ALJABAR LINEAR

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA– UHO

“INVERS MATRIKS”

INVERS MATRIKS

Pengertian Invers Matriks

Pada aljabar bilangan, kita telah mengenal bahwa jika suatu bilangan dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh unsur identitas. Begitu pula dalam matriks, jika suatu matriks apabila dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh matriks identitas. Supaya kita lebih memahami pernyataan tersebut, pelajari ilustrasi berikut.

Misalkan: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+6 \\ 12-12 & -8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena perkalian antara matriks A dengan matriks B menghasilkan matriks identitas I maka dapat kita simpulkan bahwa matriks A dan matriks B saling invers. Hal ini berarti matriks B merupakan matriks invers dari matriks A ditulis $B = A^{-1}$ atau sebaliknya matriks A merupakan matriks invers dari matriks B ditulis $A = B^{-1}$

Menentukan Invers Matriks

Sebelum kita mempelajari invers matriks ada konsep yang harus kita pahami terlebih dahulu yaitu matriks minor, matriks kofaktor dan adjoin matriks.

Matriks Minor

Misalkan diketahui suatu matriks A sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Di bab 2 kita sudah mempelajari cara mencari minor suatu matriks. Sehingga matriks minor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & . & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & . & M_{2n} \\ . & . & . & . \\ M_{m1} & M_{m2} & . & M_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks Kofaktor

Jika M_{ij} merupakan minor ke-ij dari matriks A maka kofaktor (K_{ij}) adalah hasil perkalian $(-1)^{i+j}$ dengan elemen minor M_{ij}.

Dengan demikian, $K_{ij} = (-1)^{i+j} . Mij$

Sehingga matriks kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & . & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & . & K_{2n} \\ . & . & . & . \\ K_{m1} & K_{m2} & . & K_{mn} \end{bmatrix}$$

Adjoin Matriks

Jika matriks kofaktor dari matriks A tersebut di transposkan, maka didapat matriks baru yang disebut sebagai adjoin matriks A.

Sehingga adjoin matriks A adalah sebagai berikut:

$$\text{Adj }[A] = [K]^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & . & K_{m1} \\ K_{12} & K_{22} & . & K_{m2} \\ . & . & . & . \\ K_{1n} & K_{2n} & . & K_{mn} \end{bmatrix}$$

Setelah kita mempelajari matriks minor, matriks kofaktor dan adjoin matriks, mari kita sekarang menentukan invers matriks. Invers matriks dapat ditentukan dengan cara:

1. **Dengan rumus yaitu:**

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } [A]}{|A|}$$

Contoh:

Tentukan invers matriks dibawah:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad [A^{-1}] = \frac{\text{adj}\,[A]}{|A|}$$

Dimana:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\,[A] = [K^T] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 8 = 1$$

Sehingga:

$$[A^{-1}] = \frac{adj\,[A]}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \dfrac{\text{adj } [B]}{|B|}$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -17 & -11 & 3 \\ -11 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 17 & -11 & -3 \\ -11 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } [B] = [K]^T = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -11 \\ 1 & -11 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (-20 - 9 + 24) - (24 - 18 - 10)$$

$$= (-5) - (-4)$$

Sehingga: $B^{-1} = \dfrac{\text{adj } [B]}{|B|} = \dfrac{\begin{bmatrix} -2 & 17 & -11 \\ 1 & -11 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$