

ALJABAR LINEAR

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA UHO

“PERKALIAN MATRIKS, TRANSPOSE DAN OPERASI BARIS/KOLOM ELEMENTER”

Dr. Arman, S.Si., M.Si.

Perkalian Matriks dengan Matriks

Syarat perkalian matriks dengan matriks adalah sebuah matriks A dan matriks B dapat dikalikan apabila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Misalnya ordo matriks 2 x 2 dikalikan dengan ordo matriks 2 x 3. Dimana jumlah kolom matriks A yaitu 2 sama dengan jumlah baris matriks B yaitu 2, sehingga kedua matriks tersebut dapat dikalikan.

Misal :

$$A = \begin{bmatrix} w & y \\ x & z \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} e & g & i \\ f & h & j \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} w & y \\ x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & g & i \\ f & h & j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} we + yf & wg + yh & wi + yj \\ xe + zf & xg + zh & xi + zj \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh:

1. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a) AC

b) BD

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a) } AC &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3x-1) + (2x6) & (-3x7) + (2x9) \\ (1x-1) + (-4x6) & (1x7) + (-4x9) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 12 & -21 + 18 \\ -1 - 24 & 7 - 36 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ -25 & -29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b) } BD = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1x-4) + (7x2) & (-1x1) + (7x-4) & (-1x6) + (7x1) \\ (6x-4) + (4x2) & (6x1) + (4x-4) & (6x6) + (4x1) \\ (3x-4) + (2x2) & (3x1) + (2x-4) & (3x6) + (2x1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 14 & -1 - 28 & -6 + 7 \\ -24 + 8 & 6 - 16 & 36 + 4 \\ -12 + 4 & 3 - 8 & 18 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -29 & 1 \\ 16 & -10 & 40 \\ -8 & -5 & 20 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a) AC

b) $A(BC)$

c) AB

d) $C(AB)$

$$\begin{aligned}
 \text{a) AC} &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (2 \times 3) + (-4 \times -1) & (2 \times -2) + (-4 \times 5) \\ (1 \times 3) + (3 \times -1) & (1 \times -2) + (3 \times 5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 + 4 & -4 - 20 \\ 3 - 3 & -2 + 15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10 & -24 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } A(BC) &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4x3) + (0x-1) & (4x-2) + (0x5) \\ (-2x3) + (5x-1) & (-2x-2) + (5x5) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12+0 & -8+0 \\ -6-5 & 4+25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -11 & 29 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2x12) + (-4x-11) & (2x-8) + (-4x29) \\ (1x12) + (3x-11) & (1x-8) + (3x29) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 24+44 & -16-116 \\ 12-33 & -8+87 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 68 & -132 \\ -21 & 79 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } AB &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (2 \times 4) + (-4 \times -2) & (2 \times 0) + (-4 \times 5) \\ (1 \times 4) + (3 \times -2) & (1 \times 0) + (3 \times 5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8 + 8 & 0 - 20 \\ 4 - 6 & 0 + 15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 16 & -20 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } C(AB) &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2 \times 4) + (-4 \times -2) & (2 \times 0) + (-4 \times 5) \\ (1 \times 4) + (3 \times -2) & (1 \times 0) + (3 \times 5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -20 \\ -2 & 15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (3 \times 16) + (-2 \times -2) & (3 \times -20) + (-2 \times 15) \\ (-1 \times 16) + (5 \times -2) & (-1 \times -20) + (5 \times 15) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 48 + 4 & -60 - 30 \\ -16 - 10 & 20 + 75 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 52 & -90 \\ -26 & 95 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Transpose Matriks

Transpose matriks A adalah perpindahan antara baris menjadi kolom atau kolom menjadi baris. Dengan kata lain, matriks yang diperoleh dari matriks A dengan cara menukarkan elemen – elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen – elemen pada kolom menjadi baris. Dimana Transpose matriks A dinyatakan dengan symbol A^T .

Beberapa sifat dari matriks transpose adalah sebagai berikut:

- a. $(A + B)^T = A^T + B^T$
- b. $(AB)^T = A^T B^T$
- c. $k(A)^T = (kA)^T$
- d. $(A^T)^T = A$

Contoh:

1) Diketahui matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } B = \begin{bmatrix} 1/2 & 9 & 7 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a) A^T

d) $(AB)^T$

g) $2A^T$

b) B^T

e) $C^T \times A$

h) $1/3 (AB)^T$

c) C^T

f) $B^T \times A^T$

i) $-1/2 C^T$

Jawab:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 9 & 7 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \text{ maka } B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 9 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka } C^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$d) (AB)^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 9 & 7 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-1 \times \frac{1}{2}\right) + (3 \times 2) & (-1 \times 9) + (3 \times -8) & (-1 \times 7) + (3 \times 0) \\ \left(7 \times \frac{1}{2}\right) + (2 \times 2) & (7 \times 9) + (2 \times -8) & (7 \times 7) + (2 \times 0) \\ \left(5 \times \frac{1}{2}\right) + (-4 \times 2) & (5 \times 9) + (-4 \times -8) & (5 \times 7) + (-4 \times 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 6 & -9 - 24 & -7 + 0 \\ \frac{7}{2} + 4 & 63 - 16 & 49 + 0 \\ \frac{5}{2} - 8 & 45 + 32 & 35 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -33 & -7 \\ \frac{15}{2} & 47 & 49 \\ -\frac{11}{2} & 77 & 35 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{11}{2} \\ -33 & 47 & 77 \\ -7 & 49 & 35 \end{bmatrix}$$

$$e) C^T \times A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 9 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4x-1) + (0x7) + (5x5) & (4x3) + (0x2) + (5x-4) \\ (3x-1) + \left(-\frac{1}{3}x7\right) + (2x5) & (3x3) + \left(-\frac{1}{3}x2\right) + (2x4) \\ \left(\frac{1}{2}x-1\right) + (9x7) + (7x5) & \left(\frac{1}{2}x3\right) + (9x2) + (7x-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 + 0 + 25 & 12 + 0 - 20 \\ -3 - \frac{7}{3} + 10 & 9 - \frac{2}{3} + 8 \\ -\frac{1}{2} + 63 + 35 & \frac{3}{2} + 18 - 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -8 \\ -\frac{14}{3} & \frac{49}{3} \\ \frac{195}{2} & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

Transformasi (Operasi) Elementer Baris dan Kolom Suatu Matriks

Transformasi elementer baris dan kolom adalah sebagai berikut:

- a. Penukaran tempat antara baris ke-i dengan baris ke-j atau pertukaran kolom ke-i dan kolom ke-j. Dimana $H_{ij}(A)$ untuk transformasi baris dan $K_{ij}(A)$ untuk transformasi kolom.

Contoh:

1) Pertukaran Baris:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1/3 & 0 & 9 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka } H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$$

H_{12} adalah perpindahan baris pertama menjadi baris kedua.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2/5 & 1 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \text{ maka } H_{31}(A) = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 2/5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

H_{31} adalah perpindahan baris ketiga menjadi baris pertama.

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 8 & 6 \\ 9 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } H_{32}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 9 & -4 & 1 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

H_{32} adalah perpindahan baris ketiga menjadi baris kedua.

2) Pertukaran Kolom:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1/3 & 0 & 9 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka } K_{23} (A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1/3 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

K_{23} adalah perpindahan kolom kedua menjadi kolom ketiga.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1/3 & 0 & 9 \\ 2 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka } K_{13} (A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 1/3 \\ 4 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

K_{13} adalah perpindahan kolom pertama menjadi kolom ketiga dan kolom ketiga menjadi kolom pertama.

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1/3 & 3 \\ 9 & 1/5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka } K_{21} (A) = \begin{bmatrix} 3 & 1/3 \\ 1/5 & 9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

K_{21} adalah perpindahan kolom kedua menjadi kolom pertama dan kolom pertama menjadi kolom kedua.