姿态估计的误差 EKF 实现

1.误差 EKF 介绍

误差状态 EKF 又三部分组成：预测、更新、修正。其状态变量为目标变量X的小扰动误差δx，预测时目标变量与其误差变量同步更新，观测更新时对估计误差进行更新，最终用更新的误差去修正目标变量$X_{n+1} = X_n + \delta x$。

乍看之下，这操作好像没什么意义，实则不然：目标变量可能建立在非欧几里得空间中，比如四元数 q，其建立在三维球面空间中，无法使用欧几里得空间中定义的加减法，也就没法实现卡尔曼滤波中的核心公式 $X_{n+1} = X_n + K(Z - h(x))$。而误差卡尔曼可以将误差变量建立在目标变量的切空间中，通过小扰动的一阶近似使得欧几里得空间性质近似成立。从而使卡尔曼滤波过程更准确也更具解释性。

下面分别对预测、更新、修正三大环节进行介绍，并在最后介绍对加速度的修正方式。

2.预测过程

本文的四元数采用右乘约定和哈密顿约定。选择四元数q为目标变量，其切空间的轴角表达式$\delta\theta$为误差变量，所以有：

$$q = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \qquad \delta\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

由四元数的动力学和运动学公式可以得到四元数的更新过程为：

$$q_{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}[\omega_q]_\times\right) q_n \tag{1}$$

切空间性质与四元数变换相同，但是处于 so(3)空间中，相应的q处于 SO(3)空间，所以有：

$$\delta\theta_{n+1} = (I + \Delta t[\omega]_\times)\delta\theta_n$$

其中：

$$[\omega_q]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\omega]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

两个角速度变换矩阵分别是在 SO(3)空间和 so(3)空间中，需要注意的是$[\omega_q]_\times$中的 skew 阵符号与$[\omega]_\times$正好相反。在实际操作中，我们只使用式(1)对四元数q进行预测，而对于其切空间误差$\delta\theta$，我们只预测其不确定度，记：

$$F = I + \Delta t[\omega]_\times \tag{2}$$

并设$\delta\theta$的不确定度为 3x3 的矩阵P，则有：

$$P_{n+1} = FP_nF^T + R_\omega \Delta t^2 + Q \tag{3}$$

其中R_ω为角速度测量的确定度；Q为过程不确定度，由主观选取。

所以，预测过程由公式(1)(3)给出，并结合(2)实现。

3.更新过程

更新环节根据加速度计测量的在体坐标系中的加速度a_m来更新估计误差$\delta\theta$，与一般卡尔曼不同的是：正常卡尔曼通过观测函数$h(q)$将将目标变量四元数q映射到观测空间，而此

处需要将观测函数$h(q)$表示为$h(\delta\theta)$的形式。

我们记真实状态的四元数为$\hat{q}$，误差$\delta\theta$所对应的小扰动四元数为δq，所以有：

$$\hat{q} = q * \delta q$$

我们知道，体坐标系测量的a_m是在真实姿态下测量的，所以它一定与重力加速度在$\hat{q}$对应的坐标系中相等：

$$a_m = R^T(\hat{q})g$$

其中$R(q)$表示q所对应的旋转矩阵。因为残差为q与$\hat{q}$的不相同导致的，所以残差表达式应为：

$$\begin{aligned} y &= R^T(\hat{q})g - R^T(q)g \\ &= a_m - R^T(q)g \end{aligned} \tag{4}$$

现在我们需要知道$h(q)$的雅可比的表达形式，以满足残差不确定度公式

$$S = HPH^T + R$$

上式中，P为$\delta\theta$的不确定度，为 3x3 矩阵在切空间中。所以 H 应该是应该 3x3 矩阵。且按照定义，$\delta\theta$本身就是δq的一阶近似，所以原卡尔曼中的$y = Z - h(q)$应可以写为该形式：

$$y = H\delta\theta \tag{5}$$

下面我们想办法将(4)式化为含$\delta\theta$的格式，考虑到：

$$a_m = R^T(\hat{q})g = R^T(q * \delta q)g = R^T(\delta q)R^T(q)g$$

所以有：

$$y = R^T(\delta q)R^T(q)g - R^T(q)g = [R^T(\delta q) - I]R^T(q)g$$

此处使用李代数右扰动形式的一阶展开：

$$R^T(\delta q) = I - \lfloor\delta\theta\rfloor$$

其中$\lfloor\cdot\rfloor$表示叉乘算子：$\lfloor a\rfloor = a\times$，带入上式得：

$$y = [I - \lfloor\delta\theta\rfloor - I]R^T(q)g = -\lfloor\delta\theta\rfloor R^T(q)g$$

根据恒等式$\lfloor a\rfloor b = -\lfloor b\rfloor a$得：

$$y = \lfloor R^T(q)g\rfloor\delta\theta$$

对比(5)式可得：

$$H = \lfloor R^T(q)g\rfloor \tag{6}$$

所以，残差协方差为：

$$S = HPH^T + R_a \tag{7}$$

下面操作和普通卡尔曼一样：

$$K = PH^TS^{-1} \tag{8}$$

$$P_n = (I - KH)P_{n-1} \tag{9}$$

不过状态更新需要改成如下形式，因为$\delta\theta$本身就是误差：

$$\delta\theta_n = Ky \tag{10}$$

公式(4)(7)(8)(9)(10)就是更新过程的公式，结合(6)使用。

4.修正过程

在有了更新后的误差（后验误差）$\delta\theta$后，需要使用其修正预测的q_{n-1}，通常情况下使用如下公式（注意四元数二倍覆盖）：

$$q_n = q_{n-1} * \exp\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)$$

但是为了计算简便，通常使用$\exp(\delta\theta)$的一阶近似：

$$\delta q = \exp(\delta\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

在实际使用过程中，加速度观测会导致偏航角 yaw 的变化，这是我们不希望的。我们只希望加速度修正倾斜角。我们得到的修正四元数δq它是右扰动形式，也就是说它是在q旋转的基础上再旋转一个δq，旋转作用发生在体坐标系中。所以先回到右乘四元数的原始定义：

$$q * \delta q = (q * \delta q * q^{-1}) * q$$

通过$(q * \delta q * q^{-1})$变换将δq映射为世界坐标系中的旋转δq_e：

$$\delta q_e = q * \delta q * q^{-1} \tag{12}$$

这样，我们将δq_e的第四个分量（z 轴分量）置零：

$$\delta q_e^{k=0} = \left(\delta q_{ew}, \delta q_{ei}, \delta q_{ej}, 0\right) \tag{13}$$

就消除了世界坐标系中绕 z 轴的旋转，也就是 yaw 角所定义的旋转，这样子就可以避免对 yaw 角的错误修正。最终使用$\delta q_e^{k=0}$左乘q修正（注意是左乘，因为$\delta q_e^{k=0}$是世界坐标系中的变换）即可得到修正后的q_n：

$$q_n = \delta q_e^{k=0} * q_{n-1} \tag{14}$$

公式(11)(12)(13)(14)结合就是 yaw 角无关的误差修正过程。

5.加速度干扰剔除

由于运动过程中合加速度往往与重力加速度不共线，所以直接使用测得的加速度a_m对姿态进行修正会严重干扰姿态估计的精确度（尤其是在进行大幅度机动的时候）。而角速度积分短时间内其实有较高的精度，所以需要防止加速度的错误修正。

此处介绍一套复合异常加速度剔除方法，读者也可以结合其他方法使用，但是所有的方法都只能缓解影响，不能根本解决。

5.1 门限剔除

这是异常加速度观测的第一步，当加速度模值没有落入门限时，直接拒绝该次观测结果：

$$if\ |a_m| \notin [9.2, 10.3] \implies reject\ a_m$$

5.2 马氏距离剔除

马氏距离衡量一个残差向量在其协方差定义的“环境”（即误差分布的尺度和方向）中，到底“偏离得有多远”，定义为：

$$D = y^T S y$$

其中y为残差，S为残差协方差。其为一个已经过标准化的无量纲值，服从 n 卡方分布。本文模型中的 n=3，采用 95%的置信度时可以得到如下剔除标准：

$$D > \chi(n = 3, p = 0.95) = 7.81 \implies reject\ a_m$$

5.3 模长及马氏距离动态调整协方差

加速度模值越大，认为其测量越不可靠，马氏距离越大，认为其越不可靠：

$$\lambda_1 = 1 + \alpha D$$

$$\lambda_2 = 1 + \beta(9.8 - |a_m|)^2$$

$$R_{ad} = \lambda_1 \lambda_2 R_a$$

其中α通常取 0.2-1，β取 10-100，R_{ad}为动态加速度不确定度，R_a为原始加速度不确定度，D 为马氏距离。