La Ode Muhammad Yudhy Prayitno

E1E122064

Tugas Pengganti UTS Metode Numerik

1. Tentukan hampiran fungsi di bawah ini ke dalam deret Taylor:
   a) ln(x) sampai orde-4 di sekitar x_0=1, lalu hampiri nilai ln(0.9).
   b) f(x) = e^x- 1 sampai orde-3 di sekitar x_0=0, Lalu hitung nilai f(0.0001)

   Jawab:

1. a. $f(x) = \ln(x)$ $\qquad f(x) = f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2}$ $\qquad f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3}$ $\qquad f'''(1) = 1$

$f^{iv}(x) = -6x^{-4}$ $\qquad f^{iv}(1) = -6$

• Subtitusi ke deret taylor :

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{iv}(c)}{4!}(x-c)^4 + \dots$$

$$\approx 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{(-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^2 + \frac{(-6)}{24}(x-1)^4 + \dots$$

$$\approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

• Untuk $x = 0,9$

$$\ln(0,9) = (0,9-1) - \frac{1}{2}(0,9-1)^2 + \frac{1}{3}(0,9-1)^3 - \frac{1}{4}(0,9-1)^4 + \dots$$

$$= -0,1 - \frac{1}{2}(-0,1)^2 + \frac{1}{3}(-0,1)^3 - \frac{1}{4}(-0,1)^4 + \dots$$

$$= -0,1 - \frac{1}{2}(0,01) + \frac{1}{3}(-0,001) - \frac{1}{4}(0,0001) + \dots$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{1000}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10000}\right) + \dots$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} - \frac{1}{3000} - \frac{1}{40.000}$$

$$= \frac{-12.000 - 600 - 40 - 3}{120.000}$$

$$= -\frac{12.643}{120.000} \approx -0,10535\dots //$$

Jadi nilai hampiran fungsi ln(x) dengan menggunakan deret taylor adalah:
ln(0.9) ≈ -0.1052708

b) $f(x) = e^x - 1$

b. $f(x) = e^x - 1$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = e^x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ $\qquad f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x$ $\qquad f'''(0) = 1$

- Subtitusi ke deret taylor :

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2 + \frac{1}{6}(x-0)^3$$

- Untuk $x = 0{,}0001$

$$f(0{,}0001) = 1(0{,}0001) + \frac{1}{2}(0{,}0001)^2 + \frac{1}{6}(0{,}0001)^3$$

$$= 0{,}0001 + 0{,}000\,000\,005 + 0{,}000\,000\,000\,000\,1667$$

$$\approx 0{,}000100005\,0001667$$

Jadi nilai hampiran fungsi $f(x) = e^x - 1$ dengan menggunakan deret taylor adalah:
f(0.0001) ≈ 0.000100005001667

2. Tentukan polinom Maclaurin orde 4 untuk $f(x) = \sin(2x)$, kemudian gunakan polinom tersebut untuk menghampiri nilai $f(0.23)$, serta tentukan batas atas (maksimum) galatnya.

   Jawab:

2. $f(x) = \sin 2x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = 2\cos 2x$ $\qquad f'(0) = 2$

$f''(x) = -4\sin 2x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -8\cos 2x$ $\qquad f'''(0) = -8$

$f^{iv}(x) = 16\sin 2x$ $\qquad f^{iv}(0) = 0$

- Subtitusi ke deret Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$= 0 + 2x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-8}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + R_4(x)$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + R_4(x)$$

- Untuk $x = 0{,}23$

$$f(0{,}23) = 2(0{,}23) - \frac{4}{3}(0{,}23)^3 + R_4(x)$$

$$= 0{,}46 - \frac{4}{3}(0{,}012167) + R_4(x)$$

$$= 0{,}46 - 0{,}016222666664 + R_4(0{,}23)$$

$$= 0{,}44377733333 + R_4(0{,}23)$$

- Batas maksimum galat

$$|R_n(x)| < \max_{x_0 < c < x} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

{untuk $f^{v}(c) = 32\cos 2(c)$}

$$\text{Jadi } R_4(0{,}23) < \max_{0{,}23 < c < 0} \left| \frac{f^{v}(c)\,(0{,}23 - 0)^5}{5!} \right|$$

$$= \frac{32\cos 2(0{,}23)\;(0{,}23)^5}{5!}$$

$$= \frac{32(0{,}89605249752)\,(0{,}0006436343)}{120}$$

$$\approx 0{,}00015379469$$

Jadi nilai hampiran sin(2x) atau sin(0,46) menggunakan deret maclaurin adalah:
Sekitar 0.44377733333 atau 0.44378

Dan atas galat maksimum adalah sekitar 0,00015379469

3. Hitunglah $\int_0^1 \sin(2x)\,dx$
   a) Secara analitik(Solusi sejati)
   b) Secara numerik, yang dalam hal ini sin(2*x*) dihampiri dengan deret Maclaurin yang telah anda dapatkan pada jawaban nomor 2

   Jawab:

3. $\int_0^1 \sin(2x)\,dx$

a. mis : $u = 2x$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$= \int_0^1 \sin u \,\frac{du}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin u \, du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + c$$

$$= \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^1 = \frac{-\cos(2)}{2} - \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-\cos 2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(-\cos(2) + 1)$$

Jadi, secara penyelesaian analitik (solusi sejati) hasilnya adalah:

$$\frac{1}{2}\left(-\cos(2) + 1\right)$$

b. Penyelesaian secara numerik:

b. $\int_0^1 2x - \frac{4}{3} x^3 \, dx$

$= \frac{2}{1+1} x^{1+1} - \frac{\frac{4}{3}}{3+1} x^{3+1}$

$= x^2 - \frac{4}{12} x^4$

$= x^2 - \frac{1}{3} x^4 \Big]_0^1$

$= \left(1^2 - \frac{1}{3} 1^4\right) - \left(0^2 - \frac{1}{3} 0^4\right)$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Jadi, penyelesaian secara numerik dari nilai sin(2x) yang dihampiri dengan deret maclaurin adalah:

$$\frac{3}{2}$$