POLYTECH'LILLE
GIS4

PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

Un voyageur de commerce basé dans la ville v_0 doit se rendre dans m villes $v_1, \ldots, v_m$. Il connaît les distances entre toutes les villes et voudrait déterminer l'ordre dans lequel il doit les visiter dans le but de minimiser la distance totale parcourue.

Nous supposons dans un premier temps que les positions des $m+1$ villes sont tirées uniformément sur le carré $[0,1]^2$, et de manière indépendante. La distance (euclidienne) entre les villes v_i et v_j est notée $\delta(v_i, v_j)$. Soit $\sigma_0 = v_0$ et $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ une permutation de l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_m\}$: σ représente un chemin ou une façon pour le voyageur de commerce de visiter une et une seule fois chacune des m villes dans un ordre donné. Le problème du voyageur de commerce est de déterminer un chemin σ minimisant la distance totale parcourue :

$$H(\sigma) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta(\sigma_i, \sigma_{i+1}) + \delta(\sigma_m, \sigma_0)$$

(le voyageur de commerce doit retourner au point de départ !).

La recherche de la configuration optimale par énumération exhaustive de tous les chemins possibles est très vite impossible.

Question 1. Illustrer ce propos en programmant cette recherche exhaustive. Évaluer le temps de calcul nécessaire et la place mémoire nécessaire en fonction de m. Jusqu'à quelle valeur de m pouvez-vous aller dans un temps raisonnable ?

Les algorithmes d'optimisation stochastique, comme le recuit simulé, sont des algorithmes très efficaces pour résoudre ce genre de problèmes complexes.

Soit E l'ensemble des $m!$ permutations de $\{v_1, \ldots, v_m\}$. On appelle *mesure de Gibbs* associée à la fonction d'énergie H et à température $T > 0$, la loi de probabilité définie sur l'espace E par :

$$\mathbf{P}_T(\sigma) = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{1}{T} H(\sigma)},$$

où Z_T est simplement une constante de normalisation qui vaut

$$Z_T = \sum_{\sigma \in E} e^{-\frac{1}{T} H(\sigma)}.$$

La particularité de cette loi de probabilité est qu'elle se concentre, à basse température, sur les états d'énergie minimale. En effet, si on note $E_{\min}$ l'ensemble des éléments de E d'énergie minimale, i.e.

$$E_{\min} = \{\sigma \in E : \ H(\sigma) \leq H(\sigma') \ \ \forall \sigma' \in E\},$$

alors on a le résultat suivant :

$$\forall \sigma \in E, \quad \lim_{T \to 0^+} \mathbf{P}_T(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E_{\min})} \mathbb{1}_{E_{\min}(\sigma)}.$$

Ainsi, en revenant au problème du voyageur de commerce, il devient naturel pour minimiser l'énergie H qui correspond à la distance totale parcourue, de simuler la loi $\mathbf{P}_T$ pour une température T suffisamment basse. Les réalisations de cette loi devraient être proches des éléments de $E_{\min}$.

Malheureusement, il n'existe aucune formule explicite pour la constante de normalisation Z_T, rendant son calcul impossible lorsque $\mathrm{Card}(E)$ est grand. Il est donc impossible de simuler directement la mesure de probabilité $\mathbf{P}_T$. Un moyen indirect (et extrêmement astucieux) d'y parvenir est de faire appel à une méthode MCMC.

Question 2. En utilisant la démarche générale pour les mesures de Gibbs vue en cours, proposer une chaîne de Markov à espace d'états E dont la mesure stationnaire est exactement la loi de probabilité $\mathbf{P}_T$ (on peut utiliser la structure de graphe suivante : deux chemins sont *voisins* si on peut passer de l'un à l'autre en permutant deux villes). Implémenter un algorithme permettant de simuler (de manière approchée) $\mathbf{P}_T$.

Le choix de la température T est important. Lorsque la température T est élevée, la chaîne explore bien l'espace E (i.e. la chaîne saute souvent) mais ne reste pas sur les minima de l'énergie H. C'est exactement le contraire lorsque la température T est basse : l'exploration est très lente et la chaîne peut rester longtemps piégée dans un minimum local. L'*algorithme du recuit simulé* est un compromis entre ces deux comportements : on fait décroître lentement la température $T = T(n)$ en fonction du temps n. L'idée physique est qu'un refroidissement trop brutal peut bloquer le métal dans un état peu favorable, alors qu'un refroidissement lent permettra aux molécules de s'agencer au mieux dans une configuration stable.

Attention, une température qui varie en fonction du temps n rend la chaîne non homogène ! Le résultat suivant vient à notre secours.

Théorème. Soit $h > 0$. On choisit T constante par morceaux :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \left]e^{(k-1)h}, e^{kh}\right], \quad T(n) = \frac{1}{k}.$$

Il existe $h^* > 0$ tel que pour tout $h > h^*$, l'algorithme du recuit simulé converge, i.e.

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\big(X_n^T \in E_{\min}\big) = 1.$$

La constante h^* est inconnue en pratique. Le paramètre h doit donc être ajusté expérimentalement. S'il est choisi trop petit, l'algorithme peut ne pas converger vers les minima globaux et rester piégé dans un minimum local. S'il est choisi trop grand, la convergence sera très lente.

Question 3. Implémenter l'algorithme du recuit simulé pour le problème du voyageur de commerce. Proposer des critères d'arrêt. Tester votre programme pour différentes valeurs de m. Comparer à l'algorithme de recherche exhaustive pour m petit. Réaliser des représentations graphiques de l'exploration de l'espace d'états E, afin d'illustrer l'influence du schéma de température.

Question 4. Quel est le meilleur chemin que vous pouvez obtenir pour les 20 villes de France représentées dans la figure ci-contre. Les coordonnées des villes (latitudes et longitudes) vous seront données.