Linguagens e Ambientes de Programação (Aula Teórica 6)

LEI - Licenciatura em Engenharia Informática

João Costa Seco (joao.seco@fct.unl.pt)

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Agenda

- Funções recursivas sobre números naturais.
- Pensamento indutivo vs. pensamento iterativo.
- Tipos estruturados: produtos e registos.

Funções recursivas

- A recursão é um mecanismo que permite definir uma entidade (função, tipo, classe, etc.), usando na sua definição o seu próprio nome.

```
let rec x = e1 in e2
```

```
class Node<T> {
    T value;
    Node<T> next;
}
```

- A recursão é um mecanismo que permite instanciar o mesmo código (função) mais que uma vez no mesmo traço de execução, com valores potencialmente diferentes para os parâmetros.

Funções recursivas

- As linguagens funcionais utilizam a recursão como meio básico para iterar.

```
let rec loop () = read_int () |> print_int; print_endline; loop ()
```

- A utilização recursiva de um nome tem que estar sempre “guardada” pela definição de uma função.

Execução baseada numa pilha

- A chamada de funções é baseada numa pilha, onde são guardados os valores dos parâmetros para cada chamada e as variáveis locais correspondentes.
- Cada chamada ocupa espaço em memória.

```
utop # count 100000;;
- : int = 100000
```

```
let rec sum n =
    if n = 0
        then 0
        else n + sum(n-1)
```

```
utop # count 1000000;;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).
```

```
utop # sum 10;;
sum <-- 10
sum <-- 9
sum <-- 8
sum <-- 7
sum <-- 6
sum <-- 5
sum <-- 4
sum <-- 3
sum <-- 2
sum <-- 1
sum <-- 0
sum --> 0
sum --> 1
sum --> 3
sum --> 6
sum --> 10
sum --> 15
sum --> 21
sum --> 28
sum --> 36
sum --> 45
sum --> 55
- : int = 55
```

Execução baseada numa pilha

- A chamada de funções é baseada numa pilha, onde são guardados os valores dos parâmetros para cada chamada e as variáveis locais correspondentes.
- Cada chamada ocupa espaço em memória.

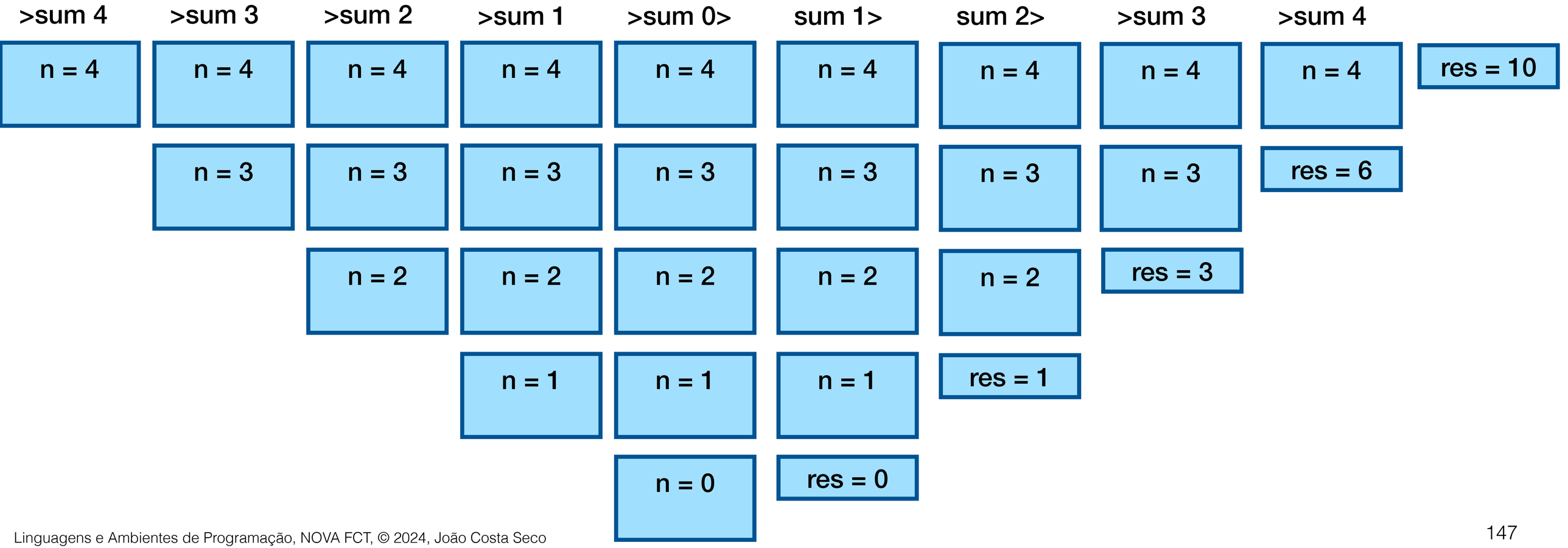
```java
class Main {
    static int count(int n) {
        if (n == 0) {
            return 0;
        }
        return 1+count(n-1);
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(count(20000));
    }
}
```

```
jcs@joaos-imac lap2024 % java Main | more
Exception in thread "main" java.lang.StackOverflowError
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
        at Main.count(A.java:8)
```

A pilha de execução e as chamadas de função

- Quando uma função tem alguma computação para fazer entre a chamada recursiva e o final, e devolver o resultado, então precisa de manter todos os registos de ativação.



“Tail recursion”

- A mesma função pode ser

```
let rec sum n =
    if n = 0
        then 0
        else n + sum(n-1)
```

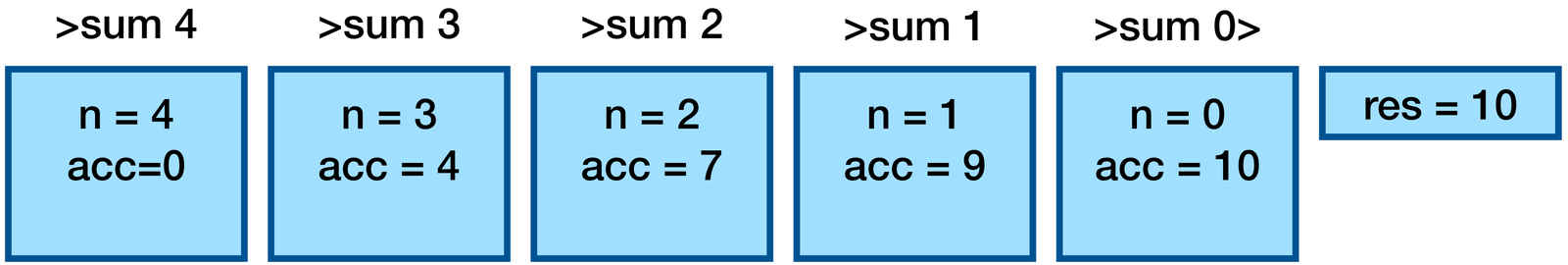
```
let sum n =
    let rec sum' n acc =
        if n = 0
            then acc
            else sum' (n-1) (n+acc)
    in sum' n 0
```

```
utop # count 1000000;;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).
```

```
utop # sum 1000000;;
- : int = 500000500000
```

“Tail recursion” e a pilha de execução

- Se a chamada recursiva é a ultima coisa a fazer na função, o registo de ativação pode ser reutilizado porque as variáveis locais não vão ser precisas depois de retornar e o resultado já está no sítio (topo da pilha).



Funções indutivas nos números naturais (correção)

- Funções recursivas podem seguir um raciocínio indutivo para chegar ao resultado. É possível provar a sua correção através de uma hipótese de indução.

```
(** [sum n] is the sum of the first [n] positive integers
    requires: [n >= 0] *)
let rec sum n =
    if n = 0
        then 0                  (* base case: sum 0 = 0 *)
        else n + sum(n-1)       (* inductive case: sum n = n + sum(n-1) *)
```

Funções indutivas nos números naturais (tail recursion)

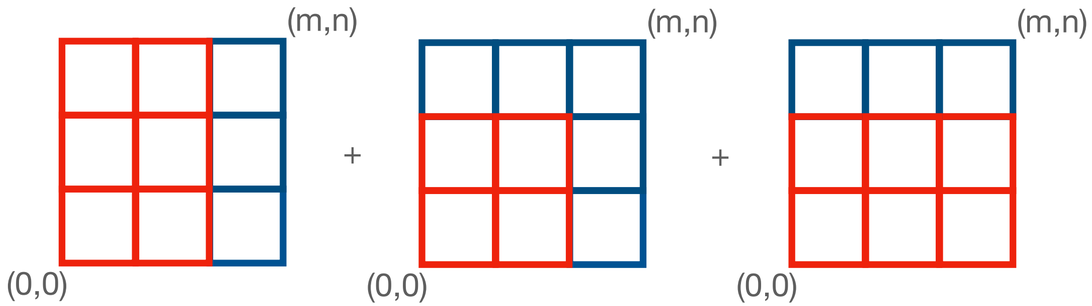
- Funções recursivas podem seguir um raciocínio indutivo para chegar ao resultado. É possível provar a sua correção através de uma hipótese de indução.

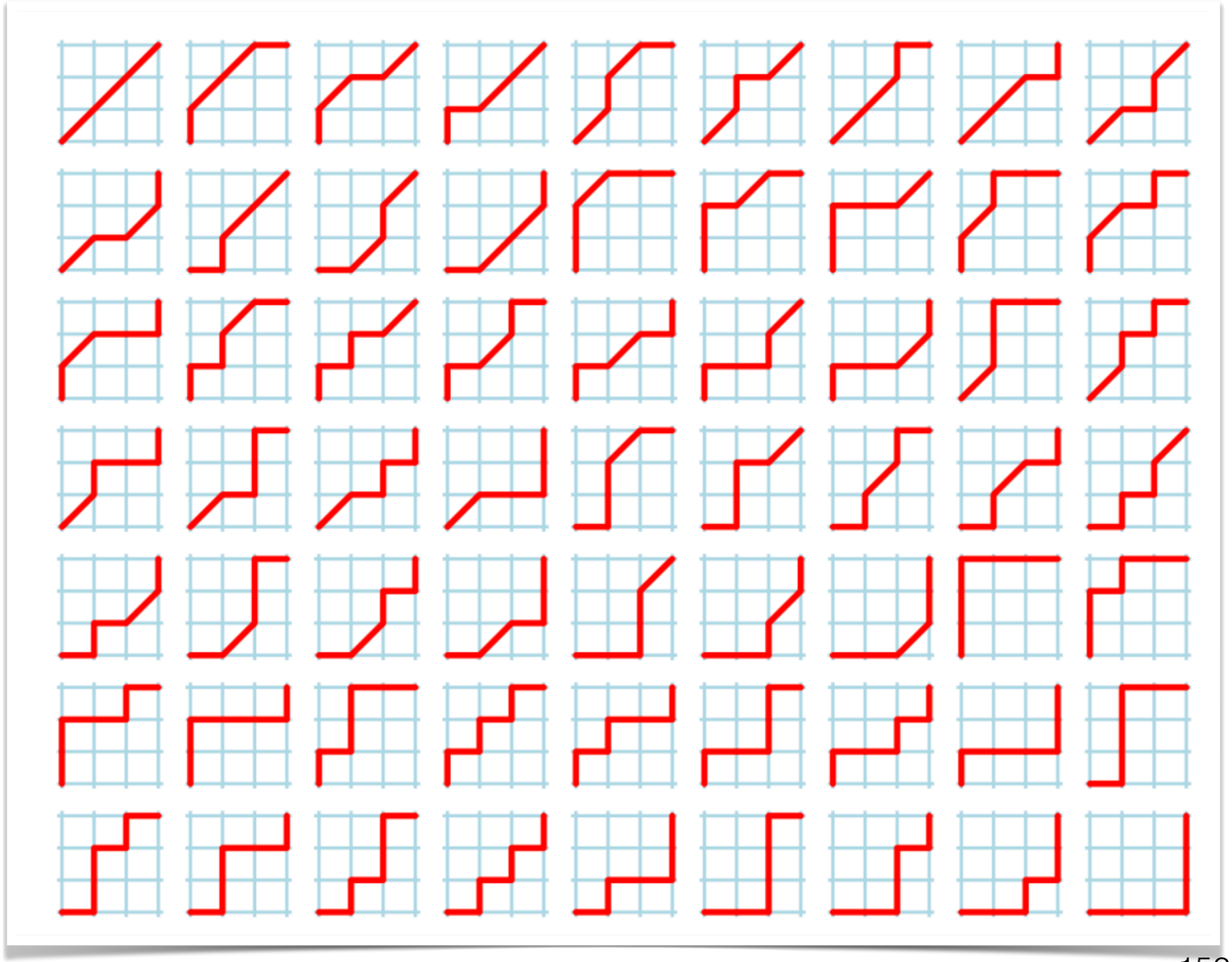
```
let sum m =
    let rec sum' n acc =              (* post-condition: sum' n acc = sum m && acc = (sum m) - (sum n) *)
        if n = 0
            then acc                  (* base case: sum' 0 acc = sum m && acc = (sum m) - (sum 0) *)
            else sum' (n-1) (n+acc)   (* inductive case: sum' (n-1) (n+acc) = sum m
                                                      && n+acc = (sum m) - (sum (n-1))
                                          ==>         acc = (sum m) - (n + sum (n-1))
                                          ==>         acc = (sum m) - (sum n). qed.          *)
    in sum' m 0                       (* conclusion: sum' m 0 = sum m && acc = (sum m) - (sum m) = 0 *)
```

Funções indutivas: o número de Delannoy

- Determine o número de caminhos que existem numa grelha de n por m, entre o ponto (0,0) e o ponto (m,n) usando passos de unidade 1 no sentido “norte”, “nordeste”, e “este”.

(0,0)
- 1

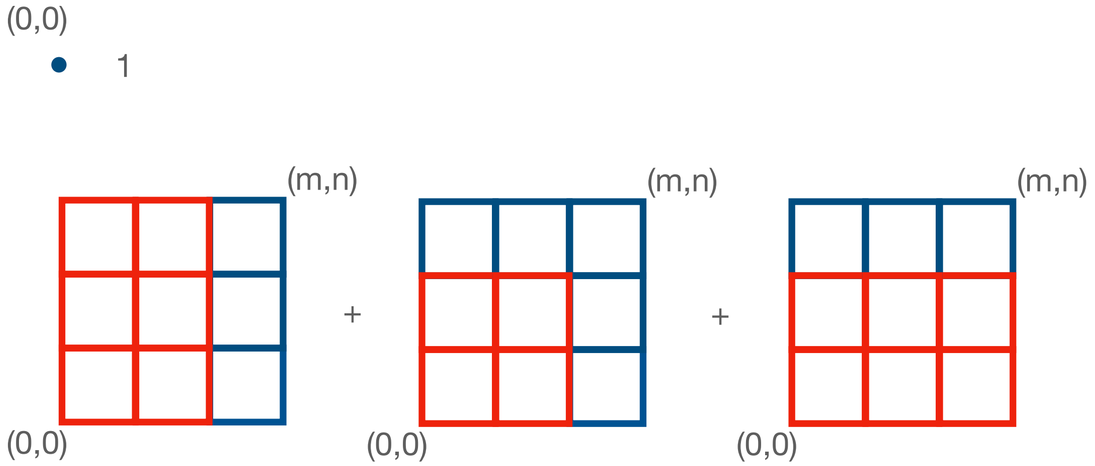




https://en.wikipedia.org/wiki/Delannoy_number

Funções indutivas: o número de Delannoy

- Determine o número de caminhos que existem numa grelha de n por m, entre o ponto (0,0) e o ponto (m,n) usando passos de unidade 1 no sentido “norte”, “nordeste”, e “este”.




```
let rec delannoy m n =
  if m = 0 || n = 0 then 1
  else delannoy (m-1) n + delannoy m (n-1) + delannoy (m-1) (n-1)
```

✓ 0.0s

```
val delannoy : int → int → int = <fun>
```