ALJABAR LINEAR

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

(Dr. Arman, S.Si., M.Si.)

OPERASI ALJABAR PADA MATRIKS

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).

OPERASI PENJUMLAHAN

Operasi penjumlahan dapat dilakukan pada dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama.

Aturan penjumlahan

Dengan menjumlahkan elemen – elemen yang bersesuaian pada kedua matriks

Contoh:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & -1+1 \\ 3+(-4) & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh lagi:

Diberikan matriks A dan P berikut:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 2x+2y & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathrm{P}=\begin{bmatrix} 4y & z \\ 3y+3 & -5 \end{bmatrix}$$

Jika A + P = O, tentukan nilai x, y, dan z.

Contoh lagi:

Diberikan matriks A dan P berikut:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 2x+2y & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathrm{P}=\begin{bmatrix} 4y & z \\ 3y+3 & -5 \end{bmatrix}$$

Jika A + P = O, tentukan nilai x, y, dan z.

Jawaban:

A+P=O dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 2x+2y & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4y & z \\ 3y+3 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+4y & 3+z \\ 2x+5y+3 & 5+(-5) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menurut kesamaan matriks, dari bentuk di atas dapat kita peroleh

2x + 4y = 0

3 + z = 0

2x + 5y + 3 = 0

Menurut kesamaan matriks, dari bentuk di atas dapat kita peroleh

$2x + 4y = 0$

$3 + z = 0$

$2x + 5y + 3 = 0$

Nilai yang pertama dapat diperoleh adalah nilai z karena hanya memuat 1 peubah.

$3 + z = 0$; $z = -3$

Untuk dua peubah lagi, yaitu x dan y bisa kita selesaikan dengan substitusi/eliminasi.

$2x + 4y = 0$

$2x = -4y$

$x = -2y$ (substitusi ke $2x + 5y + 3 = 0$)

$2(-2y) + 5y + 3 = 0$; $-4y + 5y = -3$; $y = -3$ (subsitusi ke $x = -2y$)

$x = -2(-3) = 6$

Jadi, nilai $x = 6$, nilai $y = -3$, dan nilai $z = -3$

Sifat-sifat Penjumlahan/Penguranagn Matriks

Sifat-Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Untuk setiap matriks A, B, dan C yang berordo sama berlaku:

1. $A + B = B + A$ (sifat komutatif)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (sifat asosiatif)
3. $A + O = O + A = A$ (sifat matriks nol/identitas)
4. $A + B = O \leftrightarrow B = -A$
5. $A - B = A + (-B)$

Perkalian Matriks dengan Skalar

Untuk Rumus Perkalian Skalar Matriks dilakukan dengan cara konstanta yang artinya nilai matriks bisa dikalikan dengan cara mengalikan setiap elemen atau komponen nilai matriks dengan skalar. Misalnya nilai Matriks A dikalikan dg skalar K maka setiap elemen atau komponen Matriks A dikali dengan K.

$$k \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Contoh soal:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Operasi Perkalian Dua Matriks

Seperti yang telah disinggung sebelumnya, syarat dua buah matriks dapat dikalikan jika memiliki jumlah kolom matriks pertama yang sama dengan jumlah baris matriks ke dua. Ordo matriks hasil perkalian dua matriks adalah jumlah baris pertama dikali jumlah kolom ke dua.

Matriks A memiliki jumlah kolom sebanyak m dan jumlah baris r, matriks B memiliki jumlah kolom sebanyak r dan jumlah baris m, hasil perkalian matriks A dan B adalah matriks C dengan jumlah kolom m dan jumlah baris n.

$$\boxed{\mathbf{A}_{m\times r}\cdot\mathbf{B}_{r\times n}=\mathbf{C}_{m\times n}}$$

Contoh:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 2 + 12 & 6 + 6 \\ 5 + 8 & 15 + 4 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$$

TUGAS I

Kerjakan soal-soal berikut:

1. Diketahui matriks sebagai berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. Ordo [A]

b. Elemen-elemen pada kolom ketiga [A]

c. Nilai dari a_{21} dan a_{34}

TUGAS I

2. Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3p & 2 \\ 4 & -5q \end{bmatrix} \text{ dan } [B] = \begin{bmatrix} 4+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$$

Jika [A] =[B], tentukan nilai p + q

3. Diketahui kesamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai a + b + c

TUGAS I

4. Tentukan matriks transpose dari matrik-matrik berikut.

   a. $[D] = \begin{bmatrix} 5 & 2a & 3 \\ b & 2 & d \end{bmatrix}$

   b. $[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

5. Jika berlaku $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b+1 \\ 5 & d+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2+b \\ c & 4 \end{bmatrix}$, tentukan nilai a, b, c, dan d.

TUGAS I

6. Diketahui.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. 3[A]

b. [A] + 2[B]

c. 3[A] – [B]

d. 3[B] – 2[A]

TUGAS I

7. Diketahui.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $[A][B]$

b. $[A]^T$

c. $[B]^T$

d. $\{[A][B]\}^T$

e. $[B]^T [A]^T$