一、Binary Operations：封闭 1 ☆

A集合上的 $*$，记

S with（非空）

二、Semigroup：可结合的二元运算

$a*b*c = a*(b*c) = (a*b)*c$

(commutative semigroup)：交换半群

A^*：由A中…组成的有限长的元集合 {0,1,00,01, 0001,111…}

free semigroup generated by A

Revisited：

$P(S)$：S的幂集的集合

$A \to A\times A \xrightarrow{条件} R$（关系，Relation）→ 等价关系

自反 对称 传递

划分

A/R

$[A_1, A_2, \cdots, A_n]$

$*$

Binary Operation

$\forall a,b\in A, a*b\in A$

{结合，交换，幂等

Lattice：任意两个可比有最小最大？

$A\to A^*$：各个A中的元自由组合。

free ☆

semigroup（0/1）

Identity 单位元/幺元（in semigroup）

$(e*a = a*e = a)$

Subsemigroup：子半群（closed），包括自己的subsemigroup，非空。

submonoid：子独异点/子幺元（含幺元？）

☆ 检索 得知

monoid 幺半群：封闭，结合，存在e（二元运算） 3 对称

group：在monoid基础上增加逆元。 4

证明同构：

☆ ① Def $f: S\to T$

ES. $f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$（对于）

② show one-to-one 单射

③ show（对于）onto $\forall$ 在S上能找 满射

④ show $f(a*b) = f(a) *_2 f(b)$

先证semigroup

三、对 $(A, *_1)$ $(B, *_2)$

$\underbrace{(A, *_1)\quad (B, *_2)}_{f}$

$a_1, a_2 \cdots a_n$ $b_1, \cdots b_n$

$A\to B$, one-to-one, $f(a)=f(b)\to a=b$

$f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b)$

f称为 isomorphism（同构映射）

映射作F后 = 映射值作

同构的性质

① $(S,*_1)$ $(T,*_2)$, e_1, e_2

$f(e)=e'$

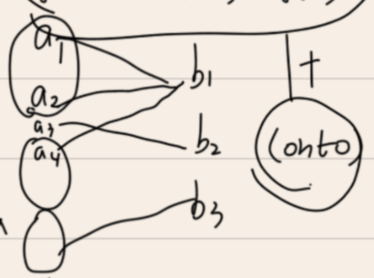
$b=f(a)=f(a*e)=f(a)*_1f(e)=b*_1f(e)$

Homomorphism 同态

针对结合的封闭二元运算

$(S,*)$, $(T,*')$: Two semigroups,

$f: S\to T$: $f(a*b)=f(a)*_1f(b)$



$f(e)=e'$, 检验T,

if onto

↓ 同态像 homomorphic image,

(自然同态)

$f_R(c)=[?]$ 等价类

S/R: 取划分

$[a]\circledast[b]=[a*b]$.

☆Theorem 4?

同态.

Theorem5: 对semigroup,

若$(S,*)$ onto $(T,*')$, S is commutative, the T is commutative.

$(S,*)$和$(T,*')$

$(S\times T,*'')$ is a semigroup, 乘积半群 (not essential)

半群上的等价关系

congruence relation 同余关系. $S/R \to [a]$ 所有同余 • : 连接符

等价类

A_1 A_2

等价 a_1Rb_1, a_2Rb_2 $(a_1+a_2)R(b_1+b_2) \to$ 同余

$A\times A \Rightarrow R \to$ A_1 $[a_1]$, A_2 $[a_2]$, A_3 $[a_3]$ 代表元

商半群的元素是等价类$[a]$ $[b]$…

$\odot([a],[b]) \sim$ 商半群 quotient of semigroup. 已经见.

S/R, 新的$*\to$ monoid

Natural homomorphism: $f_R: S\to S/R$ 有: $f_R(a)=[a]$ 是, is onto 证hom

---

Group: a monoid with identity e

$a*b\in G$ for any a, b in G

①封 ②结合 ③e ④a^{-1}

阿贝尔群: Abelian Group $a*b=b*a$

证 Abelian G: ①封闭 ②可结合 ③有幺元e ④有逆元 a^{-1} ⑤$a*b=b*a$ △

Theorem 2

左右消去: $ab=cb \Rightarrow a=c$

Theorem 3

$(a^{-1})^{-1}=a$; $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ ↓ ab $=e$

Theorem 4 唯一解 (行不重复, 列不重复) 有逆☆

Multip Table ↑ 乘法表

Order: 阶 123阶→1种 4阶→4种

置换群 S_n 三角对称. ??? $G_n(G,*)$

Z_n: 模n同余

$\oplus$: 加和模除 2

子群 subgroup: H有G的e, H封闭

对两个子群 G, G', 函数映射 $\boxed{f: G\to G'}$

$f(e)=e'$

If $a\in G$, then $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$ ☆

$G=G_1\times G_2$

$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2, b_1b_2)$

Theorem

G_1, G_2为 Group,

$G=G_1\times G_2\to$ 代表元的(,)进行二元运算

$Z_2\times Z_2 \to$ $\oplus$ (0,0) (0,1) (1,0) (1,1)

m n

(0,0)

(0,1)

(1,0)

(1,1)

$\boxed{((?+?)\bmod m, (?+?)\bmod n)}$

$f_R: G\to G/R$ e.g.: $H=[e]$

H	$a\in H$
G-H	$a\notin H$

???

H is a subgroup of G

a*h

coset 陪集 $\begin{cases} aH=\{ah \mid h\in H\} & \text{left} \\ Ha=\{ha \mid h\in H\} & \text{right}\end{cases}$

$a\in G$

$a\in H$? $\begin{cases} \checkmark \to \\ \times \end{cases}$

正规子群

$aH=Ha \Rightarrow$ H为 normal group, for all $a\in G$

不代表 $ah_i=h_ia$ 含[e]

sub of Abelian Group H is normal group.

kernel 核 函数 $\ker(f) = [e]$

含e的集合 × ?

$G/\ker f$? ?

$f: G_1 \to G_2$ G_2的单位元

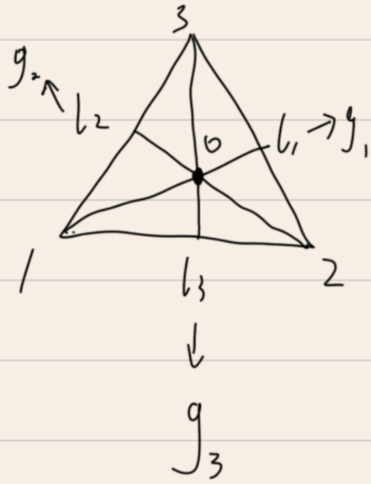
$\ker(f) = \{g_1 \in G_1 \mid f(g_1) = e_2\}$

?

$Z_2 \times Z_3$

Symmetric group S_3

$*$	f_1	f_2	f_3	g_1	g_2	g_3
f_1	f_1	f_2	f_3	g_1	g_2	g_3
f_2	f_2	f_3	f_1	g_3	g_1	g_2
f_3	f_3	f_1	f_2	g_2	g_3	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	f_1	f_2	f_3
g_2	g_2	g_3	g_1	f_3	f_1	f_2
g_3	g_3	g_1	g_2	f_2	f_3	f_1



g_1: 沿 l 对称

f_1: 沿 O 顺旋 120°