$G=(V,E)$ → edge 边

↓ vertices 顶点 （顶点和边的关系）

infinite / finite > graph（multi 多重图）< directed 有向 < 出度 / 入度

simple：无回自己

Pseudographs：伪图，有回自己

有向多重？

有偏

adjacent 相邻 < 点 / 集？

loop 环

isolated 孤立点（无边）

pendant 悬挂（单边）

m = in-degree = out-degree

$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)$ → 奇度点有偶数个

边 ×2 = 度数和

有向完全图 竞赛图

complete graph：任意两顶点都有连边 完全图

K_1 K_2 … K_n

Cycles：圈图

C_1 C_2 C_3

Wheels 轮图 n-cubes 立方图

W_1

bipartition 二分图：

↓ 完全二分图（matching）

K_{12} K_{11}

G_1与G_2 one-to-one + onto Graph Isomorphism（isomorphic）→ v= e= 关系=

1. 算行列的分布排序
2. 交换：行，列，$G_1=G_2$，v

subgraph：在一个图上去掉些点/边

edge contraction 边的收缩

union of graphs 图的并集

adjacency list 邻接表（表示图）

matrix 邻接矩阵

$a_{ij}=1$ → i与j有edge

无向图对称 可压缩存储

关联矩阵？

$B=A+A^2+\cdots+A^n$ 数值直加

Paths

$v_1\to v_2$ path → circuit 环路（$v_1\to v_1$）

connectivity 连通性 → every pair 可连

简单 simple < path / circuit：无重复路

基本 element path：无重复顶点（除 $v_1\to v_1$）

strongly connected：有向连通 ∀顶点，可达 双向

弱：无向图连，有向 ×

path：不回原点

Euler circuit：simple circuit containing every edge

(通过每边仅一次，并行遍每个结点)

点可重复

所有V度为偶数

Euler tour 欧拉序

?

G无奇度V / 2个奇V?

无向连通图 ⟷ Euler图

Th1 度

Th2

D有Euler path ⟷ 0/2个奇度顶点

某Algorithm?

Hamilton path / circuit：遍历每个顶点一次仅一次

Th3.7 Th2

完全图 K_n 和

环 C_n 一定有H路

Shortest path

Djstra → 优化已知

Floyd

planar 平面 (no crossed edges)

faces：被 graph cut

$v-e+f=2$

k个 components,

$v-(e+k-1)+r=2$

Planar: G无交叉点（除公共V）

faces: a plane graph cut the plain into regions

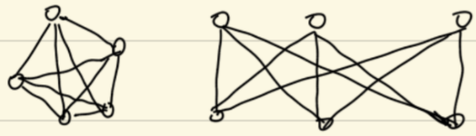
Deg(r): 面的次数（面边界回路的长度）

$V - e + \underset{(r)}{f} = 2$ 最多有$(3n-6)$条边

The: 平面图中，所有面的次数和 = 边数的两倍

Kuratowski's Theorm:

planar ⟺ 无子图包含 K_5 / $K_{3,3}$ 用path换边的图.



对偶图 (G^*): 面内 (G) 任取一点，连接各点，穿过每条边、 对边不一定是子图

自对偶: G与G^*同构 (照片) $P_G(x) = P_{G_e}(x) - P_{G^e}(x)$

$P_G(x)$: 色链

Any planar graph contains a Node of Degree 5.

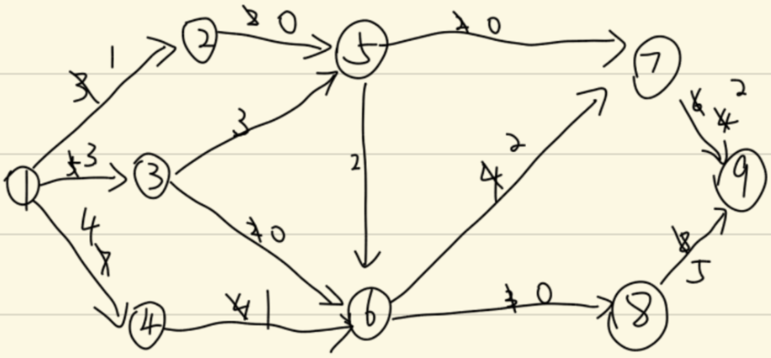
can be colored with 4 colors

枚举 / color: $\chi(G)$ ↓ 最小正根 $(p>0)$

$P(G)$ chromatic polynomial 着色多项式 → 各点色数相乘.

$P(4) \neq 0$

$\chi(G) = 4$ 题



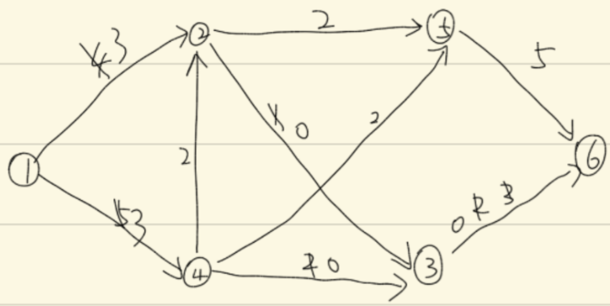
1 2 5 7 9 — 2

1 3 6 7 9 — 2

1 4 6 7 9 — 3

1 4 6 8 9

每层的最小序号先来、



下限最小

1 2 3 6

1 4 3 6

1 2 5 6

1 4 5 6

每确定一条增广,