperbesar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 2 & 4 & -3 & : & 1 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix}$$

b) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks segi tiga atas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 2 & 4 & -3 & : & 1 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & -7 & : & -17 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & -7 & : & -17 \\ 0 & 3 & -11 & : & -27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & : & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & : & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

c) Kembalikan dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -17/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Kembalikan dalam bentuk sistem persamaan linear.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - 7/2z &= -17/2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

e) Substitusikan nilai variabel yang telah didapat ke persamaan linear yang lainnya.

Dengan mensubstitusikan nilai $z = 3$ maka nilai $y = 2$ dan $x = 1$

Jadi solusi SPL:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

adalah

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

Metode Operasi Baris Elemen (Eliminasi Gauss-Jordan)

Metode ini agak mirip dengan metode eleminasi Gauss, namun transpormasi pada baris dan kolom sampai terbentuk matriks identitas.

Sehingga langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode operasi baris elemen adalah:

a) Rubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar.
b) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks identitas.
c) Kembalikan dalam bentuk matriks.
d) Kembalikan ke dalam bentuk sistem persamaan linear.
e) Tentukan nilai variabel.

Contoh:

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

Langkah:

a) Rubah dalam bentuk matriks yang diperbesar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 2 & 4 & -3 & : & 1 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix}$$

b) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks identitas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 2 & 4 & -3 & : & 1 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & -7 & : & -17 \\ 3 & 6 & -5 & : & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & -7 & : & -17 \\ 0 & 3 & -11 & : & -27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & : & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & : & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & : & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & : & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & : & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{7}{2} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & : & 35/2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{11}{2} R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

c) Kembalikan dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Kembalikan dalam bentuk sistem persamaan linear.

x = 1

y = 2

z = 3

Contoh

Selesaikan SPL berikut dengan mennggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 1 \\
2x + 5y + 3z &= 6 \\
x + 8z &= -6
\end{aligned}
$$

Silakan kerjakan sebagai Latihan Mandiri !!

Metode Cramer

Metode ini sering disebut dengan metode determinan. Metode ini bisa dipergunakan untuk mencari variabel yang belum diketahui dalam sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui.

Misal:

Sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 = k_1$$
$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 = k_2$$
$$a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 = k_3$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X \qquad B$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \qquad \text{dan} \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

Dengan:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}$$

Sehingga untuk sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui, dengan metode Cramer dapat di dirumuskan:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$ dengan $i = 1,2,3, \ldots\ldots\ldots, n$

Contoh :

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

1. $2x + 3y = 28$

   $3y + 4z = 46$

   $4z + 5x = 53$

Jawab:

1. $2x + 3y = 28$

   $3y + 4z = 46$

   $4z + 5x = 53$

Sempurnakan sistem persamaan linearnya:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + 0 &= 28 \\
0 + 3y + 4z &= 46 \\
5x + 0 + 4z &= 53
\end{aligned}
$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 28 \\ 46 \\ 53 \end{bmatrix}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (24 + 60 + 0) - (0 + 0 + 0) = 84$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 28 & 3 & 0 \\ 46 & 3 & 4 \\ 53 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (336 + 636 + 0) - (0 + 0 + 552) = 420$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 0 \\ 0 & 46 & 4 \\ 5 & 53 & 4 \end{vmatrix} = (368 + 560 + 0) - (0 + 424 + 0) = 504$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 3 & 46 \\ 5 & 0 & 53 \end{vmatrix} = (318 + 690 + 0) - (420 + 0 + 0) = 558$$

Maka :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{420}{84} = 5$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{504}{84} = 6$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{558}{84} = 7$$

Metode Invers Matriks

Metode ini bisa dipergunakan untuk mencari variabel yang belum diketahui dalam sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui.

Misal:

Sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 &= k_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 &= k_2 \\
a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 &= k_3
\end{aligned}
$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dikalikan dengan invers matrik A, maka:

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Contoh :

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2x + 4y - 3z &= 1 \\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Sehingga: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 - 17 + 0 \\ -9 + 11 + 0 \\ 0 + 3 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

TUGAS IV:

Diberikan sistem persamaan linear seperti berikut:

$$
\begin{aligned}
4w - 2x + 3y + 5z &= 25 \\
w - 3y + z &= 14 \\
9w + 10x + 2y + 8z &= 101 \\
4w + 2x - 3y + 5z &= 53
\end{aligned}
$$

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode:

a. Metode Eliminasi Gauss

b. Metode opersai baris elementer tereduksi (Eliminasi Gauss-Jordan)

c. Metode Crammer

d. Metode rumus invers