Sin stocks

1 Desarrollo modelo

El modelo del *paper* es el siguiente:

$$\min_{\mathbf{n_U}} \mathrm{E}\left[U(w_U)\right] \tag{1}$$

Sujeto a:

$$w_U = \boldsymbol{n}_U^\intercal \boldsymbol{x} + n_U^f \tag{2}$$

$$\bar{w}_U = \boldsymbol{n}_U^\intercal \boldsymbol{P} + n_U^f P_f \tag{3}$$

Donde:

- w_U : riqueza de fin de periodo para el inversionista sin restricciones.
- $\boldsymbol{n}_U$: vector que representa la cantidad de acciones que el inversionista tipo U compra en cada uno de los N activos riesgosos.
- $\boldsymbol{x}$: es el vector de pagos por acción en cada uno de los N activos riesgosos.
- n_U^f: cantidad de bonos libres de riesgo en descuento con pagos unitarios que compra el inversionista tipo U.
- $\boldsymbol{P}$: vector de precios de los activos riesgosos.
- P_f : precio del bono en descuento.

En cuanto a las restricciones, la ecuación (2) corresponde a la riqueza final y la ecuación (3) a la riqueza inicial del inversionista U.

De (3) se puede concluir lo siguiente:

$$n_U^f = \frac{1}{P_f}\left(\bar{w}_U - \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{U}}^\intercal \boldsymbol{P}\right)$$

Luego, reemplazándolo en (2) se tiene lo siguiente.

$$w_U = \boldsymbol{n}_U^\intercal \boldsymbol{x} + \bar{w}_U \frac{1}{P_f} - \boldsymbol{n}_U^\intercal \underbrace{\frac{\boldsymbol{P}}{P_f}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\bar{w}_U}{P_f} + \boldsymbol{n}_U^\intercal(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) \tag{4}$$

La cual corresponde a la restricción de riqueza que se menciona en el *paper*. Entonces, reemplazando (4) en (1) y derivando se tiene lo siguiente.

$$\frac{d\mathrm{E}}{dw_U} = \mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\right] = 0 \;.$$

Ahora dado que $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Sigma})$, aplicando la definición de covarianza tendremos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right] &= E\left[(U'(w_U) - E\left[U'(w_U)\right])(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}-E\left[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\right])\right] + E\left[U'(w_U)\right]E\left[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\right] \;, \\
\mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right] &= E\left[(U'(w_U) - E[U'(w_U)])(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\right] + E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}) \;, \\
\mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right] &= E\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}) - E[U'(w_U)](\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\right] + E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}) \;, \\
\mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right] &= E\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\right] - E[U'(w_U)]E\left[\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\right] + E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}) \;, \\
\mathrm{E}\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right] &= E\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\right] + E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}) = 0 \;.
\end{aligned}$$

Luego con esto podemos definir la siguiente igualdad,

$$-E\left[U'(w_U)(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\right] = E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p})$$

Aplicación lema de Stein. Tenemos que $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Sigma})$,

$$\mathrm{E}[U'(w_U)(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})] = \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{E}\left[\frac{\partial U'(w_U)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]$$

Tomando $w_u = \boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{n}_U + n_U^f \mathbf{1} \Rightarrow \frac{\partial w_U}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{n}_U$, luego,

$$\mathrm{E}[U'(w_U)(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})] = \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{E}\left[U''(w_u)\boldsymbol{n}_U\right] = \mathrm{E}\left[U''(w_u)\right]\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{n}_U$$

□

Entonces, sustituyendo la aplicación del lema que se mostró,

$$\begin{aligned} -E\left[U''(w_U)\right]\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{n}_U &= E\left[U'(w_U)\right](\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) \ , \\ \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p} &= \frac{-E\left[U''(w_U)\right]}{E\left[U'(w_U)\right]}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{n}_U \ , \\ \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p} &= \theta_U \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{n}_U \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Donde θ_U es similar a la aversión absoluta al riesgo, que depende en la riqueza inicial del inversionista U. Luego, se plantea el mismo modelo, pero esta vez se hace para un inversionista tipo R (el inversionista restrictivo representativo), el cual escoge boicotear acciones "*sin*".

$$\min_{\mathbf{n_R}} \mathrm{E}\left[U(w_R)\right] \tag{6}$$

Sujeto a:

$$w_R = \boldsymbol{n}_R^\intercal \boldsymbol{x} + n_R^f \tag{7}$$

$$\bar{w}_R = \boldsymbol{n}_R^\intercal \boldsymbol{P} + n_R^f P_f \tag{8}$$

Donde $\boldsymbol{n}_R$ es el vector del número de acciones que el inversionista R compra en N_N activos que no son del tipo "*sin*". Entonces, siguiendo el mismo procedimiento se llega a lo siguiente.

$$\theta_R \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{n}_R = \bar{\boldsymbol{x}}_N - \boldsymbol{p}_N \tag{9}$$

Donde la matriz covarianza de los pagos de los activos se encuentra dividida en empresas *sin* (S) y *nonsin* (N).

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N & \boldsymbol{\Sigma}_{NS} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{SN} & \boldsymbol{\Sigma}_S \end{bmatrix} \tag{10}$$

Donde $\boldsymbol{\Sigma}_N$ representa la matriz de covarianza de pagos de todos los activos que no han sido boicoteados y $\bar{\boldsymbol{x}}_N$, $\boldsymbol{p}_N$ son los vectores de pagos promedio y precios, respectivamente, de los activos que no han sido boicoteados.

Luego, asumiendo que se tienen q_U inversionistas del tipo U y q_R del tipo R, la demanda por activos puede ser obtenida y ser equivalente a la oferta exógena de acciones, $\bar{\boldsymbol{n}} = (\bar{\boldsymbol{n}}_N, \bar{\boldsymbol{n}}_S)^\intercal$, y a cero para el activo libre de riesgo, lo que da lugar a las condiciones para el equilibrio de mercado.

$$\bar{\boldsymbol{n}} = q_U \boldsymbol{n}_U + q_R \boldsymbol{n}_R, \quad 0 = q_U n_U^f + q_R n_R^f \tag{11}$$

Reordenando las ecuaciones (9) y (5) se llega a los siguiente.

$$\boldsymbol{n}_U = (\theta_U \boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{n}_R = (\theta_R \boldsymbol{\Sigma}_R)^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_N - \boldsymbol{p}_N) \ .$$

Notemos que podemos reescribir $\boldsymbol{n}_R$ de la siguiente forma,

$$\boldsymbol{n}_R = \theta_R^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_N \theta_R)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) \ .$$

Luego reemplazando nos queda que,

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \left((\boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U)^{-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_N \theta_R/q_R)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \right) (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) \ . \tag{12}$$

De donde queremos despejar la expresión $\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}$, por lo que es necesario calcular la inversa de la expresión en paréntesis. Esto se hace mediante el uso de una identidad que dice lo siguiente, dadas las matrices $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ y $\boldsymbol{X}_4$, con $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_4$ invertibles, se cumple lo siguiente.

$$\left(\boldsymbol{X}_1^{-1} + \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_4^{-1} \boldsymbol{X}_3\right)^{-1} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2 \left(\boldsymbol{X}_4 + \boldsymbol{X}_3 \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2\right)^{-1} \boldsymbol{X}_3 \boldsymbol{X}_1 \ . \tag{13}$$

Por lo que, reemplazando los términos en (13), tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\left((\boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U)^{-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_N \theta_R/q_R)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U - \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{\Sigma}_N \theta_R/q_R + \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U \ , \\
&= \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U - \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_N \theta_R/q_R + \boldsymbol{\Sigma}_N \theta_U/q_U)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}\theta_U/q_U \ , \\
&= \theta_U/q_U \left(\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \right) \ .
\end{aligned}$$

Entonces, reemplazando la expresión en (12) queda lo siguiente,

$$\begin{aligned}
(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) &= \theta_U/q_U \left(\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \right) \bar{\boldsymbol{n}} \ , \\
&= \theta_U/q_U \left(\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \bar{\boldsymbol{n}} \ , \\
&= \theta_U/q_U \left(\boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} - \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}}_N + \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS}\bar{\boldsymbol{n}}_S \\ 0 \end{bmatrix} \right) \ , \\
&= \theta_U/q_U \left(\boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} - \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} + \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS}\bar{\boldsymbol{n}}_S \\ \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} \right) \ , \\
&= \theta_U/q_U \left(\frac{\theta_R/q_R}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} + \frac{\theta_U/q_U}{\theta_U/q_U + \theta_R/q_R} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS}\bar{\boldsymbol{n}}_S \\ \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} \right) \ , \\
&= \left(\frac{1}{q_U/\theta_U + q_R/\theta_R} \boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} + \frac{1}{q_U/\theta_U + q_R/\theta_R} \frac{q_R/\theta_R}{q_U/\theta_U} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS}\bar{\boldsymbol{n}}_S \\ \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} \right) \ , \\
&= \frac{1}{q_U\bar{w}_U/\rho_U + q_R\bar{w}_R/\rho_R} \boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} + \frac{1}{q_U\bar{w}_U/\rho_U + q_R\bar{w}_R/\rho_R} \frac{q_R\bar{w}_R/\rho_R}{q_U\bar{w}_U/\rho_U} \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{NS}\bar{\boldsymbol{n}}_S \\ \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} \ , \\
&= \gamma\boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}} + \delta\boldsymbol{\Sigma}\bar{\boldsymbol{n}}_B \ .
\end{aligned} \tag{14}$$

Donde $\bar{\boldsymbol{n}}_B$ representa las posiciones de la cartera boicot. Ahora, hay que convertir la (14) en una expresión para retornos esperados. Sabiendo que $P_f = 1/(1 + r_f)$ podemos definir,

$$(1 + r_i^s) = \frac{x_i}{P_i} \Leftrightarrow x_i - \frac{P_i}{P_f} = P_i(1 + r_i^s) - P_i(1 + r_f) = P_i(r_i^s - r_f) \ .$$

Luego, definiendo el premio por riesgo como $r_i = r_i^s - r_f$, y dado que en (14) la expresión a la izquierda de la igualdad está representada como promedio, se tiene que $\mu_i = \mu_i^s - r_f$. Además, como $1 + r_i^s = x_i/P_i$, la matriz de covarianza para los pagos de los activos riesgosos $\boldsymbol{\Sigma}$ se puede representar en términos de los retornos de la siguiente forma $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}/P_iP_j$. Por ende, para un elemento de (14) se tiene que,

$$\begin{aligned}
P_i\mu_i &= \gamma\Sigma_{im} + \delta\Sigma_{ib} \\
\mu_i &= \gamma P_m \sigma_{im} + \delta P_b \sigma_{ib}
\end{aligned} \tag{15}$$

Donde m representa el mercado, $P_m = q_m \bar{w}_M = q_U \bar{w}_U + q_R \bar{w}_R$ es el costo del portafolio de mercado, y P_b es el costo del portafolio boicot. Ahora, con (15) podemos definir μ_m y μ_b, que vendría siendo el retorno promedio del portafolio de mercado y del portafolio boicot, respectivamente.

$$\mu_m = \gamma P_m \sigma_m^2 + \delta P_b \sigma_{mb} \quad ; \quad \mu_b = \gamma P_m \sigma_{mb} + \delta P_b \sigma_b^2 \ .$$

Solucionando este sistema de ecuaciones para γP_m y δP_b se obtiene los siguiente,

$$\delta P_b = \frac{\sigma_{mb}\mu_m - \sigma_m^2 \mu_b}{\sigma_{mb}^2 - \sigma_b^2 \sigma_m^2} \quad ; \quad \gamma P_m = \frac{\sigma_{mb}\mu_b - \sigma_b^2 \mu_m}{\sigma_{mb}^2 - \sigma_b^2 \sigma_m^2} \ .$$

Reemplazando en (15) queda lo siguiente,

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{\sigma_m^2 \sigma_{ib} - \sigma_{mb}\sigma_{im}}{\sigma_b^2 \sigma_m^2 - \sigma_{mb}^2} \mu_b + \frac{\sigma_b^2 \sigma_{im} - \sigma_{mb}\sigma_{ib}}{\sigma_b^2 \sigma_m^2 - \sigma_{mb}^2} \mu_m \ , \\ &= \beta_{ib}\mu_b + \beta_{im}\mu_m \ . \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora de (14), despejando $\boldsymbol{p}$ tenemos lo siguiente,

$$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{x}} - (\gamma \boldsymbol{\Sigma} \bar{\boldsymbol{n}} + \delta \boldsymbol{\Sigma} \bar{\boldsymbol{n}}_B) \ .$$

Luego, multiplicando por un vector de tenencias de una cartera i nos que para un portafolio específico i,

$$p_i = \bar{\boldsymbol{n}}_i^\intercal \boldsymbol{p} = \bar{x}_i - \gamma \Sigma_{im} - \delta \Sigma_{ib} \ . \tag{17}$$

Dado que $q_R > 0$ cuando existen inversionistas con restricciones, esto implica que $\delta > 0$. Por lo tanto, el precio por riesgo de boicot es positivo. Cuanto mayor sea la covarianza de los pagos del portafolio i con el factor de pago de boicot $\Sigma_{ib} = \bar{\boldsymbol{n}}^\intercal i \boldsymbol{\Sigma} \bar{\boldsymbol{n}} B$, menor será su precio en relación con el activo libre de riesgo, $p_i = P_i/P_f = P_i(1 + r_f)$. Esto a su vez resulta en un retorno promedio mayor para el portafolio i, dado por $\mu_i = (\bar{\boldsymbol{n}}_i^\intercal \bar{\boldsymbol{x}}/P_i) - (1/P_f)$.
Para derivar el premio por riesgo boicot, μ_b, se construye el factor boicot $x_b - p_b = \bar{\boldsymbol{n}}_B^\intercal(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$. Además aplicando el promedio,

$$\begin{aligned} \bar{x}_b - p_b &= \bar{\boldsymbol{n}}_B^\intercal (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}) \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{\boldsymbol{n}}_S^\intercal \boldsymbol{\Sigma}_{NS}^\intercal (\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{-1}})^\intercal & \bar{\boldsymbol{n}}_S^\intercal \end{bmatrix} \left(\gamma \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N \bar{\boldsymbol{n}}_N + \boldsymbol{\Sigma}_{NS} \bar{\boldsymbol{n}}_S \\ \boldsymbol{\Sigma}_{SN} \bar{\boldsymbol{n}}_N + \boldsymbol{\Sigma}_S \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Sigma}_{NS} \bar{\boldsymbol{n}}_S + \boldsymbol{\Sigma}_{NS} \bar{\boldsymbol{n}}_S \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{SN} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{NS} \bar{\boldsymbol{n}}_S + \boldsymbol{\Sigma}_S \bar{\boldsymbol{n}}_S \end{bmatrix} \right) \ , \\ &= (\gamma + \delta) \bar{\boldsymbol{n}}_S^\intercal (\boldsymbol{\Sigma}_S - \boldsymbol{\Sigma}_{SN} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{NS}) \bar{\boldsymbol{n}}_S \ , \\ &= (\gamma + \delta) \Sigma_b \ . \end{aligned} \tag{18}$$

De donde es importante recordar que la matriz de covarianza por definición es simétrica, luego se cumple que $\boldsymbol{\Sigma}^\intercal = \boldsymbol{\Sigma}$. Ahora, para el retorno promedio,

$$\begin{aligned} \mu_b &= \frac{\bar{\boldsymbol{n}}_B^\intercal \bar{\boldsymbol{x}}}{P_b} - \frac{1}{P_f} \ , \\ &= \frac{1}{P_b} (\bar{x}_b - p_b + \bar{\boldsymbol{n}}_B^\intercal \boldsymbol{p}) - \frac{1}{P_f} \ , \\ &= (\bar{x}_b - p_b) \frac{P_f}{P_b} \frac{1}{P_f} \ , \\ &= (\bar{x}_b - p_b) \frac{1}{p_b P_f} \ , \\ &= \frac{(1 + r_f)(\gamma + \delta)\Sigma_b}{p_b} \ , \\ \mu_b &= \frac{(\gamma + \delta)\Sigma_b (1 + r_f)}{\bar{x}_b - (\gamma + \delta)\Sigma_b} \ . \end{aligned} \tag{19}$$

2 Anexo

2.1 Lema de *Stein*

Sea X una variable aleatoria que distribuye normal con media μ y varianza σ^2. Sea g una función para la cual existen $\mathrm{E}\left(g(X)(X-\mu)\right)$ y $\mathrm{E}\left(g'(X)\right)$. Entonces,

$$\mathrm{E}\left(g(X)(X-\mu)\right) = \sigma^2 \mathrm{E}\left(g'(X)\right).$$

En general, suponiendo que X e Y tienen una distribución de probabilidad conjunta, entonces,

$$\mathrm{Cov}\left(g(X), Y\right) = \mathrm{Cov}(X, Y)\mathrm{E}(g'(X)).$$

Para un vector normal multivariado $(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Sigma})$, se cumple que,

$$\mathrm{E}\left(g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathrm{E}\left(\nabla g(\boldsymbol{X})\right) \tag{20}$$