2023.11.28

考虑一个学校内的N个宣传窗，每个人经过时间t_0会访问一次。
宣传窗的内容需要更换来保证某人不会一直重复看到同一内容

若所有宣传窗内均为同一个内容，则假设时间T内某人访问宣传窗的次数x满足以T/t_0为期望的泊松分布 $P(x;\nu)=\frac{\nu^x}{x!}e^{-\nu}$
若每次更换内容的成本为m，用户首次访问时收益为n，重复无收益
则收益为 $n\cdot(1-P(0;\frac{T}{t_0})) = n\cdot(1-e^{-T/t_0})$
显然T越长，收益/成本越大
这解释了为何小区内宣传窗很少更新。

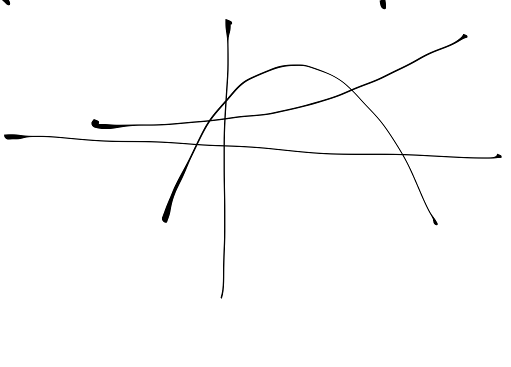
然而多次看到同一内容会使人觉得厌烦，更改收益为

$$\begin{cases} 0 & x=0 \\ p & x=1 \\ q & x>1 \end{cases} \qquad q<p$$

则收益为 $p\nu e^{-\nu}+q(1-(1+\nu)e^{-\nu})$ $\qquad \nu=T/t_0$
为使收益最大 $\frac{df}{d\nu} = p(1-\nu)e^{-\nu}+q\nu e^{-\nu}=0$
$\nu=\frac{p}{p-q}$
这至少给出了一个极值，说明长时间不更换导致的消极影响会促使更换

我们再来讨论为何不同宣传窗的内容不同。
假设N个宣传窗由r组组成，每组有s个相同内容，不同组内容不同
那么第一次访问的收益必为p.
第2次访问的收益为 $(1-\frac{1}{r})p+\frac{1}{r}q$ ...
第i次访问 ------ $u(i)$ 单调减
则收益变为 $\sum_0^\infty u(x)P(x;\nu)$，类似可求得$\nu$
是否ν变大了？
我们不妨给予$u(i)$一个简易的形式 $\begin{cases} 0 & 0 \\ p & 1\le i\le k \\ q & k<i \end{cases}$
则收益 $f=(p-q)(\nu+\frac{\nu^2}{2}+\cdots+\frac{\nu^k}{k!})e^{-\nu}+q(1-e^{-\nu})$
$\frac{df}{d\nu}=(p-q)\left[1+\nu+\cdots+\frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}-(\nu+\frac{\nu^2}{2}+\cdots+\frac{\nu^k}{k!})\right]e^{-\nu}+qe^{-\nu}=0$
$\Rightarrow (p-q)(1-\frac{\nu^k}{k!})+q=0$
$\nu^k/k! = \frac{p}{p-q}$
绘图猜测k越大，收益越大时的ν越大
这就是为何不同宣传窗内容不同

然而，考虑更早的模型，单位时间收益为 $g=\frac{(p-q)\nu e^{-\nu}+q(1-e^{-\nu})-m}{T}$ $\quad (\nu=T/t_0)$
其极值行为完全不同，考虑 $h(x)=\frac{\alpha x e^{-x}-\beta e^{-x}+\gamma}{x}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma>0$
$\frac{dh}{dx}=-\alpha e^{-x}+\beta(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})e^{-x}-\gamma\frac{1}{x^2}=0$



$-\alpha x^2+\beta x+\beta=\gamma e^x$
即使$q=p$也依然有最大值