



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΟΣ

Χειρισμός αντικειμένων σε επίπεδο χώρο εργασίας με
αποφυγή εμποδίων για 3Δ εκτυπωμένο ρομποτικό βραχίονα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΙΝΤΖΙΟΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΜΠΕΧΛΙΟΥΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

ΠΑΤΡΑ – ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2024

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών.

Πρίντζιος Λάμπρος

© 2024 – Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Το σύνολο της εργασίας αποτελεί πρωτότυπο έργο, παραχθέν από τον/την ονοματεπώνυμο φοιτητή/τριας, και δεν παραβιάζει δικαιώματα τρίτων καθ' οιονδήποτε τρόπο. Αν η εργασία περιέχει υλικό, το οποίο δεν έχει παραχθεί από τον/την ίδιο/α, αυτό είναι ευδιάκριτο και αναφέρεται ρητώς εντός του κειμένου της εργασίας ως προϊόν εργασίας τρίτου, σημειώνοντας με παρομοίως σαφή τρόπο τα στοιχεία ταυτοποίησής του, ενώ παράλληλα βεβαιώνει πως στην περίπτωση χρήσης αυτούσιων γραφικών αναπαραστάσεων, εικόνων, γραφημάτων κ.λπ., έχει λάβει τη χωρίς περιορισμούς άδεια του κατόχου των πνευματικών δικαιωμάτων για την συμπεριληψη και επακόλουθη δημοσίευση του υλικού αυτού.

ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πιστοποιείται ότι η Διπλωματική Εργασία με τίτλο

Χειρισμός αντικειμένων σε επίπεδο χώρο εργασίας με αποφυγή εμποδίων για 3Δ εκτυπωμένο ρομποτικό βραχίονα

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

ΠΡΙΝΤΖΙΟΥ ΛΑΜΠΡΟΥ του ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Αριθμός Μητρώου: 1072817

Παρουσιάστηκε δημόσια στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών στις

... / ... /2024

και εξετάστηκε από την ακόλουθη εξεταστική επιτροπή:

Χαράλαμπος Μπεχλιούλης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων
Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών (επιβλέπων)

Δημοσθένης Καζάκος, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών (μέλος επιτροπής)

Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων
Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών (μέλος επιτροπής)

Ο Επιβλέπων

Χαράλαμπος Μπεχλιούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ο Διευθυντής του Τομέα

Χαράλαμπος Μπεχλιούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί επιτυχώς χωρίς την πολύτιμη συνεισφορά κάποιων ανθρώπων, που θα ήθελα εδώ να ευχαριστήσω. Αρχικά, καίρια υπόρξε η συνεργασία με τον συμφοιτητή και συνάδελφο Φραντζή Θεόδωρο – Αντώνιο, για το χρονοβόρο πρακτικό μέρος της κατασκευής του ρομποτικού βραχίονα. Ο διαμοιρασμός του φόρτου εργασίας μού επέτρεψε να αφιερώσω τον απαραίτητο χρόνο και στο θεωρητικό σκέλος της διπλωματικής. Ακόμα, πολύ σημαντική ήταν η βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Μπεχλιούλη Χαράλαμπου, ο οποίος με καθοδήγησε και μου έδωσε χρήσιμες συμβουλές καθ' όλη τη διάρκεια του πονήματος. Επίσης, να ευχαριστήσω και τον καθηγητή Τσιπιανίτη Δημήτριο που βοήθησε στην αγορά των εξαρτημάτων του βραχίονα, σε κάποιες εργασίες συγκόλλησης υψηλής ακρίβειας, και μας παραχώρησε πρόσβαση στον 3D εκτυπωτή που χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον.

Τέλος, θα ήθελα να δώσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου. Αρχικά, στους γονείς μου για τη συνεχή στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο τμήμα HMTY του Πανεπιστημίου Πατρών. Και φυσικά στην αδερφή μου, που είναι πάντα διαθέσιμη για συζήτηση και παρέα και πάντα βρίσκει τον τρόπο να με κάνει να χαμογελάω.

Πρίντζιος Λάμπρος

Πάτρα, ... / ... / 2024

Ελληνική περίληψη της Διπλωματικής Εργασίας

Τις τελευταίες δεκαετίες, οι ρομποτικές εφαρμογές έχουν εξαπλωθεί μαζικά και ραγδαία σε όλες σχεδόν τις πτυχές της καθημερινότητάς μας. Συναντώνται, μεταξύ άλλων, σε οικιακούς χώρους (π.χ. αυτοκινούμενες ηλεκτρικές σκούπες καθαρισμού, Εικόνα 1), στη βιομηχανία (ρομποτικοί βραχίονες σε εργασίες διαλογής και κατασκευής προϊόντων), στον τομέα της αγροτικής παραγωγής (με τη χρήση drones για την παρακολούθηση και καταμέτρηση μεγάλων καλλιεργήσιμων εκτάσεων), καθώς και στον χώρο της ιατρικής (με την εισαγωγή ρομποτικών χειριστών στη διεξαγωγή περίπλοκων χειρουργείων, Εικόνα 2). Σε μια πληθώρα τέτοιων εφαρμογών, τα ρομποτικά συστήματα χρειάζεται να γνωρίζουν την κατάσταση του περιβάλλοντός τους με ακρίβεια ανά πάσα χρονική στιγμή, ώστε να περιηγούνται εντός αυτού και να αντιδρούν αποτελεσματικά στις πιθανές μεταβολές του. Επιπλέον, η ολοένα αυξανόμενη αλληλεπίδραση ρομπότ και ανθρώπων επιβάλλει την ανάγκη της αξιόπιστης λειτουργίας των πρώτων για την ασφάλεια των δεύτερων.

Στα πλαίσια αυτά, το πρόβλημα της αποφυγής σύγκρουσης ενός ρομπότ με το περιβάλλον του (είτε αυτό είναι άνθρωποι, είτε αντικείμενα που αντιμετωπίζονται ως εμπόδια) έχει εξελιχθεί σε ένα μείζον και κεντρικό πρόβλημα προς επίλυση, στα επιστημονικά πεδία της ρομποτικής και του αυτομάτου ελέγχου. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάων ένα μέρος του σύνθετου αυτού ζητήματος: την αποφυγή στατικών εμποδίων που τοποθετούνται πάνω σε έναν επίπεδο χώρο εργασίας. Ειδικότερα, το ζητούμενο είναι η πλοήγηση του τελικού στοιχείου δράσης ενός ρομποτικού χειριστή, από μία οποιαδήποτε αρχική θέση πάνω στον επίπεδο χώρο εργασίας προς μία οποιαδήποτε διαφορετική τελική θέση – στόχο, διασφαλίζοντας την αποφυγή σύγκρουσης με τα υπάρχοντα εμπόδια.

Τα εμπόδια είναι 3D εκτυπωμένα, πρισματικά στερεά αυθαίρετου σχήματος αλλά του ίδιου ύψους, συνεπώς με ενδιαφέρει η διδιάστατη γεωμετρία του συνόρου της άνω επιφάνειάς τους. Η αναγνώριση αυτής πραγματοποιείται με μία απλή κάμερα και σύγχρονες μεθόδους επεξεργασίας εικόνας. Δημιουργείται λοιπόν μία ακριβής ψηφιακή αναπαράσταση του επίπεδου χώρου εργασίας, η οποία μπορεί να τροφοδοτηθεί σε έναν κατάλληλο νόμο ελέγχου που θα παράγει τη ζητούμενη διαδρομή στον ελεύθερο από εμπόδια χώρο. Επειδή ο καταγεγραμμένος χώρος εργασίας διαθέτει αρκετά σύνθετη μορφή, χρειάζεται να απλοποιηθεί μαθηματικά εφαρμόζοντας διαδοχικούς μετασχηματισμούς, και πιο συγκεκριμένα μία αρμονική και μία ακτινική απεικόνιση. Στον τελικό μετασχηματισμένο χώρο κατασκευάζεται ένα τεχνητό, βαθμωτό δυναμικό πεδίο (στηριζόμενο σε μία αρμονική συνάρτηση και τις ιδιότητές της), το οποίο στοχεύει στην οδήγηση του τελικού στοιχείου δράσης του ρομποτικού χειριστή μακριά από τα εμπόδια, με κατεύθυνση προς το σημείο – στόχο. Βάσει αυτού του πεδίου, υπολογίζεται με την κλασική μέθοδο gradient descent ο παραμετρικός νόμος ελέγχου της μεταφορικής κίνησης του τελικού στοιχείου δράσης πάνω στο επίπεδο.

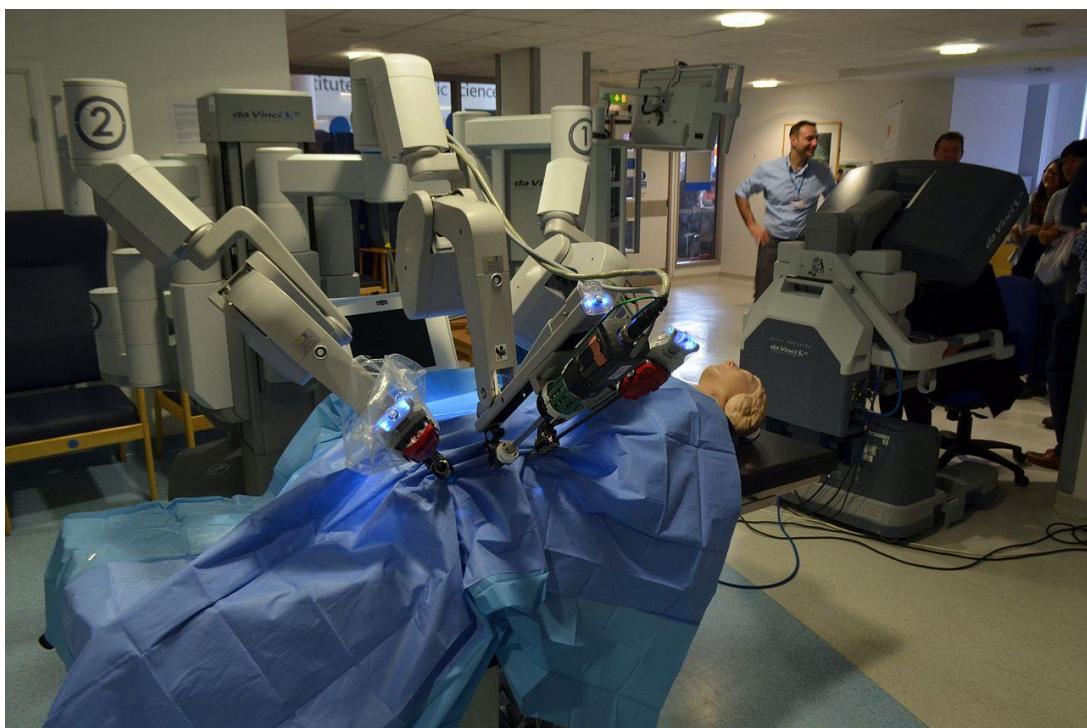
Ως ρομποτικός χειριστής της πειραματικής διάταξης αξιοποιείται ένας σειριακός ρομποτικός βραχίονας 6 βαθμών ελευθερίας. Κατασκευάζεται από την αρχή, με 3D εκτύπωση όλων των δομικών κομματιών του. Η συναρμολόγησή του γίνεται με τους απαιτούμενους ηλεκτρικούς επενεργητές και ιδιοδεκτικούς ηλεκτρονικούς αισθητήρες, που λαμβάνουν / στέλνουν σήματα από / προς τον υπολογιστή μέσω ενός μικροελεγκτή. Μία λεπτή κυλινδρική ράβδος τοποθετείται στη θέση του τελικού στοιχείου δράσης. Για τον σχεδιασμό της τροχιάς του συνδυάζονται τα αποτελέσματα του νόμου ελέγχου, μαζί με τις εξισώσεις αντίστροφης διαφορικής κινηματικής του βραχίονα. Επειδή ένας 6 DOF βραχίονας δεν είναι ειδικά σχεδιασμένος για κίνηση στο επίπεδο, δοκιμάζονται κι άλλοι, πιο ταϊριαστοί με την εφαρμογή ρομποτικού χειριστές (π.χ. Gantry, Scara), όμως μονάχα σε περιβάλλον προσομοίωσης στον υπολογιστή.

Για την επίλυση του πειραματικού προβλήματος και την αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της εργασίας, αναπτύσσεται επίσης μια πλήρης γραφική διεπαφή με τη δημοφιλή γλώσσα προγραμματισμού python. Στόχος μου είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη αυτοματοποίηση ολόκληρης της διαδικασίας, ώστε να προσφέρεται στον χρήστη άνεση και ευκολία. Η εφαρμογή επιτρέπει τη σχεδίαση, μοντελοποίηση και

κινηματική ανάλυση ποικίλων σειριακών ρομποτικών χειριστών. Προσφέρει ακόμα δυνατότητες ελέγχου της κίνησης ενός πραγματικού ρομποτικού συστήματος, μέσω σειριακής σύνδεσης με τον υπολογιστή. Διαθέτει βέβαια και όλες τις απαραίμενες λειτουργίες για την αναγνώριση και καταγραφή των εμποδίων, τον μετασχηματισμό του πραγματικού επύπεδου χώρου εργασίας, τη σχεδίαση του νόμου ελέγχου πλοήγησης, καθώς και την υλοποίηση της υπολογισμένης τροχιάς του εκάστοτε προσομοιωμένου ή πραγματικού ρομποτικού χειριστή.



Εικόνα 1 Αυτόνομη ηλεκτρική σκούπα καθαρισμού Roomba



Εικόνα 2 Χειρουργικό ρομποτικό σύστημα Da Vinci

English summary of the Diploma Thesis

Over the past few decades, robotic applications have massively and rapidly expanded into nearly every aspect of our daily lives. Among others, they are found in household spaces (e.g., self-driving vacuum cleaners), in industry (robotic arms for sorting and product manufacturing), in the field of agricultural production (using drones to monitor and survey large, cultivated areas), as well as in the medical field (with the introduction of robotic operators for conducting complex surgeries). In many such applications, robotic systems need to know the state of their environment with precision at any given moment, so that they can navigate within it and react effectively to potential changes. Furthermore, the increasing interaction between robots and humans necessitates the reliable operation of the former for the safety of the latter.

In this context, the problem of avoiding a robot's collision with its environment (whether these are humans or objects treated as obstacles) has evolved into a major and central problem to be solved in the scientific fields of robotics and automatic control. In this thesis, I study a part of this complex issue: the avoidance of static obstacles placed on a flat workspace. Specifically, the goal is to navigate the end effector of a robotic manipulator from any initial position on the flat workspace to any different final target position, ensuring the avoidance of collisions with the existing obstacles.

The obstacles are 3D-printed, prismatic solids of arbitrary shape but of the same height; hence, I am interested in the two-dimensional geometry of the boundary of their upper surface. This recognition is achieved with a simple camera and modern image processing methods. Therefore, an accurate digital representation of the flat workspace is created, which can be fed into an appropriate control law that will produce the desired path in the obstacle-free space. Since the recorded workspace has a rather complex form, it needs to be mathematically simplified by applying successive transformations, specifically a harmonic and a linear mapping. In the final transformed space, an artificial scalar potential field (based on a harmonic function and its properties) is constructed, aiming to guide the end effector of the robotic manipulator away from the obstacles and toward the target point. Based on this field, the parametric control law for the translational motion of the end effector on the plane is calculated using the classic gradient descent method.

A 6-degree-of-freedom serial robotic arm is used as the manipulator in the experimental setup. It is constructed from scratch, with all its structural components 3D-printed. It is assembled with the required electric actuators and proprioceptive electronic sensors, which send/receive signals to/from the computer via a microcontroller. A thin cylindrical rod is placed in the end effector's position. For the trajectory design, the control law results are combined with the inverse differential kinematics equations of the arm. Since a 6-DOF arm is not specifically designed for planar motion, other robotic manipulators better suited to the application (e.g., Gantry, Scara) are also tested, but only in a computer simulation environment.

To solve the described problem and reproduce the results of the research, a complete graphical user interface is also developed using the popular Python programming language. My goal is to automate the entire process as much as possible, offering the user convenience and ease. The application allows for the design, modeling, and kinematic analysis of various serial robotic manipulators. It also offers the capability to control the movement of a real robotic system via serial connection to a computer. Additionally, it includes all the necessary functions for recognizing and recording obstacles, transforming the real flat workspace, designing the navigation control law, as well as implementing the calculated trajectory of each simulated or real robotic manipulator.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	10
a. Σχετική βιβλιογραφία και προηγούμενες εργασίες.....	10
b. Συνεισφορές της διπλωματικής εργασίας	10
c. Περίγραμμα ενοτήτων.....	11
2. Περιγραφή του 6 DOF ρομποτικού βραχίονα Thor	12
a. Υλικό μέρος (Hardware).....	13
i. Μηχανολογικό κομμάτι.....	13
▪ 3D εκτύπωση του σώματος του βραχίονα.....	13
▪ Μηχανισμοί κίνησης των αρθρώσεων	15
ii. Ηλεκτρολογικό – ηλεκτρονικό κομμάτι	17
▪ Βηματικοί κινητήρες (stepper motors) και οδηγοί (drivers).....	17
▪ Οπτικοί τερματικοί διακόπτες (optical endstops).....	19
▪ Μικροτερματικός διακόπτης (micro endstop)	20
▪ Μικροελεγκτής (microcontroller) Arduino Mega 2560	21
▪ Πλακέτα PCB (Printed Circuit Board)	21
▪ Καλώδια συνδέσεων	24
b. Λογισμικό μέρος (Software)	25
i. Σύντομη ανασκόπηση του firmware GRBL	25
ii. Δημιουργία του μοντέλου προσομοίωσης του βραχίονα	26
iii. Ανάπτυξη της γραφικής διεπαφής ελέγχου του συστήματος.....	28
c. Προβλήματα κατά τη συναρμολόγηση και αντιμετώπισή τους.....	33
3. Ανάλυση της κινηματικής του ρομποτικού βραχίονα.....	34
a. Ευθεία κινηματική	34
b. Αντίστροφη κινηματική	38
c. Διαφορική κινηματική	38
d. Αντίστροφη διαφορική κινηματική	40
4. Θεωρητική μελέτη του προβλήματος αποφυγής εμποδίων στο επίπεδο	41
a. Περιγραφή του χώρου εργασίας του ρομποτικού βραχίονα.....	42
i. Προσβάσιμος και επιθυμητός χώρος εργασίας.....	42
ii. Πραγματικός χώρος εργασίας με τα εμπόδια	45
b. Αρμονικές συναρτήσεις – Ορισμός και ιδιότητες	46
c. Μετασχηματισμός του πραγματικού χώρου των εμποδίων.....	47
i. Μετασχηματισμός από τον πραγματικό χώρο στον σφαιρικό	47

ii.	Μετασχηματισμός από τον σφαιρικό χώρο στο επίπεδο \mathbb{R}^2	53
d.	Σχεδίαση του νόμου ελέγχου με τη μέθοδο gradient descent	55
i.	Εύρεση των κατευθύνσεων κίνησης στον τελικό μετασχηματισμένο χώρο	55
ii.	Εύρεση των ταχυτήτων στον πραγματικό χώρο των εμποδίων	57
iii.	Εύρεση των ταχυτήτων των αρθρώσεων του βραχίονα	60
5.	Αναγνώριση των εμποδίων με χρήση κάμερας	62
a.	Τεχνικά χαρακτηριστικά της κάμερας	62
b.	Αναγνώριση των παραμέτρων της κάμερας	63
i.	Περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου	63
ii.	Βαθμονόμηση και διόρθωση της παραμόρφωσης	66
c.	Ανίχνευση των εμποδίων	68
i.	Εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού του επιπέδου των εμποδίων	68
ii.	Προσδιορισμός των συνόρων των εμποδίων σε pixels	70
▪	Μετατροπή της εικόνας από RGB σε άσπρο – μαύρο	71
▪	Προβολή του επιπέδου των εμποδίων στην εικόνα	71
▪	Εύρεση των 2D pixels συντεταγμένων των συνόρων	72
▪	Επεξεργασία και ανάλυση των 2D συνόρων	74
iii.	Μετατροπή των συνόρων των εμποδίων από pixels σε 3D σημεία κόσμου	75
6.	Εφαρμογή του νόμου ελέγχου κίνησης και υπολογισμός τροχιών – Παρουσίαση προσομοιώσεων, πειραμάτων και αποτελεσμάτων	79
a.	Έλεγχος κίνησης σε πραγματικούς χώρους εργασίας με εμπόδια	81
b.	Υπολογισμός τροχιών για τον ρομποτικό βραχίονα Thor	87
c.	Υπολογισμός τροχιών άλλων ρομποτικών χειριστών στην προσομοίωση	93
7.	Συμπεράσματα και μελλοντικοί στόχοι	96
8.	Αναφορές στο διαδίκτυο – Βιβλιογραφία	97
9.	Παράρτημα εικόνων από το διαδίκτυο	100

1. Εισαγωγή

a. Σχετική βιβλιογραφία και προηγούμενες εργασίες

Για την κινηματική ανάλυση σειριακών ρομποτικών χειριστών ανοιχτής κινηματικής αλυσίδας, οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι είναι η κλασική σύμβαση των Denavit – Hartenberg [1] και η τροποποιημένη μορφή της [2]. Μία εναλλακτική, πιο σύγχρονη μέθοδος είναι η POE (product of exponentials) [3]. Εντούτοις, σ' αυτήν την εργασία θα αναλύσω την κινηματική (ευθεία, διαφορική και αντίστροφες) του ρομπότ με βάση την κλασική σύμβαση DH.

Η σχεδίαση της τροχιάς του τελικού στοιχείου δράσης πάνω στον επίπεδο χώρο εργασίας απαιτεί τόσο τις εξισώσεις κινηματικής, όσο και την εύρεση μιας διαδρομής που να μη συγκρούεται με τα εμπόδια. Υπάρχουν πιθανοτικές μέθοδοι δειγματοληψίας που αποσυνθέτουν τον συνεχή χώρο εργασίας σε ένα διακριτό γράφο, π.χ. με τη βοήθεια RRTs (Rapidly-exploring Random Trees) [4], και στη συνέχεια παράγουν μια βέλτιστη διαδρομή με αλγορίθμους αναζήτησης σε γράφο, όπως ο A^* . Άλλες μέθοδοι, πιο κοντά στον αυτόματο έλεγχο σε σχέση με τις προηγούμενες αλγορίθμικές, βρίσκουν διαδρομές εντός του σύνθετου συνεχή χώρου εργασίας, μετασχηματίζοντάς τον πρώτα σε έναν ευκολότερα διαχειρίσιμο χώρο όπου κατασκευάζονται ειδικές συναρτήσεις πλοήγησης. Σ' αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι εργασίες [5] και [6] που μετασχηματίζουν τον πραγματικό χώρο σε έναν σφαιρικό, η πρώτη με μία αρμονική απεικόνιση και η δεύτερη με μία σύμμορφη. Έπειτα, δημιουργούν στον σφαιρικό χώρο βαθμωτά δυναμικά πεδία πλοήγησης (η πρώτη στηριζόμενη σε AHPFs -Harmonic Artificial Potential Fields- και η δεύτερη στη συνάρτηση Koditschek-Rimon [7]), τα οποία έχουν μοναδικό ελάχιστο στο σημείο – στόχο, οπότε ένας νόμος ελέγχου βασισμένος στη μέθοδο gradient descent δίνει τις κατάλληλες κατευθύνσεις κίνησης. Εξασφαλίζουν καθολική ασυμπτωτική σύγκλιση στο επιθυμητό σημείο – στόχο από σχεδόν όλες τις αρχικές θέσεις, αλλά εφαρμόζονται κυρίως σε στατικά, μη τεμνόμενα εμπόδια (βέβαια η [5] γίνεται να επεκταθεί και σε δυναμικά περιβάλλοντα). Με την αντιμετώπιση κινούμενων και τεμνόμενων (λόγω της κίνησης ή της τεχνητής αύξησης των συνόρων τους) εμποδίων ασχολείται η εργασία [8], όπου ο πραγματικός χώρος μετασχηματίζεται σε έναν χώρο ασύνδετων, αστεροειδών (starshaped) εμποδίων.

Η αναγνώριση τώρα των συντεταγμένων των εμποδίων στο περιβάλλον απαιτεί τη γνώση της απόστασής τους από την κάμερα. Η εκτίμηση του βάθους μπορεί να επιτευχθεί με χρήση ειδικού εξοπλισμού, όπως κάμερες ανίχνευσης βάθους RGB-D (depth-sensing cameras), τεχνολογία LiDAR (Light Detection And Ranging), ή και με τη λήψη στερεοσκοπικών φωτογραφιών [9]. Μεγαλύτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τεχνικές εκτίμησης του βάθους των pixels σε στατικές εικόνες που έχουν ληφθεί με συμβατικό τρόπο, δηλαδή με απλές κάμερες RGB. Σε αυτό το πλαίσιο, έχουν προταθεί κυρίως τεχνικές μηχανικής μάθησης με χρήση νευρωνικών δικτύων. Κάποιες από αυτές εκπαιδεύονται με εποπτευόμενη μάθηση σε ένα σύνολο εικόνων με γνωστά καθολικά ή/και τοπικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά (καλούνται ground – truths), όπως οι [10] και [11]. Άλλες χρησιμοποιούν μη εποπτευόμενη μάθηση και στερεοσκοπικές εικόνες ή χρονική ακολουθία εικόνων [12].

b. Συνεισφορές της διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζω τεχνικές αποφυγής στατικών πρισματικών εμποδίων, αυθαίρετης γεωμετρίας και κυρτότητας, που τοποθετούνται σε ένα επίπεδο. Ενώ οι εργασίες [5], [6] και [8] που προαναφέρθηκαν δοκιμάζουν τη θεωρητική τους ανάλυση σε έντροχα αυτοκινούμενα ρομπότ, εδώ χρησιμοποιώ ως πειραματική διάταξη ένα πιο σύνθετο ρομποτικό σύστημα, αυτό ενός ρομποτικού βραχίονα 6 βαθμών ελευθερίας (εξετάζω ακόμα κι άλλους ρομποτικούς χειριστές σε προσομοίωση). Για την εύρεση της τροχιάς του τελικού στοιχείου δράσης πάνω στο επίπεδο των εμποδίων, απεικόνισα

αρχικά τον πραγματικό χώρο εργασίας πάνω στον μοναδιαίο κυκλικό δίσκο με τη βοήθεια ενός αρμονικού χάρτη, όπως στην [5]. Επιπλέον, προχώρησα σε έναν νέο, ακτινικό μετασχηματισμό, από τον κυκλικό δίσκο προς το επίπεδο \mathbb{R}^2 . Εκεί, κατασκεύασα ένα κατάλληλο βαθμωτό δυναμικό πεδίο πλοϊγησης με ολικό ελάχιστο στο σημείο – στόχο και εφάρμοσα τον παραμετρικό νόμο ελέγχου gradient descent της [5], όμως με παραλλαγμένη και απλοποιημένη μορφή για να ανταποκρίνεται στον δεύτερο μετασχηματισμό που εισήγαγα. Για την αναγνώριση των εμποδίων αξιοποίησα μία RGB κάμερα, εκτιμώντας την απόστασή τους από αυτήν με τη χρήση της γνωστής διαμόρφωσης του επιπέδου των εμποδίων στον 3D χώρο, την οποία ανέκτησα με τη βοήθεια ενός δείκτη ArUco προσκολλημένου σε μια γνωστή θέση του επιπέδου. Πρόκειται για μια αρκετά οικονομική διαδικασία, που θεωρεί γνωστά πραγματικά δεδομένα μονάχα τον δείκτη ArUco και το κοινό ύψος των πρισματικών εμποδίων. Τέλος, ένα επίσης σημαντικό και πρωτότυπο στοιχείο της διπλωματικής είναι ο προγραμματισμός γραφικής διεπαφής σε python, για την εύκολη σύνθεση και δοκιμή ποικίλων μοντέλων ρομποτικών χειριστών, την επίλυση του θεωρητικού ζητήματος της εργασίας και την προσομοίωση της πειραματικής διάταξης και της τροχιάς του ρομπότ.

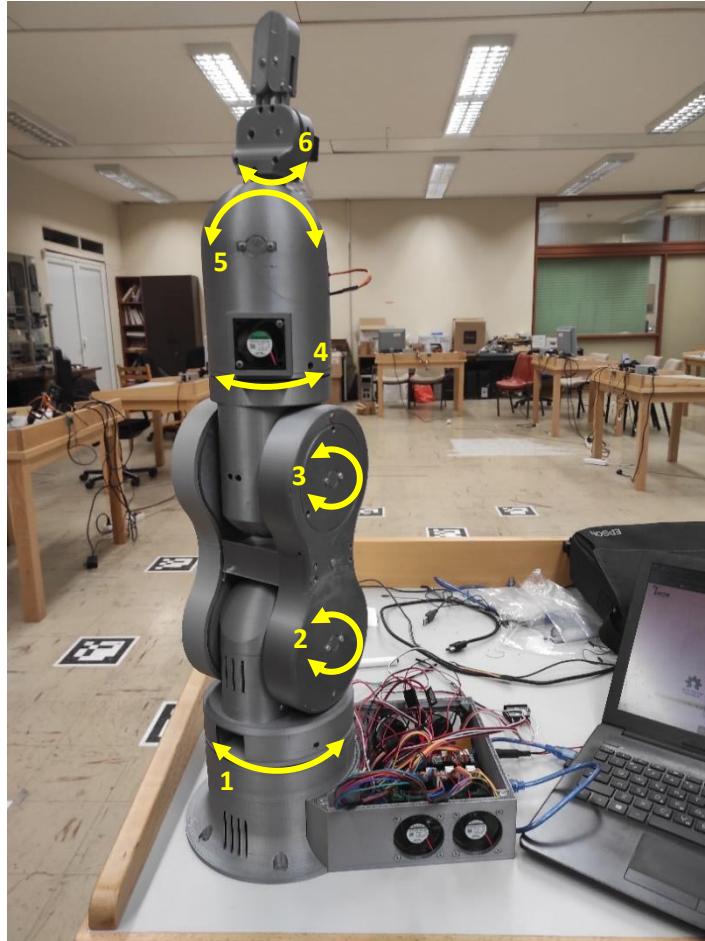
c. Περίγραμμα ενοτήτων

Η εργασία διαιρείται σε 9 ενότητες, τα περιεχόμενα των οποίων παρατίθενται συνοπτικά εδώ:

- 1) Η ενότητα 1 (η τρέχουσα) είναι η εισαγωγή της διπλωματικής. Περιγράφει μέρος της βιβλιογραφίας σχετικό με το πρόβλημα που εξετάζω, καθώς και τις όποιες συνεισφορές της εργασίας στο σχετικό επιστημονικό πεδίο του ελέγχου κίνησης ρομποτικών χειριστών για αποφυγή εμποδίων.
- 2) Στην ενότητα 2 υπάρχει μία εκτεταμένη περιγραφή του 3D εκτυπώσιμου ρομποτικού χειριστή Thor, που αξιοποιήθηκε στο πειραματικό σκέλος της εργασίας. Εδώ παρατίθενται και εξηγούνται όλα τα μηχανολογικά και ηλεκτρολογικά – ηλεκτρονικά υλικά του βραχίονα. Επίσης, αναφέρεται το ήδη υπάρχον λογισμικό αλλά και αυτό που υλοποιήθηκε από την αρχή, για την ψηφιακή αναπαράσταση και τον έλεγχο του ρομπότ, καθώς και τη διαχείριση του περιβάλλοντός του.
- 3) Η ενότητα 3 περιέχει την πλήρη κινηματική ανάλυση του ρομποτικού βραχίονα Thor. Ειδικότερα, αναλύονται η ευθεία και η διαφορική κινηματική, καθώς οι αντίστοιχες αντίστροφες κινηματικές.
- 4) Στην ενότητα 4 πραγματοποιείται η θεωρητική μελέτη του προβλήματος αποφυγής εμποδίων στο επίπεδο. Πρώτον, ερμηνεύονται οι διαδοχικοί μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται στον πραγματικό χώρο εργασίας των εμποδίων. Δεύτερον, σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου στον μετασχηματισμένο χώρο και κατόπιν μεταφράζεται σε ταχύτητες στον πραγματικό χώρο. Τρίτον, εξάγονται οι ταχύτητες που πρέπει να εφαρμοστούν στις αρθρώσεις του ρομποτικού χειριστή.
- 5) Στην ενότητα 5 εξηγούνται τα βήματα ανίχνευσης των εμποδίων στο επίπεδο. Εδώ περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της αξιοποιούμενης κάμερας και αναλύεται το μαθηματικό της μοντέλο. Αυτό χρησιμεύει, σε συνδυασμό με αλγορίθμικές μεθόδους, στην ακριβή εκτίμηση της διαμόρφωσης του επιπέδου των εμποδίων, καθώς και των ίδιων των εμποδίων, στον 3D χώρο.
- 6) Η ενότητα 6 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της εφαρμογής του νόμου ελέγχου (σχεδιάστηκε στην ενότητα 4), στον προσομοιωμένο και στον πραγματικό ρομποτικό βραχίονα Thor, με σκοπό την αποφυγή των εμποδίων (αναγνωρίστηκαν στην ενότητα 5). Επιπλέον, εξετάζεται η ισχύ του νόμου ελέγχου και σε άλλα, διαφορετικά μοντέλα ρομποτικών χειριστών.
- 7) Στην ενότητα 7 εξάγονται συμπεράσματα από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και των πειραμάτων. Τέλος, σχεδιάζονται πιθανοί μελλοντικοί στόχοι που δεν υλοποιήθηκαν στην εργασία.
- 8) Στην ενότητα 8 καταγράφονται η βιβλιογραφία που μελετήθηκε, καθώς και οι αναφορές από το διαδίκτυο από τις οποίες αντλήθηκαν πληροφορίες σχετικές με το θέμα της διπλωματικής.
- 9) Στην ενότητα 9 καταγράφονται οι διαδικτυακές ιστοσελίδες στις οποίες βρίσκονται ορισμένες από τις εικόνες που εμφανίζονται στη διπλωματική.

2. Περιγραφή του 6 DOF ρομποτικού βραχίονα Thor

Ο ρομποτικός βραχίονας Thor είναι ένα open source project σε όλα τα επίπεδα, με ελεύθερα διαθέσιμη ολόκληρη τη διαδικασία κατασκευής του και ανοιχτό κώδικα για τον έλεγχό του [13]. Έχει σχεδιαστεί εξολοκλήρου από τον Ισπανό μηχανικό ρομποτικής Ángel Larrañaga Muro [14] και αναπτύσσεται διαρκώς από το 2016 μέχρι και σήμερα, τόσο από τον ίδιο όσο και από τις συνεισφορές της σχετικής κοινότητας παγκοσμίως. Η υποστηρικτική δομή του (αλλιώς το σώμα του) αποτελείται από 3D εκτυπώσιμα κομμάτια. Είναι ένας βραχίονας ανοιχτής κινηματικής αλυσίδας (σειριακός ρομποτικός χειριστής) με 6 βαθμούς ελευθερίας (6 DOF). Όλες οι αρθρώσεις του είναι περιστροφικές και βρίσκονται σε διάταξη yaw – pitch – pitch – yaw – pitch – yaw (ή yaw – roll – roll – yaw – roll – yaw, αναλόγως τη θεώρηση των αξόνων x και y) με τη σειρά, από τη βάση του βραχίονα μέχρι και το τελικό στοιχείο δράσης. Στην Εικόνα 3 φαίνεται ο ολοκληρωμένος Thor, με σημειωμένες τις αρθρώσεις του και την κίνησή τους. Αυτή η διάταξη αποτελεί ίσως τη συνηθέστερη για τους γνωστότερους ρομποτικούς βραχίονες που κυκλοφορούν στη βιομηχανία ή/και χρησιμοποιούνται για ερευνητικούς σκοπούς, όπως οι ABB IRB 6700 (π.χ. ο ABB IRB 6700-150/3.20 LeanID στην Εικόνα 4) και οι KUKA KR QUANTEC (π.χ. ο KUKA KR6 R90-SIXX στην Εικόνα 5). Πρόκειται λοιπόν για βραχίονες με παρόμοια κινηματική ανάλυση που στοχεύουν στον χειρισμό αντικειμένων, όμως διαφέρουν μεταξύ άλλων στις διαστάσεις τους, στο πεδίο εφαρμογής τους και στις δυναμικές τους απαιτήσεις και δυνατότητες.



Εικόνα 3: Ρομποτικός βραχίονας Thor



Εικόνα 4: ABB IRB 6700-150/3.20 LeanID



Εικόνα 5: KUKA KR6 R90-SIXX

Για την ευκολότερη μελέτη του Thor, έχω καταμερίσει την ανάλυση του σε δύο βασικά τμήματα: στο υλικό μέρος (hardware) και στο λογισμικό μέρος (software). Στο υλικό μέρος περιλαμβάνεται ότι έχει σχέση με τη 3D εκτύπωση και τη συναρμολόγηση του βραχίονα, τα μηχανολογικά, ηλεκτρολογικά και ηλεκτρονικά εξαρτήματα που αγοράστηκαν και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν. Στο λογισμικό μέρος καταγράφονται το λογισμικό και η γραφική διεπαφή που απαιτήθηκαν για τον έλεγχο του βραχίονα καθώς και το ψηφιακό μοντέλο που κατασκευάστηκε για την προσομοίωση του Thor στον υπολογιστή. Τέλος, θα γίνει μία συνοπτική επισκόπηση ολόκληρης της διαδικασίας συναρμολόγησης που ένωσε όλα τα προαναφερθέντα επιμέρους μέρη στο επιθυμητό λειτουργικό σύνολο. Θα επισημανθούν ακόμη τα βασικότερα προβλήματα που συναντήθηκαν και οι τρόποι επίλυσής τους που μεταχειριστήκαμε με τον συνάδελφό μου.

a. Υλικό μέρος (Hardware)

Διακρίνω το υλικό μέρος του ρομποτικού βραχίονα σε δύο κατηγορίες: στο μηχανολογικό και στο ηλεκτρολογικό/ηλεκτρονικό τμήμα. Προφανώς, κάποια στοιχεία ενδέχεται να εντάσσονται και στις δύο αυτές κατηγορίες. Έτσι, επέλεξα τον διαχωρισμό τους με βάση το πού θεωρώ ότι η λειτουργία τους παίζει καθοριστικότερο ρόλο.

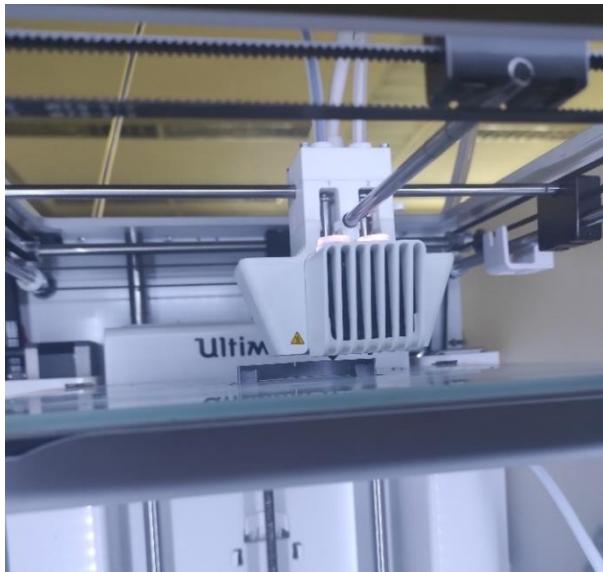
i. Μηχανολογικό κομμάτι

▪ 3D εκτύπωση του σώματος του βραχίονα

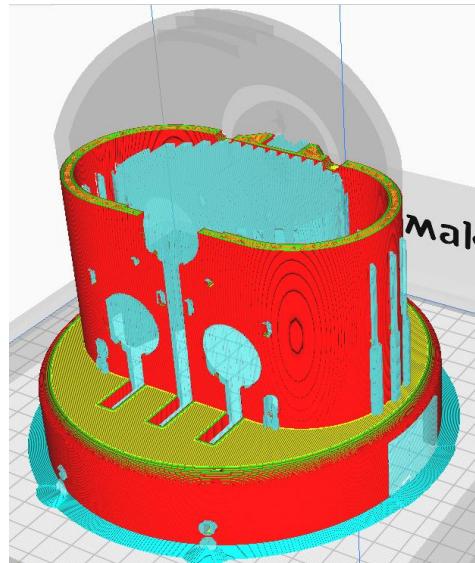
Για την εκτύπωση του σώματος του ρομποτικού βραχίονα Thor αξιοποιήθηκαν διάφοροι 3D εκτυπωτές, για να εκμεταλλευτούμε τα σημεία υπεροχής του καθενός έναντι των άλλων. Ειδικότερα, εργαστήκαμε (κατά σειρά φθίνουσας χρονικής διάρκειας χρήσης) με τον UltiMaker 3 Extended (παρουσιάζεται εν λειτουργία στην Εικόνα 6), τον Ender 5 Plus (Εικόνα 9) και τον XYZ printing PRO (Εικόνα 8). Μερικά από τα κοινά τεχνικά χαρακτηριστικά τους είναι η επίπεδη πλάκα πάνω στην οποία τυπώνονται τα τριδιάστατα αντικείμενα, το ακροφύσιο από το οποίο εξέρχεται το υλικό εκτύπωσης υπό τη μορφή παχύρρευστου νήματος και ένα σύστημα ραγών, ιμάντων και βηματικών κινητήρων που δημιουργούν έναν καρτεσιανό 3D χώρο εργασίας για την κίνηση του ακροφυσίου και της πλάκας. Επιπλέον, διαθέτουν σύστημα ελέγχου της θερμοκρασίας με θερμαντήρες και ανεμιστήρες, καθώς και μία μικρή οθόνη για τη ρύθμιση των παραμέτρων και λειτουργιών του εκτυπωτή, όπως η θερμοκρασία της πλάκας και του ακροφυσίου, η βαθμονόμηση της πλάκας (χειροκίνητη ή αυτόματη) και η φόρτωση / εκφόρτωση του υλικού εκτύπωσης. Ο Ultimaker αποδείχθηκε ο πιο αξιόπιστος από τους τρεις, παράγοντας κομμάτια υψηλής ποιότητας, με το διπλό του ακροφύσιο να επιτρέπει την παράλληλη εξαγωγή δύο ειδών υλικού κατά τη διάρκεια της ίδιας εκτύπωσης. Ωστόσο, οι μικρές διαστάσεις της πλάκας του (215 mm x 215 mm) δυσκόλευαν την εκτύπωση των μεγαλύτερων σε μέγεθος κομματιών, τα οποία τελικά κατασκευάστηκαν με τον Ender (350 mm x 350 mm). Ο XYZ printing PRO χρησίμευσε στις εκτυπώσεις που απαιτούσαν τη διατήρηση υψηλότερων θερμοκρασιών, αφού περικλείεται από κλειστό προστατευμένο θάλαμο που διατηρεί σταθερές τις συνθήκες στο εσωτερικό περιβάλλον του.

Πειραματιστήκαμε με ποικίλα είδη πλαστικών υλικών 3D εκτύπωσης: PLA (Polylactic Acid ή polylactide), ABS (Acrylonitrile Butadiene Styrene), άσπρο breakaway και PVA (Polyvinyl Alcohol). Το PLA είναι το πιο κοινό από αυτά, επιλέγεται λόγω της ευκολίας στη χρήση, της ανθεκτικότητάς του και της υψηλής ποιότητας εκτύπωσης, και συνθέτει το 90% – 95% του σώματος του Thor. Το υπόλοιπο ποσοστό είναι ABS, το οποίο τυπώνεται και αντέχει σε μεγαλύτερες θερμοκρασίες σε σχέση με το PLA. Το ABS χρησιμοποιείται σε γρανάζια και σε άλλα μικρά κομμάτια που βρίσκονται κοντά στους κινητήρες του

βραχίονα, όπου αναπτύσσεται έντονη θερμότητα. Τέλος, το άσπρο breakaway και το PVA λειτουργούν ως υποστηρικτικά δευτερεύοντα υλικά, που αφαιρούνται αμέσως μετά την εκτύπωση. Η μέθοδος απομάκρυνσής τους διαφέρει, αφού το PVA διαλύεται στο νερό, ενώ το breakaway σπάει πολύ εύκολα με τα χέρια ή με μία πένσα. Τα υποστηρίγματα είναι αναγκαία σε εσοχές (όπως ανοίγματα για βίδες και παξιμάδια) ή προεξοχές στη 3D εκτύπωση, οι οποίες αλλιώς θα κατέρρεαν υπό το βάρος τους.



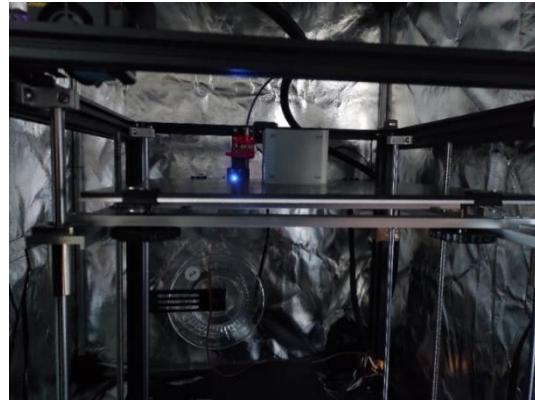
Εικόνα 6 UltiMaker 3 Extended



Εικόνα 7 Τεμαχισμός ενδεικτικού 3d mesh στο πρόγραμμα UltiMaker Cura



Εικόνα 8 XYZ printing PRO



Εικόνα 9 Ender 5 Plus

Τα 3D εκτυπώσιμα κομμάτια ζυγίζουν 3.5 – 4.5 kg (αναλόγως του υλικού και της εσωτερικής πυκνότητάς τους), αντιπροσωπεύοντας έτσι το 50% – 60% της συνολικής μάζας του ρομποτικού βραχίονα. Έχουν σχεδιαστεί εξολοκλήρου στο δωρεάν και ανοιχτού κώδικα πρόγραμμα FreeCAD [15], το οποίο υποστηρίζεται σε όλες τις γνωστές πλατφόρμες (Windows, Linux, MacOS). Πρόκειται για ένα γενικής χρήσεως λογισμικό CAD (Computer Aided Design), που στοχεύει κυρίως στη 3D παραμετρική σχεδίαση και μοντελοποίηση πραγματικών αντικειμένων οποιωνδήποτε διαστάσεων, και χρησιμοποιείται από μηχανολόγους μηχανικούς, αρχιτέκτονες και σχεδιαστές προϊόντων.

Τα κομμάτια του σώματος του βραχίονα βρίσκονται σε 50 περίπου STL αρχεία (stereolithography ή Standard Triangle Language), με ορισμένα από αυτά, ιδίως τα μικρότερα, να επαναλαμβάνονται σε πολλά σημεία της κατασκευής. Η STL μορφή είναι η συνηθέστερη για την αποθήκευση της πληροφορίας τριδιάστατων αντικειμένων και μοντέλων. Πιο συγκεκριμένα, περιέχει τη γεωμετρική πληροφορία της εξωτερικής επιφάνειας που οριθετεί τον όγκο ενός 3D σχήματος, η οποία περιλαμβάνει τις

συντεταγμένες σημείων (κορυφές) στον χώρο, τα τρίγωνα που τις ενώνουν και ισάριθμα μοναδιαία διανύσματα που δηλώνουν την κατεύθυνση των τριγωνικών επιφανειών και είναι κάθετα σε αυτές. Δεν αποθηκεύονται όμως χρώματα, υφές ή άλλα χαρακτηριστικά του υλικού του 3D αντικειμένου. Δημιουργούνται έτσι τριδιάστατες δομές που ονομάζονται meshes.

Τα meshes των STL δεν μπορούν να τυπωθούν απευθείας, διότι δεν διαθέτουν δεδομένα για την εσωτερική διάρθρωση των 3D σχημάτων. Το εσωτερικό των meshes γεμίζεται από προγράμματα τεμαχισμού (slicers), όπως ο UltiMaker Cura (Εικόνα 7), που εφαρμόζουν γεωμετρικούς αλγορίθμους για τον σχηματισμό επίπεδων και παράλληλων στην πλάκα στρωμάτων, τα οποία τυπώνονται σταδιακά από κάτω προς τα πάνω. Οι προτεινόμενες ρυθμίσεις για τον slicer, στην περίπτωση του Thor, είναι 0.3 mm πάχος στρωμάτων, 3 – 4 τοίχοι για το εξωτερικό περίβλημα και 20 % εσωτερική πυκνότητα υλικού. Επιπλέον ρυθμίσεις αφορούν στο εσωτερικό μοτίβο των στρωμάτων, στην ταχύτητα εκτύπωσης, στη θερμοκρασία, και στη δημιουργία των υποστηρικτικών δομών. Τελικά, ο slicer παράγει ένα σύνολο εντολών G-Code με κωδικοποιημένες όλες τις οδηγίες της διαδικασίας εκτύπωσης, όπως το χρονοδιάγραμμα κίνησης και οι μεταβολές της θερμοκρασίας του ακροφυσίου και της πλάκας.

▪ Μηχανισμοί κίνησης των αρθρώσεων

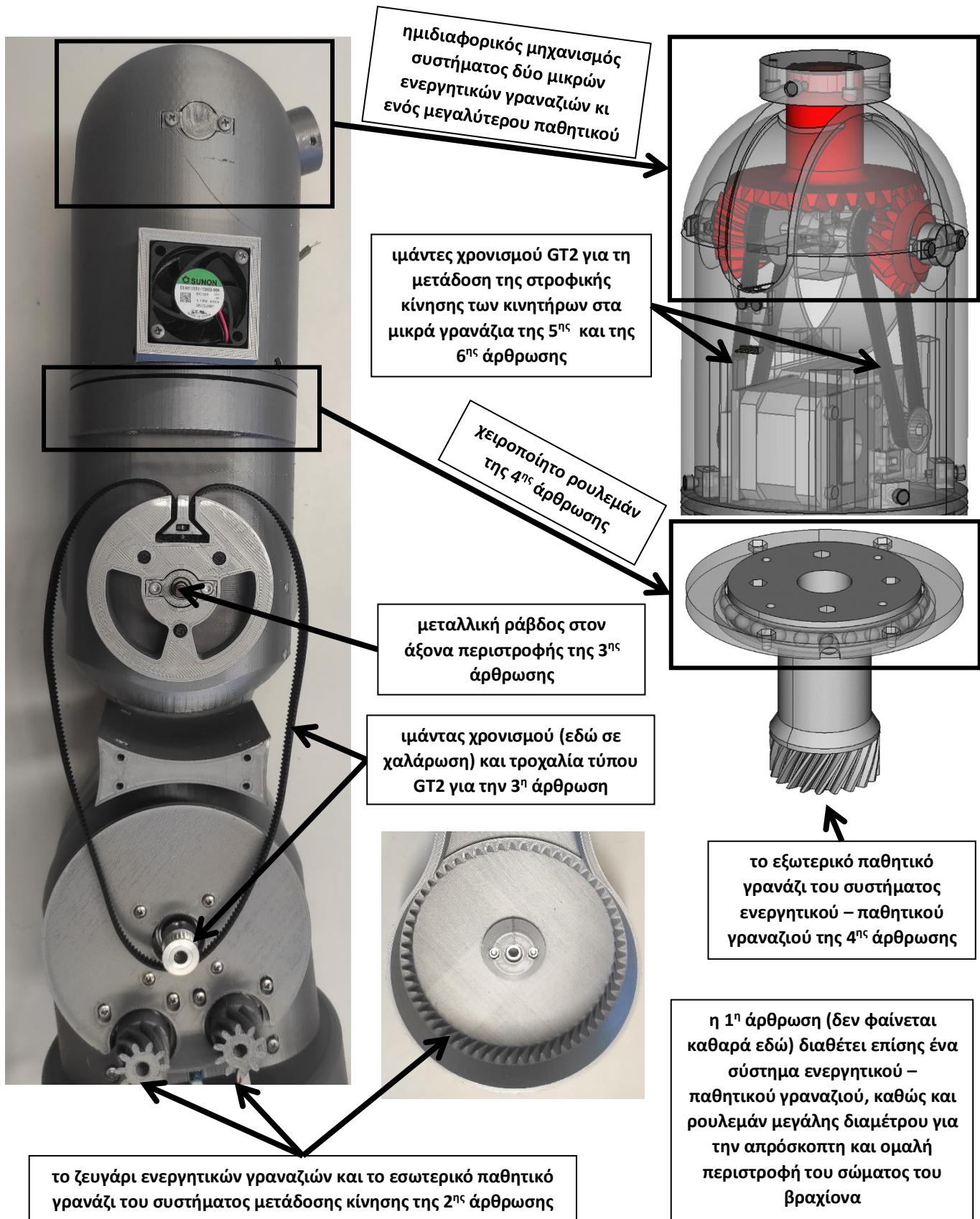
Όλες οι αρθρώσεις του βραχίονα Thor λειτουργούν με επενεργητές περιστροφικής κίνησης, που είναι βηματικοί κινητήρες (περιγράφονται λεπτομερώς στο ηλεκτρολογικό τμήμα της κατασκευής). Παρακάτω, καταγράφονται αναλυτικά οι τρεις διαφορετικοί μηχανισμοί μετάδοσης της γωνιακής ταχύτητας και της ροπής που παράγει ο κάθε επενεργητής (η υλοποίηση τους φαίνεται στην Εικόνα 10).

Πρώτον, υπάρχουν τα συστήματα ενεργητικών – παθητικών γραναζιών (active – passive gears) που εντοπίζονται στις αρθρώσεις 1, 2 και 4. Ονομάζω ενεργητικά γρανάζια αυτά που τοποθετούνται στους άξονες των επενεργητών, με αποτέλεσμα να περιστρέφονται άμεσα από τους κινητήρες με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Το σπείρωμα των ενεργητικών γραναζιών έρχεται σε επαφή με αυτό των παθητικών, προκαλώντας την παθητική περιστροφή τους, η γωνιακή ταχύτητα της οποίας εξαρτάται από τον λόγο των διαμέτρων των γραναζιών ως εξής: $\omega_p = \frac{r_a}{r_p} \cdot \omega_a$. Όλα τα γρανάζια του βραχίονα είναι ελικοειδή, με τα ενεργητικά να είναι εξωτερικά (οι αυλακώσεις κατευθύνονται μακριά από τον άξονα περιστροφής) και τα παθητικά να είναι εσωτερικά (οι αυλακώσεις «δείχνουν» ακτινικά προς τον άξονα). Εξαίρεση αποτελεί το παθητικό γρανάζι της άρθρωσης 4 που είναι εξωτερικό.

Δεύτερον, στην άρθρωση 3 έχουμε το σύστημα τροχαλίας – ιμάντα χρονισμού του ίδιου τύπου GT2, που σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δοντιών είναι 2 mm. Ο αντίστοιχος επενεργητής περιστρέφει την τροχαλία, τα δόντια της οποίας εφαρμόζουν τέλεια στον ιμάντα κλειστού βρόχου, που με τη σειρά του ασκεί ροπή σε ένα κυλινδρικό PLA κομμάτι πακτωμένο στον άξονα της άρθρωσης.

Τρίτον, για τις δύο τελευταίες αρθρώσεις έχει σχεδιαστεί ένας μηχανισμός τριών γραναζιών ημιδιαφορικής κίνησης (θα μπορούσε να ενταχθεί και στις δύο πρώτες κατηγορίες, αλλά τον διαχωρίζω λόγω της ιδιαιτερότητάς του). Αν το ζεύγος των μικρών ενεργητικών γραναζιών περιστρέφεται με την ίδια φορά, τότε το μεγάλο παθητικό γρανάζι κλειδώνει και εκτελεί περιστροφή γύρω από τον άξονα των μικρών, ελέγχοντας έτσι την 5^η άρθρωση. Όταν τα μικρά γρανάζια περιστρέφονται με αντίθετες φορές, τότε το μεγάλο γρανάζι περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, ελέγχοντας την 6^η άρθρωση. Η επαλληλία των δύο τύπων κίνησης συμβάλλει στον ταυτόχρονο έλεγχο και των δύο τελευταίων αρθρώσεων.

Ας τονιστεί πως, για να αποφευχθεί η τριβή των PLA κομματιών μεταξύ τους κατά την περιστροφή των αρθρώσεων, χρησιμοποιούμενον ρουλεμάν. Στις αρθρώσεις 1 και 4 υπάρχουν μεγάλα σε μέγεθος ρουλεμάν, με αυτό της 1^{ης} να είναι απευθείας αγορασμένο, ενώ αυτό της 4^{ης} να είναι ενσωματωμένο στο PLA κομμάτι του παθητικού γραναζιού με μία κοιλότητα που φιλοξενεί τις μπίλιες, επιτρέποντας στα κινούμενα μέρη να κυλάνε ομαλά. Ακόμα, στους άξονες των αρθρώσεων 2, 3 και 5, βρίσκονται μεταλλικές ράβδοι που προσαρτώνται στα αντίστοιχα κομμάτια PLA με μικρού μεγέθους ρουλεμάν.



Εικόνα 10 Παρουσίαση των μηχανισμών κίνησης των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα Thor

ii. Ηλεκτρολογικό – ηλεκτρονικό κομμάτι

- **Βηματικοί κινητήρες (stepper motors) και οδηγοί (drivers)**



Εικόνα 11 Οι βηματικοί κινητήρες Nema 17 που χρησιμοποιήθηκαν για τη λειτουργία της 1^{ης} άρθρωσης (αριστερά), της 2^{ης} και 3^{ης} άρθρωσης (κέντρο) και της 4^{ης}, 5^{ης} και 6^{ης} άρθρωσης (δεξιά)

Ως επενεργητές των αρθρώσεων και των συνδέσμων του βραχίονα Thor έχουν επιλεγεί βηματικοί κινητήρες (stepper motors ή steppers), οι οποίοι διαιρούν μια πλήρη περιστροφή 360° γύρω από τον άξονά τους σε διακριτά βήματα. Για να αιτιολογηθεί αυτή η απόφαση, είναι σκόπιμη η αναφορά στις προδιαγραφές κίνησης του βραχίονα, καθώς και η πραγματοποίηση μίας σύντομης σύγκρισης με τις άλλες δυνατές επιλογές, όπως είναι οι σερβοκινητήρες (servo motors) και οι κινητήρες συνεχούς ρεύματος (dc motors) των οποίων η περιστροφή είναι συνεχής. Ας σημειωθεί πως υπάρχει δυνατότητα τοποθέτησης σερβοκινητήρα στο τελικό στοιχείο δράσης για τον χειρισμό κάποιας αρπάγης ή δαγκώνας. Δεν χρειάζομαι όμως κάτι τέτοιο στην εργασία, επειδή το τελικό στοιχείο δράσης που διάλεξα είναι μία στατική ράβδος.

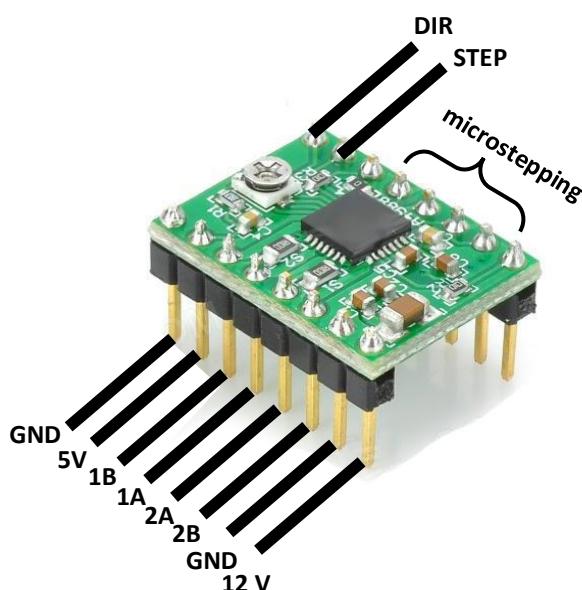
Οι κινήσεις του ρομποτικού βραχίονα Thor πρέπει να χαρακτηρίζονται από υψηλή ακρίβεια και επαναληψιμότητα. Αυτά τα πετυχαίνουν οι βηματικοί κινητήρες χάρη στη διακριτή τους κίνηση, καθώς και στην υψηλή ροπή συγκράτησης (δηλαδή τη ροπή η οποία αντιστέκεται στο φορτίο που προσπαθεί να περιστρέψει τις αρθρώσεις). Επομένως, η κίνησή τους δεν επηρεάζεται από το βάρος του ίδιου του ρομπότ ή ενός επιπρόσθετου φορτίου ($\leq 750 \text{ gr}$ βάσει των τεχνικών στοιχείων του Thor), και μπορούν να διατηρούν σταθερή τη θέση τους (αρκεί να διαρρέονται από ρεύμα) για οποιαδήποτε εφικτή διαμόρφωση του βραχίονα. Ο έλεγχός τους είναι ανοιχτού βρόχου, που αποτελεί ίσως ένα μειονέκτημα διότι το ρομποτικό σύστημα δεν έχει τρόπο να γνωρίζει την κατάσταση των αρθρώσεών του, με αποτέλεσμα να στηρίζεται αποκλειστικά στην πολύ καλή ακρίβεια των βηματικών κινητήρων. Από την άλλη πλευρά, οι σερβοκινητήρες διαθέτουν εσωτερικό σύστημα κλειστού βρόχου και οι DC κινητήρες χρειάζονται επίσης εξωτερικό σύστημα ανάδρασης, διασφαλίζοντας ότι οι εντολές που τους δίνονται θα εκτελούνται πάντα ακόμα και σε περιπτώσεις αστοχιών και θορύβου. Οι σερβοκινητήρες έχουν επίσης δυνατότητες κίνησης μεγαλύτερης ταχύτητας και επιτάχυνσης σε σχέση με τους βηματικούς κινητήρες, αλλά αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αφού στην εφαρμογή μου δεν με ενδιαφέρει η ταχύτητα. Επιπλέον, η υψηλότερη συχνότητα απόκρισης των DC κινητήρων έναντι των βηματικών δεν είναι ζητούμενο για τον

έλεγχο που θέλω να φτιάξω. Συνοψίζοντας, οι βηματικοί κινητήρες προσφέρουν αργή και ακριβή περιστροφή, με εύκολη ενσωμάτωση στον βραχίονα και απλό, αλλά συνάμα εξαιρετικό έλεγχο θέσης.

Αξιοποιούνται τρία ξεχωριστά είδη βηματικών κινητήρων, της ίδιας μάρκας Nema 17, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις και παραγόμενες ροπές (Εικόνα 11). Η 1^η άρθρωση περιστρέφεται με έναν Nema 17 μήκους 40 mm και ροπής συγκράτησης 39.22 N · cm [16]. Η 2^η κινείται με δύο και η 3^η με έναν Nema 17 μήκους 34 mm και ροπής συγκράτησης 121.2 N · cm, που δημιουργείται με λόγο μείωσης 5: 1. Η 4^η περιστρέφεται με έναν και το ζευγάρι 5^{ης} - 6^{ης} άρθρωσης με δύο Nema 17 μήκους 34 mm και ροπής συγκράτησης 21.57 N · cm. Η διακριτική ικανότητα όλων είναι $\frac{1.8^\circ}{step}$, που σημαίνει ότι για μια πλήρη περιστροφή 360° απαιτούνται 200 βήματα. Είναι διπολικοί κινητήρες με ένα τύλιγμα σε κάθε φάση. Οι δύο φάσεις μπορούν να βρεθούν με τη χρήση ωμομέτρου, επειδή το σύρμα του ίδιου τυλίγματος έχει αντίσταση κοντά στο μηδέν, ενώ ξένα τυλίγματα εμφανίζουν πρακτικά άπειρη αντίσταση μεταξύ τους. Επομένως, δοκιμάζοντας τους ακροδέκτες του ωμομέτρου στα πιθανά ζευγάρια των τεσσάρων εξωτερικών επαφών του κάθε βηματικού κινητήρα, βρίσκουμε αυτά με μηδενική αντίσταση, που είναι αντίστοιχα οι δύο άκρες των τυλιγμάτων των φάσεων "1" και "2". Το ονομαστικό ρεύμα λειτουργίας σε κάθε φάση είναι γύρω στο 1 A DC και η τάση τροφοδοσίας είναι 12 V.

Το βάρος των βηματικών κινητήρων καταλαμβάνει ένα σημαντικό ποσοστό του συνολικού βάρους του βραχίονα, επομένως η τελική τοποθέτησή τους πρέπει να γίνει στρατηγικά. Τέσσερις από τους επτά βηματικούς κινητήρες είναι τοποθετημένοι στο κάτω μισό του σώματος του βραχίονα. Με αυτόν τον τρόπο, αποφεύγεται η επιβάρυνση του άνω μέρους, με αποτέλεσμα να χαμηλώνει το κέντρο βάρους και να βελτιώνεται η ευστάθεια της κατασκευής. Επίσης, ελαττώνονται πιθανές ανεπιθύμητες ταλαντώσεις του τελικού στοιχείου δράσης, όταν ο βραχίονας λειτουργεί ή βρίσκεται σε στάση. Άλλα ακόμα και στο πάνω μισό του βραχίονα, οι κινητήρες των τελευταίων τριών αρθρώσεων τοποθετούνται εσκεμμένα σε όσο το δυνατόν μικρότερο ύψος. Η παραγόμενη στροφορμή μεταδίδεται προς τα ανώτερα σημεία με το κατάλληλου μήκους κυλινδρικό κορμό του παθητικού γραναζιού της 4^{ης} άρθρωσης και με τους δύο υπάντες χρονισμού στην 5^η και 6^η άρθρωση.

Για τον έλεγχο των βηματικών κινητήρων χρησιμοποιούνται A4988 motor drivers [17]. Μερικές από τις κύριες εξωτερικές επαφές του κυκλώματός τους φαίνονται στην Εικόνα 12. Λειτουργούν υπό τη λογική τάση χαμηλής ισχύος 5 V του μικροελεγκτή Arduino και λαμβάνουν επίσης 12 V υψηλής ισχύος για την τροφοδοσία των κινητήρων. Δέχονται από το Arduino τα σήματα "STEP" και "DIR", τα οποία ρυθμίζουν

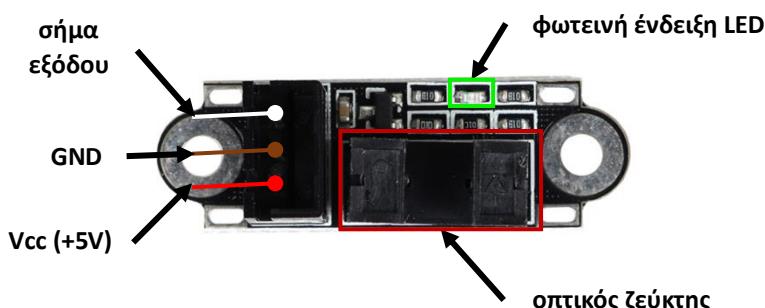


Εικόνα 12 Τα pins του οδηγού A4988 για βηματικό κινητήρα

την ποσότητα και την κατεύθυνση περιστροφής των βηματικών κινητήρων. Αυτά μεταφράζονται σε ρεύματα που οδηγούνται στα pins “1A”, “1B” (πρώτο τύλιγμα) και στα “2A”, “2B” (δεύτερο τύλιγμα). Υπάρχει ακόμα η επιλογή προσαρμογής του ρεύματος που δίνει ο κάθε driver στον αντίστοιχο βηματικό κινητήρα, με περιστροφή της βίδας στο πάνω μέρος και κατά συνέπεια τη ρύθμιση του αντίστοιχου ποτενσιόμετρου που αυξομειώνει την ποσότητα του ρεύματος. Υποστηρίζεται επίσης και η λειτουργία του microstepping για την κίνηση του βηματικού κινητήρα σε ενδιάμεσες θέσεις των πλήρων βημάτων.

Οι βηματικοί κινητήρες παράγουν αρκετή θερμότητα κατά τη λειτουργία τους, λόγω του φαινομένου Joule στις αντιστάσεις των τυλιγμάτων και της τριβής που προκαλείται μεταξύ των κινούμενων μηχανικών μερών. Γι' αυτό, κατά μήκος του βραχίονα υπάρχει ένα σύστημα ψύξης με δέκα μικρούς ανεμιστήρες που τροφοδοτούνται από τάση 12 V ικανής ισχύος. Οι ανεμιστήρες βιδώνονται με τέτοια φορά, έτσι ώστε μερικοί να είναι επιφορτισμένοι με τη μεταφορά ροής αέρα προς τα θερμαινόμενα μέρη και οι υπόλοιποι να στέλνουν τον εισερχόμενο και θερμό πλέον αέρα προς το εξωτερικό περιβάλλον. Οι αρθρώσεις 1 και 4 ψύχονται η κάθε μία από έναν ανεμιστήρα, οι αρθρώσεις 2, 3 ψύχονται από δύο ανεμιστήρες και το ίδιο συμβαίνει με τις 5, 6. Υπάρχουν επίσης τέσσερις μεγαλύτεροι ανεμιστήρες στη βάση του βραχίονα, για την ψύξη του Arduino και της πλακέτας PCB που φέρει τους A4988 drivers.

- Οπτικοί τερματικοί διακόπτες (optical endstops)**



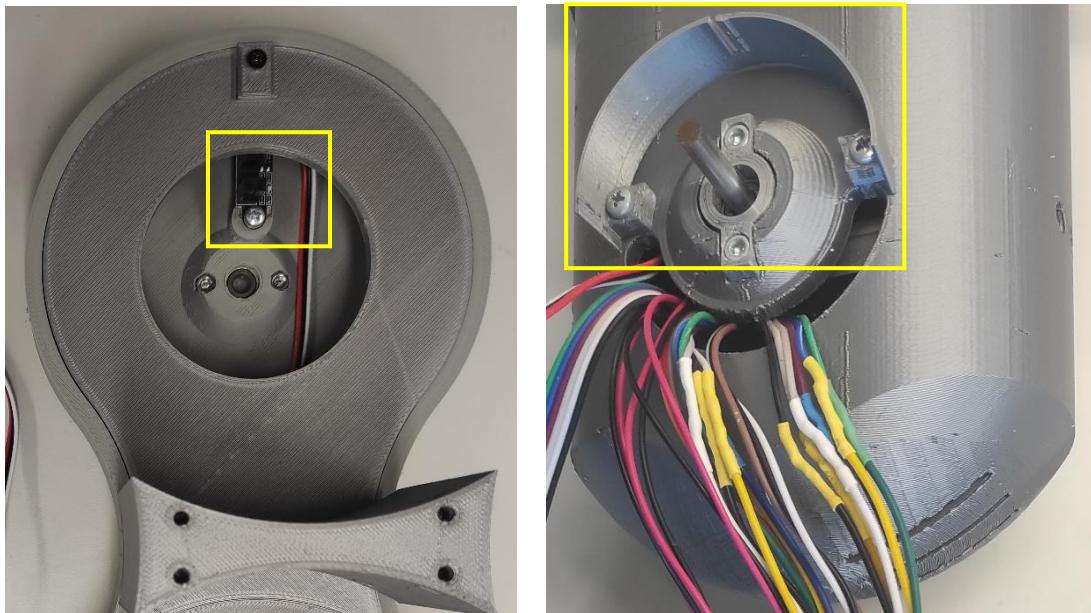
Εικόνα 13 Οπτικός τερματικός διακόπτης

Ο ρομποτικός βραχίονας Thor διαθέτει δύο είδη ηλεκτρονικών αισθητήρων: 1 μικροτερματικό διακόπτη (micro endstop) και 4 οπτικούς τερματικούς διακόπτες (optical endstops). Αποτελούν συνηθισμένα εξαρτήματα σε 3D εκτυπωτές, όπως και οι βηματικοί κινητήρες. Πρόκειται για ιδιοδεκτικούς αισθητήρες που συλλέγουν πληροφορίες σχετικές με το εσωτερικό περιβάλλον του βραχίονα. Εδώ θα περιγραφεί η λειτουργία των οπτικών αισθητήρων και στη συνέχεια θα εξηγηθεί η χρήση του μικροτερματικού διακόπτη.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 13, ο οπτικός τερματικός διακόπτης [18] τροφοδοτείται με τάση χαμηλής ισχύος από τον μικροελεγκτή Arduino. Το βασικό κομμάτι του ολοκληρωμένου κυκλώματος είναι ο οπτικός ζεύκτης, αποτελούμενος από δύο παράλληλες διατάξεις που συνθέτουν ένα σύστημα πομπού – δέκτη. Ο πομπός εκπέμπει συνεχώς αόρατο υπέρυθρο φως υπό τη μορφή δέσμης. Όταν το φως λαμβάνεται από τον δέκτη, το LED παραμένει σβήστο και το σήμα εξόδου είναι μηδενικό. Όταν η δέσμη διακόπτεται από κάποιο αδιάφανο αντικείμενο, τότε δεν φτάνει στον δέκτη, με αποτέλεσμα να ανάβει η πράσινη ένδειξη του LED και η έξοδος να δίνει τάση +5 V.

Οι οπτικοί αισθητήρες χρησιμεύουν στην εύρεση της αρχικής μηδενικής διαμόρφωσης του βραχίονα Thor (κατάσταση “home”) και τοποθετούνται στις 4 πρώτες αρθρώσεις. Τα οπτικά εμπόδια που παρεμβάλλονται ανάμεσα στον πομπό και στον δέκτη είναι εκτυπώσιμα κομμάτια PLA (αναφέρονται ως “optodisk” στα stl αρχεία). Επιτρέπουν την επιτυχή διέλευση του φωτός κατά μήκος του οπτικού ζεύκτη

μονάχα διαμέσου μίας μικρής εγκοπής ανοίγματος 1 mm , για την ακριβή ανίχνευση της μοναδικής μηδενικής θέσης κάθε άρθρωσης. Στην 1^η και στην 4^η άρθρωση με εύρος περιστροφικής κίνησης 360° , τα οπτικά εμπόδια έχουν κυκλικό σχήμα, ενώ στη 2^η και στην 3^η άρθρωση (Εικόνα 14) που έχουν εύρος κίνησης 180° , είναι ημικυκλικά. Το μήκος της πλήρους περιφέρειας των οπτικών εμποδίων είναι περίπου 180 mm , οπότε το άνοιγμα της εγκοπής αντιστοιχεί σε γωνία περίπου $\frac{1\text{ mm}}{180\text{ mm}} \cdot 360^\circ = 2^\circ$. Το αριθμητικό αυτό αποτέλεσμα ταιριάζει με τη διακριτική ικανότητα των βηματικών κινητήρων, που είναι $\frac{1.8^\circ}{step}$.



Εικόνα 14 Η θέση του οπτικού τερματικού διακόπτη στην 3^η άρθρωση (αριστερά) και το αντίστοιχο ημικυκλικό οπτικό εμπόδιο με την εγκοπή (δεξιά), σημειωμένα με τα κίτρινα πλαίσια

- **Μικροτερματικός διακόπτης (micro endstop)**



Εικόνα 15 Μικροτερματικός διακόπτης και η θέση του στην 5^η άρθρωση του ρομποτικού βραχίονα Thor

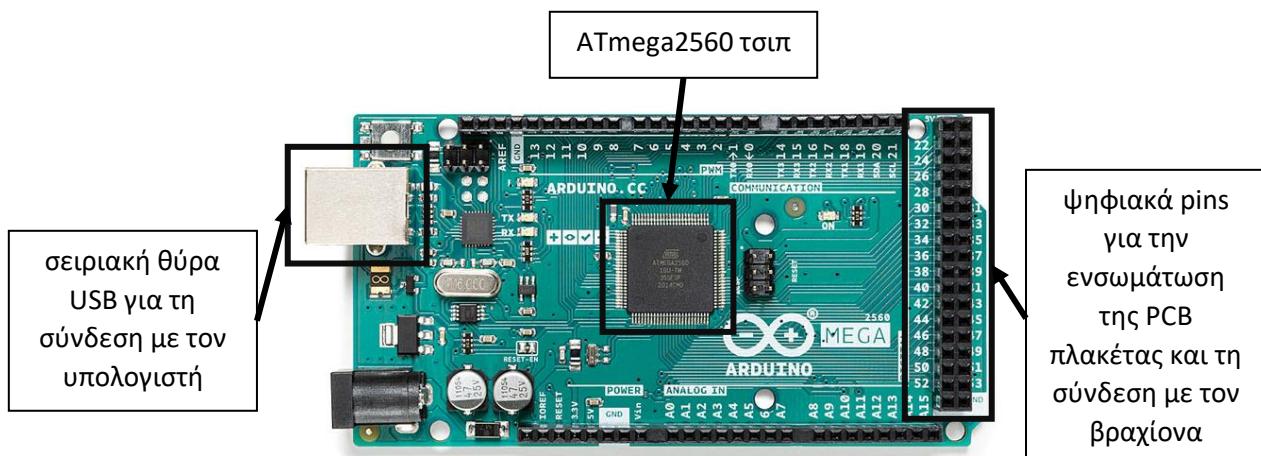
Ο μικροτερματικός διακόπτης [19] χρησιμεύει, στην ίδια λογική με τους οπτικούς τερματικούς διακόπτες, για την ανίχνευση της μηδενικής διαμόρφωσης του βραχίονα. Υπάρχει μονάχα ένας στην 5^η άρθρωση του βραχίονα Thor, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 15 (η 6^η άρθρωση δεν διαθέτει κάποιον ιδιοδεκτικό αισθητήρα). Ο τρόπος λειτουργίας του είναι παρόμοιος με του οπτικού, με τη διαφορά ότι εδώ υπάρχει ένας μηχανικός διακόπτης (αντί για οπτικός ζεύκτης), η κατάσταση του οποίου (πίεση ή

έλλειψη πίεσης) ανοιγοκλείνει ένα εσωτερικό κύκλωμα και επηρεάζει ανάλογα το σήμα εξόδου. Με την πίεση του μικροδιακόπτη (που συμβαίνει όταν το κυλινδρικό στήριγμα του τελικού στοιχείου δράσης φτάνει στην κατάλληλη ακραία θέση) η τάση εξόδου γίνεται LOW, ενώ με την απελευθέρωσή του γίνεται HIGH (+5 V, όση είναι η τάση τροφοδοσίας χαμηλής ισχύος από το Arduino).

- **Μικροελεγκτής (microcontroller) Arduino Mega 2560**

Ο έλεγχος της κίνησης του ρομποτικού βραχίονα Thor γίνεται με εντολές που στέλνονται από έναν φορητό υπολογιστή (laptop). Μια εύκολη και βολική επιλογή για τη διασύνδεση του υπολογιστή με τον βραχίονα είναι ο μικροελεγκτής Arduino, που λειτουργεί ως μεσολαβητικό hardware μεταξύ των δύο άκρων επικοινωνίας. Ειδικότερα, χρησιμοποιώ το Arduino Mega 2560 Rev3 [20] (Εικόνα 16), που βασίζεται στο τσιπ ATmega2560 και στην αρχιτεκτονική AVR. Λειτουργεί σε τάση χαμηλής ισχύος 3.3 V ή 5 V (εδώ χειρίζομαι τα 5 V). Διαθέτει 16 αναλογικά pins εισόδου και 54 ψηφιακά pins εισόδου – εξόδου, από τα οποία τα 15 παρέχουν PWM σήμα εξόδου (τα 2-13 και τα 44-46).

Ο κώδικας που φορτώνεται στον μικροελεγκτή είναι μία ελαφρώς τροποποιημένη μορφή του firmware GRBL, που θα εξηγηθεί στο λογισμικό μέρος. Από τη μία πλευρά, το Arduino επικοινωνεί με τον υπολογιστή μέσω μιας θύρας USB με σειριακό τρόπο. Από την άλλη πλευρά, συνδέεται στον βραχίονα μέσω μίας πλακέτας PCB που ενσωματώνεται στη διπλή σειρά των ψηφιακών pins εισόδου – εξόδου και αποτελεί ακόμα μία διαμεσολαβητική hardware διεπαφή, η οποία περιγράφεται αμέσως μετά.



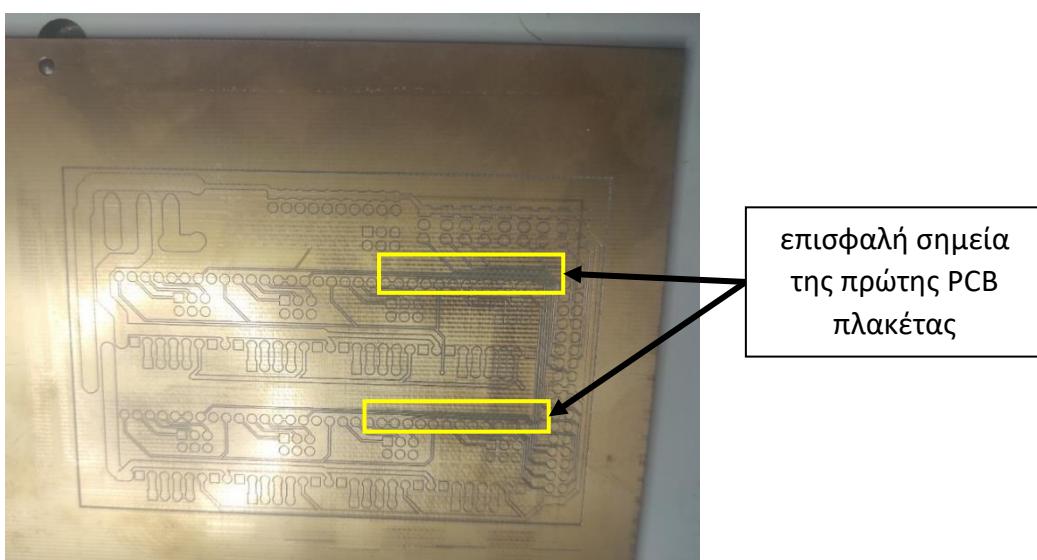
Εικόνα 16 Μικροελεγκτής Arduino Mega 2560

- **Πλακέτα PCB (Printed Circuit Board)**

Η πλακέτα PCB λειτουργεί ως ένα συμπαγές Arduino shield, που βοηθάει στην αποδοτικότερη και ασφαλέστερη οργάνωση των συνδέσεων των διάφορων ηλεκτρικών / ηλεκτρονικών στοιχείων του Thor στα κατάλληλα pins του Arduino Mega. Ως πρότυπο σχεδίασης χρησιμοποιήθηκαν τα σχεδιαγράμματα (schematics) της ηλεκτρονικής πλακέτας RAMPS 1.4 (RepRap Arduino Mega Pololu Shield), που γενικά χρησιμεύει στον έλεγχο 3D εκτυπωτών. Η απαιτούμενη επανασχεδίαση των σχεδιαγραμμάτων για να είναι συμβατά με τις ανάγκες του Thor (αυξημένος αριθμός βηματικών κινητήρων και αισθητήρων) έγινε στο διαλειτουργικό, δωρεάν πρόγραμμα ανοιχτού κώδικα KiCad, από τον Ισπανό δημιουργό του

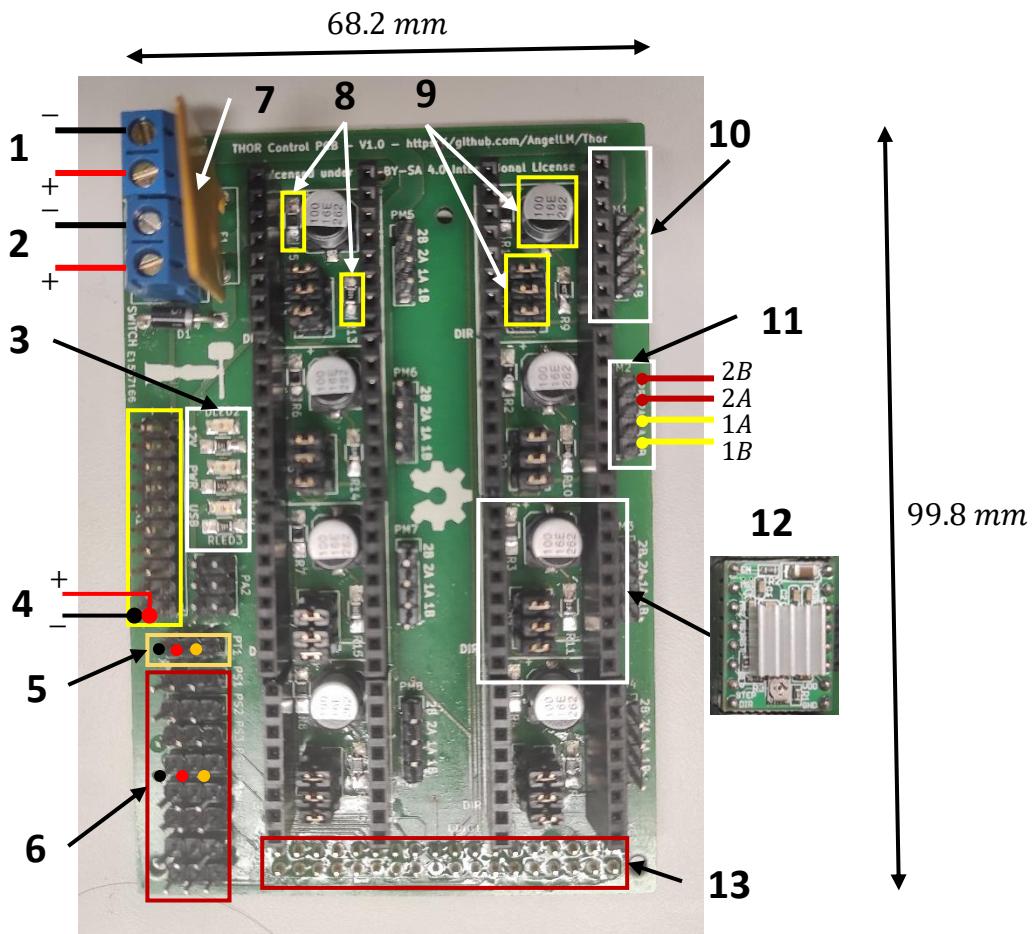
βραχίονα. Το KiCad διευκολύνει, μεταξύ άλλων, την αυτοματοποίηση της ηλεκτρονικής σχεδίασης, προσομοίωσης και κατασκευής PCB πλακετών.

Αρχικά, επιχειρήθηκε η δημιουργία του PCB με ειδικό CNC μηχάνημα φρεζαρίσματος (milling) στο εργαστήριο κυκλωμάτων του τμήματος HMTY του πανεπιστημίου, αλλά δεν κατέστη δυνατή η ολοκλήρωσή του. Το κώλυμα ήταν ότι σε κάποια σημεία της πλακέτας (Εικόνα 17, προβάλλεται η πίσω επιφάνεια της πλακέτας) οι αγώγιμες χάλκινες γραμμές, τα λεγόμενα ίχνη των ηλεκτρικών συνδέσεων, έρχονταν πολύ κοντά μεταξύ τους, αυξάνοντας τον κίνδυνο βραχυκυκλωμάτων. Η τελική λύση ήταν η παραγγελία της πλακέτας με τις κατάλληλες προδιαγραφές [21]. Ειδικότερα, η αγορασμένη πλακέτα PCB έχει πάχος 1.6 mm και είναι φτιαγμένη από υαλοβάμβακα FR-4, ένα μονωτικό υλικό που αντέχει σε θερμοκρασίες μέχρι και 130°C . Και οι δύο πλευρές του ορθογώνιου υαλοβάμβακα επικαλύπτονται από πολύ λεπτά αγώγιμα στρώματα χαλκού. Πάνω σε αυτά τυπώνεται το επιθυμητό κύκλωμα με υπεριώδες φως και δημιουργούνται τα κατάλληλα αγώγιμα χάλκινα ίχνη, πάχους $35 \mu\text{m}$ ($1 \frac{\text{oz}}{\text{ft}^2} \text{ Cu}$), ελάχιστου πλάτους 6 mil ($0.006 \text{ inch} = 0.15 \text{ mm}$) και ελάχιστης απόστασης επίσης 6 mil . Τα ίχνη των δύο στρωμάτων επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω τρυπών vias, ελάχιστης διαμέτρου 0.3 mm , οι οποίες υποβάλλονται σε μία διαδικασία προστασίας τους που καλείται tenting vias. Πάνω από τα επεξεργασμένα χάλκινα στρώματα επικάθονται μία πράσινη μονωτική μάσκα συγκόλλησης (solder mask), που διασφαλίζει την προστασία των αγώγιμων ίχνων, και μία επιπλέον επιφάνεια συγκόλλησης με τη διαδικασία HASL (Hot Air Solder Levelling). Τέλος, τοποθετείται και μία άσπρη μάσκα (silkscreen), που παίζει τον ρόλο της σήμανσης του PCB για την εύκολη αναγνώριση των εξαρτημάτων της.



Εικόνα 17 Τα προβληματικά σημεία της πρώτης PCB πλακέτας

Στην Εικόνα 18 φαίνεται η ολοκληρωμένη πλακέτα, μετά από τη συγκόλληση όλων των εξαρτημάτων (η φωτογραφία τραβήχτηκε πριν την τοποθέτηση των drivers και των καλωδίων των διαφόρων κινητήρων, αισθητήρων και ανεμιστήρων). Χρησιμοποιήθηκαν κολλητήρι και το ειδικό υγρό flux RF800 για τη βελτίωση της ποιότητας της συγκόλλησης. Η συγκόλληση πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο κυκλωμάτων του HMTY με τη βοήθεια καθηγητή που διαθέτει εμπειρία σε αυτές τις εργασίες. Είναι μικτή, αφού ορισμένα εξαρτήματα είναι SMT (Surface Mount Technology), που σημαίνει ότι τοποθετούνται στην επιφάνεια της πλακέτας, ενώ κάποια άλλα είναι THT (Through Hole Technology), δηλαδή στερεώνονται με αρσενικά pins στις διάτρητες οπές του PCB. Εξαρτήματα SMT είναι όλες οι αντιστάσεις, οι πυκνωτές και οι φωτοδίοδοι LED, και THT είναι οι κλέμμες τροφοδοσίας, η ασφάλεια, η δίοδος, καθώς και οι πολυάριθμες αρσενικές και θηλυκές ακίδες.



Εικόνα 18 Τελική, ολοκληρωμένη μορφή της PCB πλακέτας

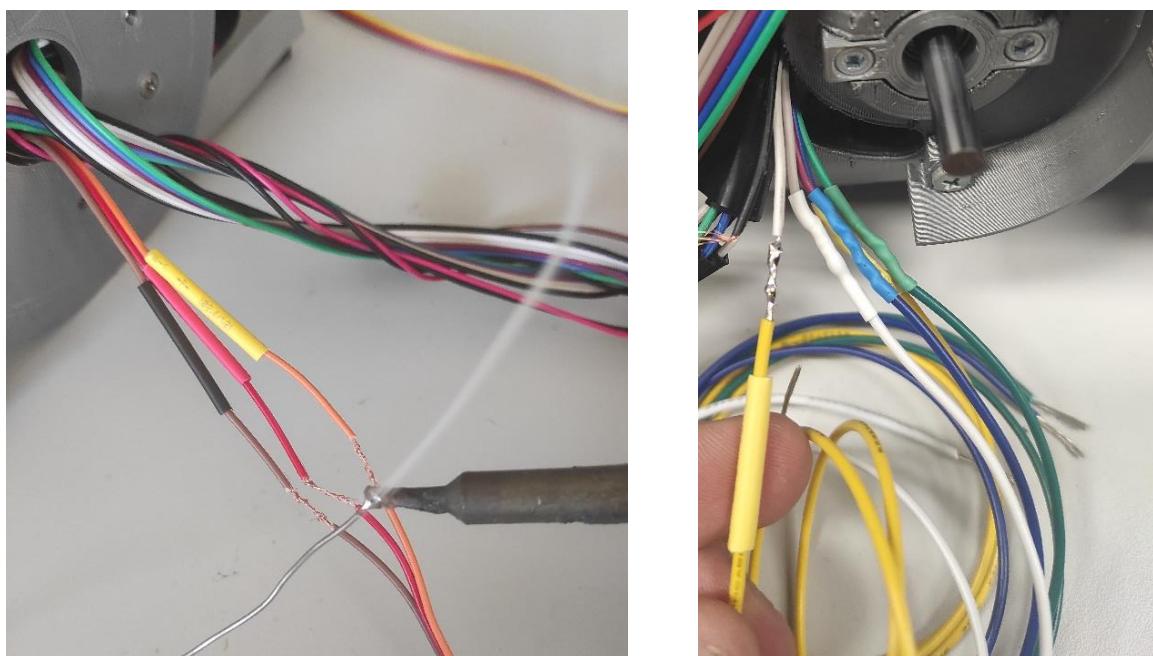
	Σημαντικά σημεία πάνω στην πλακέτα PCB
1	Κλέμμες για την επαρκούς ισχύος τροφοδοσία των 12 V για την κίνηση και την ψύξη του βραχίονα
2	Υποδοχή για απλό διακόπτη “ON/OFF” που ελέγχει την παροχή ισχύος στους βηματικούς κινητήρες
3	3 φωτοδίοδοι LED (κόκκινου χρώματος) συνδεδεμένοι σε σειρά με 3 αντιστάσεις 620 Ω
4	Τάση τροφοδοσίας 12 V επαρκούς ισχύος για τους ανεμιστήρες
5	Τάση 5 V και PWM σήμα εξόδου για τον σερβοκινητήρα του τελικού στοιχείου δράσης
6	Τάση 5 V και σήμα εισόδου από τους οπτικούς αισθητήρες και τον μικροτερματικό διακόπτη
7	Επαναχρησιμοποιούμενη ασφάλεια (fuse) συνδεόμενη παράλληλα με μία δίοδο 1N4004
8	Ζεύγος αντιστάσεων 10 kΩ και 100 kΩ (επαναλαμβάνονται 8 φορές)
9	Decoupling πυκνωτής 100 µF (μείωση θορύβου) και 3 jumpers (επαναλαμβάνονται 8 φορές)
10	Θηλυκές και αρσενικές ακίδες του κυκλώματος της πλακέτας PCB
11	Αρσενικά pins για τις δύο φάσεις των βηματικών κινητήρων (επαναλαμβάνονται 8 φορές)
12	Οδηγός A4988 για τον έλεγχο των βηματικών κινητήρων (επαναλαμβάνεται 8 φορές)
13	Ακίδες για τα ψηφιακά pins εισόδου – εξόδου του Arduino Mega 2560

Πίνακας 1 Στοιχεία και εξαρτήματα της πλακέτας PCB

Ο Πίνακας 1 περιγράφει τα χαρακτηριστικά σημεία και τα εξαρτήματα της πλακέτας PCB. Για τη συμπλήρωση του περιεχομένου του πίνακα, ας σημειωθεί πως υποστηρίζονται 8 steppers ταυτόχρονα, αν και για τον βραχίονα Thor χρειάζονται μόνο 7. Για τους αισθητήρες παρατηρείται επίσης παραπανίσιος αριθμός σε σχέση με τον απαιτούμενο. Ακόμα, οι 3 φωτοδίοδοι (LED) της πλακέτας είναι ενδεικτικοί των ενεργοποιημένων τμημάτων του ρομποτικού συστήματος. Το LED με την ένδειξη "PWR" ανάβει όταν η πλακέτα δέχεται την τάση υψηλής ισχύος των 12 V, η οποία αρχικά παρέχεται μονάχα στο σύστημα ψύξης των ανεμιστήρων. Όταν ο απλός διακόπτης στις κλέμμες του PCB κλείνει, το ρεύμα της τροφοδοσίας μεταφέρεται στους βηματικούς κινητήρες θέτοντάς τους σε λειτουργία, οπότε ανάβει το LED με την ένδειξη "12V". Το τρίτο και τελευταίο "USB" LED μένει αναμμένο όσο η πλακέτα είναι συνδεδεμένη με τον μικροελεγκτή Arduino, ο οποίος τροφοδοτεί τα εξαρτήματα που παίρνουν λογική τάση 5 V χαμηλής ισχύος.

■ Καλώδια συνδέσεων

Τα καλώδια εντός του σώματος του ρομποτικού βραχίονα μεταφέρουν ισχύ προς τους βηματικούς κινητήρες και τους ανεμιστήρες, αλλά και σήματα εισόδου από τους αισθητήρες προς τον μικροελεγκτή Arduino. Οι οπτικοί αισθητήρες έχουν έτοιμα βύσματα μεγάλου μήκους για να φτάνουν μέχρι και την πλακέτα PCB, σε αντίθεση με τους βηματικούς κινητήρες, για τους οποίους έπρεπε να φτιάξουμε αυτοσχέδια θηλυκά βύσματα. Στη συνέχεια, τα επεκτείναμε με συγκόλληση πολύκλων καλωδίων διατομής 0.32 mm^2 (ικανό πάχος για το ρεύμα που διαρρέει τους πόλους των κινητήρων), όπως φαίνεται στην Εικόνα 19. Προκειμένου να μονωθούν οι γυμνές περιοχές συγκόλλησης, χρησιμοποιήθηκαν θερμοσυστελλόμενοι πλαστικοί σωλήνες. Στο τελικό άκρο των καλωδιώσεων έγιναν επίσης κολλήσεις με θηλυκούς ακροδέκτες, για τη σύνδεση με τις αρσενικές ακίδες του PCB.



Εικόνα 19 Αριστερά φαίνεται η προσπάθεια συγκόλλησης των τριών ζευγαριών καλωδίων μεταξύ τους, ενώ δεξιά φαίνονται επιτυχημένες κολλήσεις και μία πριν τοποθετηθεί το θερμοσυστελλόμενο

b. Λογισμικό μέρος (Software)

Το λογισμικό κομμάτι καλύπτει ό,τι σχετίζεται με τον έλεγχο του ρομποτικού βραχίονα Thor μέσω του υπολογιστή. Επίσης, αναλύονται τα εργαλεία και τα προγράμματα μοντελοποίησης και προσομοίωσης του ρομπότ.

i. Σύντομη ανασκόπηση του firmware GRBL

Το GRBL (G-Code Reference Block Library) [22] είναι ένα από τα πιο δημοφιλή λογισμικά ανοιχτού κώδικα που ξεκίνησε το 2009 και συνεχίζει να χρησιμοποιείται τόσο σε ερασιτεχνικές όσο και σε εμπορικές εφαρμογές ρομποτικής. Έχει γραφτεί με εξαιρετικά βέλτιστο τρόπο σε γλώσσα C, με αποτέλεσμα να προσφέρει υψηλές ταχύτητες στην χρήση του. Αποτελεί πρακτικά ένα firmware, σχεδιασμένο κυρίως για τον χαμηλού επιπέδου έλεγχο της κίνησης μηχανών CNC (Computer Numerical Control), αλλά και για κάποιες περιορισμένες λειτουργίες ψύξης και ανάγνωσης βασικών αισθητήρων. Ενδεικτικά, αξιοποιείται σε μηχανές κοπής ή σκαλίσματος διαφόρων στερεών υλικών (όπως πλαστικό, ξύλο, σίδερο και αλουμίνιο), σε μηχανές κοπής με χρήση δέσμης laser, καθώς και σε 3D εκτυπωτές. Σημαντικά πλεονεκτήματά του είναι η εύκολη ενσωμάτωσή του σε μικροελεγκτές με AVR μικροτοίπ (π.χ. ATmega2560 και ATmega328p), καθώς και η υψηλή ακρίβεια και αποδοτικότητα που παρέχει στον έλεγχο της κίνησης των μηχανών.

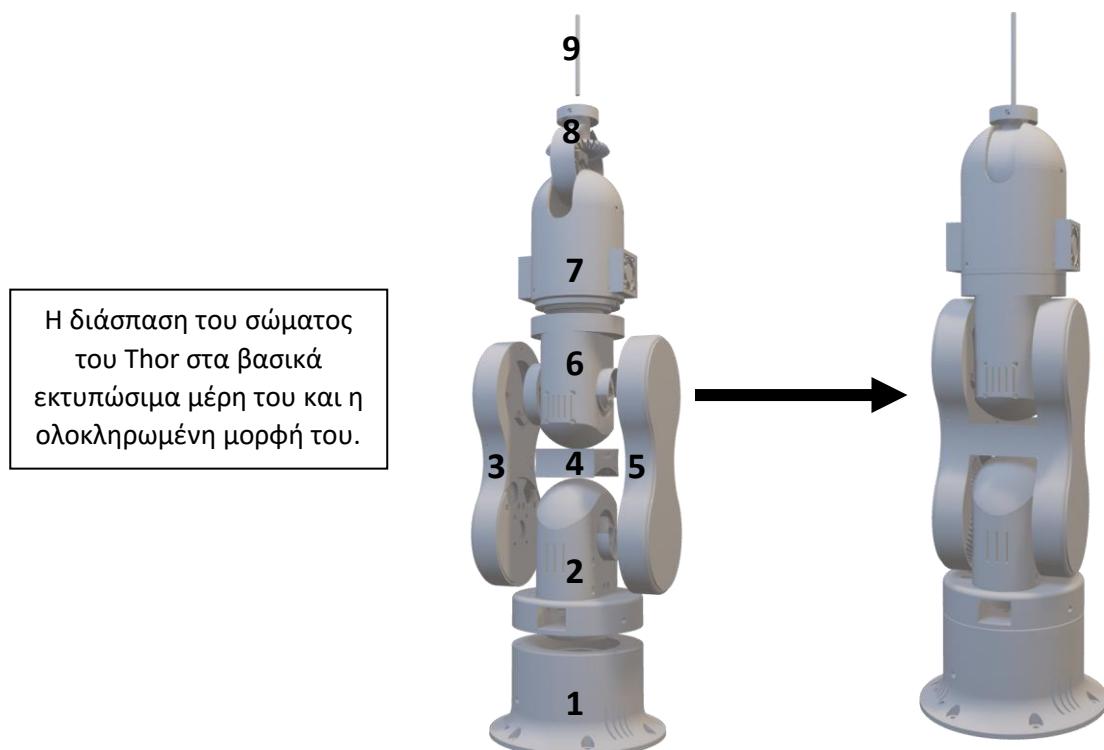
Το GRBL firmware αποτελεί μια ιδανική επιλογή για τον έλεγχο του ρομποτικού βραχίονα Thor. Πρώτον, είναι συμβατό με τον μικροελεγκτή Arduino Mega 2560 και η εγκατάστασή του είναι μια αρκετά απλή και χρονικά σύντομη διαδικασία. Πολύ σημαντική είναι η ορθή απεικόνιση (mapping) των φυσικών pins του εκάστοτε μικροελεγκτή με τις αντίστοιχες μεταβλητές και συναρτήσεις του λογισμικού, ώστε τα διάφορα ψηφιακά και αναλογικά σήματα εισόδου / εξόδου να οδηγούνται στα σωστά σημεία. Δεύτερον, μπορεί να ρυθμίσει τη συμπεριφορά όλων των ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών στοιχείων της κατασκευής (κινητήρες, ανεμιστήρες και αισθητήρες). Τρίτον, δημιουργεί ένα ομαλό προφίλ επιτάχυνσης για τους βηματικούς κινητήρες, το οποίο συμβάλλει στη μείωση των κραδασμών και φροντίζει έτσι ώστε οι κινητήρες να συγχρονίζονται προκειμένου να ξεκινούν / σταματούν την ίδια χρονική στιγμή. Εντούτοις, ένα σημαντικό μειονέκτημα του λογισμικού είναι ότι υποστηρίζει μέχρι και τρεις άξονες κίνησης X, Y, Z (λόγω του ότι χρησιμοποιείται κυρίως σε καρτεσιανές μηχανές τύπου Gantry), ενώ ο ρομποτικός βραχίονας Thor διαθέτει συνολικά έξι αρθρώσεις και επτά βηματικούς κινητήρες που συνεπάγονται επτά άξονες κίνησης. Γ' αυτό, απαιτείται μία μικρή τροποποίηση (έχει γίνει από τον δημιουργό του βραχίονα Thor) των κατάλληλων αρχείων του λογισμικού για τη λειτουργία των επιπλέον αξόνων κίνησης.

Τα αρχεία του GRBL εμφανίζονται με δύο διαφορετικές επεκτάσεις, ".h" και ".c". Τα αρχεία με επέκταση ".h" είναι header αρχεία που περιέχουν τις δηλώσεις δομών και συναρτήσεων, ενώ αυτά με επέκταση ".c" είναι source αρχεία τα οποία υλοποιούν τις επιθυμητές λειτουργίες των δηλωμένων συναρτήσεων. Ο έλεγχος του ρομποτικού βραχίονα πραγματοποιείται στέλνοντας G-Code εντολές, οι οποίες είναι λέξεις που ξεκινούν συνήθως με το γράμμα "G" και ακολουθούνται από ένα κωδικό νούμερο (στην περίπτωση εντολών κίνησης, οι "G" λέξεις συμπληρώνονται από πρόσθετες παραμέτρους που καθορίζουν τα χαρακτηριστικά της κίνησης). Υπάρχουν επίσης εντολές που ξεκινούν με το σύμβολο "\$", οι οποίες είναι υπεύθυνες για την αλλαγή των παραμέτρων του firmware. Οι τιμές των παραμέτρων επηρεάζουν τη λειτουργία των κινητήρων (όπως ο αριθμός των βημάτων steps ανά μονάδα κίνησης, η μέγιστη ταχύτητα και η επιτάχυνσή τους, τα οποία ενδέχεται να χρειάζονται προσαρμογή για να ταιριάζουν με τις διαστάσεις και τις αρθρώσεις του βραχίονα Thor) και των αισθητήρων (π.χ. εκείνη που ρυθμίζει τη λογική ενεργοποίησης των τερματικών διακοπών). Οι εντολές "\$" ελέγχουν ακόμα τις δυνατές καταστάσεις μηχανής στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο βραχίονας, που είναι οι εξής:

- Αποσυνδεδεμένη (Disconnected): Δεν έχει εγκαθιδρυθεί ακόμα η επικοινωνία με τον μικροελεγκτή.
- Συνδεδεμένη (Connected): Έχει εδραιωθεί επικοινωνία με τον μικροελεγκτή Arduino, αλλά δεν είναι δυνατή ακόμα η επεξεργασία και η εκτέλεση εντολών από τη μηχανή.
- Αδράνεια (Idle): Η μηχανή είναι συνδεδεμένη και σε κατάσταση αναμονής, έτοιμη να δεχτεί εντολές από τον χρήστη.
- Εκτέλεση (Run): Η μηχανή επιτελεί μία συγκεκριμένη λειτουργία, εκτελώντας τις οδηγίες μίας εντολής ή ενός προγράμματος.
- Αρχική θέση (Home): Η μηχανή επαναφέρεται προς την αρχική της θέση, όπως έχει προσδιοριστεί από τον χρήστη.
- Συναγερμός / Σφάλμα (Alarm): Η μηχανή διακόπτει την κανονική λειτουργία της εξαιτίας κάποιου σφάλματος που πρέπει να αντιμετωπιστεί.
- Κράτημα / Παύση (Hold): Η μηχανή σταματάει και παραμένει στην τρέχουσα θέση της πιθανότατα λόγω παρέμβασης του χρήστη.

ii. Δημιουργία του μοντέλου προσομοίωσης του βραχίονα

Για τη δημιουργία του μοντέλου προσομοίωσης του Thor χρησιμοποιήθηκε περίπου το 60 % του συνολικού αριθμού των stl αρχείων του (Πίνακας 2), των οποίων η επεξεργασία έγινε στο FreeCAD. Γι' αυτό δεν πρόκειται για πιστό μοντέλο του πραγματικού ρομποτικού βραχίονα, αφού δόθηκε έμφαση στο να ομοιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο μονάχα στην εξωτερική εμφάνιση που προβάλλεται στην προσομοίωση. Εσωτερικά λείπει μεγάλος αριθμός των εκτυπώσιμων κομματιών, καθώς επίσης και όλα τα μηχανικά μέρη κίνησης των αρθρώσεων και τα διάφορα ηλεκτρολογικά/ηλεκτρονικά στοιχεία.



Εικόνα 20 Το ψηφιακό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα Thor

	Επιμέρους αρχεία stl ανοιχτού κώδικα	Επεξεργασμένα συγκεντρωτικά αρχεία
1	BaseBot.stl, BaseTop.stl, BaseBearingFix.stl, Art1Bot.stl	base_thor.stl
2	Art1Body.stl, Art1Top.stl, Art23Optodisk.stl	art1_thor.stl
3	Art2BodyA.stl, Art2BodyACover1.stl, Art2BodyACover2.stl, Art2BodyAWindow.stl, Art2SideCover.stl, CommonBearingFix.stl (2x)	art2_thor.stl
4	Art2BodyUnion.stl	
5	Art2BodyB.stl, Art2BodyBCover.stl, Art2SideCover.stl, CommonBearingFix.stl (2x)	
6	Art3Body.stl, Art3Pulley.stl, Art23Optodisk.stl, CommonBearingFixThrough.stl	art3_thor.stl
7	Art4Body.stl, Art4BodyBot.stl, Art4BearingFix.stl (2x), Art4BodyFan.stl (2x), Art4TransmissionColumn.stl, Art4Optodisk.stl, Art4BearingRing.stl	art4_thor.stl
8	Art56MotorCoverRing.stl	art5_thor.stl
	Art56GearPlate.stl, Art56Interface.stl	art6_thor.stl
9	end_effector_thor.stl	end_effector_thor.stl

Πίνακας 2 Καταγραφή των stl αρχείων που συνιστούν το μοντέλο προσομοίωσης του Thor

Η οπτικοποίηση του μοντέλου του ρομποτικού βραχίονα γίνεται σε ένα γραφικό περιβάλλον (αυτό μπορεί να είναι το Gazebo στο ROS ή στη συγκεκριμένη περίπτωση ο online προσομοιωτής Swift της python). Εκτός των συγκεντρωτικών αρχείων stl (Πίνακας 2, τελευταία στήλη), απαιτείται και η συγγραφή ενός URDF (Unified Robotics Description Format) αρχείου (ονομάζεται “thor.urdf”), το οποίο συνδυάζει όλα τα meshes των stl για την προβολή ενός ενιαίου λειτουργικού ρομποτικού συστήματος στην οθόνη του υπολογιστή. Το URDF αρχείο είναι γραμμένο σε διαμόρφωση XML (με τις χαρακτηριστικές ετικέτες tags) και η δομή του περιλαμβάνει γενικά το όνομα του ρομποτικού βραχίονα (εδώ “THOR”), καθώς και τον ορισμό όλων των αρθρώσεων και των συνδέσμων του. Η μορφή του είναι επαναλήψιμη, γι' αυτό θα καταγράψω μόνο τον τρόπο προσδιορισμού της πρώτης άρθρωσης και του πρώτου συνδέσμου.

Αρχικά ορίζεται ο σύνδεσμος της βάσης, ονόματι “base”. Στη συνέχεια ορίζεται η πρώτη περιστροφική (“revolute”) άρθρωση ονόματι “art1_yaw”. Στις ετικέτες <parent> και <child> ορίζονται ο σύνδεσμος – γονέας (ο προηγούμενος, αυτός της βάσης) και ο σύνδεσμος – παιδί (ο επόμενος, αυτός της πρώτης άρθρωσης). Στην ετικέτα <origin> δίνεται η θέση (στο καρτεσιανό σύστημα) και ο προσανατολισμός (σε γωνίες roll, pitch, yaw) της άρθρωσης σε σχέση με τον σύνδεσμο – γονέα, ενώ στην ετικέτα <axis> προσδιορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα της κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής της άρθρωσης. Στην τελευταία ετικέτα <limit> τίθενται τα όρια της άρθρωσης, όπως το εύρος κίνησής της, η μέγιστη ταχύτητά της και η μέγιστη ροπή που μπορεί να δεχτεί. Η παράμετρος της μέγιστης ροπής κανονικά δεν θα χρειαζόταν αν δεν ήταν υποχρεωτική η παρουσία της, διότι ασχολούμασι μονάχα με την κινηματική κι όχι με τη δυναμική του βραχίονα. Έπειτα ορίζεται ο σύνδεσμος της πρώτης άρθρωσης, ονόματι “art1”. Στην ετικέτα <origin> αναγράφεται η διαμόρφωση (θέση και προσανατολισμός) του συνδέσμου – παιδιού ως προς το πλαίσιο της άρθρωσης. Για την οπτικοποίηση της γεωμετρίας του δίνεται στην ετικέτα <mesh> η διαδρομή στον υπολογιστή του αντίστοιχου stl αρχείου και η κλίμακα σχεδίασης. Παρέχονται επίσης το χρώμα του υλικού του και ο βαθμός διαφάνειάς του στην ετικέτα <color>.

Με τον τρόπο που περιεγράφηκε παραπάνω καθορίζονται διαδοχικά οι αρθρώσεις και οι σύνδεσμοι ολόκληρου του βραχίονα. Ας σημειωθεί ότι στο τέλος του URDF ορίζεται μια έβδομη άρθρωση ονόματι “end_effector_joint” (παρόλο που ο βραχίονας είναι 6 DOF), η οποία είναι σταθερή (“fixed”) σε σχέση με τον σύνδεσμο – γονέα και τοποθετείται ακριβώς στο άκρο του τελικού στοιχείου δράσης, έτσι ώστε η διαμόρφωσή του στον χώρο να είναι γνωστή στο υπολογιστικό πρόγραμμα. Συνοψίζοντας, κάθε άρθρωση του URDF συσχετίζει έναν σύνδεσμο – γονέα και έναν σύνδεσμο – παιδί, με το πλαίσιο του

πρώτου να λειτουργεί ως αναφορά για την άρθρωση και τον δεύτερο να προσδιορίζεται σε σχέση με την άρθρωση. Για τις τιμές των αποστάσεων ή γωνιών, όπου αυτές εμφανίζονται, έχουν χρησιμοποιηθεί οι μετρήσεις της ευθείας κινηματικής ανάλυσης του Thor, που παρατίθενται στην ενότητα 3.

iii. Ανάπτυξη της γραφικής διεπαφής ελέγχου του συστήματος

Για τον έλεγχο των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα Thor δίνεται από τον δημιουργό του το ανοιχτού κώδικα λογισμικό Asgard που είναι γραμμένο σε python. Πρόκειται για ένα GUI (Graphical User Interface) κατασκευασμένο με χρήση των python βιβλιοθηκών PyQt5 (αριστερά στην Εικόνα 23). Για τις ανάγκες της εργασίας αποφάσισα, αντί να χρησιμοποιήσω αυτούσιο το συγκεκριμένο πρόγραμμα, να κατασκευάσω από την αρχή μια δικιά μου γραφική διεπαφή η οποία να συνάδει περισσότερο με τις απαιτήσεις της εργασίας (όλος ο κώδικας περιέχεται, με αρκετά ερμηνευτικά σχόλια, στον GitHub αποθηκευτικό χώρο [23]). Την ανέπτυξα με την εγγενή βιβλιοθήκη tkinter της python. Η εφαρμογή μου προσφέρει στον χρήστη τις δυνατότητες του Asgard, αλλά και πολλαπλές ακόμα λειτουργίες που σχετίζονται άμεσα με το θεωρητικό πρόβλημα που μελετώ. Η συγγραφή του κώδικα πραγματοποιήθηκε στο Visual Studio Code IDE της Microsoft. Ιδιαίτερα βοηθητικό υπήρξε το εργαλείο τεχνητής νοημοσύνης GitHub Copilot. Πρόκειται για ένα από τα καλύτερα εργαλεία αυτόματης συμπλήρωσης κώδικα, το οποίο προσφέρει αρκετά στοχευμένες προτάσεις με βάση την εκπαίδευσή του και τον ήδη γραμμένο κώδικα. Υπήρξε ιδιαίτερα χρήσιμο από άποψη οικονομίας χρόνου, κυρίως στο χτίσιμο της γραφικής διεπαφής όπου χρειάζονται πολλά επαναληπτικά κομμάτια κώδικα, π.χ. για την κατασκευή των γραφικών στοιχείων (ετικέτες, κουμπιά κ.ά.). Ακόμα, εξυπηρέτησε πολύ στην παραγωγή επεξηγηματικών σχολίων.

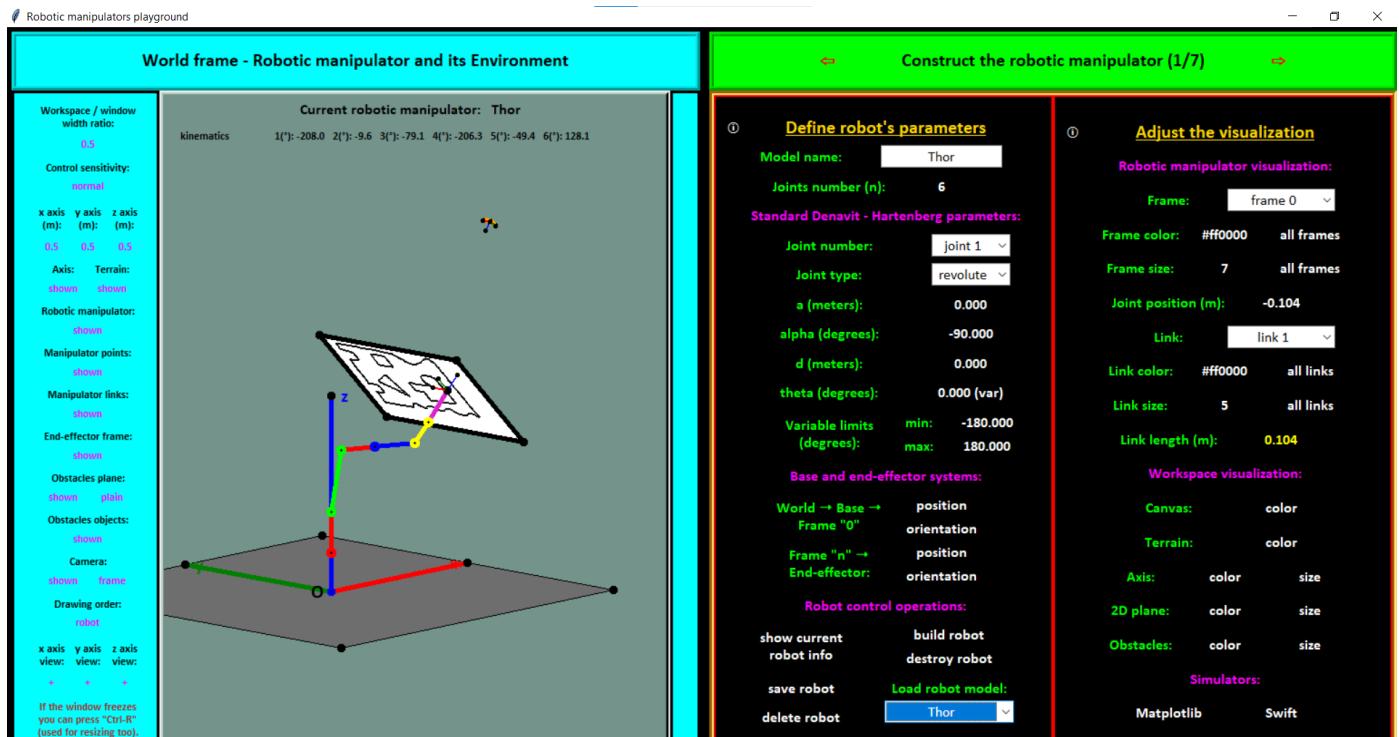
Η σχεδίαση της διεπαφής επικεντρώνεται κυρίως στον Thor και χτίζεται γύρω από αυτόν, αλλά παράλληλα το GUI περιλαμβάνει και μια πληθώρα γενικότερων χαρακτηριστικών, ούτως ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της κινηματικής (όχι όμως της δυναμικής) πολλών άλλων ρομποτικών χειριστών. Η γραφική διεπαφή είναι στην αγγλική γλώσσα. Το πρόγραμμα αποτελείται από δύο βασικές περιοχές, την περιοχή της στοιχειώδους οπτικοποίησης και αυτήν των κύριων μενού λειτουργιών, που είναι συνολικά 7. Ακολούθως καταγράφεται συνοπτικά ο ρόλος του κάθε μενού (οι εμφανιζόμενες, άγνωστες ίσως λέξεις κλειδιά ή έννοιες ερμηνεύονται σε επόμενες ενότητες):

- Όταν ξεκινάει το πρόγραμμα, εμφανίζονται στην αρχική οθόνη ο καμβάς οπτικοποίησης και το πρώτο βασικό μενού (Εικόνα 21). Στον καμβά οπτικοποίησης προβάλλονται πρώτα το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων, μαζί με το δάπεδο. Εδώ πραγματοποιείται η στοιχειώδης σχεδίαση του σκελετικού μοντέλου του εκάστοτε ρομποτικού βραχίονα. Γίνεται ακόμα η σχηματική απεικόνιση του περιβάλλοντος του ρομπότ, δηλαδή του χώρου των εμποδίων και της κάμερας. Για την αναπαράσταση χρησιμοποιούνται απλά γεωμετρικά αντικείμενα (τελείες, γραμμές και επίπεδα), με το σημαντικό μειονέκτημα ότι δεν απεικονίζεται σωστά το βάθος των αντικειμένων, διότι δεν λαμβάνεται υπόψη κάποιος z – buffer όπως συμβαίνει γενικά στα γραφικά. Για πιο ρεαλιστικές προσομοιώσεις, αξιοποιείται η python βιβλιοθήκη swift-sim [24]. Αυτή παρέχει έναν ελαφρύ online προσομοιωτή που τρέχει σε κατάλληλο browser και μπορεί να χειριστεί την οπτικοποίηση βασικών γεωμετρικών σχημάτων, κλασικών ρομποτικών χειριστών και 3D αντικειμένων (π.χ. 3D meshes).

Στο πρώτο μενού υπάρχουν όλα τα βασικά εργαλεία για τη σχεδίαση και μοντελοποίηση ενός σειριακού ρομποτικού χειριστή ανοιχτής κινηματικής αλυσίδας (πρώτο υπομενού), καθώς και για την οπτικοποίηση του ρομπότ και του περιβάλλοντός του (δεύτερο υπομενού), στον καμβά ή στον προσομοιωτή Swift. Παρέχονται ελευθερίες στον χρήστη ως προς τον ορισμό των αρθρώσεων (πλήθος, είδος, εύρος κίνησης), τη μορφή του ρομποτικού χειριστή (DH παράμετροι) και τον προσδιορισμό της διαμόρφωσης της βάσης και του τελικού στοιχείου δράσης. Δίνεται ακόμα η σημαντική δυνατότητα αποθήκευσης και φόρτωσης ρομποτικών μοντέλων, με αποτέλεσμα να μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε στιγμή.

- Στο δεύτερο και στο τρίτο μενού (Εικόνα 22) πραγματοποιούνται η ευθεία και αντίστροφη κινηματική ανάλυση, και η διαφορική και αντίστροφη διαφορική κινηματική ανάλυση αντίστοιχα του βραχίονα. Στην ευθεία κινηματική παρέχεται η δυνατότητα ελέγχου των μεταβλητών όλων των αρθρώσεων, υπολογίζονται οι διαμορφώσεις (θέση και προσανατολισμός) όλων των πλαισίων του βραχίονα και σχεδιάζεται ο προσβάσιμος χώρος εργασίας του. Στην αντίστροφη κινηματική ο χρήστης δίνει τη διαμόρφωση του τελικού στοιχείου δράσης και υπολογίζονται οι μεταβλητές όλων των αρθρώσεων. Στη διαφορική κινηματική ελέγχονται οι ταχύτητες όλων των αρθρώσεων και βρίσκεται η αντίστοιχη ταχύτητα (γραμμική και γωνιακή) του τελικού στοιχείου δράσης, στο πλαίσιο του ή στο πλαίσιο κόσμου. Στην αντίστροφη διαφορική κινηματική ο χρήστης δίνει την ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης (πάλι σε ένα από τα δύο αναφερόμενα πλαίσια) και επιστρέφονται οι ταχύτητες των αρθρώσεων.
- Στο τέταρτο μενού υλοποιείται ο έλεγχος του πραγματικού ρομποτικού συστήματος (Εικόνα 23, στα δεξιά). Όπως προειπώθηκε, οι λειτουργίες του μενού υπερκαλύπτουν αυτές του προγράμματος Asgard. Ειδικότερα, στο πρώτο υπομενού πραγματοποιείται η εγκαθίδρυση της σειριακής επικοινωνίας με τον μικροελεγκτή Arduino (με τη βιβλιοθήκη pyserial). Ο χρήστης μπορεί να αναζητήσει τις ανοιχτές, μη απασχολημένες σειριακές θύρες και να επιλέξει την κατάλληλη. Ακόμα, μπορεί να διαλέξει τον ρυθμό μετάδοσης των δεδομένων δηλαδή τον μέγιστο ρυθμό μετάδοσης σε bps (bits per second) μέσω της επιλεγμένης σειριακής θύρας. Υπάρχει επίσης μία ένδειξη για την κατάσταση της σειριακής σύνδεσης ανά πάσα χρονική στιγμή (δηλαδή αν έχει γίνει η σύνδεση ή όχι), καθώς και πιο συγκεκριμένες ενδείξεις σχετικές με την κατάσταση του βραχίονα και το τι επιστρέφει το firmware GRBL, όπως ήδη εξηγήθηκε. Στο δεύτερο υπομενού υπάρχει το παράθυρο του serial monitor. Εδώ φαίνονται τόσο οι εντολές που στέλνονται επιτυχώς από τον χρήστη προς τον μικροελεγκτή arduino, όσο και οι απαντήσεις που επιστρέφει ο μικροελεγκτής. Για γρηγορότερο και πιο άνετο χειρισμό δίνεται η επιλογή πρότερου ορισμού του αρχικού και τελικού μέρους των εντολών. Στο serial monitor γράφονται επίσης αυτοματοποιημένα κάποιες χρήσιμες πληροφορίες και προειδοποιητικά μηνύματα για την ασφαλέστερη πλοήγηση του χρήστη στις διάφορες λειτουργίες. Το υπομενού προσφέρει ακόμα τις δυνατότητες εκκαθάρισης των περιεχομένων του serial monitor αλλά και επέκτασης του παραθύρου του προκειμένου να χωράει περισσότερες γραμμές κειμένου, καθώς και εμφάνισης ή απόκρυψης μηνυμάτων ενημέρωσης που αποστέλλονται τακτικά από τον μικροελεγκτή (αποκρίσεις τύπου "ok" και "status"). Οι εντολές στο serial monitor για τον έλεγχο των κινητήρων του ρομποτικού χειριστή δίνονται υπό τη μορφή "κινητήρας1_εντολή1 κινητήρας2_εντολή2 ...", συνοδευόμενες ίσως στην αρχή από μία λέξη που δηλώνει τον τρόπο κίνησης (σύμφωνα με τα πρότυπα του GRBL, παρομοίως και οι υπόλοιπες εντολές).
- Στο τρίτο υπομενού πραγματοποιείται ο έλεγχος των αρθρώσεων του βραχίονα, καθώς και του επενεργητή (μπορεί να είναι κάποιο είδος δαγκάνας ή αρπάγης) του τελικού στοιχείου δράσης. Αρχικά, ορίζονται η άρθρωση, οι κινητήρες που σχετίζονται με αυτήν και η τιμή της άρθρωσης μαζί με κάποιον πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ο οποίος ρυθμίζει τις τελικές τιμές που λαμβάνουν οι κινητήρες. Ο χρήστης δύναται να στείλει τις εντολές με πολλαπλούς τρόπους (απευθείας, με γραμμή κύλισης, και σε μεταβλητά βήματα). Με τον ίδιο τρόπο ελέγχεται και η κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης. Ακόμα, οι προσδιορισμένες εντολές κίνησης γίνεται να σταλούν είτε μεμονωμένα είτε όλες μαζί.
- Τα τρία τελευταία μενού είναι πιο εξειδικευμένα, εννοώντας ότι εξυπηρετούν τις ειδικότερες λειτουργίες που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη εργασία. Στο πέμπτο μενού (Εικόνα 24, στα αριστερά) περιλαμβάνονται οι απαραίτητες λειτουργίες ελέγχου της κάμερας που καταγράφει τα εμπόδια. Πρώτα, ορίζονται τα κύρια χαρακτηριστικά της κάμερας, δηλαδή η ανάλυσή της, η αναλογία pixels των καρέ και το οπτικό της πεδίο. Έπειτα, υπάρχει δυνατότητα για εμφάνιση των καρέ της κάμερας σε ασπρόμαυρη μορφή με προσαρμόσιμο κατώφλι φωτεινότητας, που θα χρησιμεύσει στην ανίχνευση των συνόρων των εμποδίων. Αμέσως μετά, προσδιορίζεται η διάταξη της κάμερας στον χώρο, είτε με την είσοδο της θέσης και του προσανατολισμού της από τον χρήστη, είτε με μία αυτόματη διαδικασία και τη βοήθεια ενός διαλεχθέντος δείκτη ArUco. Στο τέλος, παρέχονται επιλογές βαθμονόμησης της κάμερας και καταγραφής και αποθήκευσης του εκάστοτε χώρου εργασίας με τα εμπόδια.

- Στο έκτο μενού (Εικόνα 24, στα δεξιά) πραγματοποιείται η αντιγραφή και η ψηφιακή ανακατασκευή του πραγματικού χώρου εργασίας με τα εμπόδια. Αρχικά, δημιουργείται το 2D επίπεδο πάνω στο οποίο στέκονται τα εμπόδια. Προσδιορίζονται το μήκος και το πλάτος του καθώς και η διαμόρφωσή του στον χώρο, είτε χειροκίνητα είτε με αυτόματες διαδικασίες και χρήση της κάμερας (υπάρχει κουμπί γι' αυτή τη δυνατότητα στο πέμπτο μενού). Επιπλέον, ο χρήστης δύναται να αξιολογήσει την καταλληλότητα του επιπέδου ως προς τα περιθώρια κινητικότητας που αφήνει στον ρομποτικό βραχίονα, καθώς και να το αποθηκεύσει αν κρίνει πως το χρειάζεται για μελλοντική χρήση. Στη συνέχεια, επιλέγεται μία από τις αποθηκευμένες φωτογραφίες με τους πιθανούς χώρους εργασίας και επιχειρείται η ανίχνευση των συνόρων των εμφανιζόμενων εμποδίων στην εικόνα. Ακόμα, για λόγους προσομοίωσης και 3D εκτύπωσης, παρέχονται επιλογές δημιουργίας των meshes των εμποδίων και παραγωγής των αντίστοιχων stl αρχείων. Γενικά, υπάρχει μία στενή σχέση και συνεργασία μεταξύ των λειτουργιών του πέμπτου και του έκτου μενού, με αποτέλεσμα ο χρήστης να χρειάζεται ίσως να μετακινείται από το ένα στο άλλο για την ολοκλήρωση μιας σχετικής με αυτά ενέργειας.
- Το έβδομο μενού (Εικόνα 25) είναι ουσιαστικά το τελευταίο βήμα στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος αποφυγής εμποδίων για τον ρομποτικό βραχίονα Thor (ή οποιονδήποτε άλλο ρομποτικό χειριστή έχει επιλεγεί). Στο συγκεκριμένο μενού, ο χρήστης καλείται καταρχάς να φορτώσει την εικόνα του επιθυμητού χώρου εργασίας με τα ήδη εντοπισθέντα εμπόδια και να ορίσει την τελική τους τοποθέτηση στον τριδιάστατο χώρο. Μετά, πρέπει να δηλώσει την αρχική και την τελική θέση του τελικού στοιχείου δράσης πάνω στο επίπεδο των εμποδίων. Ακολούθως, εφόσον όλα τα προηγούμενα ολοκληρώθηκαν σωστά, υλοποιούνται οι μετασχηματισμοί του πραγματικού χώρου εργασίας, οι οποίοι θα φανούν χρήσιμοι στη σχεδίαση του νόμου ελέγχου του ρομποτικού χειριστή. Στο τέλος του μενού, βρίσκονται οι επιλογές για τη διαδικασία παραγωγής του νόμου ελέγχου (προσαρμοζόμενες παράμετροι ελέγχου, μεταβλητό χρονικό βήμα, μέγιστος αριθμός επαναλήψεων κ.ά.), καθώς και για τη μετατροπή των αποτελεσμάτων της διαδικασίας ελέγχου σε μια χρονική ακολουθία μεταβλητών των αρθρώσεων τόσο του προσομοιωμένου όσο και του πραγματικού ρομποτικού χειριστή.



Εικόνα 21 Ο καμβάς της στοιχειώδους οπτικοποίησης και το μενού 1 της εφαρμογής, όπου γίνονται η μοντελοποίηση και η σχεδίαση του εκάστοτε ρομποτικού χειριστή

Forward kinematics analysis (2/7)

Forward kinematics

Joint number:	joint 1	Joint value: revolute (°)	-54.8	get control values
1	-54.8	4	125.7	
2	5.3	5	45.3	
3	55.2	6	-90.5	

Frame: end-effector Position (m): [0.224, -0.15, 0.576] Orientation: [[0.707 0. 0.707] [-0.1 1. 0.] [-0.707 0. 0.707]]

Find reachable workspace: Joints range divisions: 3 compute and plot

Inverse kinematics

↓ get forward kinematics analysis result ↑ send inverse kinematics analysis result

End-effector position (m): [0.224, -0.15, 0.576] End-effector orientation (°): [0.0, 45.0, 0.0]

Numerical solver maximum allowed error (tolerance): 1e-10

Joints configuration: 1(°): -54.8 2(°): 5.3 3(°): 55.2 4(°): 125.7 5(°): 45.3 6(°): -90.5

Differential kinematics analysis (3/7)

Differential kinematics

Joint number:	joint 1	Joint velocity: (°/s)	-126.0	kinematics
1	-126.0	4	117.0	
2	99.0	5	0.0	
3	-81.0	6	-198.0	

End-effector linear velocity (m/s): [-0.304, -0.774, 0.071] End-effector angular velocity (°/s): [-66.5, -72.7, -208.4] W.r.t. frame: world

Inverse differential kinematics

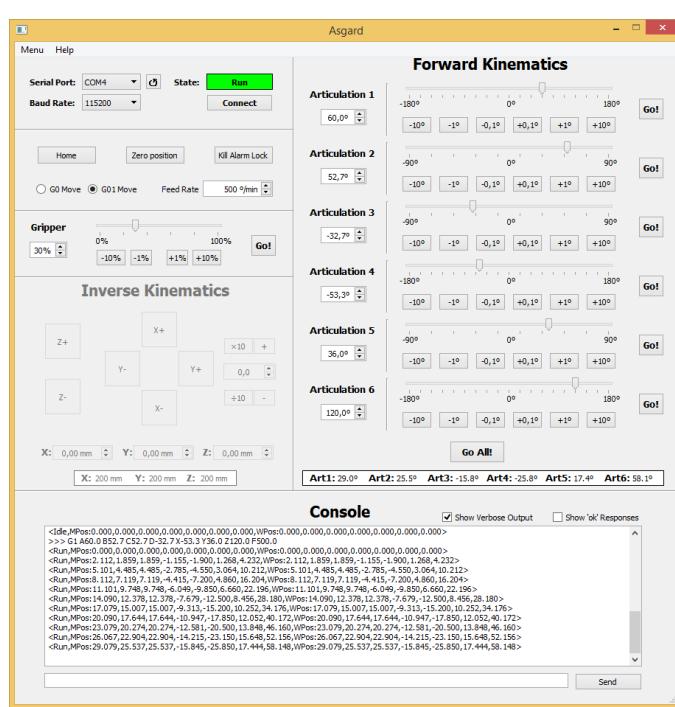
↓ get differential kinematics analysis result ↑ send inverse differential kinematics analysis result kinematics

End-effector linear velocity (m/s): [0.0, 0.07, 0.0] End-effector angular velocity (°/s): [5.0, 6.0, 7.0]

Velocities defined w.r.t. frame: world

Joints velocities: 1(°/s): 8.7 2(°/s): -20.5 3(°/s): 18.1 4(°/s): -10.3 5(°/s): -6.2 6(°/s): 11.0

Εικόνα 22 Τα μενού 2 και 3 του GUI όπου αναλύονται η ευθεία και αντίστροφη κινηματική (αριστερά), καθώς και η διαφορική και η αντίστροφη διαφορική κινηματική (δεξιά) του εκάστοτε ρομποτικού χειριστή



Control the robotic manipulator (4/7)

Establish communication with arduino microcontroller

Serial port: COM4 Serial connection state: Disconnected Connect

Baud rate: 115200

Serial monitor / Console

OK: * Status: * Command starting text: Command ending text:

Info: The serial connection to port "COM4" has been established successfully!
Info: The serial connection to port "COM4" has been closed successfully!

Command: Send

Control joints and end-effector motors

Joint number: joint 1 revolute (degrees) 0.0 get kinematics values

Joint motors: A + Motors factors (for commands): 1.000

Joint variable control: 0.0 +0.1 +1 +10
set joints to 0 -0.1 -1 -10

End-effector control: 0 Motor: S Motor factor: 1.000

set end-effector to 0

Control mode: manual GO joint GO ALL joints GO end-effector

Εικόνα 23 Το γραφικό περιβάλλον του Asgard για τον έλεγχο του πραγματικού ρομποτικού θραύσιου Thor (αριστερά) και το μενού 4 του γραφικού περιβάλλοντος που ανέπτυξα και επιτελεί τις ίδιες λειτουργίες (δεξιά)

Control the camera (5/7)

Camera control

Define the camera object: external Aspect ratio: 16/9 Resolution: 720 Image size (%): 100 open camera

Diagonal FoV (°): 55.0 Min distance (m) from 2D plane: 0.980

Convert frames to black & white: Luminance threshold: 127 show grayscale image

estimate camera pose estimate plane pose ArUco marker: [0.831 -0.548 0.094 0.041] Camera transformation (w.r.t. world): [0.467 0.78 0.416 0.183] [-0.302 -0.302 0.905 0.397] [0. 0. 0. 1.]

Apply moving average filter: yes Optical axis: [0.094, 0.416, 0.905] Rotation around z-axis (°): Translation along optical axis (m):

Translation (m): [0.041, 0.183, 0.397] Orientation (°): 45.0

Operations for capturing the workspace image using the camera:

Camera calibration: draw 2D plane on frame Workspace images: show image recalibrate camera capture image image_1 delete image

Create workspace obstacles (6/7)

Workspace obstacles

Create the obstacles transformation:

2D plane x length (m):	0.420	Rotation around z-axis (°):	0.0	Translation along normal vector (m):	0.000
2D plane y length (m):	0.297				
Normal vector:	[0.009, 0.577, 0.816]				

Translation (m): [0.003, 0.2, 0.283] Orientation (°): 30.0 Camera-plane z-axis alignment: 60 %

ArUco pose on plane: Position: center Orientation (°): 0

Find singularities on obstacles plane (the end-effector is perpendicular to it): Tolerance: 0.001 Samples: 25 find singularities save plane Load plane: A3_plane

Build workspace obstacles:

Detect obstacles boundaries: Load workspace image: Precision: Vertices limit: image_4 10 3 detect boundaries

Obstacles saved height (mm): 20.0 Obstacles height (mm) for detection: 10.0

Create STL files for the obstacles: Load obstacle data: xy-axis resolution: 100 z-axis resolution: 10 create stl file inner_1

Εικόνα 24 Τα μενού 5 και 6 του GUI όπου πραγματοποιούνται ο έλεγχος της κάμερας (αριστερά) και η ψηφιακή αναπαράσταση των πραγματικών εμποδίων του χώρου εργασίας (δεξιά)

Solve obstacles avoidance (7/7)

Obstacles avoidance solver

Load the desired workspace image with all the built obstacles:

Workspace image: ws_image plot obstacles boundaries Workspace plane transformation: manually created

Obstacles infos: ✓ 5 inner and 1 outer boundaries
Obstacles height: 20.0 mm

Define the start and target positions of the robot's end-effector on the workspace plane:

Start position (m): [0.329, 0.138] Check the given positions:
Target position (m): [0.266, 0.338] ✓ Correct! The start and target positions are inside the outer boundary and outside the inner boundaries!

Transform the real workspace to the unit disk (radius = 1) and then back to R2 plane:

start mapping 1. Real workspace → build interact 2. Unit disk → build interact
1. ✓ 2. ✓

Apply the control law to compute the trajectory of the robotic manipulator

Control law parameters: k_d: 20.00 w_phi: 20.00 vp_max (cm/sec): 10.0 Load param.: ws_params
dt (sec): 0.010 Max path time (sec): 5.000 Error tol. (cm): 1.0
Max iter.: 500 Max path length (cm): 50.0 Error correction: no

Navigation potential field: plot function apply control law compute robot trajectory Speed: x1.0
plot gradients move simulated robot move real robot

Divisions to plot: 200

Εικόνα 25 Το μενού 7 της εφαρμογής όπου επιλύεται το πρόβλημα αποφυγής εμποδίων με τη σχεδίαση του νόμου ελέγχου για την κίνηση του εκάστοτε ρομποτικού χειριστή

c. Προβλήματα κατά τη συναρμολόγηση και αντιμετώπισή τους

Κατά τη διάρκεια της συναρμολόγησης του Thor και μέχρι να εξοικειωθούμε πλήρως με τα διάφορα τμήματά του και τον ρόλο τους, υπήρξε ιδιαίτερα βοηθητική η διαδραστική, διαδικτυακή προσομοίωση που έφτιαξε ο δημιουργός του με τα εργαλεία Blender και Blend4Web. Η προσομοίωση δείχνει με διεξοδικό και λεπτομερή τρόπο όλα τα στάδια της κατασκευής. Η όλη διαδικασία συναρμολόγησης διήρκησε λίγο περισσότερο από έξι μήνες, ζεκινώντας από τη 3D εκτύπωση και ολοκληρώνοντας με την αγορά και διασύνδεση των απαραίτητων ηλεκτρονικών και άλλων υλικών. Συναντήσαμε αρκετά προβλήματα, με τα σημαντικότερα εξ' αυτών να παρατίθενται αμέσως μετά:

- Κατά την εκτύπωση, εμφανίστηκαν κατά καιρούς αποτυχία ευθυγράμμισης των διαδοχικών στρωμάτων (layers shifting / misalignment), σκέβρωση των ακμών των κατώτερων στρωμάτων (edges warping), λανθασμένη ροή εξόδου στα ακροφύσια κ.ά.. Η αποτυχία ευθυγράμμισης αντιμετωπίσθηκε με προσεκτικότερη βαθμονόμηση της πλάκας του 3D εκτυπωτή. Η σκέβρωση των ακμών επιλύθηκε με την αύξηση της θερμοκρασίας της πλάκας ή τοποθετώντας πριν την εκτύπωση μία μικρή στρώση στερεής κόλλας (και οι δύο ενέργειες συμβάλλουν στην καλύτερη στερέωση του πρώτου στρώματος του εκτυπωμένου κομματιού). Τέλος, για τη διόρθωση της ροής του υλικού εκτύπωσης, έγινε κατάλληλη ρύθμιση της θερμοκρασίας του στομίου σε κάθε περίπτωση.
- Υπήρξαν ζητήματα με τη χρήση του PVA (Polyvinyl Alcohol), το οποίο δεν εξαγόταν με ορθό, συνεχή τρόπο από το ακροφύσιο του εκτυπωτή ή, χειρότερα, διακοπτόταν τελείως η ροή εξόδου του, με συνέπεια να μη χτίζονται τα απαραίτητα υποστηρίγματα. Συμπεράναμε ότι αυτό οφειλόταν στην ευαισθησία του PVA στις συνθήκες υψηλής υγρασίας του περιβάλλοντος του εργαστηρίου. Συνεπώς, αποφασίσαμε να το αντικαταστήσουμε με άσπρο υλικό breakaway, το οποίο δεν διασπάται στο νερό, αλλά σπάει πολύ εύκολα αφήνοντας άθικτο το κυρίως υλικό του 3D κομματιού, καθιστώντας το έτσι ιδανική εναλλακτική.
- Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα μεγαλύτερα κομμάτια του βραχίονα τα τυπώσαμε σε 3D εκτυπωτή με πλάκα κατάλληλων διαστάσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις προτιμήσαμε μια διαφορετική λύση, που προτείνει ο δημιουργός του Thor, ο οποίος έκοψε τα μεγαλύτερα κομμάτια στη μέση ώστε να τυπωθούν χωριστά. Η ένωση των κομματιών έγινε με ισχυρή υγρή κόλλα και βίδες.
- Από τις έξι αρθρώσεις του Thor, η τέταρτη ήταν αυτή που μας δυσκόλεψε περισσότερο. Πρώτον, η κίνηση του κυλινδρικού φορέα του παθητικού γραναζιού της τέταρτης άρθρωσης εμποδιζόταν από τον οπτικό τερματικό διακόπτη, αναγκάζοντάς μας να κόψουμε μέρος της άκρης του αισθητήρα (η οποία προφανώς δεν περιείχε ηλεκτρονικά στοιχεία του κυκλώματος). Δεύτερον, το χειροποίητο ρουλεμάν του παθητικού γραναζιού δεν εφάρμοζε καλά στις μπίλιες, επομένως προβήκαμε σε μικροδιορθώσεις χιλιοστών στο αντίστοιχο stl και το ξανατυπώσαμε. Το τρίτο και μεγαλύτερο θέμα ήταν πως η τέταρτη άρθρωση κολλούσε σε κάποιες γωνίες ή τα γρανάζια έχαναν δόντια, με αποτέλεσμα η σχετιζόμενη κίνηση να υστερεί σε ακρίβεια. Για να το επιλύσουμε αυτό επιχειρήσαμε να τυπώσουμε ξανά το περίβλημα της 4^{ης} άρθρωσης σε καλύτερη ποιότητα (π.χ. μικρότερο πάχος στρωμάτων), να μειώσουμε το μικρό χάσμα μεταξύ των δύο βασικών PLA κομματιών των τριών τελευταίων αρθρώσεων βιδώνοντας περισσότερο τις αντίστοιχες βίδες, αλλά και να δέσουμε με δεματικό τον κινητήρα πάνω στο περίβλημα της 4^{ης} άρθρωσης για την αποτροπή οποιασδήποτε ανεπιθύμητης ταλάντωσής του. Μετά από αυτές τις προσαρμογές το πρόβλημα περιορίστηκε σημαντικά και σχεδόν εκμηδενίστηκε.
- Το σύνολο σχεδόν των καλωδίων από τα πάνω μέρη του βραχίονα έπρεπε να χωρέσουν μέσα από τις στενές τρύπες διαμέσου του κεντρικού άξονά του, κατευθυνόμενα προς το κάτω μέρος της βάσης. Για την καλύτερη διαχείρισή τους, τα ομαδοποιήσαμε με μαύρη κολλητική ταινία και τα ονοματίσαμε με ετικέτες προκειμένου να γίνει σωστά η σύνδεσή τους στα pins της πλακέτας PCB. Δυστυχώς, λόγω των περιστροφικών αρθρώσεων και του περιορισμένου ελεύθερου χώρου, υπάρχει πάντα ο κίνδυνος υπερβολικής συστροφής και κοπής των καλωδίων.

3. Ανάλυση της κινηματικής του ρομποτικού βραχίονα

Η κινηματική ανάλυση ενός ρομποτικού βραχίονα είναι ίσως η σημαντικότερη πτυχή της μελέτης του. Περιλαμβάνει την ευθεία και τη διαφορική κινηματική, καθώς και τις αντίστοιχες αντίστροφες κινηματικές. Σε αυτήν την εργασία με ενδιαφέρει μονάχα η κίνηση του βραχίονα. Για τον λόγο αυτό δεν χρειάζεται να προβώ στη δυναμική ανάλυσή του, καθώς δεν έχει να μου προσφέρει κάτι η μελέτη των ροπών που ασκούνται στις αρθρώσεις, από τη στιγμή μάλιστα που το τελικό στοιχείο δράσης δεν πρόκειται να έρθει σε επαφή με το περιβάλλον. Σκοπός μου άλλωστε είναι η αποφυγή εμποδίων.

Στα επόμενα περιγράφονται οι μέθοδοι κινηματικής ανάλυσης για την ειδική περίπτωση του ρομποτικού βραχίονα Thor. Βασίζονται στην κλασική σύμβαση των Denavit – Hartenberg, η οποία αναθέτει με συστηματικό τρόπο πλαίσια συντεταγμένων στις αρθρώσεις (και στους συνδέσμους), όπως εξηγείται στο γνωστό βιβλίο ρομποτικής των Siciliano, Sciavicco, Villani, και Oriolo [25]. Για τους σχετικούς υπολογισμούς στον υπολογιστή συμβουλεύτηκα την python βιβλιοθήκη robotics-toolbox [26] (γραμμένη από τον Αυστραλό ερευνητή ρομποτικής Peter Corke), η οποία είναι ιδανική για τη σχεδίαση και μοντελοποίηση σειριακών ρομποτικών χειριστών.

a. Ευθεία κινηματική

Η εξίσωση ευθείας κινηματικής περιγράφει πλήρως τη διαμόρφωση του τελικού στοιχείου δράσης του ρομποτικού βραχίονα ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Γενικά, μπορεί να γραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$\mathbf{s}_e^w = \mathbf{f}\mathbf{k}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Όπου, ειδικά για τον βραχίονα Thor που είναι $n = 6$ βαθμών ελευθερίας, το διάνυσμα των μεταβλητών των αρθρώσεων γράφεται $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T \in \mathbb{R}^6$. Όλες οι αρθρώσεις είναι περιστροφικές, συνεπώς οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι γωνίες. Επίσης, $\mathbf{s}_e^w = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e^w \\ \boldsymbol{\phi}_e^w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ ($m = 6$ είναι ο αριθμός των διαστάσεων για τη συνολική περιγραφή ενός τριδιάστατου χώρου εργασίας) είναι η διαμόρφωση του τελικού στοιχείου δράσης (end – effector), με $\mathbf{p}_e^w \in \mathbb{R}^3$ να είναι η θέση ως προς το πλαίσιο του κόσμου (world) και το διάνυσμα $\boldsymbol{\phi}_e^w \in \mathbb{R}^3$ να παριστάνει τον προσανατολισμό του ως προς το πλαίσιο του κόσμου (πρόκειται για κάποιο είδος γωνιών Euler), με αντίστοιχο πίνακα περιστροφής τον R_e^w . Τέλος, το $\mathbf{f}\mathbf{k}(\mathbf{q})$ είναι μία συνεχής απεικόνιση από τον χώρο των αρθρώσεων στον χώρο εργασίας.

Ο μετασχηματισμός $\mathbf{f}\mathbf{k}(\mathbf{q})$ γίνεται με τον μη γραμμικό ομογενή πίνακα ευθείας κινηματικής $T_e^w(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ο οποίος παίρνει την εξής μορφή:

$$T_e^w(\mathbf{q}) = T_b^w \cdot T_0^b \cdot T_n^0(\mathbf{q}) \cdot T_e^n = \begin{bmatrix} R_e^w(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^w(\mathbf{q}) \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Όπου $T_b^w = \begin{bmatrix} R_b^w & \mathbf{p}_b^w \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$, $T_0^b = \begin{bmatrix} R_0^b & \mathbf{p}_0^b \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ και $T_e^n = \begin{bmatrix} R_e^n & \mathbf{p}_e^n \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ είναι οι σταθεροί ομογενείς πίνακες μετασχηματισμού από το πλαίσιο του κόσμου προς το πλαίσιο της βάσης, από το πλαίσιο της βάσης προς το πλαίσιο “0” και από το πλαίσιο “n” προς το πλαίσιο του τελικού στοιχείου δράσης αντίστοιχα. Ο μεταβλητός ομογενής πίνακας μετασχηματισμού $T_n^0(\mathbf{q})$ είναι συνάρτηση του διανύσματος \mathbf{q} , εκφράζει τη διαμόρφωση του πλαισίου “n” ως προς το πλαίσιο “0” και γράφεται:

$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot \dots \cdot A_n^{n-1}(q_n) = \prod_{k=1}^n A_k^{k-1}(q_k) \quad (3)$$

Οι ζάξονες των πλαισίων “0”, “1”, … “ $n - 1$ ” συμπίπτουν με τους ζάξονες των αρθρώσεων 1, 2, …, n αντίστοιχα και το πλαίσιο “ n ” μπορεί να οριστεί αυθαίρετα. Ο σύνδεσμος 1 ενώνει τις αρθρώσεις 1 και 2 και ομοίως ισχύει και τον τελευταίο σύνδεσμο n , ο οποίος ενώνει την άρθρωση n με το τελικό στοιχείο δράσης. Οι επιμέρους ομογενείς πίνακες $A_k^{k-1}(q_k), k = 1, \dots, n$ εκφράζουν τους μετασχηματισμούς από το πλαίσιο $k - 1$ προς το πλαίσιο k και βρίσκονται, σύμφωνα με την κλασική σύμβαση Denavit – Hartenberg (DH), από τον τύπο:

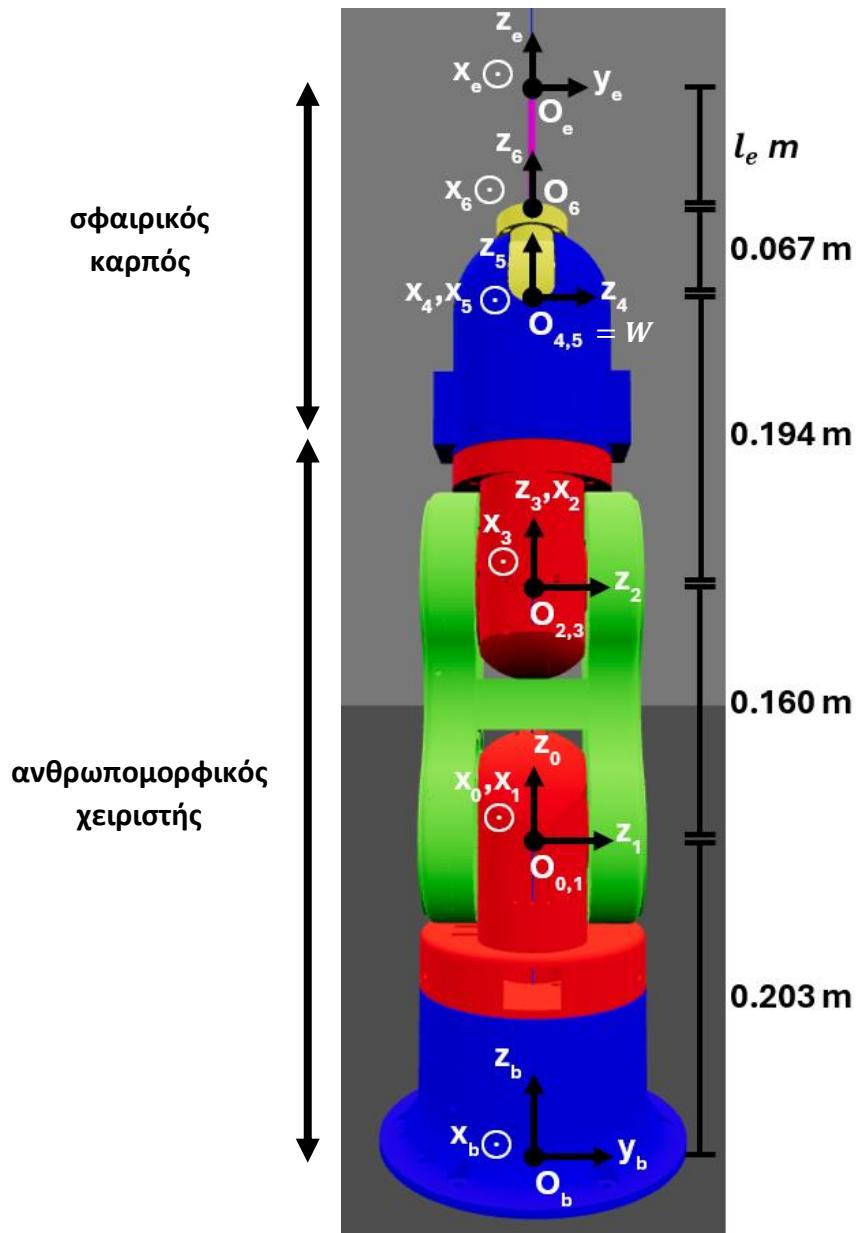
$$A_k^{k-1}(q_k) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\cos(\alpha_k)\sin(\theta_k) & \sin(\alpha_k)\sin(\theta_k) & a_k \cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\alpha_k)\cos(\theta_k) & -\sin(\alpha_k)\cos(\theta_k) & a_k \sin(\theta_k) \\ 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Οι αποστάσεις a, d και οι γωνίες α, θ αποτελούν τις 4 DH παραμέτρους, που παίρνουν διαφορετικές τιμές για κάθε άρθρωση του ρομποτικού χειριστή. Για να πετύχω ως αρχική μηδενική διαμόρφωση ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) του βραχίονα Thor την επιθυμητή όρθια κατακόρυφη στάση σε πλήρη έκταση, χρειάζεται να εισάγω αποκλίσεις / αντισταθμίσεις (τις ονομάζω *offsets*) στις μεταβλητές των αρθρώσεων, με αποτέλεσμα οι παράμετροι θ να υπολογίζονται τελικά από τη σχέση διανυσμάτων $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q} + \text{offsets}$. Ο Πίνακας 3 περιλαμβάνει όλες τις κλασικές DH παραμέτρους του βραχίονα Thor, έχοντας θεωρήσει τις παραμέτρους *offsets* στη θέση των θ (οι αποστάσεις μετρήθηκαν με μετροταινία και ακρίβεια χιλιοστού).

Αρθρώσεις / Σύνδεσμοι	a (m)	α (rad)	d (m)	offsets (rad)	Εύρος κίνησης (rad) $q_{min} \rightarrow q_{max}$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	$[-\pi, \pi]$
2	0.160	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
3	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	0.194	0	$[-\pi, \pi]$
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
6	0	0	0.067	0	$[-\pi, \pi]$

Πίνακας 3 Παράμετροι Denavit-Hartenberg του ρομποτικού βραχίονα Thor

Στην παρακάτω Εικόνα 26 φαίνεται η αρχική διαμόρφωση όρθιας κατακόρυφης στάσης του βραχίονα Thor, όπου $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Έχουν σημειωθεί όλα τα προαναφερθέντα πλαίσια συντεταγμένων, με τα ποικίλα χρώματα να τονίζουν τους ξεχωριστούς συνδέσμους του βραχίονα. Το τελικό στοιχείο δράσης είναι το τελικό ακραίο σημείο μίας λεπτής κυλινδρικής ράβδου μήκους $l_e = 10 \text{ cm}$ και διαμέτρου μικρότερης του ενός εκατοστού (π.χ. 5 mm), ώστε να κάνω την παραδοχή ότι το ελεύθερο άκρο της είναι σημειακό κατά την αποφυγή των εμποδίων. Παρατηρώ ότι ο βραχίονας είναι συνδυασμός ενός ανθρωπομορφικού χειριστή (πρώτες 3 αρθρώσεις) κι ενός σφαιρικού καρπού (τελευταίες 3 αρθρώσεις).



Εικόνα 26 Ευθεία κινηματική ανάλυση του ρομποτικού θραχίου Thor

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $s_i = \sin(q_i)$, $s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$, $c_i = \cos(q_i)$ και $c_{ij} = \cos(q_i + q_j)$, η ακριβής μορφή των επιμέρους ομογενών πινάκων A_k^{k-1} , $k = 1, \dots, 6$ του Thor είναι αυτή που παρουσιάζεται ακολούθως:

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0.16s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -0.16c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A_4^3(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.194 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5^4(q_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6^5(q_6) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.067 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Συνεπώς, ο ομογενής πίνακας $T_3^0(q_1, q_2, q_3) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot A_3^2(q_3)$ για τον ανθρωπομορφικό χειριστή είναι ο εξής:

$$T_3^0(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & 0.16 c_1 s_2 \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & 0.16 s_1 s_2 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & 0.16 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Και ο ομογενής πίνακας μετασχηματισμού $T_6^3(q_4, q_5, q_6) = A_4^3(q_4) \cdot A_5^4(q_5) \cdot A_6^5(q_6)$ για τον σφαιρικό καρπό είναι ο ακόλουθος:

$$T_6^3(q_4, q_5, q_6) = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & 0.067 c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0.067 s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & 0.194 + 0.067 c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Άρα ο συνολικός ομογενής πίνακας μετασχηματισμού $T_e^w(\mathbf{q})$ για τον βραχίονα Thor έχει την εξής μορφή:

$$T_e^w(\mathbf{q}) = T_b^w \cdot T_0^b \cdot T_3^0(q_1, q_2, q_3) \cdot T_6^3(q_4, q_5, q_6) \cdot T_e^6 \quad (9)$$

Για το προγραμματιστικό κομμάτι, οι παραπάνω σχέσεις (7), (8) και (9) μπορούν να εφαρμοστούν αυτούσιες για τον υπολογισμό της ευθείας κινηματικής του ρομποτικού βραχίονα Thor. Για να επεκτείνω τη μελέτη σε οποιονδήποτε άλλο ρομποτικό χειριστή, μπορώ να χρησιμοποιήσω τις γενικές σχέσεις (2), (3) και (4). Μια άλλη γενικευμένη προσέγγιση που θα εξυπηρετήσει και στα υπόλοιπα αυτής της ενότητας, είναι να αξιοποιήσω την `python` βιβλιοθήκη `robotics-toolbox`, δημιουργώντας πρώτα ένα αντικείμενο τύπου "ρομπότ" το οποίο φέρει μια πληθώρα σχετικών ιδιοτήτων (όπως τις DH παραμέτρους και τις διαμορφώσεις της βάσης και του τελικού στοιχείου δράσης) και μεθόδων (για την κινηματική ανάλυση και την οπτικοποίηση του ρομπότ). Στην περίπτωση του βραχίονα Thor, αυτό γίνεται με τη μέθοδο `"Robot.URDF()"` και όρισμα το αρχείο `"thor.urdf"` που έχει ήδη εξηγηθεί. Έπειτα, η μέθοδος `"fkine()"` με τις μεταβλητές των αρθρώσεων του εκάστοτε ρομποτικού χειριστή ως όρισμα, επιστρέφει τον ομογενή πίνακα μετασχηματισμού T_e^w .

Ας σημειωθεί τέλος ότι για τη δημιουργία των πινάκων περιστροφής R , όπου αυτοί εμφανίζονται στην κινηματική ανάλυση, χρησιμοποιώ τις Tait – Bryan εξωτερικές γωνίες Euler xyz (roll, pitch, yaw). Αυτό σημαίνει ότι οι περιστροφές πραγματοποιούνται με τη σειρά ως προς τους άξονες x , y και z του παγκόσμιου συστήματος συντεταγμένων. Θεωρώντας λοιπόν τις θ_r , θ_p και θ_y ως xyz γωνίες Euler, κατασκευάζω τους τρεις στοιχειώδεις πίνακες περιστροφής:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ 0 & \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & 0 & \sin(\theta_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_p) & 0 & \cos(\theta_p) \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & -\sin(\theta_y) & 0 \\ \sin(\theta_y) & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Οπότε ο συνολικός πίνακας περιστροφής $R = R_z R_y R_x$ γίνεται (χρησιμοποιώ για οικονομία χώρου τους συμβολισμούς s για το ημίτονο και c για το συνημίτονο):

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta_y) c(\theta_r) & c(\theta_y) s(\theta_p) s(\theta_r) - s(\theta_y) c(\theta_r) & c(\theta_y) s(\theta_p) c(\theta_r) + s(\theta_y) s(\theta_r) \\ s(\theta_y) c(\theta_r) & s(\theta_y) s(\theta_p) s(\theta_r) + c(\theta_y) c(\theta_r) & s(\theta_y) s(\theta_p) c(\theta_r) - c(\theta_y) s(\theta_r) \\ -s(\theta_r) & c(\theta_p) s(\theta_r) & c(\theta_p) c(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (11)$$

b. Αντίστροφη κινηματική

Όπως αποκαλύπτει και το όνομά της, η αντίστροφη κινηματική πραγματοποιεί την αντίστροφη απεικόνιση από τον χώρο εργασίας στον χώρο των αρθρώσεων, που σημαίνει ότι ασχολείται με την εύρεση των τιμών των αρθρώσεων για μια δοσμένη διαμόρφωση του τελικού στοιχείου δράσης. Ακολουθώντας τους ίδιους συμβολισμούς, μπορούμε να την εκφράσουμε μαθηματικά με τον παρακάτω τρόπο, όπου η διαμόρφωση s_e^w πρέπει να ανήκει στον χώρο εργασίας του ρομπότ:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}\mathbf{k}^{-1}(s_e^w) \in \mathbb{R}^n, \quad s_e^w \in \mathbb{R}^m \quad (12)$$

Το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής είναι αρκετά δυσκολότερο από αυτό της ευθείας. Η πολυπλοκότητα έγκειται μεταξύ άλλων στην υψηλή συνήθως μη γραμμικότητα του πίνακα ευθείας κινηματικής $T_e^w(\mathbf{q})$, κυρίως εξαιτίας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που εμφανίζονται. Το γεγονός αυτό δυσχεραίνει πολύ τον υπολογισμό λύσεων κλειστού τύπου, οι οποίες μπορεί να μην υφίστανται ή να είναι και περισσότερες από μία αναλόγως την κινηματική δομή του ρομποτικού χειριστή. Βέβαια, στην περίπτωση του βραχίονα Thor, το πρόβλημα γίνεται να απλοποιηθεί εφαρμόζοντας έναν κινηματικό διαχωρισμό ως προς το κεντρικό σημείο W του καρπού (Εικόνα 26), δηλαδή το κοινό σημείο τομής των αξόνων των τριών τελευταίων αρθρώσεων (συμπίπτει με το $O_{4,5}$). Η θέση του W εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές q_1, q_2 και q_3 , οι οποίες βρίσκονται μέσω της μορφής του πίνακα T_3^0 (7). Έπειτα, γνωρίζοντας τον συνολικό πίνακα $T_3^0 \cdot T_6^3$ από τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης, υπολογίζονται εύκολα ο πίνακας T_6^3 (8) και μέσω αυτού οι εναπομείνασες μεταβλητές q_4, q_5 και q_6 .

Η παραπάνω προσέγγιση δεν είναι πρακτική, επειδή δεν επεκτείνεται εύκολα σε άλλους ρομποτικούς χειριστές. Γι' αυτό, συνήθως χρησιμοποιούνται γενικοί αριθμητικοί αλγόριθμοι. Στο πακέτο “robotics-toolbox” υλοποιούνται τέτοιες συναρτήσεις, με ενδεικτικές τις “ik_LM()”, “ik_NR()” και “ik_GN()” (πρόκειται για μεθόδους του αντικειμένου “ρομπότ” που δέχονται ορίσματα τον πίνακα ευθείας κινηματικής T_e^w και μία παράμετρο για την ανοχή του τελικού σφάλματος). Και οι τρεις αυτές μέθοδοι διαχειρίζονται το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής μετατρέποντάς το σε πρόβλημα βελτιστοποίησης και επιχειρώντας να μειώσουν το σφάλμα μεταξύ της τρέχουσας και της επιθυμητής διαμόρφωσης του τελικού στοιχείου δράσης. Οι “ik_NR()” και “ik_GN()” αξιοποιούν τους αλγορίθμους βελτιστοποίησης Newton – Raphson και Gauss – Newton. Στον κώδικα χρησιμοποιώ τη συνάρτηση “ik_LM()” που υλοποιεί τον γρήγορο αλγόριθμο Levenberg – Marquardt, και όπως διαπίστωσα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από τις άλλες μεθόδους. Δημιουργεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων που επιλύει με επαναληπτικό τρόπο με ταυτόχρονη χρήση των αλγορίθμων Gauss – Newton και gradient descent, και επιστρέφει τις εφικτές λύσεις της αντίστροφης κινηματικής με μεγάλη ταχύτητα και πολύ καλή ακρίβεια.

c. Διαφορική κινηματική

Η διαφορική κινηματική απεικονίζει τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα με την ταχύτητα $v_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (συνήθως $m = 6$) του τελικού στοιχείου δράσης. Με $\dot{\mathbf{p}}_e \in \mathbb{R}^3$ συμβολίζω τη μεταφορική ταχύτητα και με $\omega_e \in \mathbb{R}^3$ τη γωνιακή ταχύτητα του πλαισίου συντεταγμένων του τελικού στοιχείου δράσης. Ο μετασχηματισμός από το ένα διάνυσμα στο άλλο γίνεται μέσω της γεωμετρικής Ιακωβιανής μήτρας $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$v_e = J(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

Η γεωμετρική Ιακωβιανή είναι συνάρτηση της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα. Για τον ρομποτικό βραχίονα Thor που αποτελείται από $n = 6$ περιστροφικές αρθρώσεις, κατασκευάζω τη $J(\mathbf{q})$ (εκφρασμένη ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων) σύμφωνα με τη σύμβαση Denavit – Hartenberg, ως εξής:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_0 \times \mathbf{p}_{0,6} & \hat{\mathbf{z}}_1 \times \mathbf{p}_{1,6} & \hat{\mathbf{z}}_2 \times \mathbf{p}_{2,6} & \hat{\mathbf{z}}_3 \times \mathbf{p}_{3,6} & \hat{\mathbf{z}}_4 \times \mathbf{p}_{4,6} & \hat{\mathbf{z}}_5 \times \mathbf{p}_{5,6} \\ \hat{\mathbf{z}}_0 & \hat{\mathbf{z}}_1 & \hat{\mathbf{z}}_2 & \hat{\mathbf{z}}_3 & \hat{\mathbf{z}}_4 & \hat{\mathbf{z}}_5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Όπου $\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{z}}_i, i = 0, 1, \dots, 5$ δίνουν την κατεύθυνση των αξόνων z των αντίστοιχων πλαισίων των αρθρώσεων, με $\hat{\mathbf{z}}_0 = [0 \ 0 \ 1]^\top$. Τα διανύσματα $\mathbf{p}_i, i = 0, 1, \dots, 5$ ορίζουν τις θέσεις των πλαισίων των αρθρώσεων (δηλαδή τις αρχές των αξόνων των πλαισίων) και με \mathbf{p}_6 συμβολίζω τη θέση του πλαισίου του τελικού στοιχείου δράσης. Θεωρώ για ευκολία $\mathbf{p}_0 = [0 \ 0 \ 0]^\top$. Συμβολίζω επίσης με $\tilde{\mathbf{p}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ 1 \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, 5$, την ομογενή μορφή των \mathbf{p}_i . Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $\hat{\mathbf{z}}_{i-1} = R_{i-1}^0 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0, i = 0, 1, \dots, 6$ και $\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = A_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_0, i = 0, 1, \dots, 7$, προκύπτουν μετά από πράξεις τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{z}}_1 = \hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{z}}_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} \\ c_{23} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{z}}_4 &= \begin{bmatrix} -c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4 \\ s_{23} s_4 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{z}}_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_{23} c_5 \\ s_1 c_{23} c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5 \\ c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0.16 c_1 s_2 \\ 0.16 s_1 s_2 \\ 0.16 c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 0.194 c_1 s_{23} + 0.16 c_1 s_2 \\ 0.194 s_1 s_{23} + 0.16 s_1 s_2 \\ 0.194 c_{23} + 0.16 c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_6 &= \begin{bmatrix} 0.067 \cdot (c_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_{23} c_5) + 0.194 c_1 s_{23} + 0.16 c_1 s_2 \\ 0.067 \cdot (s_1 c_{23} c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5) + 0.194 s_1 s_{23} + 0.16 s_1 s_2 \\ 0.067 \cdot (c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5) + 0.194 c_{23} + 0.16 c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Αν θέλω να εκφράσω την ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης ως προς ένα διαφορετικό πλαίσιο συντεταγμένων u (π.χ. ως προς το πλαίσιο της βάσης $u = b$ ή ως προς το πλαίσιο του τελικού στοιχείου δράσης $u = e$), μπορώ να χρησιμοποιήσω τον πίνακα προσανατολισμού R^u του πλαισίου u (ως προς τις παγκόσμιες συντεταγμένες), ως εξής:

$$\mathbf{v}_e^u = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \omega_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u \cdot \dot{\mathbf{p}}_e \\ R^u \cdot \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R^u \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} R^u & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R^u \end{bmatrix} \cdot J(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

Και βάσει της (17), η νέα μορφή $J^u(\mathbf{q})$ του πίνακα της Ιακωβιανής βρίσκεται με τον εξής τρόπο:

$$\mathbf{v}_e^u = \begin{bmatrix} R^u & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R^u \end{bmatrix} \cdot J(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = J^u(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow J^u(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R^u & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R^u \end{bmatrix} \cdot J(\mathbf{q}) \quad (18)$$

Η βιβλιοθήκη robotics-toolbox διαθέτει για τα αντικείμενα “ρομπότ” τις μεθόδους “jacobi0()” και “jacobe()", που παίρνουν όρισμα την τρέχουσα διαμόρφωση των αρθρώσεων του βραχίονα και επιστρέφουν τη γεωμετρική Ιακωβιανή ως προς τα πλαίσια του κόσμου και του τελικού στοιχείου δράσης αντίστοιχα. Χρησιμεύουν επίσης και στις διαδικασίες της αντίστροφης διαφορικής κινηματικής. Τέλος, ας αναφερθεί ότι υφίσταται και η έννοια της αναλυτικής Ιακωβιανής, η οποία υπολογίζεται μέσω της άμεσης παραγώγισης της ευθείας κινηματικής, αλλά δεν θα μου χρειαστεί στην παρούσα εργασία.

d. Αντίστροφη διαφορική κινηματική

Σε παρόμοια λογική με την αντίστροφη κινηματική, η αντίστροφη διαφορική κινηματική υπολογίζει τις ταχύτητες των αρθρώσεων (για περιστροφικές αρθρώσεις είναι γωνιακές, ενώ για πρισματικές αρθρώσεις είναι γραμμικές), προκειμένου να επιτευχθεί μια δοσμένη ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης. Η διαδικασία είναι αρκετά πιο εύκολη και άμεση σε σχέση με αυτή της αντίστροφης κινηματικής, διότι η σχέση (13) της διαφορικής κινηματικής είναι μια γραμμική απεικόνιση, που δύναται υπό προϋποθέσεις να επιλυθεί ως προς $\dot{\mathbf{q}}$ με μεθόδους της γραμμικής άλγεβρας. Αν ο πίνακας $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι πλήρους τάξης, που σημαίνει ότι η τάξη του είναι ίση με τον μικρότερο αριθμό από τις γραμμές m και τις στήλες n , τότε μια λύση στην αντίστροφη διαφορική κινηματική δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^\dagger(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_e = J^\top(\mathbf{q}) \cdot (J(\mathbf{q}) \cdot J^\top(\mathbf{q}))^{-1} \cdot \mathbf{v}_e \quad (19)$$

Όπου $J^\dagger(\mathbf{q})$ είναι ο δεξιός ψευδοαντίστροφος Moore-Penrose πίνακας της γεωμετρικής Ιακωβιανής. Στην περίπτωσή βέβαια του Thor όπου ο $J(\mathbf{q})$ είναι τετραγωνικός πίνακας ($m = n = 6$), αν για την ορίζουσα ισχύει $\det(J(\mathbf{q})) \neq 0$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_e = \frac{\text{adj}(J(\mathbf{q}))}{\det(J(\mathbf{q}))} \cdot \mathbf{v}_e \quad (20)$$

Σε περίπτωσή που ο πίνακας της Ιακωβιανής είναι ιδιάζων ή γενικότερα δεν είναι πλήρους τάξης, παρουσιάζεται το πρόβλημα των κινηματικών ιδιομορφιών. Ως τέτοιες χαρακτηρίζονται κάποιες διαμορφώσεις \mathbf{q} , όπου διαταράσσεται η δυνατότητα ορθής κίνησης του βραχίονα, ο οποίος φαίνεται να χάνει ξαφνικά κάποιους βαθμούς ελευθερίας (λόγω της υποβάθμισης της τάξης του). Τότε, περιορίζεται ή παύεται η κινητικότητά του, ή αρχίζει ακόμα και να κινείται με απρόβλεπτο τρόπο. Επίσης, ενδέχεται να υπάρχουν ζητήματα και σε διαμορφώσεις που βρίσκονται στη γειτονιά κάποιων κινηματικών ιδιομορφιών. Παρατηρούμε από τη σχέση (20) πως, αν η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $J(\mathbf{q})$ έχει πολύ μικρή τιμή, τότε μικρές ταχύτητες \mathbf{v}_e ίσως να απαιτούν πολύ μεγάλες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων. Οι κινηματικές ιδιομορφίες ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Στις οριακές, που εμφανίζονται όταν ο ρομποτικός βραχίονας βρίσκεται σε κατάσταση πλήρους έκτασης ή δίπλωσης, φτάνοντας σε ακραίες θέσεις του προσβάσιμου χώρου εργασίας.
- Στις εσωτερικές, που εμφανίζονται εντός του προσβάσιμου χώρου εργασίας, συνήθως λόγω της ευθυγράμμισης κάποιον αξόνων κίνησης. Είναι δυσκολότερα αντιμετωπίσιμες από τις πρώτες, καθώς δεν προσδιορίζονται εύκολα και μπορούν να συναντηθούν οποιαδήποτε στιγμή κατά την κίνηση του ρομποτικού χειριστή.

Στην περίπτωση του βραχίονα Thor, εκμεταλλεύμενοι τον κινηματικό του διαχωρισμό, μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών κινηματικές ιδιομορφίες:

- Αυτές που αφορούν στον ανθρωπομορφικό χειριστή, δηλαδή στις τρεις πρώτες αρθρώσεις και χωρίζονται σε δύο επιμέρους κατηγορίες. Είναι οι ιδιομορφίες ώμου, που προκαλούνται όταν το κεντρικό σημείο W του σφαιρικού καρπού καταλήγει πάνω στον άξονα περιστροφής της 1^{ης} άρθρωσης και οι ιδιομορφίες αγκώνα, όταν το W βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που σχηματίζουν οι παράλληλοι άξονες κίνησης της 2^{ης} και της 3^{ης} άρθρωσης.
- Αυτές που αφορούν στον σφαιρικό καρπό, δηλαδή στις τρεις τελευταίες αρθρώσεις και καλούνται ιδιομορφίες καρπού. Δημιουργούνται όταν οι άξονες της 4^{ης} και της 6^{ης} άρθρωσης ταυτίζονται.

4. Θεωρητική μελέτη του προβλήματος αποφυγής εμποδίων στο επίπεδο

Το πρόβλημα της αποφυγής σύγκρουσης με εμπόδια, για έναν ρομποτικό χειριστή, αποτελεί ένα πολύ σημαντικό θέμα έρευνας στα πεδία της ρομποτικής και του αυτομάτου ελέγχου. Αυτό οφείλεται τόσο στο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει, όσο και στην ανάγκη για την ασφαλή συνύπαρξη και διάδραση ανθρώπων και ρομπότ, σε μια εποχή που τα ρομποτικά συστήματα έχουν εισχωρήσει σχεδόν σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Τα εμπόδια μπορεί να βρίσκονται διάσπαρτα στον τριδιάστατο χώρο ή να τοποθετούνται πάνω σε μία ορισμένη επιφάνεια. Επίσης, δύνανται να είναι ακίνητα, οπότε η καταγραφή τους γίνεται μόνο μία φορά, ή να μετακινούνται στο περιβάλλον, οπότε χρειάζεται η διαρκής εκτίμηση της διαμόρφωσής τους. Για την αναγνώρισή τους αξιοποιούνται διάφοροι εξωδεκτικοί αισθητήρες, όπως υπερηχητικοί αισθητήρες, κάμερες, LiDAR κ.ά..

Σε αυτή τη μελέτη ασχολούμαι με στατικά εμπόδια τοποθετημένα πάνω σε ένα επίπεδο, τα οποία ανιχνεύονται με μία απλή κάμερα. Το ζητούμενο είναι η πλοιόγηση του τελικού στοιχείου δράσης του βραχίονα Thor από μία οποιαδήποτε αρχική θέση πάνω στο επίπεδο των εμποδίων προς μία οποιαδήποτε άλλη θέση – στόχο, διασφαλίζοντας την αποφυγή σύγκρουσης με τα υπάρχοντα εμπόδια. Μερικές σχετικές πραγματικές εφαρμογές, που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα και πρακτικότητα του εξεταζόμενου προβλήματος, είναι:

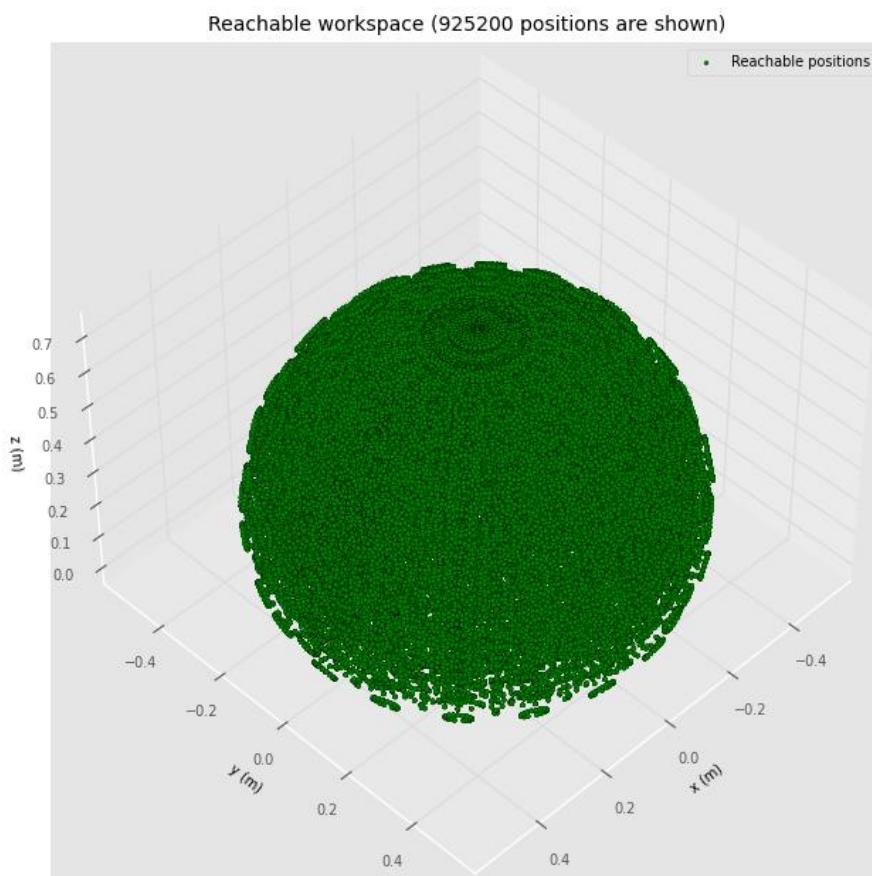
- Ρομποτικές ηλεκτρικές σκούπες καθαρισμού: Χαρτογραφούν τον χώρο εργασίας τους και προσαρμόζουν την κίνησή τους σε νέα τυχόν εμφανιζόμενα εμπόδια.
- Μεταφορά αντικειμένων σε αποθήκες με αυτόνομα έντροχα οχήματα: Εδώ υπάρχει ένας συνδυασμός στατικών (παλέτες, ράφια) και κινούμενων (άνθρωποι) εμποδίων.
- 3D εκτυπωτές: Πρέπει να μη συγκρούεται το ακροφύσιο με ήδη εκτυπωμένες περιοχές, ιδίως κατά την παράλληλη εκτύπωση σε διαφορετικά ύψη.
- Ρομπότ συλλογής και τοποθέτησης (pick and place) σε βιομηχανικές γραμμές παραγωγής: Χειρίζονται και μετακινούν συγκεκριμένα αντικείμενα αποφεύγοντας όλα τα υπόλοιπα.
- Χειρουργικές επεμβάσεις με χρήση ρομποτικών συστημάτων: Απαιτούν την προσεκτική αποφυγή περιοχών του ανθρώπινου σώματος που δεν σχετίζονται με την επέμβαση (π.χ. γειτονικών οργάνων), με τα περιθώρια λάθους να είναι πολύ στενά.

Από τις παραπάνω εφαρμογές, οι δύο τελευταίες ταιριάζουν περισσότερο με την περιγραφή του προβλήματος της συγκεκριμένης εργασίας, όπου χρησιμοποιώνται ρομποτικό βραχίονα. Ας επισημανθεί βέβαια ότι η χρήση του ρομποτικού χειριστή Thor δεν είναι και η πιο ενδεδειγμένη επιλογή, διότι ένας 6 DOF βραχίονας δεν είναι ειδικά φτιαγμένος για τη διεκπεραίωση κινήσεων στο επίπεδο και μάλιστα σε μεγάλη εμβέλεια. Αυτό οφείλεται στον περίσσιο αριθμό αρθρώσεων (η κίνηση στο επίπεδο απαιτεί το ελάχιστο 2 μεταβλητές θέσης και ίσως 1 μεταβλητή προσανατολισμού), που εισάγει περιττή πολυπλοκότητά στη διάταξη, δυσχεραίνοντας έτσι τον έλεγχο, τον σχεδιασμό τροχιάς και την κινηματική ανάλυση. Ιδανικότερη θα ήταν η χρήση ενός καρτεσιανού ρομποτικού χειριστή (γνωστός και ως Gantry χειριστής) με τρεις πρισματικές αρθρώσεις (π.χ. το σύστημα ενός 3D εκτυπωτή). Όπως φανερώνει το όνομά του, η κίνησή του βασίζεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, με αποτέλεσμα ο προσβάσιμος χώρος εργασίας του να είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (άπειροι επίπεδοι χώροι εργασίας ο ένας πάνω στον άλλον) στον τριδιάστατο χώρο. Μία ακόμα συμφέρουσα επιλογή θα ήταν ένας ρομποτικός χειριστής Scara, που διαθέτει την επιπλέον δυνατότητα προσδιορισμού του προσανατολισμού του χειριζόμενου αντικειμένου πάνω στο επίπεδο, χάρη στην περιστροφική άρθρωση του τελικού στοιχείου δράσης.

a. Περιγραφή του χώρου εργασίας του ρομποτικού βραχίονα

i. Προσβάσιμος και επιθυμητός χώρος εργασίας

Ενδιαφέρομαι για την περιγραφή του προσβάσιμου (reachable) WS_R και του επιθυμητού (desired) WS_D χώρου εργασίας του Thor (εδώ δεν με απασχολεί ο ευέλικτος -dexterous- χώρος εργασίας). Ο WS_R είναι το σύνολο όλων των διαμορφώσεων που μπορεί να πετύχει το τελικό στοιχείο δράσης ανεξαρτήτως προσανατολισμού. Αναφερόμενοι λοιπόν μονάχα στις θέσεις στον τριδιάστατο χώρο, δημιουργείται ένας συνεχής όγκος σφαιρικού θόλου, όπως εκτιμάται με τη σχεδίαση χιλιάδων σημείων (που προκύπτουν από την ευθεία κινηματική ποικίλων διαμορφώσεων των αρθρώσεων, όταν η βάση του βραχίονα βρίσκεται στην αρχή του συστήματος κόσμου) στην Εικόνα 27. Ας σημειωθεί ότι έχουν ληφθεί υπόψη τα όρια των γωνιών των αρθρώσεων του βραχίονα και ότι το δάπεδο ($z = 0$) είναι αδιαπέραστο. Δεν αποκλείονται όμως τυχόν συγκρούσεις του τελικού στοιχείου δράσης με το σώμα του ρομπότ, γεγονός βέβαια που δεν επηρεάζει την εικόνα της εξωτερικής επιφάνειας του WS_R .



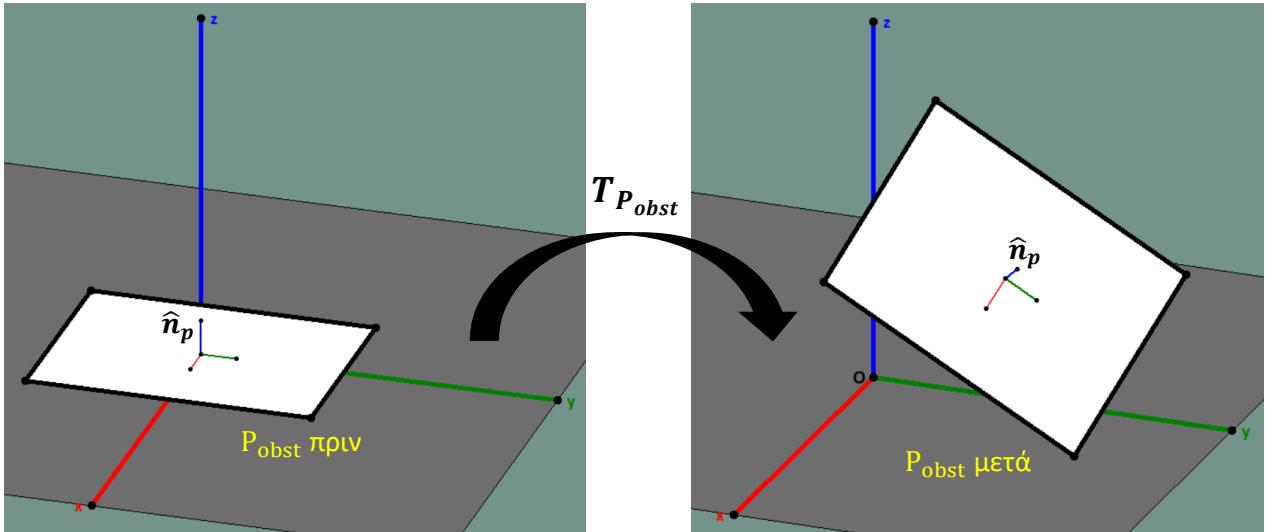
Εικόνα 27 Ο προσβάσιμος χώρος εργασίας του Thor

Ο WS_D είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του WS_R ($WS_D \subset WS_R$), διότι αποτελείται από τα σημεία του WS_R που ικανοποιούν τον επιθυμητό περιορισμό. Ειδικότερα, θέλω το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα να κινείται εν δυνάμει σε οποιοδήποτε σημείου του επιπέδου των εμποδίων, με τέτοιον προσανατολισμό έτσι ώστε ο z άξονας του πλαισίου συντεταγμένων του να είναι κάθετος στο επίπεδο. Άρα ο WS_D περιγράφεται μαθηματικά από την εξής σχέση (όλα εκφράζονται ως προς το πλαίσιο κόσμου):

$$WS_D = \{s_e \in WS_R \mid p_e \in P_{obst} \cap \hat{z}_e \cdot \hat{n}_p = -1\} \quad (21)$$

Όπου $s_e \in \mathbb{R}^6$ είναι η συνολική διαμόρφωση του τελικού στοιχείου δράσης, $p_e \in \mathbb{R}^3$ είναι η θέση του και $\hat{z}_e \in \mathbb{R}^3$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του z άξονα του πλαισίου του τελικού στοιχείου δράσης. Επίσης, συμβολίζω με P_{obst} το επίπεδο των εμποδίων και με \hat{n}_p το μοναδιαίο normal διάνυσμα που είναι κάθετο στο P_{obst} και έχει φορά από τη μεριά του επιπέδου που είναι άδεια προς αυτήν που είναι κατειλημένη από εμπόδια. Ας τονιστεί χάριν πληρότητας ότι χρησιμοποιώ τον όρο “επίπεδο των εμποδίων” ελαφρώς καταχρηστικά, αναφερόμενος τελικά σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραφο συγκεκριμένου μήκους l_p και πλάτους w_p , στα όρια του οποίου πρέπει να χωρέσουν όλα τα εμπόδια (εξωτερικό και εσωτερικά). Απαιτώ ακόμα να ισχύει η σχέση $\hat{z}_e \cdot \hat{n}_p = -1$, διότι θέλω τα εμπλεκόμενα διανύσματα να είναι αντίρροπα, με αποτέλεσμα το τελικό στοιχείο δράσης να “δείχνει” το P_{obst} .

Απομένει να εκφράσω μαθηματικά το P_{obst} . Τοποθετώ το σύστημα συντεταγμένων του στο γεωμετρικό του κέντρο, με τον z άξονα να έχει την κατεύθυνση του \hat{n}_p . Αποφάσισα να θεωρήσω αρχική του διαμόρφωση το xy επίπεδο του κόσμου, με το σύστημα συντεταγμένων του να ταυτίζεται με το παγκόσμιο, όπως παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 28 στα αριστερά. Στόχος μου είναι να παραγάγω έναν ομογενή παραμετρικό μετασχηματισμό $T_{P_{obst}}(t_p, \hat{n}_p, \phi_p) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ που να οδηγεί το P_{obst} σε οποιαδήποτε πιθανή διαμόρφωση στον χώρο (μία τυχαία περίπτωση φαίνεται στην Εικόνα 28 στα δεξιά). Έχω συμβολίσει με $t_p \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα θέσης κόσμου του P_{obst} , με $\hat{n}_p \in \mathbb{R}^3$ το normal διάνυσμα του P_{obst} και με $\phi_p \in \mathbb{R}$ τη γωνία περιστροφής του P_{obst} γύρω από το \hat{n}_p . Δηλαδή για τον προσανατολισμό του επιπέδου των εμποδίων ακολουθώ μία προσέγγιση άξονα – γωνία.



Εικόνα 28 Ενδεικτικός μετασχηματισμός $T_{P_{obst}}$ του επιπέδου των εμποδίων

Η εξίσωση ενός οποιουδήποτε επιπέδου στον τριδιάστατο χώρο είναι: $ax + by + cz + d = 0$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ορίζω ένα επίπεδο ϵ το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$, οπότε πρέπει να ισχύει $d = 0$ και η εξίσωση του επιπέδου καταλήγει να είναι $\epsilon: ax + by + cz = 0$. Παίρνω στη συνέχεια ένα σημείο $M = (x_M, y_M, z_M)$ του επιπέδου ϵ , για το οποίο θέλω το διάνυσμα θέσης του \overrightarrow{OM} να παραμένει πάντα παράλληλο στο xy επίπεδο, που σημαίνει ότι $z_M = 0$. Δεδομένου ότι το M απαιτείται να ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου και θέτοντας $x_M = b$, υπολογίζω πως $M = (b, -a, 0)$. Παίρνω επιπλέον ένα σημείο $K = (x_K, y_K, z_K)$ του επιπέδου ϵ , τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{OM}$. Άρα ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = 0 \Rightarrow [b \ -a \ 0]^\top \cdot \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow bx_K - ay_K = 0 \quad (22)$$

Και επιλέγοντας $x_K = ac$, βρίσκουμε μέσω της $ax_K + by_K + cz_K = 0$ το σημείο $K = (ac, bc, -a^2 - b^2)$. Θέτω ως κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο ϵ το $\vec{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^\top$. Για να το βρω αρκεί να υπολογίσω το εξωτερικό γινόμενο $\vec{n} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OK}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_M & y_M & z_M \\ x_K & y_K & z_K \end{bmatrix} = (y_M z_K - y_K z_M) \hat{x} + (x_K z_M - x_M z_K) \hat{y} + (x_M y_K - x_K y_M) \hat{z} \Rightarrow (23) \\ &\Rightarrow \vec{n} = [a(a^2 + b^2) \ b(a^2 + b^2) \ c(a^2 + b^2)]^\top = (a^2 + b^2) \cdot [a \ b \ c]^\top \end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας το \vec{n} προκύπτει το μοναδιαίο διάνυσμα: $\hat{\mathbf{n}}_p = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot [a \ b \ c]^\top$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, οπότε $\hat{\mathbf{n}}_p = [a \ b \ c]^\top$. Κανονικοποιώ επίσης και τα διανύσματα \overrightarrow{OM} , \overrightarrow{OK} ως προς τα μέτρα τους $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OK}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Κατασκευάζω έτσι τον πίνακα περιστροφής $R_{\hat{\mathbf{n}}_p} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} & \overrightarrow{OK} & \hat{\mathbf{n}}_p \end{bmatrix}^\top$ για τον άξονα του προσανατολισμού του P_{obst} :

$$R_{\hat{\mathbf{n}}_p} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \begin{bmatrix} b & ac & a\sqrt{a^2 + b^2} \\ -a & bc & b\sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 & -a^2 - b^2 & c\sqrt{a^2 + b^2} \end{bmatrix}, \quad \text{με } \hat{\mathbf{n}}_p = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ο παραπάνω πίνακας περιστροφής εφαρμόζεται για $\hat{\mathbf{n}}_p \neq \hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{n}}_p \neq -\hat{\mathbf{z}}$. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $\hat{\mathbf{n}}_p = \hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{n}}_p = -\hat{\mathbf{z}}$, μπορούμε να γράψουμε για λόγους συνέχειας:

$$R_{\hat{\mathbf{n}}_p=\hat{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R_{\hat{\mathbf{n}}_p=-\hat{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ακόμα, για την περιστροφή του επιπέδου γύρω από τον άξονα του κάθετου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}_p$, έστω κατά γωνία $\phi_p \in [-\pi, \pi]$ (η γωνία του προσανατολισμού του P_{obst} , παίρνει τιμές στο διάστημα), χρησιμοποιώ τον ακόλουθο στοιχειώδη πίνακα περιστροφής R_{ϕ_p} .

$$R_{\phi_p} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_p) & -\sin(\phi_p) & 0 \\ \sin(\phi_p) & \cos(\phi_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη και τη μετατόπιση \mathbf{t}_p του επιπέδου στον χώρο, έχουμε τον παρακάτω συνολικό μετασχηματισμό:

$$T_{P_{obst}}(\mathbf{t}_p, \hat{\mathbf{n}}_p, \phi_p) = \begin{bmatrix} R_{\hat{\mathbf{n}}_p} \cdot R_{\phi_p} & \mathbf{t}_p \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ii. Πραγματικός χώρος εργασίας με τα εμπόδια

Ορίζω επίσης τον πραγματικό χώρο εργασίας του βραχίονα, που τον συμβολίζω με WS_{real} . Είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του επιθυμητού χώρου εργασίας ($WS_{real} \subset WS_D$). Αποτελείται από όλες εκείνες τις διαμορφώσεις του τελικού στοιχείου δράσης που περιλαμβάνονται στον επιθυμητό χώρο εργασίας, για τις οποίες δεν προκαλείται σύγκρουση του βραχίονα με τα εμπόδια. Με μαθηματικούς όρους ισχύει:

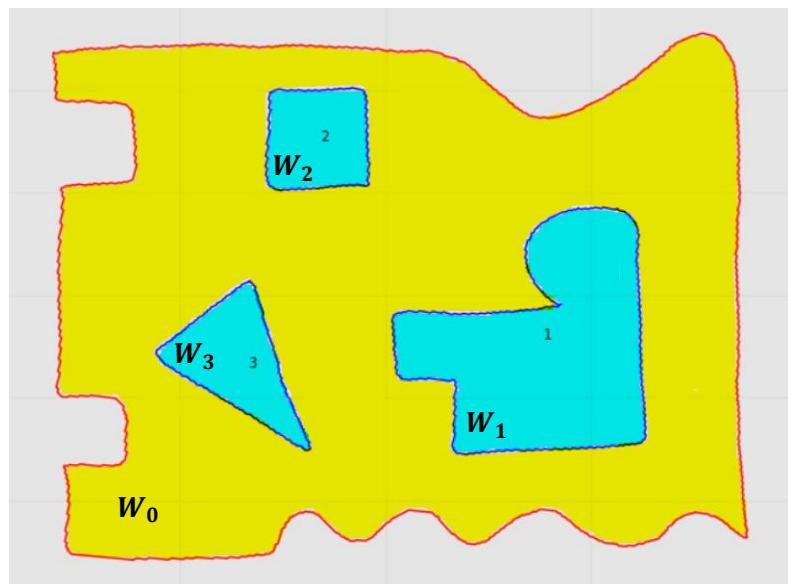
$$WS_{real} = \{s_e \in WS_D \mid p_e \in W_{free}\} \quad (28)$$

Όπου W_{free} είναι η φραγμένη, επίπεδη επιφάνεια που δεν καταλαμβάνεται από εμπόδια. Ορίζω τα εμπόδια με τη χρήση καμπυλών Jordan. Έτσι ονομάζεται μία απλή και κλειστή καμπύλη του επιπέδου, δηλαδή ένας συνεχής κλειστός βρόχος στο επίπεδο, ο οποίος δεν τέμνει τον εαυτό του. Σύμφωνα με το ομώνυμο θεώρημα, μία καμπύλη Jordan χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές: στην εσωτερική που φράσσεται από την καμπύλη, και στην εξωτερική.

Υποθέτω λοιπόν πεπερασμένο αριθμό $N + 1$ καμπυλών Jordan $C_{j,k}, k = 0, 1, \dots, N$. Θεωρώ ακόμα συμπαγείς (κλειστές και φραγμένες) και απλώς συνεκτικές (χωρίς οπές) περιοχές $W_k, k = 0, 1, \dots, N$, με συνοριακές καμπύλες $\partial W_k = C_{j,k}, k = 0, 1, \dots, N$. Οι N στο πλήθος περιοχές $W_k, k = 1, \dots, N$ είναι ανά δύο ασύνδετες και ανήκουν στο εσωτερικό της W_0 , δηλαδή $W_1, \dots, W_N \in int(W_0)$. Άρα, μπορώ να ορίσω τον χώρο W_{free} ως εξής:

$$W_{free} = int(W_0) \setminus \bigcup_{k=1}^N W_k = int(W_0) \cap \bigcap_{k=1}^N ext(W_k) \quad (29)$$

Που σημαίνει ότι ο ελεύθερος χώρος, όπου μπορεί να κινηθεί το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα, είναι η εσωτερική περιοχή του εξωτερικού συνόρου ∂W_0 , έχοντας εξαιρέσει τις περιοχές W_1, \dots, W_N . Συνεπώς, ο W_{free} είναι μία πολλαπλώς συνεκτική περιοχή με N οπές. Στα επόμενα, θα αποκαλώ το ∂W_0 εξωτερικό σύνορο και τα $\partial W_1, \dots, \partial W_N$ εσωτερικά σύνορα. Μία ενδεικτική μορφή του χώρου των εμποδίων παρουσιάζεται στην Εικόνα 29, όπου ο W_{free} (κίτρινο χρώμα) διαθέτει 3 εσωτερικά σύνορα.



Εικόνα 29 Μια ενδεικτική μορφή της κάτοψης του επίπεδου πραγματικού χώρου των εμποδίων

b. Αρμονικές συναρτήσεις – Ορισμός και ιδιότητες

Σε πολλά σημεία της ανάλυσης που θα ακολουθήσει στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αρμονικές (harmonic) συναρτήσεις [27]. Πρόκειται για συναρτήσεις C^2 , δηλαδή διπλά παραγωγίσιμες με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, που είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace:

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \quad (30)$$

Όπου $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι μια αρμονική συνάρτηση n μεταβλητών και ο τελεστής Δ ονομάζεται τελεστής Laplace, με $\Delta = \vec{V}^\top \cdot \vec{V} = \vec{V}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Το $\vec{V} = \vec{V}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^\top$ είναι το γνωστό διάνυσμα της κλίσης (για ευκολία θα το γράφω και ως ∇ , χωρίς το διανυσματικό βέλος). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αρμονικής, την οποία και θα αξιοποιήσω κατά κόρον στην ανάλυση που ακολουθεί, είναι η δύο μεταβλητών συνάρτηση $f(x, y) = \ln[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]$, όπου x, y οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και x_c, y_c σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2(x - x_c)}{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2(y - y_c)}{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \right] = \\ &= \frac{2(x - x_c)^2 + 2(y - y_c)^2 - 4(x - x_c)^2}{[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]^2} + \frac{2(x - x_c)^2 + 2(y - y_c)^2 - 4(y - y_c)^2}{[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]^2} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Μερικές από τις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων αναφέρονται ακολούθως:

- Αναλυτικότητα και C^∞ διαφορισμότητα:

Οι αρμονικές είναι πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις και απείρως διαφορίσιμες σε ένα ανοιχτό σύνολο.

- Αρχή της επαλληλίας (superposition principle):

Ο γραμμικός συνδυασμός αρμονικών συναρτήσεων είναι επίσης αρμονική. Το γεγονός αυτό απορρέει από τη γραμμικότητα του τελεστή Laplace.

- Σύνδεση με τη θεωρία δυναμικού (potential theory):

Μια αρμονική συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως το βαθμωτό πεδίο, του οποίου η κλίση $\vec{V}f$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο \vec{F} μηδενικής απόκλισης ($\vec{V}^\top \cdot \vec{F} = 0$). Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της αρμονικής: $\vec{V}^\top \cdot \vec{F} = \vec{V}^\top \cdot \vec{V}f = 0$. Άρα, το διανυσματικό πεδίο της κλίσης μιας αρμονικής συνάρτησης, που παρεμπιπτόντως είναι συντηρητικό αφού $\vec{V} \times (\vec{V}f) = 0$, δεν διαθέτει ούτε σημεία – πηγές (sources) ούτε σημεία – σιφώνια (sinks).

- Αρχή του μεγίστου (maximum principle):

Έστω ότι η $f: D_f$ είναι αρμονική συνάρτηση και το $K \subseteq D_f$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f . Τότε, το τμήμα της f που είναι περιορισμένο στο K πετυχαίνει τις ακραίες τιμές του (μέγιστο και ελάχιστο) στο σύνορο του K . Μάλιστα, αν το πεδίο ορισμού D_f είναι συνεκτικό, τότε η f αποκλείεται να έχει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Εξαιρείται μονάχα η περίπτωση της σταθερούς συνάρτησης (που όλα της τα σημεία είναι τοπικά μέγιστα και ελάχιστα με την ίδια τιμή). Για παράδειγμα, η $f(x, y) = \ln[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]$ με πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x_c, y_c)\}$ δεν έχει κανένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο. Τείνει βέβαια στο $-\infty$ για $(x, y) \rightarrow (x_c, y_c)$, όμως δεν ορίζεται στο σημείο (x_c, y_c) , οπότε αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί θέση τοπικού ελαχίστου.

c. Μετασχηματισμός του πραγματικού χώρου των εμποδίων

Γενικά, ο πραγματικός ελεύθερος χώρος W_{free} που ορίστηκε προηγουμένως στην (29) είναι αρκετά σύνθετος. Αυτό έγκειται στον μεγάλο και μεταβλητό αριθμό των εμποδίων, τα οποία δύνανται να έχουν ποικίλα σχήματα, κυρτά ή και μη κυρτά. Η σχεδίαση του νόμου ελέγχου για την κίνηση ενός ρομποτικού χειριστή σε έναν χώρο με αυτού του είδους την πολυπλοκότητα θα ήταν πολύ δύσκολη. Γι' αυτό, προχωρώ σε μετασχηματισμούς του W_{free} , έτσι ώστε να προκύψουν απλούστεροι χώροι που θα επιδέχονται ευκολότερης ανάλυσης. Οι εν λόγω μετασχηματισμοί εφαρμόζονται offline και μία φορά μονάχα για μία ορισμένη στατική διαμόρφωση των εμποδίων. Η παρακάτω μελέτη εξηγεί δύο τέτοιες απεικονίσεις και είναι, κατά μεγάλο μέρος της, βασισμένη στην εργασία [5], όπου περιγράφονται η πρώτη απεικόνιση καθώς και ο νόμος ελέγχου για τον οποίον θα γίνει λόγος αργότερα.

i. Μετασχηματισμός από τον πραγματικό χώρο στον σφαιρικό

Ο πρώτος μετασχηματισμός απεικονίζει, με συνεχή τρόπο, τις θέσεις $\mathbf{p} = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$ της περιοχής $cl(W_{free})$ στις θέσεις του μοναδιαίου δίσκου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ και τον ονομάζω T_{wtd} (workspace to disc), δηλαδή $T_{wtd}: cl(W_{free}) \mapsto D$. Το σύνολο $cl(W_{free}) = int(W_{free}) \cup \partial W_{free}$ αποτελείται από όλα τα εσωτερικά και οριακά (εξωτερικό και εσωτερικά σύνορα) σημεία του W_{free} . Ειδικότερα, ο μετασχηματισμός $T_{wtd}(\mathbf{p}) = [u(\mathbf{p}) \ v(\mathbf{p})]^T, \forall \mathbf{p} \in cl(W_{free})$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- Απεικονίζει το εξωτερικό σύνορο ∂W_0 του W_{free} πάνω στο σύνορο του D , δηλαδή στον μοναδιαίο κύκλο $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- Απεικονίζει τα εσωτερικά σύνορα $\partial W_k, k = 1, \dots, N$ του W_{free} (καθώς και τα εσωτερικά σημεία των περιοχών W_k) πάνω στα διακριτά σημεία $\mathbf{b}_k = [u_k \ v_k]^T \in int(D), k = 1, \dots, N$ αντίστοιχα.
- Είναι μία αμφιδιαφόριση (1 – 1 και επί, συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση με συνεχώς διαφορίσιμη αντίστροφο) για όλα τα σημεία $\mathbf{p} = [x \ y]^T$ του W_{free} προς όλα τα εσωτερικά σημεία $\mathbf{b} = [u \ v]^T$ του κυκλικού δίσκου D εξαιρουμένων των $\mathbf{b}_k, k = 1, \dots, N$.

Οι πρώτες δύο ιδιότητες βασίζονται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε καμπύλη Jordan είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τον μοναδιαίο κύκλο και κατά συνέπεια με έναν κύκλο οποιασδήποτε ακτίνας. Για την εύρεση του T_{wtd} στηριζόμαστε στο παρακάτω θεώρημα [28]:

Θεώρημα 1: Έστω ότι η περιοχή A είναι μία πεπερασμένως συνεκτική περιοχή (απλώς ή πολλαπλώς συνεκτική), φραγμένη από $n + 1$ καμπύλες Jordan C_0, C_1, \dots, C_n , όπου C_0 είναι το εξωτερικό σύνορο και C_1, \dots, C_n είναι τα εσωτερικά σύνορα. Έστω ακόμα ότι η Ω είναι μία φραγμένη κυρτή περιοχή με σύνορο $\partial\Omega$. Υποθέτουμε ότι η f^* είναι ένας αδύναμος ομοιομορφισμός (weak homeomorphism) που διατηρεί τον προσανατολισμό (orientation – preserving) από το C_0 στο $\partial\Omega$. Τότε, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία αρμονική συνάρτηση f στο A που είναι συνεχής στο \bar{A} , η οποία απεικονίζει το A στο Ω με έναν 1 – 1 και επί μετασχηματισμό, με n σημεία αφαιρεμένα και με τις τιμές της f να ισούνται με αυτές της f^* στο C_0 .

Στην περίπτωσή μας, οι περιοχές A και Ω του θεωρήματος είναι ο χώρος $cl(W_{free})$ και ο μοναδιαίος δίσκος D αντίστοιχα, και τα σύνορα $C_0, C_1, \dots, C_n, \partial\Omega$ είναι τα $W_0, W_1, \dots, W_N, \partial D$. Επίσης, ο αδύναμος ομοιομορφισμός f^* είναι η απεικόνιση $T_{wtd,\partial}: \partial W_0 \mapsto \partial D$. Ακόμα, η συνάρτηση f είναι η συνολική απεικόνιση $T_{wtd}: cl(W_{free}) \mapsto D$, η οποία πρέπει βάσει του θεωρήματος να είναι αρμονική. Η αναλυτική εύρεση του ιδανικού μετασχηματισμού είναι δύσκολη, έτσι δημιουργούμε στη θέση του έναν προσεγγιστικό μετασχηματισμό $\tilde{T}_{wtd}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(\mathbf{p}) \\ \tilde{v}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \simeq T_{wtd}(\mathbf{p}), \forall \mathbf{p} \in cl(W_{free})$, όπου \tilde{u} και \tilde{v} είναι αρμονικές συναρτήσεις. Θέτουμε τις εξής δύο επιθυμητές συνοριακές συνθήκες:

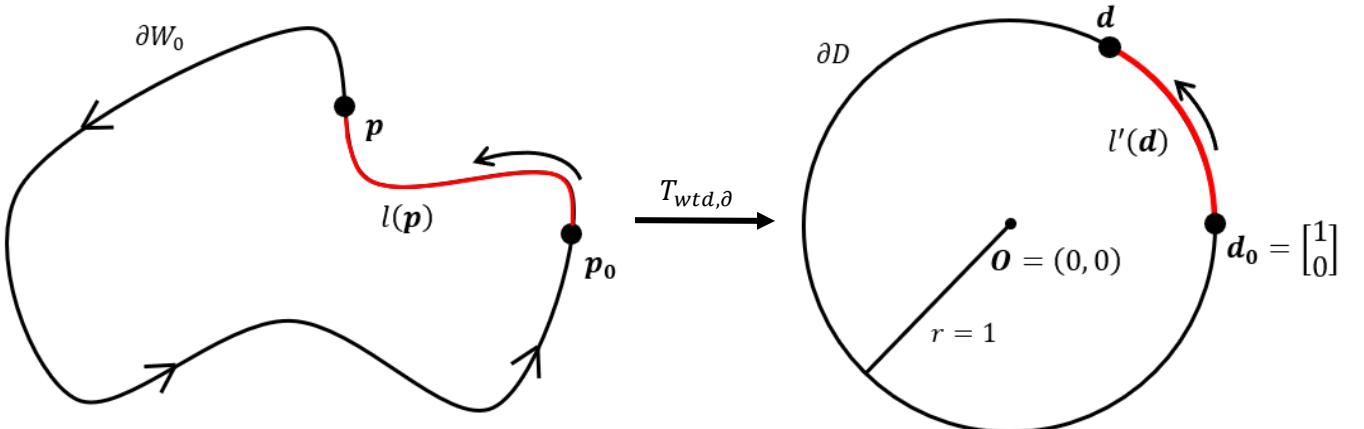
$$T_{wtd}(\mathbf{p}) = T_{wtd,\partial}(\mathbf{p}) = [\tilde{u}(\mathbf{p}) \quad \tilde{v}(\mathbf{p})]^\top, \quad \forall \mathbf{p} \in \partial W_0 \quad (32)$$

$$\oint_{\partial W_k} \frac{\partial T_{wtd}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}}} ds = \oint_{\partial W_k} \nabla_{\mathbf{p}}^\top T_{wtd} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}} ds = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (33)$$

Η συνθήκη (32) αφορά στο εξωτερικό σύνορο ∂W_0 . Οι N στο πλήθος (όσες και τα εσωτερικά εμπόδια) συνθήκες (33) αφορούν στα εσωτερικά σύνορα $\partial W_1, \dots, \partial W_N$, και $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}}$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο στο σύνορο ∂W_k διάνυσμα στο σημείο \mathbf{p} . Οι (33) είναι κατασκευαστικές συνθήκες που επιβάλλονται από την απόδειξη στο **Θεώρημα 1** και δηλώνουν ότι η συνολική ροή του διανυσματικού πεδίου $\nabla_{\mathbf{p}}^\top T_{wtd}$ που διέρχεται από τις απλές, κλειστές καμπύλες ∂W_k είναι μηδενική. Είναι αξιοσημείωτο ότι, αν η απεικόνιση T_{wtd} που είναι συνεχής στις περιοχές W_k , είναι επιπλέον και αρμονική εκεί ($\nabla_{\mathbf{p}}^2 T_{wtd} = 0, \forall \mathbf{p} \in W_k$), τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green, ή αλλιώς το θεώρημα της απόκλισης του Gauss στις δύο διαστάσεις, παίρνουμε: $\oint_{\partial W_k} \nabla_{\mathbf{p}}^\top T_{wtd} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}} ds = \iint_{W_k} \nabla_{\mathbf{p}}^\top \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} T_{wtd}) dA = \iint_{W_k} \nabla_{\mathbf{p}}^2 T_{wtd} dA = 0$.

Ο μετασχηματισμός $T_{wtd,\partial}: \partial W_0 \mapsto \partial D$ γίνεται να υπολογιστεί εύκολα. Η ∂W_0 είναι μια καμπύλη Jordan συνολικού μήκους $L = |\partial W_0|$ και υποθέτω ότι είναι θετικώς (ή αλλιώς αντιωρολογιακώς) προσανατολισμένη. Με αυθαίρετο αρχικό σημείο $\mathbf{p}_0 \in \partial W_0$ ταξιδεύω κατά μήκος της ∂W_0 μέχρι και το τελικό σημείο $\mathbf{p} \in \partial W_0$, διαγράφοντας μια διαδρομή $\widehat{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}}$ μήκους $l(\mathbf{p}) = |\widehat{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}}|$. Τότε, η σχέση (34) αντιστοιχεί κάθε σημείο $\mathbf{p} \in \partial W_0$ στο σημείο $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi l(\mathbf{p})}{L}\right) & \sin\left(\frac{2\pi l(\mathbf{p})}{L}\right) \end{bmatrix}^\top \in \partial D$, με κάθε σημείο \mathbf{b} να είναι η εικόνα ενός μοναδικού σημείου \mathbf{p} (για $l(\mathbf{p}) = 0$ και $l(\mathbf{p}) = L$ ισχύει $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \mapsto \mathbf{b}_0 = [1 \quad 0]^\top$). Η Εικόνα 30 βοηθάει στην οπτικοποίηση της διαδικασίας.

$$T_{wtd,\partial}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi l(\mathbf{p})}{L}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi l(\mathbf{p})}{L}\right) \end{bmatrix}, \quad \forall \mathbf{p} \in \partial W_0 \quad (34)$$



Εικόνα 30 Διάσχιση της θετικά προσανατολισμένης καμπύλης ∂W_0 , με αρχικό σημείο το p_0 και τελικό σημείο το p , ώστε να απεικονιστεί στον μοναδιαίο κύκλο ∂D

Απομένει ο υπολογισμός του μετασχηματισμού $T_{wtd}: W_{free} \mapsto int(D)$. Η εύρεση κλειστών τύπων καθίσταται ιδιαίτερα περίπλοκη, μη πρακτική διαδικασία, συνεπώς πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους. Εδώ αξιοποιούμε τη μέθοδο panel, σύμφωνα με την οποία διαιρούμε τα σύνορα $\partial W_0, \partial W_1, \dots, \partial W_N$ σε $\tilde{M}_0, \tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_N$ αντίστοιχα στο πλήθος τμήματα $\tilde{E}_{ij}, j = 1, 2, \dots, \tilde{M}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, με το \tilde{E}_{ij} να

είναι το j στοιχείο του συνόρου ∂W_i . Έτσι, το ∂W_0 διασπάται στα διαδοχικά τμήματα $\tilde{E}_{0,1}, \tilde{E}_{0,2}, \dots, \tilde{E}_{0,\tilde{M}_0}$, το ∂W_N στα $\tilde{E}_{N,1}, \tilde{E}_{N,2}, \dots, \tilde{E}_{N,\tilde{M}_N}$, και ομοίως για τα υπόλοιπα. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των τμημάτων \tilde{E}_{ij} , τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα μεταξύ της ιδανικής T_{wtd} και της προσεγγιστικής \tilde{T}_{wtd} απεικόνισης. Τελικά, ορίζουμε τα στοιχεία του T_{wtd} όπως παρουσιάζεται στην (35):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{p}) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_c} \tilde{c}_{ijl}^x \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p}) \\ \tilde{v}(\mathbf{p}) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_c} \tilde{c}_{ijl}^y \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p}) \quad , \quad \forall \mathbf{p} \in W_{free} \\ \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p}) &= \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s)\|) ds \end{aligned} \quad (35)$$

Όπου $\tilde{c}_{ijl}^x, \tilde{c}_{ijl}^y \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές παράμετροι ελέγχου, \tilde{M}_c στο πλήθος για κάθε τμήμα \tilde{E}_{ij} , που πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις επιθυμητές ιδιότητες του T_{wtd} που αναφέρθηκαν στην αρχή. Οι συναρτήσεις $\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s): [0, |\tilde{E}_{ij}|] \mapsto \tilde{E}_{ij}$ είναι 1–1 και επί παραμετροποιήσεις των τμημάτων \tilde{E}_{ij} , ως προς την παράμετρο μήκους s . Μία ενδεικτική, γραμμική μορφή της παραμετροποίησης είναι η $\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s) = \tilde{\mathbf{p}}_{ij,A} + (\tilde{\mathbf{p}}_{ij,B} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij,A}) \cdot \frac{s}{|\tilde{E}_{ij}|}$, όπου $\tilde{\mathbf{p}}_{ij,A}, \tilde{\mathbf{p}}_{ij,B}$ είναι τα άκρα του τμήματος \tilde{E}_{ij} . Οι $\tilde{G}_{ijl}(s): [0, |\tilde{E}_{ij}|] \mapsto \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις (συνήθως σταθερές ή γραμμικές) που επηρεάζουν τη μορφή των ποσοτήτων $\tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})$, και είναι \tilde{M}_c στο πλήθος για κάθε τμήμα \tilde{E}_{ij} . Παρατηρείται ότι οι $\tilde{u}(\mathbf{p})$ και $\tilde{v}(\mathbf{p})$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτησιακών ποσοτήτων $\tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})$. Αν δείξουμε ότι οι $\tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})$ είναι αρμονικές συναρτήσεις, αποδεικνύοντας ότι επαληθεύουν την εξίσωση Laplace, τότε από την αρχή της επαλληλίας προκύπτει ότι και οι $\tilde{u}(\mathbf{p}), \tilde{v}(\mathbf{p})$ είναι αρμονικές. Πράγματι, δεδομένου ότι $\Delta_{\mathbf{p}} [\ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s)\|)] = \nabla_{\mathbf{p}}^2 [\ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s)\|)] = 0$ και υποθέτοντας ότι ισχύει ο ολοκληρωτικός κανόνας του Leibniz για διαφόριση εντός του επικαμπύλου ολοκληρώματος στο $\tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}} \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p}) &= \Delta_{\mathbf{p}} \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s)\|) ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_{\mathbf{p}} \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p}) &= \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \Delta_{\mathbf{p}} [\ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(s)\|)] ds = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Απαιτείται λοιπόν να υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους ελέγχου $\tilde{c}_{ijl}^x, \tilde{c}_{ijl}^y$, καθώς και τις εικόνες $\mathbf{b}_k = [u_k \ v_k]^T, k = 1, \dots, N$ των συνόρων $\partial W_1, \dots, \partial W_N$ των N εσωτερικών εμποδίων. Έχουμε θεωρήσει ότι το εξωτερικό σύνορο ∂W_0 είναι θετικώς (αντιωρολογιακώς) προσανατολισμένο, ενώ τα εσωτερικά σύνορα $\partial W_1, \dots, \partial W_N$ είναι αρνητικώς (ωρολογιακώς) προσανατολισμένα. Στην αριθμητική μέθοδο που ακολουθεί θα υπολογίσουμε τις διάφορες ποσότητες σε αυθαίρετα επιλεγμένα (π.χ. ομοιόμορφα κατανεμημένα) σημεία $\tilde{\mathbf{p}}_{ij}^* \in \partial W_i$, συνολικού αριθμού $\sum_{i \in \{0,1,\dots,N\}} \tilde{m}_i$ με $\tilde{m}_i = \tilde{M}_c \cdot \tilde{M}_i$. Δημιουργούμε λοιπόν δύο ανεξάρτητα γραμμικά συστήματα εξισώσεων προς επίλυση:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}_x \quad \text{και} \quad \tilde{A} \cdot \tilde{Y} = \tilde{B}_y \quad (37)$$

Όπου τα άγνωστα διανύσματα \tilde{X} και \tilde{Y} είναι διανύσματα στήλης, διάστασης $N + \tilde{M}_c \cdot \sum_{k \in \{0,1,\dots,N\}} \tilde{M}_k$, που εμπεριέχουν τις άγνωστες ποσότητες που αναζητάμε:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \left[\tilde{C}_{0,1,1}^x \quad \dots \quad \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^x \quad u_1 \quad \dots \quad u_N \right]^\top \\ \tilde{Y} &= \left[\tilde{C}_{0,1,1}^y \quad \dots \quad \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^y \quad v_1 \quad \dots \quad v_N \right]^\top\end{aligned}\tag{38}$$

Οι πίνακες \tilde{A} , \tilde{B}_x και \tilde{B}_y γράφονται ($1_{m \times n}^k$ είναι ο μηδενικός $\mathbb{R}^{m \times n}$ πίνακας με μονάδες στην k στήλη):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{\tilde{m}_0 \times N} \\ \tilde{A}_1 & -1_{\tilde{m}_1 \times N}^1 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_N & -1_{\tilde{m}_N \times N}^N \\ \tilde{A}_+ & 0_{N \times N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_x = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{x,0} \\ 0_{\tilde{m}_1} \\ \vdots \\ 0_{\tilde{m}_N} \\ 0_N \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{B}_y = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{y,0} \\ 0_{\tilde{m}_1} \\ \vdots \\ 0_{\tilde{m}_N} \\ 0_N \end{bmatrix}\tag{39}$$

Όπου:

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{0,1,1}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,1}) & \dots & \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,1}) \\ \tilde{H}_{0,1,1}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,2}) & \dots & \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{0,1,1}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,\tilde{m}_k}) & \dots & \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{k,\tilde{m}_k}) \end{bmatrix}, \quad \forall k = 1, \dots, N\tag{40}$$

$$A_+ = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\tilde{m}_1} \frac{\partial \tilde{H}_{0,1,1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{0,1}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{1,k}) & \dots & \sum_{k=1}^{\tilde{m}_1} \frac{\partial \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{N,\tilde{M}_N}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{1,k}) \\ \sum_{k=1}^{\tilde{m}_2} \frac{\partial \tilde{H}_{0,1,1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{0,1}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{2,k}) & \dots & \sum_{k=1}^{\tilde{m}_2} \frac{\partial \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{N,\tilde{M}_N}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{2,k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{\tilde{m}_N} \frac{\partial \tilde{H}_{0,1,1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{0,1}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{N,k}) & \dots & \sum_{k=1}^{\tilde{m}_N} \frac{\partial \tilde{H}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{N,\tilde{M}_N}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{N,k}) \end{bmatrix}\tag{41}$$

$$\tilde{B}_{x,0} = \begin{bmatrix} \tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,1}) \\ \tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,2}) \\ \vdots \\ \tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,\tilde{m}_0}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{y,0} = \begin{bmatrix} \tilde{v}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,1}) \\ \tilde{v}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,2}) \\ \vdots \\ \tilde{v}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,\tilde{m}_0}) \end{bmatrix}\tag{42}$$

Ας αναπτύξουμε τώρα ορισμένες γραμμές και στήλες των γραμμικών συστημάτων της (37). Έχουμε:

•

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 \cdot \left[\tilde{C}_{0,1,1}^x \quad \dots \quad \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^x \right]^\top &= \tilde{B}_{x,0} \Rightarrow \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^x \cdot \tilde{H}_{ijl}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,1}) = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,1}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^x \cdot \tilde{H}_{ijl}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,\tilde{m}_0}) = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{0,\tilde{m}_0})\end{aligned}\tag{43}$$

Και παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν από την $\tilde{A}_0 \cdot [\tilde{C}_{0,1,1}^y \dots \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^y]^\top = \tilde{B}_{y,0}$. Τα κομμάτια αυτά αναφέρονται στην ιδανική απεικόνιση για το εξωτερικό σύνορο $T_{wtd,\partial}(\mathbf{p})$: $\partial W_0 \mapsto \partial D$, που προσεγγίζεται εδώ από την $\tilde{T}_{wtd,\partial}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{0},j}) = [\tilde{u}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{0},j}) \quad \tilde{v}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{0},j})]^\top$, $\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{0},j} \in \partial W_0, \forall j = 1, 2, \dots, \tilde{m}_0$.

•

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 \cdot [\tilde{C}_{0,1,1}^x \dots \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^x]^\top - 1_{\tilde{m}_1 \times N}^1 \cdot [u_1 \dots u_N]^\top &= 0_{\tilde{m}_1} \Rightarrow \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^x \cdot \tilde{H}_{ijl}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{1},1}) &= u_1 \\ \Rightarrow &\quad \vdots \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^x \cdot \tilde{H}_{ijl}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{1},\tilde{m}_1}) &= u_1 \end{aligned} \quad (44)$$

Και ομοίως ισχύει για το ανάπτυγμα $\tilde{A}_1 \cdot [\tilde{C}_{0,1,1}^y \dots \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^y]^\top - 1_{\tilde{m}_1 \times N}^1 \cdot [v_1 \dots v_N]^\top = 0_{\tilde{m}_1}$. Παρόμοιες σχέσεις προκύπτουν χρησιμοποιώντας τους πίνακες $\tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \dots, \tilde{A}_N$ στο πρώτο και στο δεύτερο γραμμικό σύστημα. Όλες αυτές οι σχέσεις αναφέρονται στην ιδανική απεικόνιση για τα εσωτερικά σύνορα $T_{wtd}(\mathbf{p})$: $\partial W_k \mapsto \mathbf{b}_k, \forall k = 1, \dots, N$, που προσεγγίζεται από την $\tilde{T}_{wtd}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{i,j}) = \mathbf{b}_i = [u_i \ v_i]^\top$ όπου $\tilde{\mathbf{p}}^*_{i,j} \in \partial W_i, \forall j = 1, 2, \dots, \tilde{m}_i$ με $i = 1, \dots, N$.

•

$$\begin{aligned} \tilde{A}_+ \cdot [\tilde{C}_{0,1,1}^x \dots \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^x]^\top = 0_N \Rightarrow & \quad \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \left[\tilde{C}_{ijl}^x \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{m}_1} \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}}{\partial \mathbf{n}_{ij}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{\mathbf{1},k}) \right] = 0 \\ & \quad \vdots \\ & \quad \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \left[\tilde{C}_{ijl}^x \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{m}_N} \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}}{\partial \mathbf{n}_{ij}}(\tilde{\mathbf{p}}^*_{N,k}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Με παρόμοιες σχέσεις να προκύπτουν από την $\tilde{A}_+ \cdot [\tilde{C}_{0,1,1}^y \dots \tilde{C}_{N,\tilde{M}_N,\tilde{M}_C}^y]^\top = 0_N$. Αυτές αναφέρονται στις συνθήκες (33) που πρέπει να αληθεύουν στα εσωτερικά σύνορα $\partial W_1, \dots, \partial W_N$.

Αφότου επιλύσουμε στον υπολογιστή τα γραμμικά συστήματα (37), ανακτούμε τον πρώτο μετασχηματισμό T_{wtd} . Στη σχεδίαση του νόμου ελέγχου είναι σημαντική και η γνώση της Ιακωβιανής $J_{wtd}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\forall \mathbf{p} \in W_{free}$ του μετασχηματισμού, που δείχνει το μέτρο και την κατεύθυνση του ρυθμού μεταβολής της τιμής του $T_{wtd}(\mathbf{p})$, καθώς το σημείο \mathbf{p} μετακινείται κατά μία στοιχειώδη ποσότητα $d\mathbf{p}$ προς μια οποιαδήποτε επιτρεπόμενη κατεύθυνση πάνω στο επίπεδο \mathbb{R}^2 . Υπολογίζεται παραγωγίζοντας τον T_{wtd} (διότι $\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial T_{wtd}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = J_{wtd}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}}$), δηλαδή τις σχέσεις (35) ως προς \mathbf{p} :

$$J_{wtd}(\mathbf{p}) = \frac{\partial T_{wtd}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \tilde{v}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^x \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\tilde{M}_i} \sum_{l=1}^{\tilde{M}_C} \tilde{C}_{ijl}^y \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}, \quad \forall \mathbf{p} \in W_{free} \quad (46)$$

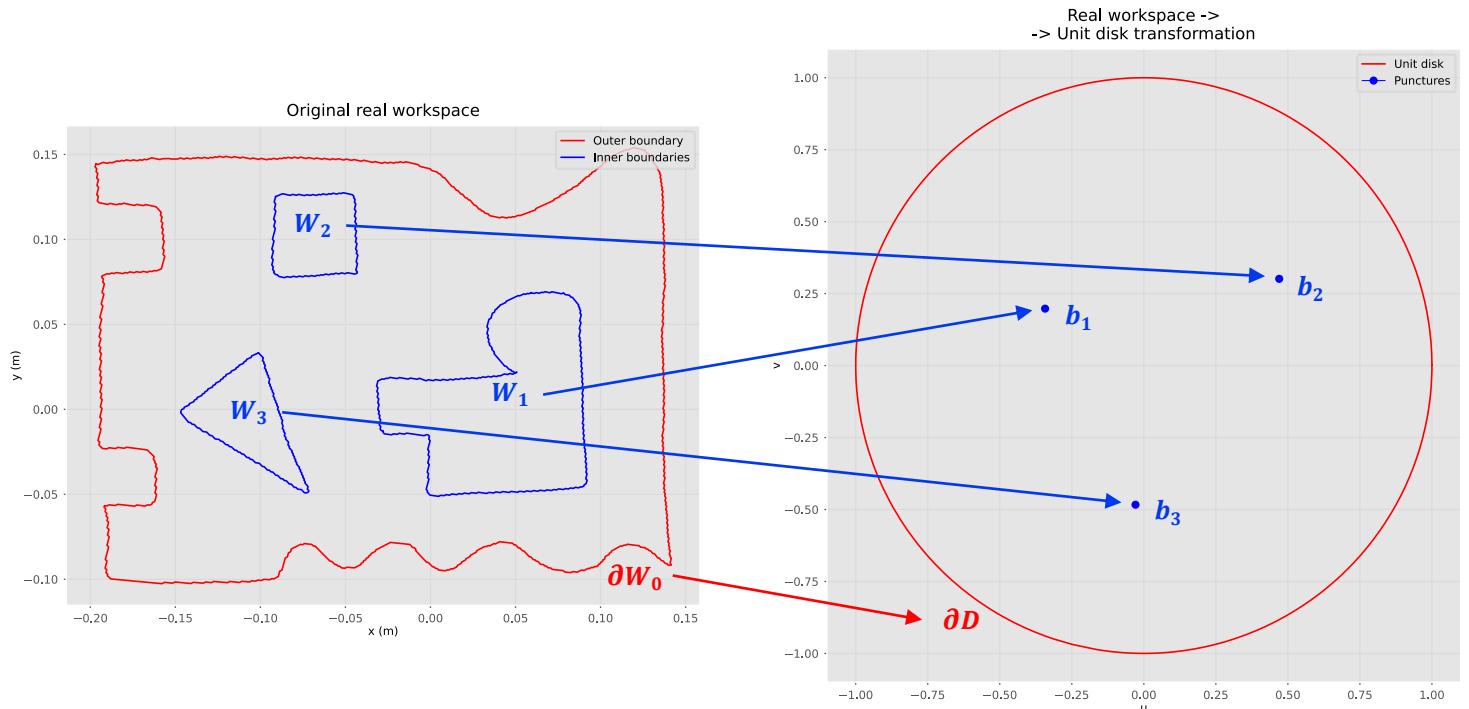
Όπου για την παράγωγο $\frac{\partial \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\ln(\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|)] ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}_{ijl}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|)}{\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|} ds = \int_{\tilde{E}_{ij}} \tilde{G}_{ijl}(s) \cdot \frac{(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s))^T}{\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|^2} ds \end{aligned} \quad (47)$$

Για την εύρεση του τύπου της παραγώγου $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|) = \frac{(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s))^T}{\|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}(s)\|}$, εξετάζω τη γενική περίπτωση $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = \nabla_{\mathbf{x}}^T (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ (για τυχαία διανύσματα $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_K]^T, \mathbf{y} = [y_1 \dots y_K]^T \in \mathbb{R}^K$), η οποία θα μου χρησιμεύσει και για αργότερα. Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2} \right) = \frac{2 \cdot [x_1 - y_1 \dots x_K - y_K]}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \end{aligned} \quad (48)$$

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του T_{wtd} φαίνεται στην Εικόνα 31, με τον πραγματικό χώρο από την Εικόνα 29. Ο μοναδιαίος κύκλος ∂D είναι η εικόνα του εξωτερικού συνόρου ∂W_0 του πραγματικού χώρου. Ακόμα, τα εσωτερικά σύνορα $\partial W_1, \partial W_2, \partial W_3$ του πραγματικού χώρου (και λόγω της συνέχειας του μετασχηματισμού και οι συμπαγείς περιοχές W_1, W_2, W_3) απεικονίζονται στα διακριτά σημεία $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.



Εικόνα 31 Απεικόνιση από έναν ενδεικτικό πραγματικό χώρο εργασίας (Εικόνα 29) στον σφαιρικό χώρο του μοναδιαίου δίσκου

Όλα όσα περιεγράφηκαν υπολογίζονται προγραμματιστικά στον υπολογιστή με τον κώδικα [29] που συνοδεύει την εργασία [5]. Αυτός είναι γραμμένος σε C++, αλλά διαθέτει και διεπαφή σε python. Δημιουργεί την αρμονική απεικόνιση από τον πραγματικό χώρο των εμποδίων στον σφαιρικό χώρο του κυκλικού δίσκου, με χρήση των C++ βιβλιοθηκών “Eigen” [30] (συγκεκριμένα την έκδοση “Eigen 3.4.0”) και “TinyXML” [31] (την έκδοση “TinyXML-2”). Και οι δύο βιβλιοθήκες είναι ανοιχτού κώδικα και εύκολο να εγκατασταθούν, με την “Eigen” να παρέχει αρκετά χρήσιμα headers αρχεία σχετικά με πράξεις γραμμικής άλγεβρας και την “TinyXML” να βοηθάει στην επεξεργασία και στην ανάλυση αρχείων XML. Το βασικό πρόβλημα που αντιμετώπισα ήταν ότι εργάζομαι σε σύστημα Windows, ενώ ο κώδικας είναι φτιαγμένος κυρίως για συστήματα Linux, με αποτέλεσμα να μην μπορώ να δημιουργήσω εύκολα τις συνδέσεις μεταξύ των διάφορων απαραίτητων βιβλιοθηκών. Κατέληξα λοιπόν να χρησιμοποιήσω ένα virtual machine που τρέχει Ubuntu (λειτουργικό σύστημα των Linux), όπου εγκατέστησα επιτυχώς τη βιβλιοθήκη της αρμονικής απεικόνισης. Στα Ubuntu ανέπτυξα επίσης python κώδικα με συναρτήσεις για την αξιοποίηση των λειτουργιών της βιβλιοθήκης, δηλαδή τη δημιουργία του αρμονικού χάρτη, την απεικόνιση σημείων από τον αρχικό στον μετασχηματισμένο χώρο και την εύρεση του πίνακα της Ιακωβιανής. Έπειτα, για την κλήση αυτών των συναρτήσεων από το host machine των Windows και την επιστροφή της εξόδου τους, απαιτήθηκε η εγκαθίδρυση τοπικής σύνδεσης ssh. Με κώδικα python στο host machine υποβάλλω αιτήματα προς τα Ubuntu, με τα αποτελέσματα των συναρτήσεων να επιστρέφονται διά μέσου της ssh σύνδεσης ως JSON αρχεία. Η επεξεργασία αυτών γίνεται στα Windows, όπου τρέχει το κυρίως πρόγραμμα με τη γραφική διεπαφή.

ii. Μετασχηματισμός από τον σφαιρικό χώρο στο επίπεδο \mathbb{R}^2

Ο δεύτερος μετασχηματισμός απεικονίζει όλα τα σημεία $\mathbf{b} \in D$ στα σημεία $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ και τον ονομάζω T_{dtp} (disc to \mathbb{R}^2 plane), δηλαδή $T_{dtp}: D \mapsto \mathbb{R}^2$. Ειδικότερα, θέλω ο T_{dtp} να μετασχηματίζει:

- Τον μοναδιαίο κύκλο ∂D στο \mathbb{R}^2 προς όλες τις κατευθύνσεις.
- Τα διακριτά σημεία $\mathbf{b}_k = [u_k \ v_k]^T \in int(D)$ των εμποδίων στα αντίστοιχα διακριτά, ακτινικά μετατοπισμένα σημεία $\mathbf{q}_k = [x_k \ y_k]^T \in \mathbb{R}^2$, για όλα τα $k = 1, \dots, N$.
- Όλα τα σημεία $\mathbf{b} = [u \ v]^T \in int(D)$ του εσωτερικού του μοναδιαίου δίσκου D σε όλα τα σημεία $\mathbf{q} = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$ του επιπέδου xy , με μία 1 – 1 και επί απεικόνιση.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ιδιότητες, κατασκευάζω τον ακόλουθο ακτινικό μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} T_{dtp,\partial}(\mathbf{b}) &= \infty, \quad \forall \mathbf{b} \in \partial D \\ T_{dtp}(\mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{b}}{1 - \|\mathbf{b}\|}, \quad \forall \mathbf{b} \in int(D) \end{aligned} \tag{49}$$

Βάσει της μορφής του, η εικόνα του T_{dtp} είναι μία ακτινική μετατόπιση μακριά από την αρχή των αξόνων, με όλα τα μετασχηματισμένα σημεία να έχουν την ίδια κατεύθυνση με τα αρχικά αλλά μεγαλύτερο μέτρο, εκτός βέβαια του σημείου $O(0, 0)$ που διατηρείται στην ίδια θέση. Μάλιστα, τα σημεία που βρίσκονται πλησίον του μοναδιαίου κύκλου ∂D (κατά συνέπεια κοντά στο εξωτερικό σύνορο ∂W_0 του πραγματικού χώρου των εμποδίων), είναι πολύ απομακρυσμένα μεταξύ τους στο δεύτερο μετασχηματισμένο χώρο του επιπέδου \mathbb{R}^2 , αφού ισχύει $\mathbf{b} \rightarrow \partial D \Rightarrow \|\mathbf{b}\| \rightarrow 1 \Rightarrow T_{dtp}(\mathbf{b}) \rightarrow \infty$ (κατευθυνόμενο άπειρο).

Η T_{dtp} είναι μία συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση από το $int(D)$ στο \mathbb{R}^2 . Για να αποδείξω ότι είναι αμφιδιαφόριση, αρκεί να υπολογίσω την αντίστροφό της η οποία πρέπει να ορίζεται σε όλο το πεδίο τιμών της T_{dtp} (που σημαίνει ότι η T_{dtp} είναι 1 – 1 και επί) και να είναι επιπλέον συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Έστω λοιπόν το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}}{1 - \|\mathbf{b}\|} \in \mathbb{R}^2$. Τότε, το μέτρο του \mathbf{b} μπορεί να υπολογιστεί

παίρνοντας τη νόρμα και των δύο μελών, οπότε: $\|\mathbf{q}\| = \frac{\|\mathbf{b}\|}{1 - \|\mathbf{b}\|} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{q}\| - \|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{q}\| \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \frac{\|\mathbf{q}\|}{1 + \|\mathbf{q}\|}$.
Άρα, η αντίστροφη απεικόνιση $T_{dtp}^{-1}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \mapsto D$ προκύπτει ως εξής:

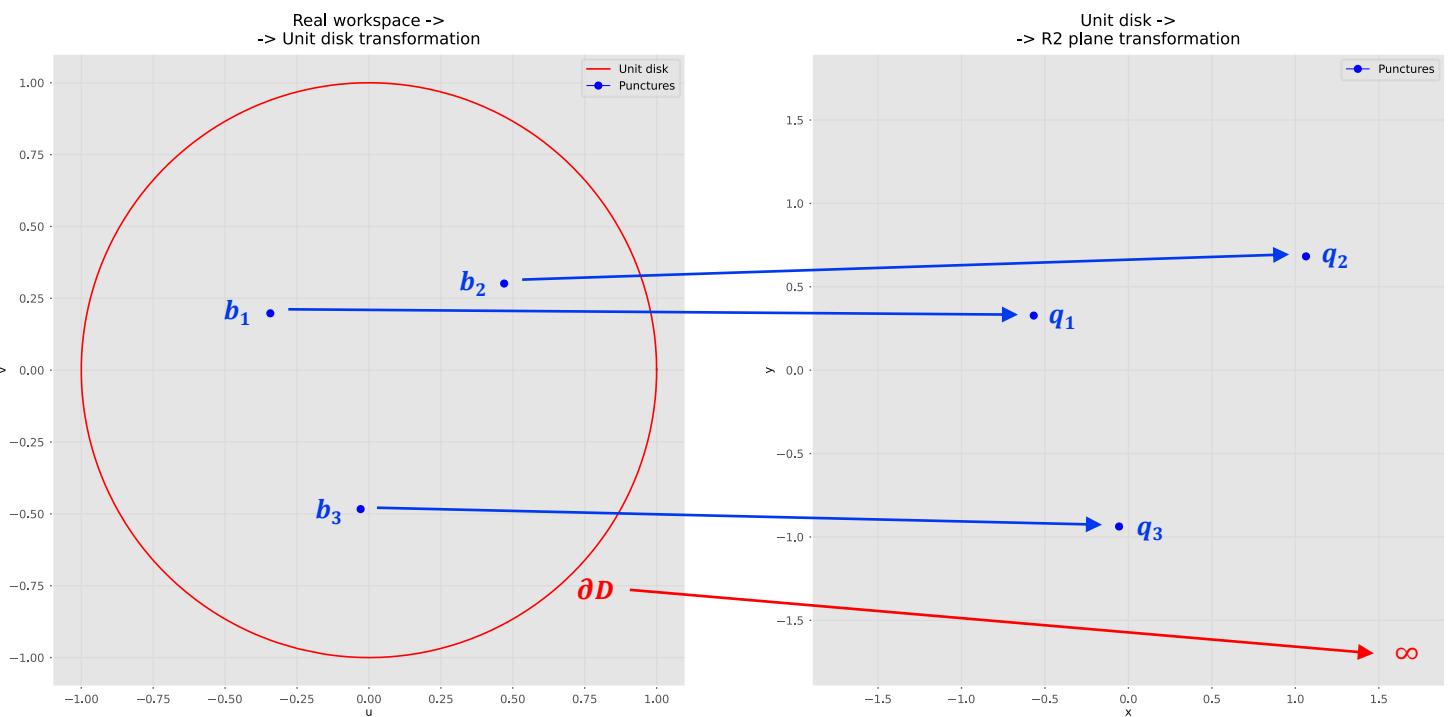
$$T_{dtp}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{b} = \mathbf{q} \cdot (1 - \|\mathbf{b}\|) = \mathbf{q} \cdot \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}\|}{1 + \|\mathbf{q}\|}\right) \Rightarrow T_{dtp}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}}{1 + \|\mathbf{q}\|}, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad (50)$$

Υπολογίζω ακόμα την Ιακωβιανή $J_{dtp}(\mathbf{b}) = \frac{\partial T_{dtp}}{\partial \mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \forall \mathbf{b} \in int(D)$ του μετασχηματισμού, που θα χρειαστεί στον νόμο ελέγχου. Γνωρίζοντας ότι $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} = I_{2 \times 2}$ και $\frac{\partial \|\mathbf{b}\|}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\|}$, έχουμε:

$$J_{dtp}(\mathbf{b}) = \frac{\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} \cdot (1 - \|\mathbf{b}\|) + \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \|\mathbf{b}\|}{\partial \mathbf{b}}}{(1 - \|\mathbf{b}\|)^2} = \frac{\|\mathbf{b}\| \cdot (1 - \|\mathbf{b}\|) \cdot I_{2 \times 2} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top}{\|\mathbf{b}\| \cdot (1 - \|\mathbf{b}\|)^2}, \quad \forall \mathbf{b} \in int(D) \quad (51)$$

Είναι σημαντικό να εξηγηθεί γιατί έχω προβεί και σε δεύτερο μετασχηματισμό. Το αξιοσημείωτο πλεονέκτημα του T_{dtp} έναντι του T_{wtd} είναι ότι ορίζεται σε ολόκληρο το επίπεδο \mathbb{R}^2 . Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ καταλήγει μέσω των αντίστροφων μετασχηματισμών T_{dtp}^{-1} και T_{wtd}^{-1} σε ένα σημείο $\mathbf{p} \in W_{free}$, δηλαδή στο εσωτερικό του πραγματικού χώρου των εμποδίων. Το γεγονός αυτό επιτρέπει στον νόμο ελέγχου να κινείται ελεύθερα σε όλο το μετασχηματισμένο \mathbb{R}^2 , χωρίς να υπάρχει ο κίνδυνος να οδηγηθεί το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα εκτός του W_{free} .

Κλείνοντας, ένα παράδειγμα εφαρμογής του T_{dtp} φαίνεται στην Εικόνα 32, που συνεχίζει το παράδειγμα από την Εικόνα 31. Ο μοναδιαίος κύκλος ∂D απεικονίζεται στο \mathbb{R}^2 και τα εσωτερικά σημεία $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ του μοναδιαίου δίσκου απεικονίζονται στα διακριτά σημεία $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ του επιπέδου \mathbb{R}^2 .



Εικόνα 32 Απεικόνιση από ενδεικτικό σφαιρικό χώρο (Εικόνα 31, στα δεξιά) στο επίπεδο \mathbb{R}^2

d. Σχεδίαση του νόμου ελέγχου με τη μέθοδο gradient descent

Σκοπός μου είναι να υπολογίσω μία από τις άπειρες τροχιές που οδηγούν το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα από ένα οποιοδήποτε αρχικό σημείο $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_{init} \in W_{free}$ προς το επιθυμητό, τελικό σημείο – στόχο $\mathbf{p}(t_f) = \mathbf{p}_d \in W_{free}$, υπό τον περιορισμό $\mathbf{p}(t) \in W_{free}, \forall t \in [t_0, t_f]$, όπου t_0 και t_f είναι οι χρονικές στιγμές έναρξης και λήξης της κίνησης. Η περιοριστική συνθήκη επιβάλλει την αποφυγή σύγκρουσης με τα εμπόδια του πραγματικού χώρου εργασίας. Έστω ότι συμβολίζω τη διαδρομή μιας τέτοιας τροχιάς με $C_{path} \in W_{free}$, η οποία αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών σημείων – κόμβων $\mathbf{p}_{knot} \in \{\mathbf{p}_{init}, \dots, \mathbf{p}_d\}$ που ενώνονται με απλά ευθύγραμμα τμήματα.

Για τον υπολογισμό αυτών των σημείων – κόμβων (και κατ' επέκταση της C_{path}) θα αξιοποιήσω τους δύο μετασχηματισμούς του $cl(W_{free})$. Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, ο νόμος ελέγχου μπορεί να δράσει απρόσκοπτα σε ολόκληρο τον τελικό μετασχηματισμένο χώρο \mathbb{R}^2 , οπότε μία λογική προσέγγιση θα ήταν να βρεθούν πρώτα τα μετασχηματισμένα σημεία – κόμβοι $\mathbf{q}_{knot} \in \{\mathbf{q}_{init}, \dots, \mathbf{q}_d\}$, και με την εν σειρά εφαρμογή των αντίστροφων μετασχηματισμών T_{dtp}^{-1} και T_{wtd}^{-1} να προκύψουν τα ζητούμενα \mathbf{p}_{knot} στον πραγματικό χώρο. Όμως, παρόλο που ο T_{dtp}^{-1} έχει υπολογιστεί εύκολα στη σχέση (50), ο υπολογισμός του αντιστρόφου T_{wtd}^{-1} του πρώτου αρμονικού μετασχηματισμού είναι εξαιρετικά δύσκολος. Συνεπώς, θα ακολουθηθεί μία διαφορετική μέθοδος, με την εύρεση των μετασχηματισμένων ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}_{knot}$ στα σημεία – κόμβους μέσω ενός νόμου ελέγχου gradient descent και τη μετατροπή τους στις πραγματικές ταχύτητες $\dot{\mathbf{p}}_{knot}$ μέσω των αντιστρόφων J_{dtp}^{-1} και J_{wtd}^{-1} των Ιακωβιανών πινάκων (51) και (46) αντίστοιχα. Παράλληλα, με μία απλή αριθμητική ολοκλήρωση κατά Euler, μπορούν να εξαχθούν τα σημεία \mathbf{p}_{knot} της C_{path} . Το τελικό βήμα θα είναι η μετατροπή των $\dot{\mathbf{p}}_{knot}$ σε ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}_{r,knot}$ των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή.

i. Εύρεση των κατευθύνσεων κίνησης στον τελικό μετασχηματισμένο χώρο

Αρχικά, χρειάζεται να βρω μια κατεύθυνση κίνησης αναφοράς σε κάθε σημείο του τελικού μετασχηματισμένου χώρου \mathbb{R}^2 . Η βασική ιδέα [5] είναι ο ορισμός στο \mathbb{R}^2 ενός τεχνητού, βαθμωτού δυναμικού πεδίου πλοϊγησης $\psi(\mathbf{q})$, που να ασκεί ελκτικές δυνάμεις προς το τελικό σημείο – στόχο \mathbf{q}_d και απωστικές δυνάμεις από τα σημεία των εμποδίων $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$. Αυτό γίνεται δημιουργώντας μια συνάρτηση $\psi(\mathbf{q})$ με μέγιστα στα σημεία $\mathbf{q} = \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$ και μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$, και εφαρμόζοντας έναν απλό, gradient descent νόμο ελέγχου. Άρα, οι ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$ λαμβάνουν τη μορφή:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad (52)$$

Που σημαίνει ότι η κατεύθυνση της $\dot{\mathbf{q}}$ είναι αντίθετη αυτής της κλίσης (δηλαδή της κατεύθυνσης μέγιστης αύξησης) του πεδίου $\psi(\mathbf{q})$, με αποτέλεσμα ο νόμος ελέγχου να κινείται προς το ελάχιστο $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$. Η κλίση $\nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})$ είναι ένα συντηρητικό διανυσματικό πεδίο, ως κλίση βαθμωτής συνάρτησης (για τον στροβιλισμό του ισχύει $\nabla_{\mathbf{q}} \times (\nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})) = 0$). Επομένως, μπορεί να παραλληλιστεί με ένα ηλεκτροστατικό ή με ένα βαρυτικό πεδίο. Αν υποθέσω ότι το κινούμενο σημείο \mathbf{q} είναι ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, τότε τα $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$ είναι ομώνυμα φορτισμένα σωματίδια που το απωθούν και το \mathbf{q}_d είναι ετερόνυμο φορτισμένο σωματίδιο που το έλκει. Αν πάλι υποθέσω ότι το κινητό \mathbf{q} είναι μία σημειακή μάζα, τότε τα $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$ είναι οι κορυφές λόφων και το \mathbf{q}_d είναι το χαμηλότερο σημείο μιας κοιλάδας.

Προτού προσδιορίσω τη συνάρτηση $\psi(\mathbf{q})$, ορίζω το βοηθητικό, βαθμωτό δυναμικό πεδίο $\phi(\mathbf{q})$, που είναι αρμονική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός αρμονικών λογαρίθμων:

$$\phi(\mathbf{q}) = k_d \cdot \ln(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|) - \sum_{i=1}^N k_i \cdot \ln(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|), \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N\} \quad (53)$$

Όπου οι παράμετροι $k_d > 0$ και $k_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ είναι θετικοί και σταθεροί συντελεστές. Η κλίση $\nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q})$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q}) &= k_d \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|} \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_d}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|} - \sum_{i=1}^N k_i \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q}) &= k_d \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_d}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|^2} - \sum_{i=1}^N k_i \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|^2}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N\} \end{aligned} \quad (54)$$

Τα κρίσιμα σημεία της $\phi(\mathbf{q})$ ικανοποιούν τη σχέση $\nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow k_d \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_d}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|^2} = \sum_{i=1}^N k_i \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|^2}$ και οι θέσεις τους εξαρτώνται από τις τιμές των k_d, k_1, \dots, k_N . Επειδή το πεδίο ορισμού της $\phi(\mathbf{q})$ είναι ακτινικώς μη φραγμένο και πολλαπλώς συνεκτικό (τα σημεία $\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ είναι οπές), προκύπτει από την αρχή του μεγίστου (maximum principle) ότι η αρμονική $\phi(\mathbf{q})$ δεν διαθέτει τοπικά ακρότατα. Άρα, όλα τα κρίσιμα σημεία της είναι σαγματικά, εκφυλισμένα ή μη. Ακόμα, λόγω των θετικών k_d, k_1, \dots, k_N , ισχύουν τα εξής:

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d} \phi(\mathbf{q}) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_i} \phi(\mathbf{q}) = +\infty, i = 1, \dots, N \quad (55)$$

Δηλαδή πλησίον του \mathbf{q}_d η $\phi(\mathbf{q})$ τείνει στο $-\infty$, ενώ κοντά στα $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές και την ίδια συμπεριφορά θέλω να διασφαλίσω όταν το $\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty$ (όποια κι αν είναι η κατεύθυνση του \mathbf{q}). Τότε είναι $\|\mathbf{q} - \mathbf{l}\| \rightarrow \|\mathbf{q}\|$ για τυχαίο διάνυσμα \mathbf{l} πεπερασμένου μέτρου $\|\mathbf{l}\|$. Επιλέγω λοιπόν τους συντελεστές \mathbf{k} έτσι ώστε να αληθεύει η σχέση $k_d > \sum_{i=1}^N k_i \Rightarrow k_d - \sum_{i=1}^N k_i > 0$, οπότε κι έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty} \phi(\mathbf{q}) &= \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|^{k_d}}{\prod_{i=1}^N \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|^{k_i}} \right) \xrightarrow[\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i \rightarrow \|\mathbf{q}\|]{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d \rightarrow \|\mathbf{q}\|} \\ \Rightarrow \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty} \phi(\mathbf{q}) &= \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\|\mathbf{q}\|^{k_d}}{\prod_{i=1}^N \|\mathbf{q}\|^{k_i}} \right) = \lim_{\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(k_d - \sum_{i=1}^N k_i \right) \cdot \|\mathbf{q}\| \right] = +\infty \end{aligned} \quad (56)$$

Όπως δείχτηκε, η $\phi(\mathbf{q})$ απειρίζεται στα σημεία \mathbf{q}_d και $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N$, με συνέπεια το πεδίο τιμών της να είναι μη φραγμένο. Ο μη ορισμός της στο \mathbf{q}_d είναι προφανώς ιδιαίτερα προβληματικός, αφού σημαίνει ότι ο έλεγχος δεν μπορεί να φτάσει ποτέ στην επιθυμητή θέση – στόχο. Έτσι, ορίζω το ζητούμενο, καλώς ορισμένο στο \mathbb{R}^2 πεδίο πλοϊγησης $\psi(\mathbf{q})$, με τον εξής τρόπο:

$$\psi(\mathbf{q}) = \frac{1 + \tanh \left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi} \right]}{2}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad (57)$$

Όπου η παράμετρος $w_\phi > 0$ είναι θετική σταθερά κλιμάκωσης. Η $\tanh(x)$ έχει πεδίο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε ισχύει $\psi(\mathbf{q}) \in [0, 1]$ (πεπερασμένο πεδίο τιμών). Από τις (55), την (56) και την (57) έχουμε:

$$\psi(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_d \quad \text{και} \quad \psi(\mathbf{q}) = 1, \quad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N \\ \text{ή } \|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (58)$$

Συνεπώς, η $\psi(\mathbf{q})$ διαθέτει ολικά μέγιστα τόσο στα μετασχηματισμένα σημεία των εμποδίων όσο και στο ∞ , ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση – στόχο. Η $\psi(\mathbf{q})$ κατασκευάζεται μέσω της γνησίως αύξουσας συνάρτησης $\tanh\left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}\right]$, οπότε κληρονομεί τα κρίσιμα σημεία της $\phi(\mathbf{q})$, τα οποία όμως είναι όλα σαγματικά. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό ελάχιστο της $\psi(\mathbf{q})$ είναι στη θέση $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$. Όλα αυτά διαπιστώνονται και μέσω της κλίσης $\nabla_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q})$:

$$\nabla_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}\left(\frac{1 + \tanh\left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}\right]}{2}\right) = \frac{\nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q})}{w_\phi \cdot \cosh^2\left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}\right]} = \frac{1 - \tanh^2\left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}\right]}{2w_\phi} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q}) \quad (59)$$

Διότι $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow \frac{d\tanh(x)}{dx} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$. Η $\nabla_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q})$ μηδενίζεται στα σαγματικά σημεία της $\phi(\mathbf{q})$ (από τον μηδενισμό του όρου $\nabla_{\mathbf{q}}\phi(\mathbf{q})$) και στα επιπρόσθετα κρίσιμα σημεία των (58) (από τον μηδενισμό του όρου $1 - \tanh^2\left[\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}\right]$).

Η μοναδικότητα του ελαχίστου στη θέση $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ είναι πολύ σημαντική, για να αποκλειστεί η δυνατότητα σύγκλισης του gradient descent νόμου ελέγχου σε κάποιο τυχαίο τοπικό ελάχιστο. Ο μόνος άλλος κίνδυνος είναι να συμβεί σύγκλιση σε κάποιο σαγματικό σημείο. Όμως αυτό το ενδεχόμενο έχει πολύ μικρή πιθανότητα εμφάνισης, αφού ένα σαγματικό σημείο είναι εγγενώς ασταθές και η προσέγγισή του θα έπρεπε να γίνει πάνω σε μια συγκεκριμένη ευθεία ιδιοκατεύθυνση.

Καλό είναι να ερμηνευτεί και ο ρόλος των παραμέτρων w_ϕ , k_d και $k_i, i = 1, \dots, N$, οι οποίες επηρεάζουν τη μορφή του πεδίου πλοήγησης και κατ' επέκταση το σχήμα της διαδρομής C_{path} . Πρώτον, οι συντελεστές \mathbf{k} φανερώνουν το βάρος του πεδίου στα σημεία $\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$. Η αύξηση της τιμής του k_d μεγαλώνει την επίδραση του όρου $k_d \cdot \ln(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|)$, με αποτέλεσμα να δίνεται περισσότερη έμφαση στην επίτευξη της θέσης – στόχου. Από την άλλη, η αύξηση ενός συντελεστή $k_i, i = 1, \dots, N$ αυξάνει την επιρροή του σχετικού όρου $k_i \cdot \ln(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_i\|)$, με αποτέλεσμα ο νόμος ελέγχου να επιδιώκει να απομακρύνθει περισσότερο από το αντίστοιχο σύνορο ∂W_i . Στο ίδιο μήκος κύματος, για μικρές τιμές της διαφοράς $k_d - \sum_{i=1}^N k_i$, οι διαδρομές στον μετασχηματισμένο χώρο τείνουν να είναι πιο καμπυλόγραμμες και “ανοιχτές” (με την έννοια ότι κινούνται πιο μακριά από το $O(0, 0)$). Αντιθέτως, μεγαλώνοντας τις τιμές του $k_d - \sum_{i=1}^N k_i$, παράγονται πιο σύντομες σε μήκος διαδρομές από το αρχικό σημείο προς την επιθυμητή θέση – στόχο. Δεύτερον, η σταθερά κλιμάκωσης w_ϕ σχετίζεται με τον βαθμό εξομάλυνσης του πεδίου $\phi(\mathbf{q})$, προτού μετασχηματιστεί στο πεδίο $\psi(\mathbf{q})$. Για μικρές w_ϕ αυξάνεται το κλάσμα $\frac{\phi(\mathbf{q})}{w_\phi}$ κατ' απόλυτη τιμή, ωθώντας το πεδίο $\psi(\mathbf{q})$ προς τις ακραίες τιμές του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διατηρείται μία ομοιομορφία στην τιμή του πεδίου σε μεγάλες συμπαγείς περιοχές, αλλά και να εμφανίζονται απότομες μεταβολές κοντά στα κρίσιμα σημεία (η w_ϕ είναι στον παρονομαστή της σχέσης (59) της $\nabla_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q})$). Για μεγάλες w_ϕ παρατηρούνται τα αντίστροφα αποτέλεσματα, με μεγαλύτερη ανομοιομορφία στις τιμές του $\psi(\mathbf{q})$ (που οδηγείται κοντά στη μέση τιμή του πεδίου τιμών του), αλλά και πιο ήπιες μεταβολές στη γειτονιά των κρίσιμων σημείων.

ii. Εύρεση των ταχυτήτων στον πραγματικό χώρο των εμποδίων

Ο gradient descent νόμος ελέγχου (52) στον τελικό μετασχηματισμένο χώρο επιστρέφει ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$. Γνωρίζοντας ότι $\dot{\mathbf{b}} = J_{wtd}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}}, \forall \mathbf{p} \in W_{free}$ και με τον ίδιο τρόπο ότι $\dot{\mathbf{q}} = J_{dtp}(\mathbf{b}) \cdot \dot{\mathbf{b}}, \forall \mathbf{b} \in int(D)$, υπολογίζω κάποιες πρώτες εκφράσεις για τις πραγματικές ταχύτητες $\dot{\mathbf{p}}$ ως εξής:

$$\dot{\mathbf{q}} = J_{dtp}(\mathbf{b}) \cdot J_{wtd}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} \Rightarrow \dot{\mathbf{p}} = -J_{wtd}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot J_{dtp}^{-1}(\mathbf{b}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}) \quad (60)$$

με $\mathbf{b} = T_{wtd}(\mathbf{p})$ και $\mathbf{q} = T_{dtp}(T_{wtd}(\mathbf{p}))$

Αν εφάρμοζα αυτούσιες τις ταχύτητες (60) για την κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης στον πραγματικό χώρο, θα παρουσιάζονταν ορισμένα αριθμητικά προβλήματα στη σύγκλιση εξαιτίας της νόρμας των ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}$. Ειδικότερα, σε περιοχές που η τιμή $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ είναι πολύ μικρή, η $\|\dot{\mathbf{p}}\|$ θα είναι επίσης μικρή (εξαρτάται βέβαια και από τις Ιακωβιανές J_{wtd} και J_{dtp}), με αποτέλεσμα το τελικό στοιχείο δράσης να παραμένει πρακτικά στάσιμο. Παρομοίως, για μεγάλες νόρμες της μετασχηματισμένης ταχύτητας, η πραγματική ταχύτητα θα αποκτούσε κι αυτή μεγάλες τιμές και θα εμφανιζόταν ο κίνδυνος σύγκρουσης με εσωτερικό εμπόδιο ή υπέρβασης του εξωτερικού συνόρου. Για την επίλυση αυτών των ζητημάτων, μπορώ να θέσω ένα μέγιστο όριο \dot{p}_{max} για την πραγματική ταχύτητα, έτσι ο νόμος ελέγχου κλειστού βρόχου \mathbf{u} στον πραγματικό χώρο W_{free} λαμβάνει την τελική μορφή (61):

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{p}} = -\dot{p}_{max} \cdot \sigma_p \left(\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|}{\epsilon_p} \right) \cdot \frac{J_{wtd}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot J_{dtp}^{-1}(T_{wtd}(\mathbf{p})) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})}{\|J_{wtd}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot J_{dtp}^{-1}(T_{wtd}(\mathbf{p})) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})\|} \quad (61)$$

με $\mathbf{q} = T_{dtp}(T_{wtd}(\mathbf{p}))$

Και οδηγούμαι στην ισοδύναμη έκφραση (62) των μετασχηματισμένων ταχυτήτων, μέσω της (60)(62):

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{\dot{p}_{max} \cdot \sigma_p \left(\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|}{\epsilon_p} \right)}{\|J_{wtd}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot J_{dtp}^{-1}(T_{wtd}(\mathbf{p})) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})\|} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = T_{wtd}^{-1}(T_{dtp}^{-1}(\mathbf{q})) \quad (62)$$

Στη σχέση (61), οι πραγματικές ταχύτητες από την (60) έχουν κανονικοποιηθεί ως προς το μέτρο τους και πολλαπλασιάζονται με τη θετική, βαθμωτή συνάρτηση κέρδους $\sigma = \dot{p}_{max} \cdot \sigma_p \left(\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|}{\epsilon_p} \right) \in [0, \dot{p}_{max}]$, πράξεις που αφήνουν ανεπηρέαστη την κατεύθυνση τους που προσδιορίστηκε στην (60). Η θετική και συνεχής συνάρτηση $\sigma_p(x) = \begin{cases} x^2(3 - 2x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \in [0, 1]$ επιβραδύνει σταδιακά την κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης, όταν αυτό πλησιάζει την επιθυμητή θέση – στόχο \mathbf{p}_d σε απόσταση μικρότερη από ϵ_p (δηλαδή για $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\| < \epsilon_p$), διασφαλίζοντας ομαλή σύγκλιση. Σε αποστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του ϵ_p η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με \dot{p}_{max} . Οι ποσότητες \dot{p}_{max} και ϵ_p μετριούνται σε $\frac{cm}{sec}$ και σε cm αντίστοιχα. Η συνάρτηση κέρδους σ δύναται να έχει διάφορες μορφές και περισσότερους όρους επιβράδυνσης, που λαμβάνουν υπόψη την απόσταση από το εξωτερικό σύνορο ∂W_0 ή και τα εσωτερικά σύνορα $\partial W_1, \dots, \partial W_N$ των εμποδίων. Κατορθώνω έτσι πλήρη έλεγχο του μέτρου της μεταφορικής ταχύτητας του τελικού στοιχείου δράσης πάνω στον W_{free} . Το μειονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης είναι ότι η μέγιστη ταχύτητα \dot{p}_{max} χρειάζεται να επιλεγεί προσεκτικά (γίνεται με εμπειρικό τρόπο), εντός κάποιων ορίων, ώστε το τελικό στοιχείο δράσης να μη διαφύγει ποτέ εκτός της περιοχής W_{free} .

Η εκτέλεση του νόμου ελέγχου κίνησης (61) πραγματοποιείται με επαναληπτικό τρόπο και ορισμένο χρονικό βήμα dt . Σε κάθε βήμα, εκκινώ από τη θέση $\mathbf{p}_{old} \in W_{free}$ (αντίστοιχα $\mathbf{q}_{old} \in \mathbb{R}^2$) και υπολογίζω τη νέα κατεύθυνση αναφοράς $\dot{\mathbf{q}}_{new}$ στον μετασχηματισμένο χώρο μέσω της (52). Έπειτα, την αντικαθιστώ στην (61) για την εύρεση της νέας πραγματικής ταχύτητας $\dot{\mathbf{p}}_{new}$. Στη συνέχεια, αξιοποιώ την απλή μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Euler για τον προσδιορισμό της νέας θέσης \mathbf{p}_{new} του τελικού στοιχείου δράσης στον πραγματικό χώρο W_{free} :

$$\mathbf{p}_{new} = \mathbf{p}_{old} + \dot{\mathbf{p}}_{new} \cdot dt \quad (63)$$

Η απόσταση $\dot{\mathbf{p}}_{new} \cdot dt$ που διανύεται σε κάθε βήμα της ολοκλήρωσης χρειάζεται να είναι αρκούντως μικρή, ώστε $\mathbf{p}_{new} \in W_{free}$. Υπάρχει εδώ το θέμα ότι η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Euler είναι γραμμική, ενώ οι μετασχηματισμοί του πραγματικού χώρου εργασίας είναι μη γραμμικοί. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι μετασχηματισμένες νέες θέσεις $\mathbf{q}'_{new} = T_{dtp}(T_{wtd}(\mathbf{p}_{new}))$ να μην ταυτίζονται με αυτές που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου Euler στην (62) (δηλαδή $\mathbf{q}_{new} = \mathbf{q}_{old} + \dot{\mathbf{q}}_{new} \cdot dt \neq \mathbf{q}'_{new}$). Για να ελαττώσω όσο το δυνατόν περισσότερο το σφάλμα, επιλέγω ικανοποιητικά μικρό χρονικό βήμα dt .

Χρήσιμη είναι επίσης μία ανάλυση ευστάθειας του νόμου ελέγχου κίνησης \mathbf{u} (61) (και του ισοδύναμου (62)), ώστε να αποδειχτεί η ευστάθεια της θέσης – στόχου \mathbf{p}_d και η ασυμπτωτική σύγκλιση προς αυτή. Θα χρησιμοποιήσω τη θεωρία ευστάθειας κατά Lyapunov, κάνοντας την παραδοχή ότι η περιοχή W_{free} είναι ένα θετικός αμετάβλητο σύνολο ($\mathbf{p}(t) \in W_{free}, \forall t \in [t_0, t_f]$) υπό τη ροή του αυτόνομου (δεν εξαρτάται άμεσα από τη μεταβλητή t του χρόνου) δυναμικού νόμου (61). Θα φανούν χρήσιμα τα δύο παρακάτω θεωρήματα από το βιβλίο [32]:

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Ευστάθειας κατά Lyapunov): Έστω το $x = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του αυτόνομου δυναμικού συστήματος $\dot{x} = f(x)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, με το $D \subset \mathbb{R}^n$ να περιέχει το $x = \mathbf{0}$. Έστω ακόμα συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $V(\mathbf{0}) = 0$, $V(x) > 0$ στο $D - \{\mathbf{0}\}$ και $\dot{V}(x) \leq 0$ στο D . Τότε, το $x = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα αμετάβλητων συνόλων του LaSalle): Έστω συμπαγές σύνολο $\Omega \subset D$, που είναι θετικώς αμετάβλητο υπό τη ροή του αυτόνομου δυναμικού συστήματος $\dot{x} = f(x)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Έστω ακόμα συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\dot{V}(x) \leq 0$ στο Ω . Θεωρώ επίσης το σύνολο $E = \{x \in \Omega: \dot{V}(x) = 0\}$ και συμβολίζω με M το μεγαλύτερο θετικώς αμετάβλητο υποσύνολο του E . Τότε, κάθε λύση / τροχιά του $\dot{x} = f(x)$ που ξεκινάει στο Ω , τείνει στο M καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Θεωρώ λοιπόν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov το πεδίο πλοιήγησης $V(\mathbf{q}) = \psi(\mathbf{q})$ (57). Είναι συνεχώς διαφορίσιμη, θετικώς ορισμένη συνάρτηση, με μοναδικό σημείο μηδενισμού το $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$. Πρόκειται για το σημείο ισορροπίας του δυναμικού νόμου (62), το οποίο θα εξετάσω ως προς την ευστάθεια (με μία απλή μετατόπιση κατά $-\mathbf{q}_d$ το σημείο ισορροπίας μεταφέρεται στο $\mathbf{0}$, οπότε το **Θεώρημα 2** εφαρμόζεται κανονικά). Παραγωγίζοντας χρονικά τη V και αντικαθιστώντας την έκφραση της $\dot{\mathbf{q}}$ από την (62) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}) &= \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}}^T \psi(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{q}) &= -\dot{p}_{max} \cdot \sigma_p \left(\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|}{\epsilon_p} \right) \cdot \frac{\|\nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})\|}{\|J_{wtd}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot J_{dtp}^{-1}(T_{wtd}(\mathbf{p}))\|}, \quad \mathbf{p} = T_{wtd}^{-1}(T_{dtp}^{-1}(\mathbf{q})) \end{aligned} \quad (64)$$

Αφού $\nabla_{\mathbf{q}}^T \psi(\mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}) = \|\nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q})\|^2$. Είναι $\dot{p}_{max}, \sigma_p > 0$, άρα ισχύει $\dot{V}(\mathbf{q}) \leq 0, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ (η παράγωγος είναι αρνητικώς ημιορισμένη), συνεπώς από το **Θεώρημα 2** προκύπτει ότι το $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Ακόμα, ο μηδενισμός της $\dot{V}(\mathbf{q})$ συμβαίνει μονάχα στα απομονωμένα κρίσιμα σημεία του $\psi(\mathbf{q})$, δηλαδή στις θέσεις $\mathbf{q}_d, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ και στα σαγματικά σημεία του $\phi(\mathbf{q})$, που αποτελούν όλα μαζί το μέγιστο θετικώς αμετάβλητο υποσύνολο M του συνόλου $\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2: \dot{V}(\mathbf{q}) = 0\}$. Τότε, το **Θεώρημα 3** συνεπάγεται ότι κάθε τροχιά του διαφορικού νόμου (62) θα συγκλίνει στο M καθώς $t \rightarrow +\infty$. Όμως τα σημεία $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$ έχουν καταστεί ασταθή και απωθητικά προς τις ροές του νόμου ελέγχου (διότι είναι θέσεις μεγίστων του πεδίου $\psi(\mathbf{q})$), και επιπλέον γνωρίζω πως τα σαγματικά σημεία είναι ασταθή και απίθανο να προσεγγιστούν (εκτός αν το αρχικό σημείο τοποθετηθεί ακριβώς πάνω στις κατάλληλες ιδιοκατευθύνσεις των σαγματικών σημείων). Άρα συμπεραίνω ότι ο νόμος ελέγχου (62) συγκλίνει ασυμπτωτικά προς το $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ στον μετασχηματισμένο χώρο, και ισοδύναμα ότι ο νόμος ελέγχου (61) συγκλίνει ασυμπτωτικά προς το $\mathbf{p} = \mathbf{p}_d$ στον πραγματικό χώρο, ξεκινώντας σχεδόν από οποιαδήποτε θέση $\mathbf{p}_{init} \in W_{free}$.

iii. Εύρεση των ταχυτήτων των αρθρώσεων του βραχίονα

Ο νόμος ελέγχου (61), παρήγαγε διανύσματα ταχυτήτων $\dot{\mathbf{p}} = [\dot{p}_x \quad \dot{p}_y]^\top \in \mathbb{R}^2$ πάνω στον πραγματικό ελεύθερο χώρο W_{free} του επιπέδου των εμποδίων P_{obst} . Αρχικά, οι $\dot{\mathbf{p}}$ πρέπει να μετασχηματιστούν στις μεταφορικές ταχύτητες $\dot{\mathbf{p}}_e = [\dot{p}_{e,x} \quad \dot{p}_{e,y} \quad \dot{p}_{e,z}]^\top \in \mathbb{R}^3$ του τελικού στοιχείου δράσης του ρομποτικού χειριστή, εκφρασμένες στο πλαίσιο κόσμου, βάσει της διαμόρφωσης του P_{obst} στον τριδιάστατο χώρο. Ενδιαφέρομαι μονάχα για τον προσανατολισμό του επιπέδου, αφού το διάνυσμα θέσης του δεν επηρεάζει τις ταχύτητες (ούτε τα μέτρα ούτε την κατεύθυνσή τους). Θεωρώντας τον μετασχηματισμό περιστροφής $R_{plane} = R_{\hat{n}_p} \cdot R_{\phi_p}$ από την (27), καθώς και το διάνυσμα $\dot{\mathbf{p}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ 0 \end{bmatrix}$, ισχύει:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = R_{plane} \cdot \dot{\mathbf{p}}' = R_{plane} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Το συνολικό διάνυσμα ταχύτητας του τελικού στοιχείου δράσης είναι το $\nu_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_e \end{bmatrix}$. Μένει να προσδιορίσω τη γωνιακή ταχύτητα $\omega_e \in \mathbb{R}^3$. Φροντίζω έτσι ώστε το τελικό στοιχείο δράσης να διατηρεί πάντα τον ίδιο προσανατολισμό, όπως περιεγράφηκε στον WS_D της σχέσης (21), οπότε θέτω $\omega_e = \mathbf{0}$. Ας επισημανθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα της τελευταίας άρθρωσης δεν με απασχολεί ουσιαστικά, αφού πραγματοποιεί περιστροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας της ράβδου που είναι τοποθετημένη στο τελικό στοιχείο δράσης, με αποτέλεσμα να μην αλλάζουν ούτε η θέση του ελεύθερου άκρου της ράβδου ούτε η γωνία που σχηματίζει με το επίπεδο.

Στη συνέχεια, οι ταχύτητες ν_e χρειάζεται να μεταφραστούν σε κατάλληλες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}_r \in \mathbb{R}^n$ στις n αρθρώσεις του ρομποτικού χειριστή. Για τη ν_e πρέπει να ισχύει η σχέση (13) της διαφορικής κινηματικής. Θα συμβολίζω τη γεωμετρική Ιακωβιανή ως $J_{geom}(\mathbf{q}_r) = \begin{bmatrix} J_{geom,P}(\mathbf{q}_r) \\ J_{geom,O}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, η οποία είναι εκφρασμένη στο πλαίσιο του κόσμου. Το διάνυσμα $\mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^n$ φέρει τις μεταβλητές των αρθρώσεων ($n = 6$ για την ειδική περίπτωση του βραχίονα Thor). Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\nu_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = J_{geom}(\mathbf{q}_r) \cdot \dot{\mathbf{q}}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_r = J_{geom}^\dagger(\mathbf{q}_r) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Όπου J_{geom}^\dagger είναι ο δεξιός ψευδοαντίστροφος του J_{geom} . Στην περίπτωση του Thor όπου η Ιακωβιανή είναι τετραγωνικός πίνακας, ισχύει $J_{geom}^\dagger = J_{geom}^{-1}$. Τελικά, η απεικόνιση από τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{p}}$ του επιπέδου P_{obst} στις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}_r$ των αρθρώσεων πραγματοποιείται ως εξής:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = J_{geom}^\dagger(\mathbf{q}_r) \cdot \begin{bmatrix} R_{plane} \cdot \dot{\mathbf{p}}' \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = J_{geom}^\dagger(\mathbf{q}_r) \cdot \begin{bmatrix} R_{plane} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & R_{plane}^\top \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{p}} \quad (67)$$

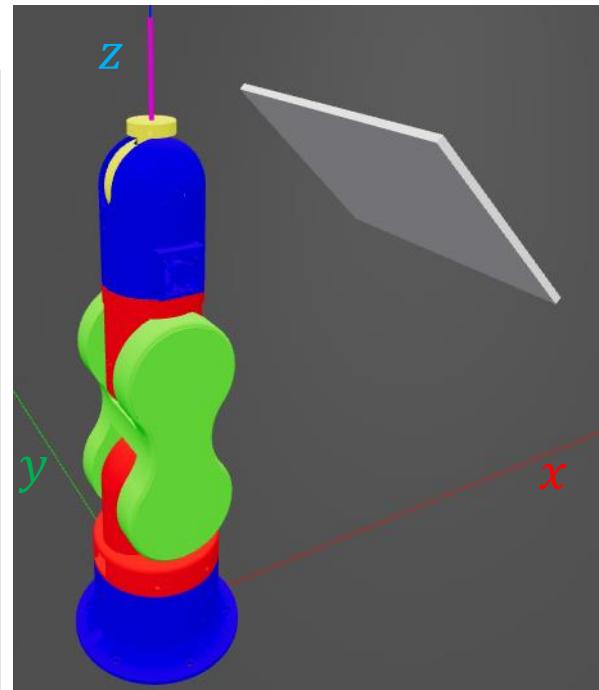
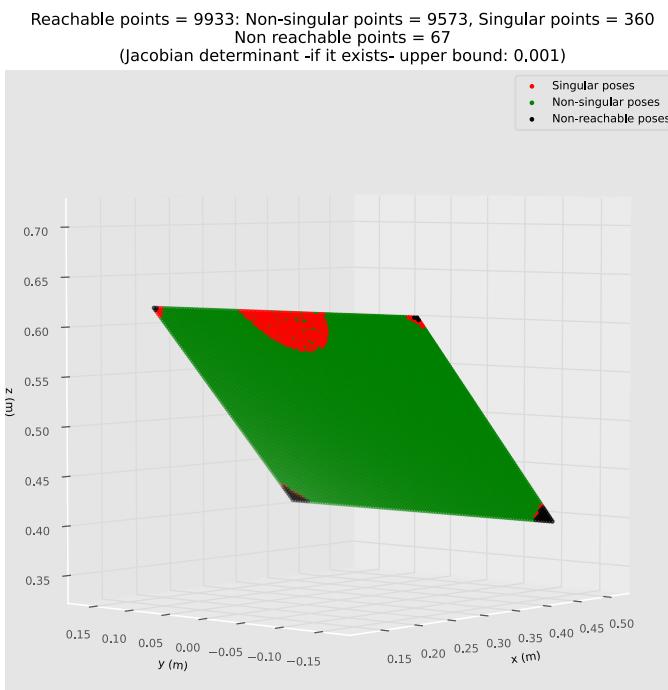
Είναι αξιοσημείωτο ότι οι ποσότητες $\begin{bmatrix} R_{plane}^\top & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & R_{plane}^\top \end{bmatrix} \cdot J_{geom}(\mathbf{q}_r)$ και $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{p}}$ ισούνται αντίστοιχα με τη γεωμετρική Ιακωβιανή και τις ταχύτητες του ρομπότ ως προς το πλαίσιο του επιπέδου P_{obst} , υπενθυμίζοντας τη σχέση (18). Για την εύρεση των μεταβλητών των αρθρώσεων \mathbf{q}_r στα σημεία – κόμβους της διαδρομής C_{path} , έχω τη δυνατότητα να εφαρμόσω ξανά τη μέθοδο ολοκλήρωσης Euler με χρονικό βήμα dt , ίδιο με αυτό της (63) ή υποπολλαπλάσιο για αύξηση της ακρίβειας. Σε κάθε επανάληψη είναι:

$$\mathbf{q}_{r,new} = \mathbf{q}_{r,old} + \dot{\mathbf{q}}_{r,new} \cdot dt \quad (68)$$

Οι θέσεις στον τριδιάστατο χώρο του τελικού στοιχείου δράσης, που προκύπτουν με offline τρόπο από την ευθεία κινηματική των $q_{r,knot}$ της (68), βρίσκονται πάνω στη διαδρομή C_{path} , η οποία διαγράφεται από τις θέσεις p_{knot} της (63) αφότου μετασχηματιστούν σε συντεταγμένες κόσμου. Βρέθηκε λοιπόν η τροχιά που απαιτείται να ακολουθήσει το ρομπότ στον τριδιάστατο χώρο.

Χρειάζεται να τονιστεί ότι οι τροχιές που παρήχθησαν με την παραπάνω διαδικασία ενδέχεται να μην είναι εφικτές για την εκάστοτε διαμόρφωση του P_{obst} και τον διαλεγμένο ρομποτικό χειριστή. Καταρχήν, τα σημεία του επιπέδου θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες του επιθυμητού χώρου εργασίας WS_D (21), με άλλα λόγια η αντίστροφη κινηματική θα πρέπει να επιλύεται για τις επιθυμητές διαμορφώσεις του ρομπότ. Η κίνηση μπορεί να δυσκολευτεί από την ύπαρξη κινηματικών ιδιομορφιών (ή σημείων που βρίσκονται στη γειτονιά τέτοιων) στο επίπεδο των εμποδίων. Ένα ακόμα ζήτημα είναι ότι οι ταχύτητες που δημιουργούνται δεν διασφαλίζουν τη μη υπέρβαση των ορίων των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή, κάτι που πρέπει να επανελέγχεται σε κάθε σημείο – κόμβο της τροχιάς. Για την αντιμετώπιση των θεμάτων αυτών εκμεταλλεύομαι κυρίως την πλεονασματικότητα που παρουσιάζει ο βραχίονας σε ορισμένες θέσεις, αναζητώντας μεταξύ πολλών αρχικών διαμορφώσεων των αρθρώσεών του (με την ίδια ευθεία κινηματική), ώσπου να βρεθεί μία που θα εκκινεί κάποια εφικτή τροχιά στη διαδρομή του C_{path} μέχρι και το επιθυμητό σημείο – στόχο.

Για κάποιους βραχίονες η επιλογή του P_{obst} είναι αρκετά εύκολη (π.χ. για έναν Scara, μπορεί να τοποθετηθεί παράλληλα στο δάπεδο σε προσβάσιμο ύψος), ενώ για άλλους όπως ο Thor δυσκολεύει. Μετά από αρκετές δοκιμές ανακαλύφθηκε η διαμόρφωση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 33 (τα πράσινα σημεία δηλώνουν τις εφικτές διαμορφώσεις, τα μαύρα τις μη εφικτές, και τα κόκκινα τις ιδιόμορφες ή τις κοντινές σε ιδιόμορφίες). Αξίζει τέλος να παρατηρηθεί η συμμετρία της διάταξης. Το normal διάνυσμα του επιπέδου των εμποδίων είναι προσδεμένο στο γεωμετρικό του κέντρο. Λόγω της δυνατότητας πλήρους περιστροφής (σε ένα εύρος 360°) της $1^{\text{η}}$ αρθρωσης, αν περιστρέψω το normal διάνυσμα (κατά συνέπεια το επίπεδο) γύρω από τον άξονα z του παγκόσμιου συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία ίση με αυτήν της πρώτης αρθρωσης, τότε η εικόνα της διάταξης παραμένει ακριβώς η ίδια (ισοδύναμα, είναι σαν να περιστρέφεται το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων κατά την αντίθετη γωνία).



Εικόνα 33 Το επίπεδο P_{obst} , διαστάσεων $35 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, στη θέση $[32 \quad 0 \quad 51]^\top \text{ cm}$ και σε κλίση 45° με το επίπεδο xy , σχηματικά (αριστερά) και όπως φαίνεται στην προσομοίωση σε σχέση με τον βραχίονα Thor (δεξιά)

5. Αναγνώριση των εμποδίων με χρήση κάμερας

Ίσως η πιο απλή λύση για την αντίληψη των εμποδίων στο περιβάλλον του ρομποτικού χειριστή είναι ένας εξαδεκτικός οπτικός αισθητήρας. Χρησιμοποίησα λοιπόν μία κάμερα, την οποία πάκτωσα σε σταθερό, κατάλληλο σημείο του τριδιάστατου χώρου του κόσμου, έτσι ώστε το οπτικό της πεδίο να συμπεριλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο των εμποδίων. Προφανώς, ο ρομποτικός βραχίονας δεν πρέπει να εμποδίζει τη θέαση της κάμερας κατά την ανίχνευση των εμποδίων.

Για την επεξεργασία της οπτικής πληροφορίας των καρέ που καταγράφει η κάμερα χρησιμοποίησα τη βιβλιοθήκη ανοιχτού κώδικα OpenCV (Open source Computer Vision library) [33]. Υποστηρίζεται σε όλα τα βασικά λειτουργικά συστήματα (Windows, Linux, Android, Mac OS) και είναι πρωταρχικώς γραμμένη στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Διαθέτει βέβαια διεπαφές και σε άλλα γνωστά γλωσσικά περιβάλλοντα, όπως στην python (που μεταχειρίζομαι στην εργασία), στην Java και στη MATLAB. Η OpenCV προσφέρει εκατοντάδες βελτιστοποιημένους αλγορίθμους, κλασικούς και σύγχρονους, σχετικούς με εφαρμογές υπολογιστικής όρασης και μηχανικής μάθησης, με αποτέλεσμα να αποτελεί ευρέως διαδεδομένο εργαλείο στη σχετική επιστημονική κοινότητα.

Στα επόμενα αναγράφονται λεπτομερώς τα κύρια τεχνικά στοιχεία της κάμερας, ο τρόπος εύρεσης του μαθηματικού μοντέλου της, αλλά και οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές που αξιοποιήθηκαν για την αποτελεσματική και ακριβή ανίχνευση των εμποδίων.

a. Τεχνικά χαρακτηριστικά της κάμερας

Για την καταγραφή των εμποδίων αξιοποίησα την Logitech C270 HD WEBCAM κάμερα (Εικόνα 34). Σύμφωνα με τις προδιαγραφές της [34] παρέχει εικόνα υψηλής ευκρίνειας και μέγιστης ανάλυσης 720p (720 pixels ύψος και 1280 pixels πλάτος εικόνας, περίπου 0.9 Mega pixels συνολικά). Υποστηρίζει πολλές αναλογίες εικόνας με κυριότερες τις 16/9 και 4/3, τις οποίες και θα χρησιμοποιήσω. Ένα ακόμα σημαντικό χαρακτηριστικό της είναι το διαγώνιο οπτικό της πεδίο (dFoV – diagonal Field of View), που υπολογίζεται ότι είναι περίπου 55°. Μερικά δευτερεύοντα χαρακτηριστικά της είναι η σταθερή εστίαση, η αυτόματη διόρθωση φωτεινότητας και η ταχύτητα λήψης φωτογραφιών που αγγίζει τα 30 fps (καρέ ανά δευτερόλεπτο). Ας σημειωθεί ακόμα ότι η συγκεκριμένη κάμερα δεν έχει αντίληψη του βάθους των αντικειμένων, συνεπώς οποιαδήποτε μέτρηση απόστασης από την κάμερα γίνεται με τη βοήθεια σημείων αναφοράς στο περιβάλλον και με αλγορίθμικές διαδικασίες.

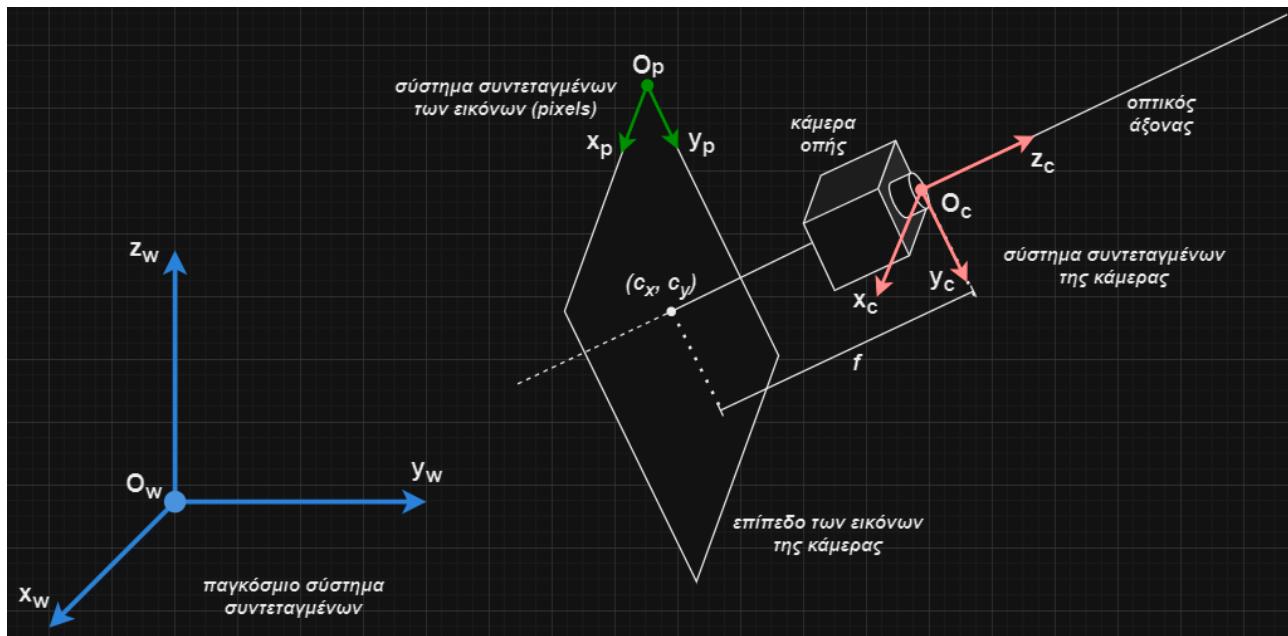


Εικόνα 34 Logitech C270 HD WEBCAM κάμερα

b. Αναγνώριση των παραμέτρων της κάμερας

Στα επόμενα ακολουθεί μία διεξοδική ερμηνεία της συμπεριφοράς της κάμερας κατά τη λήψη φωτογραφιών. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται η πλήρης μαθηματική περιγραφή του μοντέλου της κάμερας και αναφέρονται τα μέσα (μέθοδοι και μαθηματικές σχέσεις) αντιστάθμισης της εγγενούς παραμόρφωσης που προκαλεί ο φακός της στις εικόνες.

i. Περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου



Εικόνα 35 Το πλήρες μαθηματικό μοντέλο της κάμερας (δημιουργήθηκε με <https://app.diagrams.net/>)

Οι αλγόριθμοι υπολογιστικής όρασης που θα χρησιμοποιήσω σ' αυτήν την ενότητα βασίζονται στο ιδανικό γραμμικό μοντέλο κάμερας με οπή (linear pinhole camera model) [35], το οποίο παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 35 (με περιεκτικό τρόπο) και στην Εικόνα 36 (αναλυτικότερα). Χειρίζομαι γενικά τρία διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων, το πλαίσιο του κόσμου, το πλαίσιο της κάμερας και το πλαίσιο των εικόνων. Το πλαίσιο των εικόνων είναι προσαρτημένο στο επίπεδο των εικόνων, που πρόκειται για ένα οριοθετημένο παραλληλόγραμμο διαστάσεων ανάλογων της ανάλυσης της κάμερας (άρα εδώ είναι 720×1280 pixels), όπου φαίνονται τα ληφθέντα καρέ. Σύμφωνα με το ιδανικό μοντέλο, όλες οι ακτίνες φωτός από το περιβάλλον καταλήγουν στο επίπεδο των εικόνων διαμέσου της οπής της κάμερας (το σημείο O_c) ακολουθώντας μια ευθεία πορεία, μη λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη φακού ή φακών. Επομένως, στη συγκεκριμένη ανάλυση δεν λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα παραμόρφωσης που προκαλούνται από τον φακό της αληθινής κάμερας (θα αντιμετωπιστούν αργότερα). Επιπλέον, η προβολή (projection) των εικόνων πραγματοποιείται προοπτικά, με τα μακρινότερα αντικείμενα να παρουσιάζονται (στο επίπεδο των εικόνων) πιο μικρά σε μέγεθος σε σχέση με τα κοντινότερα αντικείμενα.

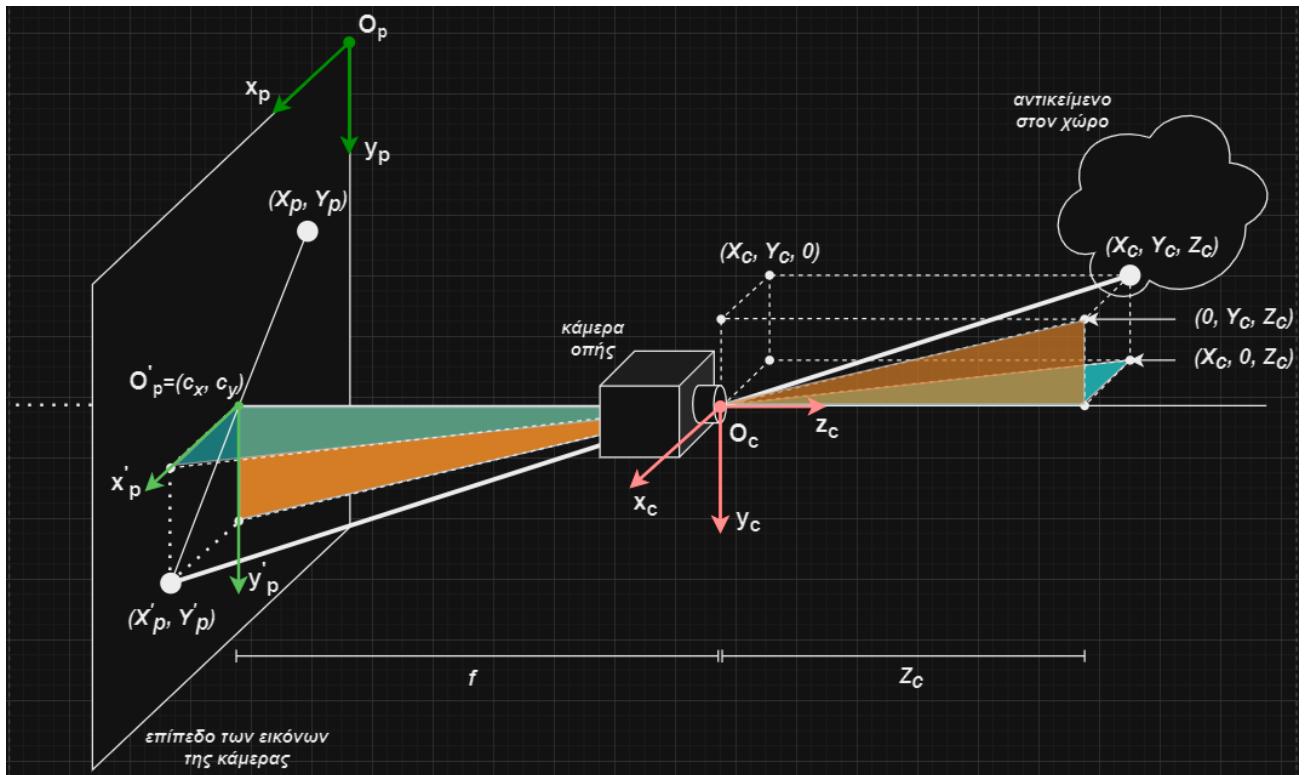
Μιλώντας με μαθηματικούς όρους, το μοντέλο κάμερας με οπή περιγράφει έναν μετασχηματισμό ο οποίος απεικονίζει τα 3D σημεία (X_w, Y_w, Z_w) του κόσμου (του περιβάλλοντος της κάμερας) στα 2D pixels (X_p, Y_p) των καρέ. Τα pixels (X_p, Y_p) είναι διακριτοί, φυσικοί αριθμοί, και προβάλλονται στο επίπεδο $O_p x_p y_p$ των εικόνων, το οποίο είναι παράλληλο στο επίπεδο $O_c x_c y_c$ του συστήματος συντεταγμένων της κάμερας. Το $O_p x_p y_p$ βρίσκεται νοητά σε κάθετη απόσταση f πίσω από το επίπεδο

$O_c x_c y_c$ και ο οπτικός ή κύριος (principal) άξονας (που ταυτίζεται με τον άξονα z_c) το τέμνει στο σημείο (c_x, c_y) . Ακριβέστερα, αρχικά μετασχηματίζονται τα 3D σημεία (X_w, Y_w, Z_w) του κόσμου στα 3D σημεία (X_C, Y_C, Z_C) του συστήματος συντεταγμένων της κάμερας και τέλος γίνεται ο δεύτερος μετασχηματισμός των (X_C, Y_C, Z_C) στα (X_p, Y_p) . Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες και πίνακες, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{bmatrix} = M_{intrinsic} \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ Z_c \\ Y_c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{με} \quad \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = M_{extrinsic} \cdot \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Πρέπει να εξετάσουμε τη μορφή και τον ρόλο των πινάκων $M_{extrinsic}$ και $M_{intrinsic}$. Ο εξωτερικός πίνακας $M_{extrinsic}$ εκτελεί τον μετασχηματισμό από το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων στο πλαίσιο συντεταγμένων της κάμερας. Περιέχει τις εξωτερικές παραμέτρους της κάμερας, δηλαδή τη θέση $t_c^w \in \mathbb{R}^3$ και τον προσανατολισμό $R_c^w \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ της κάμερας ως προς το πλαίσιο του κόσμου. Εκφράζω τον R_c^w με την προσέγγιση άξονα - γωνία (εδώ ο άξονας είναι ο οπτικός) που ακολούθησα για το επίπεδο των εμποδίων. Ο εξωτερικός πίνακας μεταβάλλεται αν αλλάζει η θέση ή/και ο προσανατολισμός του πλαισίου της κάμερας σε σχέση με το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Γράφεται ως εξής:

$$M_{extrinsic} = \begin{bmatrix} R_c^w & t_c^w \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (R_c^w)^{-1} & -(R_c^w)^{-1} \cdot t_c^w \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (70)$$



Εικόνα 36 Προβολή από το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας στο επίπεδο των εικόνων (δημιουργήθηκε με <https://app.diagrams.net/>)

Ο εσωτερικός πίνακας $M_{intrinsic}$ (ονομάζεται και πίνακας της κάμερας) εκτελεί τον μετασχηματισμό από το πλαίσιο συντεταγμένων της κάμερας στο πλαίσιο των εικόνων. Διαθέτει μοναδική και σταθερή μορφή για μια ορισμένη κάμερα, ανεξαρτήτως του περιβάλλοντός της και της χωρικής διαμόρφωσής της. Γι' αυτό, σε αντίθεση με τον εξωτερικό, ο εσωτερικός πίνακας επαναχρησιμοποιείται με την ίδια μορφή σε οποιαδήποτε φωτογραφία τραβήξει η κάμερα. Για την κατανόηση της κατασκευής του σχεδιάστηκε η Εικόνα 36, η οποία δείχνει με λεπτομέρειες τη διαδικασία προβολής του σημείου (X_c, Y_c, Z_c) ενός αντικειμένου στον τριδιάστατο χώρο, πάνω στο επίπεδο των εικόνων. Η ακτίνα φωτός που ξεκινάει από το σημείο (X_c, Y_c, Z_c) έχει σχεδιαστεί με την παχιά, άσπρη, ευθεία γραμμή που διέρχεται μέσω της οπής. Κατά την απεικόνιση χάνεται η πληροφορία του βάθους του αντικειμένου, με αποτέλεσμα το σημείο προβολής (X'_p, Y'_p) να έχει μόνο δύο συντεταγμένες, εκφρασμένες σε διαστάσεις απόστασης (π.χ. σε mm), παρομοίως με τις X_c, Y_c, Z_c . Έχω εκφράσει το σημείο προβολής σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το O'_p (που έχει συντεταγμένες (c_x, c_y) ως προς το σύστημα συντεταγμένων των εικόνων) και άξονες x'_p, y'_p στην ίδια κατεύθυνση με αυτούς του επιπέδου των εικόνων. Εκμεταλλευόμενος τον νόμο των ομοίων τριγώνων για τα ζευγάρια των γαλάζιων και πορτοκαλί τριγώνων στην Εικόνα 36 οδηγούμαι στις επόμενες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{X'_p}{f} &= -\frac{X_c}{Z_c} \Rightarrow X'_p = -f \cdot \frac{X_c}{Z_c} && (\text{εκφρασμένα σε } mm) \\ \frac{Y'_p}{f} &= -\frac{Y_c}{Z_c} \Rightarrow Y'_p = -f \cdot \frac{Y_c}{Z_c} \end{aligned} \quad (71)$$

Όπου f είναι το μήκος εστίασης (focal length) που μετριέται σε mm και (c_x, c_y) είναι το οπτικό κέντρο (δηλαδή το σημείο τομής του οπτικού άξονα με το επίπεδο των εικόνων) που μετριέται σε pixels. Οι παράμετροι αυτές έχουν προκύψει απουσία φακών που θα επηρέαζαν την ευθεία πορεία της δέσμης φωτός, όμως υφίστανται και στην πραγματική κάμερα, με προσαρμοσμένες τιμές που εξαρτώνται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του φακού.

Τέλος, πρέπει να γίνει η μετατροπή του σημείου (X'_p, Y'_p) στο pixel (X_p, Y_p) . Πρώτον, επειδή η κάμερα οπής προβάλλει τις εικόνες ανεστραμμένες στο επίπεδο των εικόνων (πριν την επεξεργασία), βρίσκω το συμμετρικό σημείο του (X'_p, Y'_p) ως προς το O'_p . Δεύτερον, υπολογίζω την απαιτούμενη κλιμάκωση για τη μετατροπή των μονάδων από mm σε pixels. Τρίτον, μετατοπίζω κατά (c_x, c_y) για να εκφράσω το σημείο στο σύστημα συντεταγμένων των εικόνων. Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω τύποι:

$$\begin{aligned} X_p &= -s_x \cdot X'_p + c_x = (f \cdot s_x) \cdot \frac{X_c}{Z_c} + c_x = f_x \cdot \frac{X_c}{Z_c} + c_x && (\text{εκφρασμένα σε pixels}) \\ Y_p &= -s_y \cdot Y'_p + c_y = (f \cdot s_y) \cdot \frac{Y_c}{Z_c} + c_y = f_y \cdot \frac{Y_c}{Z_c} + c_y \end{aligned} \quad (72)$$

Όπου s_x (σε μονάδες $\frac{pixels}{mm}$) είναι ο αριθμός των pixels που χωράνε σε 1 mm κατά μήκος του άξονα x_p και ομοίως ισχύει για το s_y . Ας τονιστεί ότι σε όλα τα παραπάνω έχω κάνει την παραδοχή πως το επίπεδο των εικόνων δεν παρουσιάζει κάποια γωνία στρέβλωσης (που σημαίνει ότι τα pixels έχουν ορθογώνιο σχήμα), άλλωστε η βιβλιοθήκη OpenCV (την οποία χρησιμοποιώ αργότερα για την εξαγωγή του $M_{intrinsic}$) θεωρεί μηδενική τη συγκεκριμένη παράμετρο. Τελικά, ο εσωτερικός πίνακας είναι:

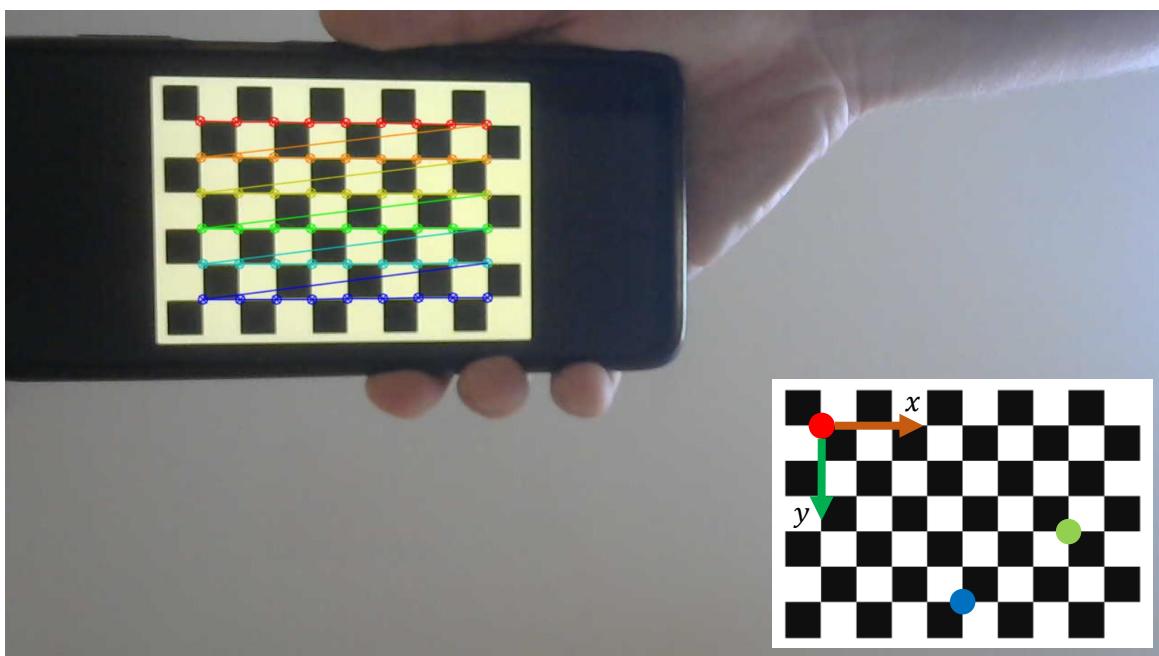
$$M_{intrinsic} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (73)$$

ii. Βαθμονόμηση και διόρθωση της παραμόρφωσης

Ο μετασχηματισμός της κάμερας που προαναφέρθηκε λειτουργεί σωστά και δημιουργεί ακριβείς απεικονίσεις, υπό την προϋπόθεση ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον εξωτερικό 3D χώρο προβάλλεται επίσης ως ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο 2D επίπεδο των εικόνων. Αυτό όμως δεν συμβαίνει σε μία πραγματική κάμερα, διότι τα καρέ που αυτή καταγράφει εμφανίζονται παραμορφωμένα εξαιτίας των οπτικών ιδιοτήτων και ασυμμετριών του φακού της. Η πιο συχνή παραμόρφωση που συναντάται στις περισσότερες εμπορικά διαθέσιμες κάμερες είναι η ακτινική, που οφείλεται στην κυρτότητα του φακού και αλλοιώνει κυρίως τις άκρες των εικόνων. Αυτή διακρίνεται στην ακτινική παραμόρφωση βαρελιού και μαξιλαριού, με τις οριζόντιες και κάθετες γραμμές να καμπυλώνουν ακτινικά προς το εξωτερικό και προς το εσωτερικό των εικόνων αντίστοιχα. Το δεύτερο είδος είναι η εφαπτομενική παραμόρφωση, η οποία, σε αντίθεση με την ακτινική, έχει γενικά πολύ μικρότερη επίδραση και δεν λαμβάνεται υπόψη. Το συνολικό φαινόμενο της παραμόρφωσης γίνεται να περιγραφεί με κάποιους αδιάστατους αριθμούς k_1, k_2, \dots (για την ακτινική) και p_1, p_2, \dots (για την εφαπτομενική). Πρόκειται για τους συντελεστές παραμόρφωσης που επιχειρώ να βρω κατά τη βαθμονόμηση της κάμερας [36], η οποία εξηγείται στη συνέχεια. Με τη διαδικασία αυτή ανακτώ επίσης τις εσωτερικές παραμέτρους του $M_{intrinsic}$.



Εικόνα 37 Ενδεικτικές φωτογραφίες για τη βαθμονόμηση της κάμερας



Εικόνα 38 Ενδεικτική φωτογραφία με εντοπισμένες και ζωγραφισμένες τις εσωτερικές κορυφές της σκακιέρας

Η συνηθέστερη ίσως μέθοδος βαθμονόμησης μιας κάμερας είναι η χρήση ενός επίπεδου μοτίβου σκακιέρας, με εναλλασσόμενα άσπρα και μαύρα τετράγωνα σε ένα πλέγμα ορθογωνίου σχήματος. Η διαδικασία συνίσταται σε τρία βήματα. Πρώτα, γίνεται η λήψη ικανού αριθμού φωτογραφών της σκακιέρας (10 – 20 είναι αρκετές για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές) που καλύπτουν ένα μεγάλο ποσοστό του οπτικού πεδίου της κάμερας, κάθε φορά σε διαφορετικές θέσεις στον 3D χώρο (και στο 2D καρέ) και με μία πληθώρα προσανατολισμών (Εικόνα 37). Έτσι συγκεντρώνεται μια ποικιλία δεδομένων για να διασφαλιστεί η ακρίβεια της βαθμονόμησης. Δεν έχουν σημασία οι διαστάσεις της σκακιέρας, ενώ το πλέγμα της είναι προτιμότερο να είναι μη τετραγωνικό (στην περίπτωσή μου είναι 10×7), προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα συμμετρικών μοτίβων.

Το δεύτερο βήμα είναι η εύρεση των 2D pixels των εσωτερικών κορυφών της σκακιέρας σε κάθε φωτογραφία, που εδώ είναι τοποθετημένες σε ένα πλέγμα 9×6 . Για τον εντοπισμό τους καλώ τη συνάρτηση “findChessboardCorners()”, με ορίσματα τη φωτογραφία σε κλίμακα του γκρι και τις διαστάσεις του πλέγματος των εσωτερικών κορυφών της σκακιέρας. Για μεγαλύτερη ακρίβεια εκτελώ μικροδιορθώσεις στις θέσεις των κορυφών καλώντας τη συνάρτηση “cornerSubPix()”, με ορίσματα τις κορυφές και ένα παράθυρο σε pixels για τη ρύθμισή τους. Επίσης, η “drawChessboardCorners()” σχεδιάζει τις εντοπισμένες κορυφές σε κάθε φωτογραφία από αριστερά προς τα δεξιά κι από πάνω προς τα κάτω, για μία οπτική επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας της ανίχνευσης των κορυφών (Εικόνα 38).

Στο τρίτο και τελευταίο βήμα πραγματοποιείται η εκτίμηση των εσωτερικών παραμέτρων της κάμερας και των συντελεστών παραμόρφωσης. Αρχικά ορίζεται η διαμόρφωση αναφοράς της σκακιέρας στον κόσμο, θέτοντας κατάλληλες 3D συντεταγμένες στις εσωτερικές κορυφές της. Η σκακιέρα θεωρείται ότι βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ του κόσμου, με τους άξονες x, y να κατευθύνονται παράλληλα στις πλευρές της. Ενδεικτικά, τα σημεία που είναι ζωγραφισμένα με κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα στην Εικόνα 38 (στη σκακιέρα κάτω δεξιά) έχουν συντεταγμένες $(0, 0, 0)$, $(7, 3, 0)$ και $(4, 5, 0)$ αντίστοιχα. Οι 3D συντεταγμένες κόσμου και τα αντίστοιχα 2D pixels των κορυφών σε κάθε φωτογραφία εισάγονται ως ορίσματα στη συνάρτηση “calibrateCamera()”, μαζί με τις διαστάσεις κάθε εικόνας σε pixels. Η συνάρτηση αυτή εκτιμάει τον εσωτερικό πίνακα και τους συντελεστές παραμόρφωσης για κάθε ζευγάρι δεδομένων, με στόχο να ελαχιστοποιήσει το σφάλμα επαναπροβολής (reprojection error), που είναι μία μετρική της απόστασης των προβολών των 3D σημείων κόσμου στις εικόνες βάσει των εκτιμήσεων, από τις θέσεις των 2D pixels του δεύτερου βήματος. Τελικά, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα για την κάμερα μου:

$$M_{intrinsic} = \begin{bmatrix} 1419.3 & 0.0 & 676.2 \\ 0.0 & 1420.6 & 328.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00855 \\ -0.17649 \\ 1.00955 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00049 \\ 0.00040 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Από τον εσωτερικό πίνακα συμπεραίνω ότι τα pixels του επιπέδου των εικόνων είναι τετραγωνικά ($f_x \approx f_y$) και ότι ο φακός της κάμερας είναι συγκλίνων, διότι $f > 0$ (σύνηθες στις webcam κάμερες). Πρόκειται για ένα λογικό αποτέλεσμα σε κάμερες με στενό οπτικό πεδίο dFoV (όπως εδώ που είναι 55°). Ακόμα, τα c_x, c_y δεν είναι ακριβώς ίσα με το μισό του μήκους και του πλάτους του καρέ της κάμερας (δηλαδή 740 και 340 pixels αντίστοιχα), γεγονός που οφείλεται στην ατελή ευθυγράμμιση του φακού και του οπτικού αισθητήρα της κάμερας.

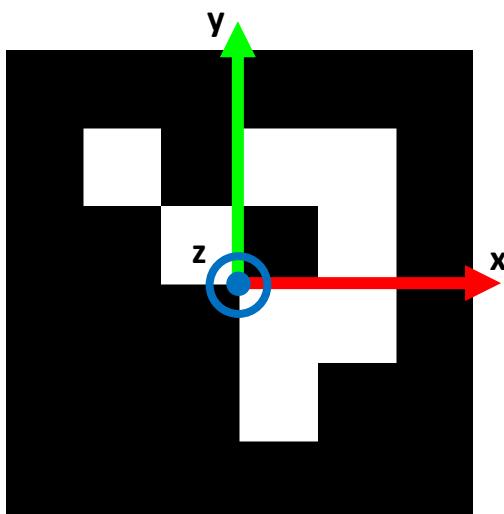
Η παραμόρφωση των εικόνων διορθώνεται με τη συνάρτηση “undistortPoints()” της OpenCV, που παίρνει ορίσματα την αρχική εικόνα, τον εσωτερικό πίνακα και τους πέντε συντελεστές παραμόρφωσης k_1, k_2, k_3, p_1, p_2 . Μετατρέπει τα παραμορφωμένα pixels (x_d, y_d) στα αντίστοιχα διορθωμένα (x_u, y_u) , χρησιμοποιώντας πολυωνυμικά μοντέλα όπως αυτό των Brown – Conrady. Τα k_1, k_2, k_3 είναι πολύ μεγαλύτερα από τα p_1, p_2 κατ’ απόλυτη τιμή, αφού η ακτινική παραμόρφωση είναι εντονότερη από την εφαπτομενική. Διαπιστώνω ότι η Logitech κάμερα εισάγει στα καρέ μια πολύ μικρή παραμόρφωση τύπου μαξιλαριού, λόγω του μικρού και θετικού συντελεστή k_1 .

c. Ανίχνευση των εμποδίων

Για την εφαρμογή του αρμονικού μετασχηματισμού απεικόνισης και του νόμου ελέγχου που παρήχθησαν στην ενότητα 4, είναι σημαντική η όσο το δυνατόν ακριβής γνώση της διαμόρφωσης των εμποδίων στο περιβάλλον του ρομποτικού βραχίονα. Η διαδικασία ανίχνευσής τους συνίσταται σε δύο βασικά στάδια. Πρώτον, χρειάζεται να εκτιμηθεί η διαμόρφωση του P_{obst} (επίπεδο των εμποδίων) ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Δεύτερον, χρειάζεται να προσδιοριστούν το εξωτερικό και τα εσωτερικά σύνορα του πραγματικού χώρου W_{free} πάνω στο επίπεδο P_{obst} . Αρχικά, αυτά θα εκφραστούν στο επίπεδο των εικόνων, και στη συνέχεια, με μία κατάλληλη διαδικασία και εκμεταλλευόμενος τη γνώση της στάσης του P_{obst} (το ground – truth στοιχείο της εικόνας), θα μετατραπούν σε σημεία του τριδιάστατου χώρου του κόσμου, που είναι και το τελικό ζητούμενο.

i. Εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού του επιπέδου των εμποδίων

Η εκτίμηση της στάσης του επιπέδου των εμποδίων ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων απαιτείται για τη σωστή χωροθέτηση των εμποδίων στον τριδιάστατο χώρο. Συνεπώς, σκοπός μου είναι να υπολογίσω τον ομογενή πίνακα $S_p^w \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ο οποίος περιέχει τη θέση και τον προσανατολισμό του P_{obst} ως προς το πλαίσιο του κόσμου (world). Θεωρώ ότι ο ομογενής πίνακας $S_c^w \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ που εκφράζει τη διαμόρφωση της κάμερας ως προς το πλαίσιο του κόσμου (προηγουμένως τον ανέφερα ως $M_{extrinsic}$) είναι γνωστός (μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια μετροταινίας για την εκτίμηση της θέσης της κάμερας και μοιρογνωμονίου για την εκτίμηση του προσανατολισμού του πλαισίου της). Άρα το πρόβλημα μετατρέπεται στην αναζήτηση του ομογενή πίνακα $S_p^c \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ που συνδέει το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας με αυτό του P_{obst} , οπότε θα είναι $S_p^w = S_c^w \cdot S_p^c$.



Εικόνα 39 Δείκτης ArUco 4x4 (id=0), μαζί με το σύστημα συντεταγμένων του

Η εύρεση του S_p^c έγινε με τη χρήση ενός δείκτη ArUco (Augmented Reality University of Cordoba, ονομάζεται έτσι επειδή εφευρέθηκε στο πανεπιστήμιο της Κόρδοβας στην Ισπανία). Πρόκειται για τετραγωνικά δυαδικά πλέγματα που διαθέτουν άσπρα και μαύρα τετραγωνάκια, η θέση των οποίων καθορίζει τη μοναδική ταυτότητα κάθε δείκτη. Το εξωτερικό περίγραμμα είναι πάντα μαύρο, ενώ η εσωτερική περιοχή μπορεί να διαφέρει ως προς τον αριθμό των τετραγώνων και την ποικιλία των μοτίβων. Εδώ χρησιμοποιώντας τον δείκτη ArUco που παρουσιάζεται στην Εικόνα 39.

Για την ανίχνευση του δείκτη χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις της μονάδας “aruco” της βιβλιοθήκης OpenCV. Αρχικά, η κλήση της συνάρτησης “Dictionary_get()” με όρισμα την κατάλληλη κατηγορία ArUco, ανακτά το λεξικό με όλες τις πιθανές ταυτότητες του δείκτη και η κλήση της συνάρτησης “DetectorParameters_create()” επιστρέφει ένα αντικείμενο με τις παραμέτρους που απαιτούνται για την ανίχνευση του ArUco. Έπειτα, η συνάρτηση “detectMarkers()” με ορίσματα το εκάστοτε καρέ της κάμερας, το ArUco λεξικό και τις παραμέτρους του, επιστρέφει την ταυτότητα και τις συντεταγμένες (σε pixels) των κορυφών του τετραγωνικού συνόρου κάθε εντοπισμένου δείκτη στην εικόνα. Τέλος, η συνάρτηση “estimatePoseSingleMarkers()” παίρνει ορίσματα τις κορυφές (σε pixels) και τις πραγματικές διαστάσεις (σε m) του δείκτη ArUco, καθώς και τον εσωτερικό πίνακα της κάμερας και τους συντελεστές παραμόρφωσης και υπολογίζει τα διανύσματα μεταφοράς $t_a^c \in \mathbb{R}^3$ και περιστροφής $r_a^c \in \mathbb{R}^3$ του δείκτη ως προς το πλαίσιο της κάμερας. Το διάνυσμα περιστροφής βασίζεται στον τύπο του Rodrigues και μετατρέπεται σε πίνακα περιστροφής $R_a^c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με τη συνάρτηση “Rodrigues()” της βιβλιοθήκης OpenCV. Έτσι προκύπτει ο ομογενής πίνακας $S_a^c = \begin{bmatrix} R_a^c & t_a^c \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ της διαμόρφωσης του δείκτη ArUco ως προς το πλαίσιο της κάμερας.

Κολλάω τον δείκτη ArUco σε μια γνωστή θέση t_a^p πάνω στο επίπεδο P_{obst} , με ορισμένη γωνία προσανατολισμού ϕ_a^p γύρω από το \hat{n}_p . Π.χ., αν ο δείκτης βρίσκεται στο κέντρο του P_{obst} τότε θα είναι $t_a^p = [0 \ 0 \ 0]^\top$, ενώ αν είναι στην κάτω αριστερή γωνία θα ισχύει $t_a^p = \left[-\frac{l_p}{2} \ -\frac{w_p}{2} \ 0 \right]^\top$. Ο πίνακας περιστροφής γράφεται $R_z(\phi_a^p) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_a^p) & -\sin(\phi_a^p) & 0 \\ \sin(\phi_a^p) & \cos(\phi_a^p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Επομένως, η διαμόρφωσή του ArUco ως προς το P_{obst} περιγράφεται από τον ομογενή πίνακα $S_a^p = \begin{bmatrix} R_z(\phi_a^p) & t_a^p \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$.

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα καταλήγω στον επιθυμητό ομογενή πίνακα $S_p^c \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$S_p^c = S_a^c \cdot S_p^a = S_a^c \cdot (S_a^p)^{-1} \quad (75)$$

Τελικά λοιπόν, υπολογίζω τους $S_p^w \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (για το P_{obst}) και $S_c^w \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (για την κάμερα) με τους ακόλουθους τύπους:

$$\begin{aligned} S_p^w &= T_{P_{obst}}(t_p, \hat{n}_p, \phi_p) = S_c^w \cdot S_p^a = S_c^w \cdot S_a^c \cdot (S_a^p)^{-1} \\ S_c^w &= S_p^w \cdot (S_p^c)^{-1} = S_p^w \cdot S_a^p \cdot (S_a^c)^{-1} \end{aligned} \quad (76)$$

Όλα τα εμπόδια έχουν ορισμένο κοινό ύψος h_{obst} , με το σχήμα τους να είναι πρισματικό κατά μήκος αυτού. Έχω θεωρήσει ότι $h_{obst} < l_e$ (πρέπει να είναι μικρότερο του μήκους της ράβδου του τελικού στοιχείου δράσης), το οποίο πρέπει να γνωρίζω. Αν $h_{obst} \neq 0$, τότε τα σύνορα των εμποδίων που καταγράφει η κάμερα δεν είναι στο ίδιο χωρικά επίπεδο με αυτό του ArUco (δηλαδή το P_{obst}), αντιθέτως βρίσκονται σε ένα άλλο παράλληλο επίπεδο που το ονομάζω $P_{obst,top}$. Το $P_{obst,top}$ εφάπτεται στο επίπεδο πάνω μέρος όλων των εμποδίων και διαφέρει από το P_{obst} μονάχα στο διάνυσμα μεταφοράς του. Ο ομογενής πίνακας μετασχηματισμού του $S_{p,top}^w = S_{obst}^w \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ υπολογίζεται όπως φαίνεται παρακάτω (αυτόν τον πίνακα θα χρησιμοποιώ στο εξής για τα εμπόδια):

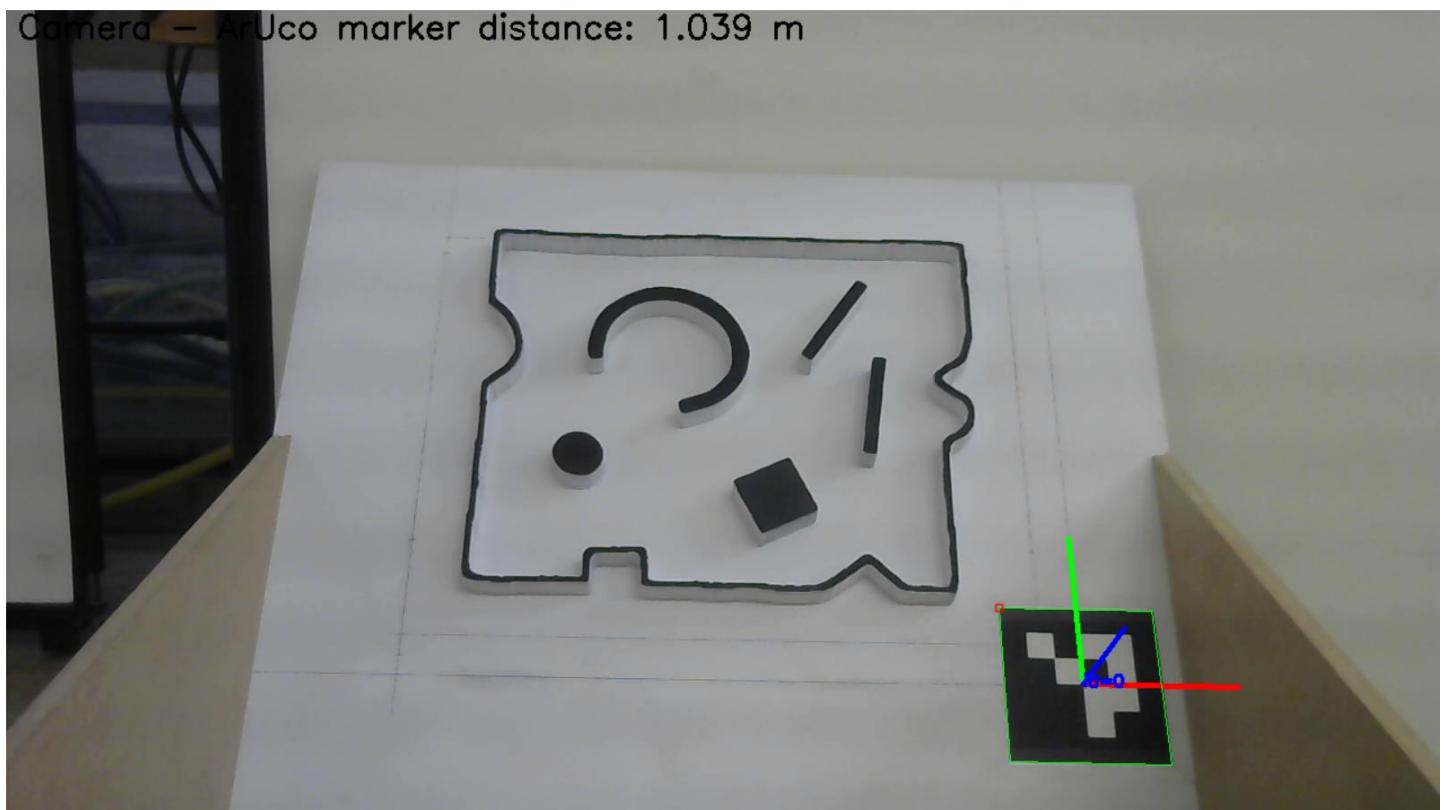
$$S_{obst}^w = T_{P_{obst}}(t_p + h_{obst} \cdot \hat{n}_p, \hat{n}_p, \phi_p) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & h_{obst} \cdot \hat{n}_p \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \cdot S_p^w \quad (77)$$

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως οι μετρήσεις που λαμβάνω από την OpenCV για την εκτίμηση του S_a^c περιέχουν μικρή ποσότητα τυχαίου θορύβου. Για την εξομάλυνση των τιμών αξιοποιώ ένα απλό φίλτρο κινούμενου μέσου όρου (moving average filter). Ειδικότερα, επειδή το περιβάλλον του ρομποτικού βραχίονα είναι ακίνητο στον χώρο (το επίπεδο των εμποδίων, ο δείκτης ArUco, η κάμερα), εφαρμόζω ένα συγκεντρωτικό φίλτρο (cumulative), το οποίο παίρνει κάθε φορά τον μέσο όρο όλων των μετρήσεων, από την αρχική μέχρι και την τρέχουσα (το παράθυρο του φίλτρου είναι το μέγιστο δυνατό). Αν χρειαστεί, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, να προβώ σε αλλαγές στη διαμόρφωση του περιβάλλοντος του βραχίονα, έχω τη δυνατότητα να απενεργοποιήσω και να ξανά ενεργοποιήσω το φίλτρο. Στόχος μου είναι να καταλήξω σε έναν σταθερό πίνακα S_a^c . Η μαθηματική σχέση, λοιπόν, που μου δίνει κάθε φορά τον νέο πίνακα S_a^c είναι η εξής:

$$[S_a^c]_n = \frac{(n - 1) \cdot [S_a^c]_{n-1} + [\hat{S}_a^c]_n}{n}, n = 1, 2, \dots, \text{ με } [S_a^c]_1 = [\hat{S}_a^c]_1 \quad (78)$$

Όπου n είναι ο αριθμός των εκτιμήσεων, $[S_a^c]_{n-1}$ είναι η προηγούμενη $(n - 1)$ – οστή τιμή, $[\hat{S}_a^c]_n$ είναι η n – οστή εκτίμηση της νέας τιμής και $[S_a^c]_n$ είναι η υπολογισθείσα n – οστή νέα τιμή του πίνακα S_a^c .

ii. Προσδιορισμός των συνόρων των εμποδίων σε pixels



Εικόνα 40 Φωτογραφία ενός ενδεικτικού πραγματικού χώρου εργασίας με εμπόδια, όπου έχει σχεδιαστεί και το ανιχνευμένο πλαίσιο συντεταγμένων του δείκτη ArUco

Η εκτίμηση της διαμόρφωσης του P_{obst} έγινε με τη βοήθεια ενός δείκτη ArUco, λόγω των γνωστών του διαστάσεων l_p και w_p . Αντιθέτως, θεωρώ άγνωστη τη γεωμετρία των διδιάστατων συνόρων των εμποδίων, συνεπώς η χρήση δείκτων ArUco ή April Tags δεν θα εξυπηρετούσε. Έτσι, για την αναγνώριση

των συνόρων χρησιμοποίησα τεχνικές επεξεργασίας εικόνας. Στα επόμενα, περιγράφονται τα βήματα που ακολουθούνται για τον προσδιορισμό των συνόρων σε pixels, για τα εμπόδια που φαίνονται στην Εικόνα 40. Το επίπεδο P_{obst} είναι βαμμένο με άσπρη μπογιά. Στην κάτω δεξιά γωνία βρίσκεται ο δείκτης ArUco από την Εικόνα 39 (οι διαστάσεις του είναι $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ ή $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, αναλόγως τι λειτουργεί καλύτερα στις εκάστοτε συνθήκες φωτισμού). Τα εμπόδια είναι εκτυπωμένα με γκρι υλικό PLA και έχουν τοποθετηθεί διάσπαρτα στο επίπεδο, σε τυχαίες θέσεις. Η παράπλευρη επιφάνειά τους είναι βαμμένη με άσπρο χρώμα, το ίδιο με αυτό του φόντου, για λόγους που θα εξηγηθούν αμέσως μετά. Η διαδικασία που αναλύεται ακολούθως γενικεύεται για οποιαδήποτε φωτογραφία και διάταξη των εμποδίων.

■ Μετατροπή της εικόνας από RGB σε άσπρο – μαύρο

Το πρώτο βήμα είναι η αλλαγή του χρώματος των pixels (όπως φαίνεται στην Εικόνα 41, στα αριστερά), από τριχρωμία RGB (κόκκινο-πράσινο-μπλε) σε μονοχρωμία (άσπρο ή μαύρο). Αρχικά, εφαρμόζεται στην εικόνα η μέθοδος “convert(‘L’)” της βιβλιοθήκης Image της python, για τη μετατροπή του αρχικού χρώματος (R, G, B) των pixels σε αποχρώσεις του γκρι $L = r \cdot R + g \cdot G + b \cdot B$. Το L ονομάζεται φωτεινότητα και είναι ένας αριθμός στο διάστημα $[0, 255]$, επειδή $R, G, B \in [0, 255]$ και οι r, g, b είναι θετικοί συντελεστές με $r + g + b = 1$. Για την επιλογή τους υπάρχουν διάφορα πρότυπα, με το ITU-R 601-2 luma που χρησιμοποιείται εδώ να ορίζει για τα pixels τη φωτεινότητα $L = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B$. Τελικά, για τη μετατροπή σε άσπρο – μαύρο μπορεί να οριστεί μία απλή τιμή κατωφλίου στο L (π.χ. 127), κάτω από την οποία το pixel θα γίνεται μαύρο ($L' = 0$) ενώ άνω αυτής θα γίνεται άσπρο ($L' = 255$), δηλώνοντας την έλλειψη και την περίσσεια φωτεινότητας αντίστοιχα.

Αν υπάρχει αρκετή χρωματική αντίθεση μεταξύ του P_{obst} και της πάνω επιφάνειας των εμποδίων (η οποία περιέχει την πληροφορία της διδιάστατης γεωμετρίας τους), τότε η ασπρόμαυρη φωτογραφία τα διαχωρίζει με αποτέλεσμα να διακρίνονται ξεκάθαρα τα εμπόδια. Για να είμαι σίγουρος, επιλέγω για το επίπεδο P_{obst} να έχει λευκό χρώμα, ενώ τα εμπόδια τα τυπώνω με το τυπικό PLA γκρι απόχρωσης. Επίσης, βάφω την παράπλευρη επιφάνεια των εμποδίων με άσπρη μπογιά, ώστε να συγχωνεύεται με την επιφάνεια του P_{obst} και να μην λαμβάνεται υπόψη ως μέρος των συνόρων. Ακόμα, μπορώ να βάψω την πάνω επιφάνεια των εμποδίων με μαύρο χρώμα, σε περίπτωση που το γκρι PLA εμφανίζει ανεπιθύμητα μεγάλη φωτεινότητα. Προκειμένου ο χρωματικός διαχωρισμός να λειτουργήσει όσο το δυνατόν καλύτερα, είναι σημαντικό να υπάρχει στον χώρο ομοιόμορφος και αρκούντως έντονος φωτισμός. Το ηλιακό φως είναι ίσως η προτιμότερη επιλογή, αλλά είναι απαραίτητο να μη δημιουργούνται σκιές. Υπάρχει επιπλέον η δυνατότητα προσαρμογής του κατωφλίου φωτεινότητας. Έτσι, σε χώρο με έντονο φως συμφέρει η χρήση μεγαλύτερης τιμής του κατωφλίου, ενώ σε χώρο με ασθενέστερο φως είναι προτιμητέα η μείωσή του.

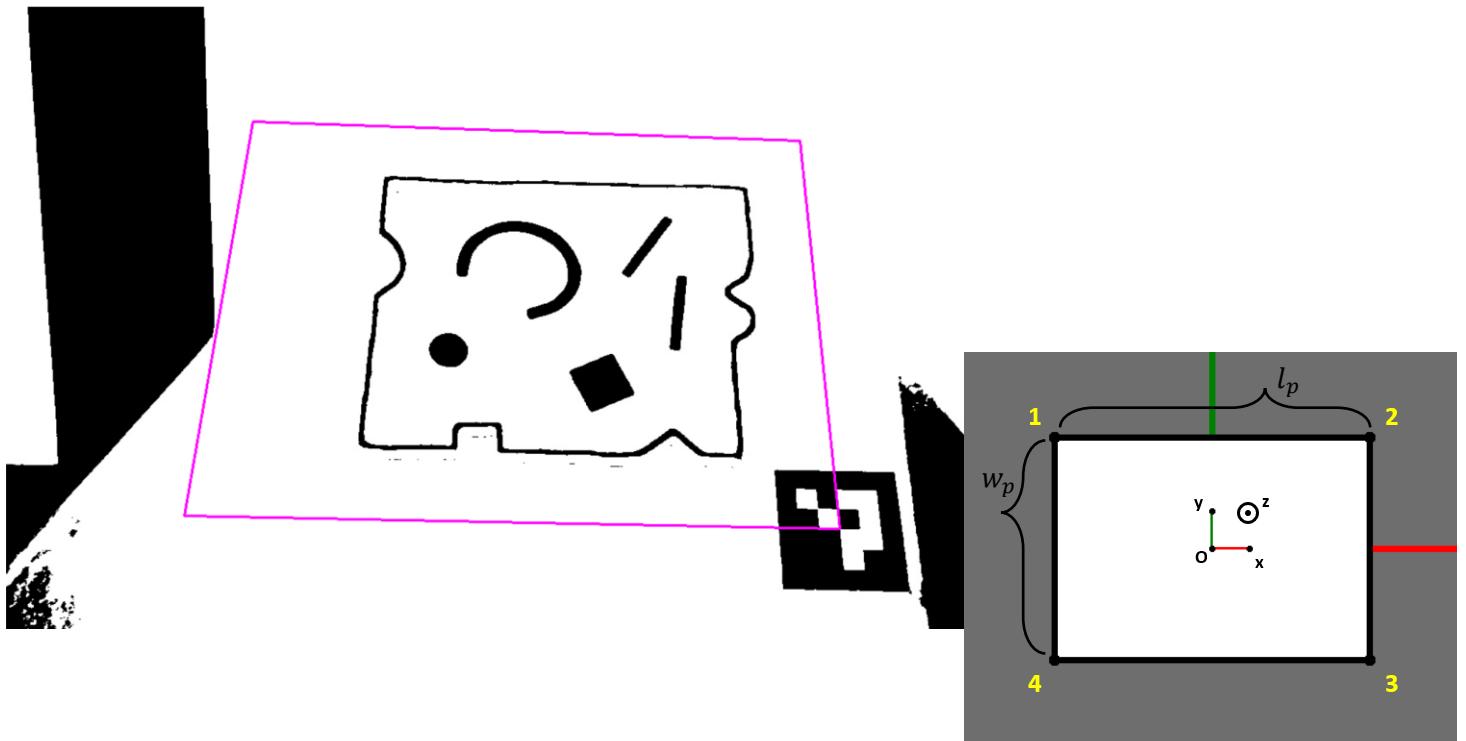
■ Προβολή του επιπέδου των εμποδίων στην εικόνα

Πάνω στην ασπρόμαυρη φωτογραφία σχεδιάζονται τα όρια του P_{obst} , όπως αυτά εκτιμήθηκαν προηγουμένως μέσω του δείκτη ArUco. Χρησιμεύουν ως οπτική επαλήθευση της ορθότητας της εκτίμησης της διαμόρφωσης του P_{obst} (και κατά συνέπεια του $P_{obst,top}$, δηλαδή του επιπέδου που εφάπτεται στο πάνω μέρος των εμποδίων). Αν τα πραγματικά όρια προβάλλονται στην εικόνα στις ίδιες θέσεις με τα ζωγραφισμένα, τότε είναι σχεδόν βέβαιο ότι η εκτίμηση έγινε σωστά. Βασικά, στη φωτογραφία προβάλλονται μονάχα οι τέσσερις κορυφές του επιπέδου, οι οποίες σχηματίζουν το τετράπλευρο σχήμα του. Αυτές έχουν συντεταγμένες $\left[-\frac{l_p}{2}, \frac{w_p}{2}, 0\right]^T$, $\left[\frac{l_p}{2}, \frac{w_p}{2}, 0\right]^T$, $\left[\frac{l_p}{2}, -\frac{w_p}{2}, 0\right]^T$ και $\left[-\frac{l_p}{2}, -\frac{w_p}{2}, 0\right]^T$ ως προς το ίδιον πλαίσιο του επιπέδου των εμποδίων (θα συμβολίζω όλα αυτά τα

σημεία με P_{obst}^p), με τη σειρά που αριθμούνται στην Εικόνα 41, στα δεξιά. Θέλω να εκφράσω το επίπεδο ως προς το πλαίσιο της κάμερας (P_{obst}^c), οπότε κάνω χρήση του ομογενή πίνακα S_p^c (75) ως εξής:

$$P_{obst}^c = S_p^c \cdot P_{obst}^p = S_a^c \cdot (S_a^p)^{-1} \cdot P_{obst}^p \quad (79)$$

Έτσι, ανακτώνται οι κορυφές του επιπέδου ως προς το πλαίσιο της κάμερας, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν για ευκολία ως σημεία κόσμου, αν υποθέσω προσωρινά ότι το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας ταυτίζεται με το παγκόσμιο. Μπορούν να εισαχθούν λοιπόν ως ορίσματα στη συνάρτηση “`projectPoints()`” της OpenCV, μαζί με τον εσωτερικό πίνακα και τους συντελεστές παραμόρφωσης (74), και με μηδενικά διανύσματα μεταφοράς και περιστροφής της κάμερας (εξωτερικές παράμετροι) ως προς τον κόσμο. Το αποτέλεσμα της προβολής παρουσιάζεται στην Εικόνα 41, στα αριστερά.



Εικόνα 41 Η Εικόνα 40 σε ασπρόμαυρη μορφή, όπου σχεδιάστηκαν με μωβ χρώμα τα όρια του επιπέδου των εμποδίων P_{obst} (η σχηματική του αναπαράσταση και το πλαίσιο συντεταγμένων του παρουσιάζονται στα δεξιά)

- **Εύρεση των 2D pixels συντεταγμένων των συνόρων**

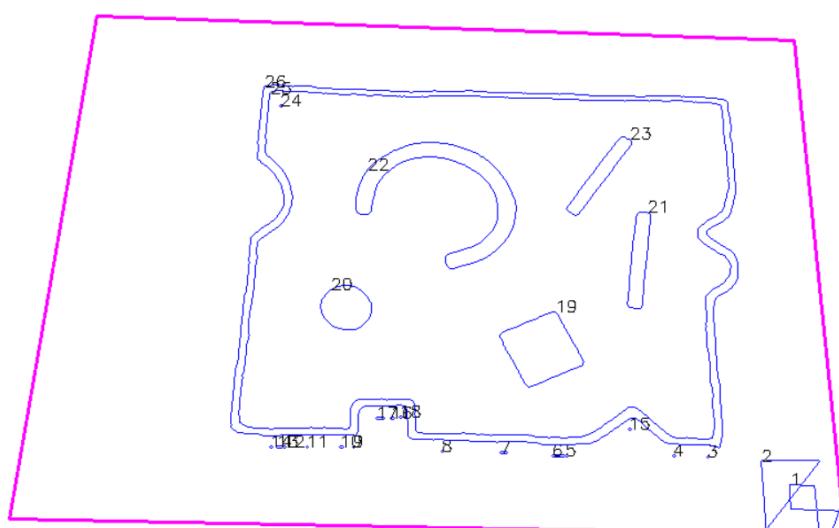
Στα επόμενα, θα προσεγγίσω το εξωτερικό σύνορο ∂W_0 και τα εσωτερικά σύνορα $\partial W_k, k = 1, \dots, N$ των εμποδίων με απλά πολύγωνα, δηλαδή με κατά τμήματα γραμμικές καμπύλες Jordan αποτελούμενες από πεπερασμένο αριθμό διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων. Τα απλά πολύγωνα είναι κλειστά σχήματα που δεν έχουν οπές στο εσωτερικό τους και οι πλευρές τους δεν τέμνονται μεταξύ τους (εκτός βέβαια από την οριακή περίπτωση των κορυφών). Θεωρώ ακόμα ότι τα σύνορα έχουν αυθαίρετα σχήματα οιασδήποτε κυρτότητας. Σε ένα κυρτό πολύγωνο S , ισχύει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία $p_1, p_2 \in S$, το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{p_1 p_2} \in S$, γεγονός που δεν αληθεύει σε ένα μη κυρτό σχήμα.

Για την ανίχνευση των πολυγωνικών συνόρων, η OpenCV παρέχει τη συνάρτηση “findContours()”, η οποία υλοποιεί εσωτερικά τον αλγόριθμο Suzuki – Abe [37]. Παίρνει ως είσοδο μία δυαδική εικόνα, που στην περίπτωσή μου είναι μία ασπρόμαυρη φωτογραφία (Εικόνα 41, στα αριστερά). Εντοπίζει τα σύνορα των κλειστών σχημάτων της εικόνας βάσει των τιμών των γειτονικών pixels (εδώ είναι άσπρο ή μαύρο χρώμα) και εξάγει τις ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ αυτών των κλειστών συνόρων, π.χ. ποια βρίσκονται στο εσωτερικό ποιων. Δέχεται επίσης παραμέτρους την “RETR_LIST” για την επιστροφή μόνο των σημείων των συνόρων (τις σχετικές θέσεις τους θα τις βρω αργότερα, στην επεξεργασία τους), καθώς και την “CHAIN_APPROX_SIMPLE” που εξαλείφει περιττά σημεία των συνόρων τα οποία δεν προσφέρουν παραπάνω πληροφορία, όπως τα συνευθειακά σημεία μιας πλευράς (που δεν αποτελούν βέβαια κορυφές του πολυγωνικού συνόρου). Η “findContours()” διαφέρει από κοινά φίλτρα ανίχνευσης ακμών, υπό την έννοια ότι τα τελευταία αναζητούν περιοχές της εικόνας όπου αλλάζει απότομα η φωτεινότητα ή το χρώμα, οι οποίες μπορεί να είναι και διάσπαρτοι ανοιχτοί βρόχοι. Οι βρόχοι αυτοί μπορεί να ανήκουν στο ίδιο σύνορο, αλλά η ανίχνευση ακμών δεν μπορεί να τους συνδυάσει σε ένα ενιαίο σύνολο.

Τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου βήματος παρουσιάζονται στην Εικόνα 42. Έχω προσαρμόσει την ακρίβεια των προσεγγίσεων με τη συνάρτηση “approxPolyDP()”, η οποία λαμβάνει ορίσματα το πολυγωνικό σύνορο και μία παράμετρο για την πιστότητα της προσέγγισης. Επιπλέον, έχω αποκλείσει εκείνα τα σύνορα τα οποία βρίσκονται (μερικώς ή ολικώς) εκτός των (προβαλλόμενων στην εικόνα) ορίων του P_{obst} . Παρατηρώ όμως ότι παραμένουν στην εικόνα ανεπιθύμητα σύνορα, όπως αυτά του δείκτη ArUco, τα οποία θα εκκαθαριστούν στο επόμενο βήμα.

Press the "d" key to save the detected boundaries

Number of total boundaries: 26, Number of removed boundaries: 0, Precision: 0.00010, Minimum vertices: 3



Εικόνα 42 Αφιλτράριστη ανίχνευση όλων των κλειστών συνόρων (σε pixels) στην ασπρόμαυρη Εικόνα 41, εντός των ορίων του επιπέδου των εμποδίων

- **Επεξεργασία και ανάλυση των 2D συνόρων**

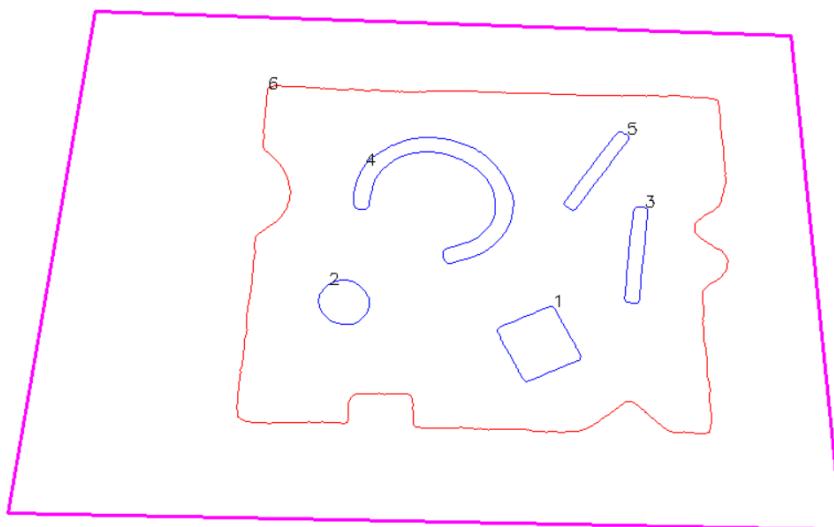
Η αφαίρεση των ανεπιθύμητων συνόρων στην Εικόνα 42, μπορεί να γίνει είτε με τη χειροκίνητη παρέμβαση του χρήστη μέσω της γραφικής διεπαφής, είτε με τον ορισμό ενός ελάχιστου αριθμού κορυφών (μεγαλύτερων ή ίσων του 3) που επιτρέπεται να διαθέτουν οι πολυγωνικές προσεγγίσεις. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να τεθεί, επειδή οι εσφαλμένες ανιχνεύσεις οφείλονται κυρίως σε μικρού μεγέθους πολυγωνικά σχήματα που έχουν προκύψει εξαιτίας θορύβου.

Ας αναφερθεί επίσης ότι επιθυμώ κάθε πολυγωνικό σύνορο να επιστρέφεται ως μία λίστα των διαδοχικών κορυφών του διασφαλίζοντας τη ρητή κλειστότητά του, δηλαδή το αρχικό σημείο της λίστας πρέπει να ταυτίζεται με το τελευταίο. Αυτό δεν γίνεται από τη συνάρτηση “findContours()”, οπότε το επιβάλλω στον κώδικα, διότι είναι απαραίτητο για να πραγματοποιηθεί σωστά η αρμονική απεικόνιση της ενότητας 4. Ακόμα, πρέπει να εξασφαλιστεί αντιωρολογιακή φορά περιστροφής για το εξωτερικό σύνορο και ωρολογιακή φορά για όλα τα εσωτερικά σύνορα. Σ' αυτό χρησίμευσε ο τύπος *shoelace* (80) (επίσης γνωστός ως τύπος εμβαδού του Gauss), που υπολογίζει το προσημασμένο εμβαδόν A_s ενός απλού πολυγώνου βάσει των συντεταγμένων $(x_i, y_i), i = 1, \dots, V_{num}$ των διαδοχικών κορυφών του (V_{num} στο πλήθος). Για $A_s > 0$ το σύνορο είναι προσανατολισμένο αντιωρολογιακά, ενώ για $A_s < 0$ είναι προσανατολισμένο ωρολογιακά. Σε περίπτωση που ο προσανατολισμός είναι λάθος, αρκεί να γίνει μία αντιστροφή της λίστας των κορυφών.

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{V_{num}} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i), \text{ με } x_{V_{num}+1} = x_1 \text{ και } y_{V_{num}+1} = y_1 \quad (80)$$

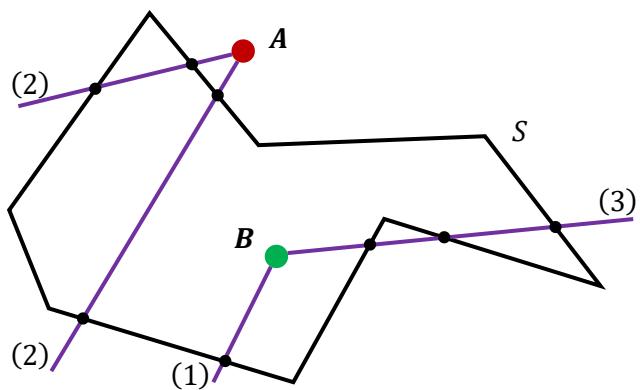
Press the "d" key to save the detected boundaries

Number of total boundaries: 7, Number of removed boundaries: 1, Precision: 0.00010, Minimum vertices: 30



Εικόνα 43 Τελικό αποτέλεσμα της αναγνώρισης του εξωτερικού (κόκκινο χρώμα) και των εσωτερικών (μπλε χρώμα) συνόρων (σε pixels) στην ασπρόμαυρη Εικόνα 41

Τελικά, προκύπτει η Εικόνα 43, με όλα τα επιθυμητά αναγνωρισμένα σύνορα. Απομένει να προσδιοριστεί το εξωτερικό ∂W_0 , που φαίνεται με κόκκινο χρώμα στην Εικόνα 43. Εξ ορισμού, πρόκειται για εκείνο που περιέχει στην εσωτερική του περιοχή όλα τα υπόλοιπα, εσωτερικά σύνορα. Γνωρίζοντας ότι τα σύνορα δεν τέμνονται μεταξύ τους, αρκεί να ελέγχω τη θέση μονάχα ενός σημείου από κάθε σύνορο σε σχέση με το εκάστοτε υποψήφιο εξωτερικό, και το ∂W_0 θα είναι αυτό που θα περιέχει όλα αυτά τα N στο πλήθος σημεία στην εσωτερική του περιοχή. Προγραμματιστικά χρησιμοποιώ τη συνάρτηση “pointPolygonTest()” της OpenCV, με ορίσματα το εξεταζόμενο σημείο και μία λίστα με τις διαδοχικές κορυφές του πολυγωνικού συνόρου. Υλοποιεί τον αλγόριθμο Ray – Casting, που εντοπίζει τη σχετική θέση ενός σημείου ως προς ένα κυρτό ή μη κυρτό πολύγωνο. Το επιτυγχάνει φέρνοντας μία ημιευθεία (ακτίνα) από το σημείο προς μία οποιαδήποτε κατεύθυνση και μετρώντας τα σημεία τομής της με το πολυγωνικό σύνορο. Αν ο αριθμός τους είναι άρτιος τότε το σημείο είναι εξωτερικά του πολυγώνου, ενώ αν είναι περιττός τότε είναι εσωτερικά του πολυγώνου. Ένα παράδειγμα της μεθόδου παρουσιάζεται στην Εικόνα 44 για το τυχαίο μη κυρτό σχήμα S , όπου το A είναι εξωτερικό σημείο και το B εσωτερικό.



Εικόνα 44 Επίδειξη της μεθόδου Ray – Casting σε ένα μη κυρτό σχήμα S

iii. Μετατροπή των συνόρων των εμποδίων από pixels σε 3D σημεία κόσμου

Για την ολοκλήρωση της διαδικασίας ανίχνευσης των συνόρων των εμποδίων, απαιτείται να εξαχθούν από τις 2D συντεταγμένες τους στην εικόνα τα αντίστοιχα 3D σημεία κόσμου. Ουσιαστικά, χρειάζεται να υπολογιστεί η συντεταγμένη του βάθους των εμποδίων στον χώρο σε σχέση με την κάμερα, που όμως δεν είναι δυνατόν να μετρηθεί άμεσα από τα 2D pixels της φωτογραφίας. Ως δεδομένα αναφοράς (ground – truths) αξιοποιούνται η ήδη ευρεθείσα στάση του επιπέδου P_{obst} στον τριδιάστατο χώρο, καθώς και το πρότερα γνωστό κουνό ύψος h_{obst} των εμποδίων. Μέσω αυτών προκύπτει, όπως έδειξα στην (77), ο ομογενής πίνακας $S_{p,top}^w = S_{obst}^w$, που δηλώνει τη διαμόρφωση των σημείων της πάνω επιφάνειας των εμποδίων ως προς το πλαίσιο του κόσμου. Άρα η πάνω επιφάνεια των εμποδίων ως προς το πλαίσιο της κάμερας χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο ομογενή πίνακα:

$$S_{obst}^c = (S_c^w)^{-1} \cdot S_{obst}^w \quad (81)$$

Στη συνέχεια, εκφράζω τα 2D pixels $[X_o^{im} \quad Y_o^{im}]^\top$ των συνόρων στην Εικόνα 43 σε 2D κανονικοποιημένα σημεία \hat{P}_o^c ως προς το πλαίσιο της κάμερας, βάσει της (69) και του αντιστρόφου του εσωτερικού πίνακα. Χρησιμοποιώντας τις ομογενείς αναπαραστάσεις των σημείων οδηγούμαι στη μετατροπή:

$$\hat{P}_o^c = \begin{bmatrix} \hat{p}_{1_o}^c \\ \hat{p}_{2_o}^c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_o^c \\ Z_o^c \\ Y_o^c \\ Z_o^c \end{bmatrix} = M_{intrinsic}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_o^{im} \\ Y_o^{im} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{έχει προηγηθεί η} \\ \text{διόρθωση της παραμόρφωσης} \\ \text{των pixels } [X_o^{im} \quad Y_o^{im}]^\top \end{pmatrix} \quad (82)$$

Συμβολίζω με P_o^c τα 3D σημεία, σε ομογενείς συντεταγμένες, των συνόρων ως προς το πλαίσιο της κάμερας. Αυτά περιέχουν απομονωμένη την άγνωστη συντεταγμένη βάθους Z_o^c που αναζητώ, και μπορούν να γραφούν με τον εξής τρόπο:

$$P_o^c = \begin{bmatrix} X_o^c \\ Y_o^c \\ Z_o^c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_o^c & 0 & 0 \\ 0 & Z_o^c & 0 \\ 0 & 0 & Z_o^c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_o^c \\ Z_o^c \\ Y_o^c \\ \bar{Z}_o^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_o^c & 0 & 0 \\ 0 & Z_o^c & 0 \\ 0 & 0 & Z_o^c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{P}_o^c \quad (83)$$

Οι ομογενείς 3D συντεταγμένες των αναγνωρισμένων συνόρων ως προς την πάνω επιφάνεια των εμποδίων βρίσκονται με τον αντίστροφο του πίνακα S_{obst}^c της σχέσης (81):

$$P_o^{obst} = \begin{bmatrix} X_o^{obst} \\ Y_o^{obst} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = S_c^{obst} \cdot P_o^c = (S_{obst}^c)^{-1} \cdot P_o^c \quad (84)$$

Όπως εννοείται στην (84), η συντεταγμένη Z_o^{obst} είναι γνωστή και ίση με το μηδέν, διότι η πάνω επιφάνεια των εμποδίων βρίσκεται στο xy επίπεδο του πλαισίου συντεταγμένων της. Άρα, εισάγοντας στη σχέση (84) τις (83) και (82) και εξισώνοντας τα τρίτα στοιχεία των διανυσμάτων των δύο μελών, εξάγεται ο ακόλουθος κλειστός τύπος για τη συντεταγμένη Z_o^c :

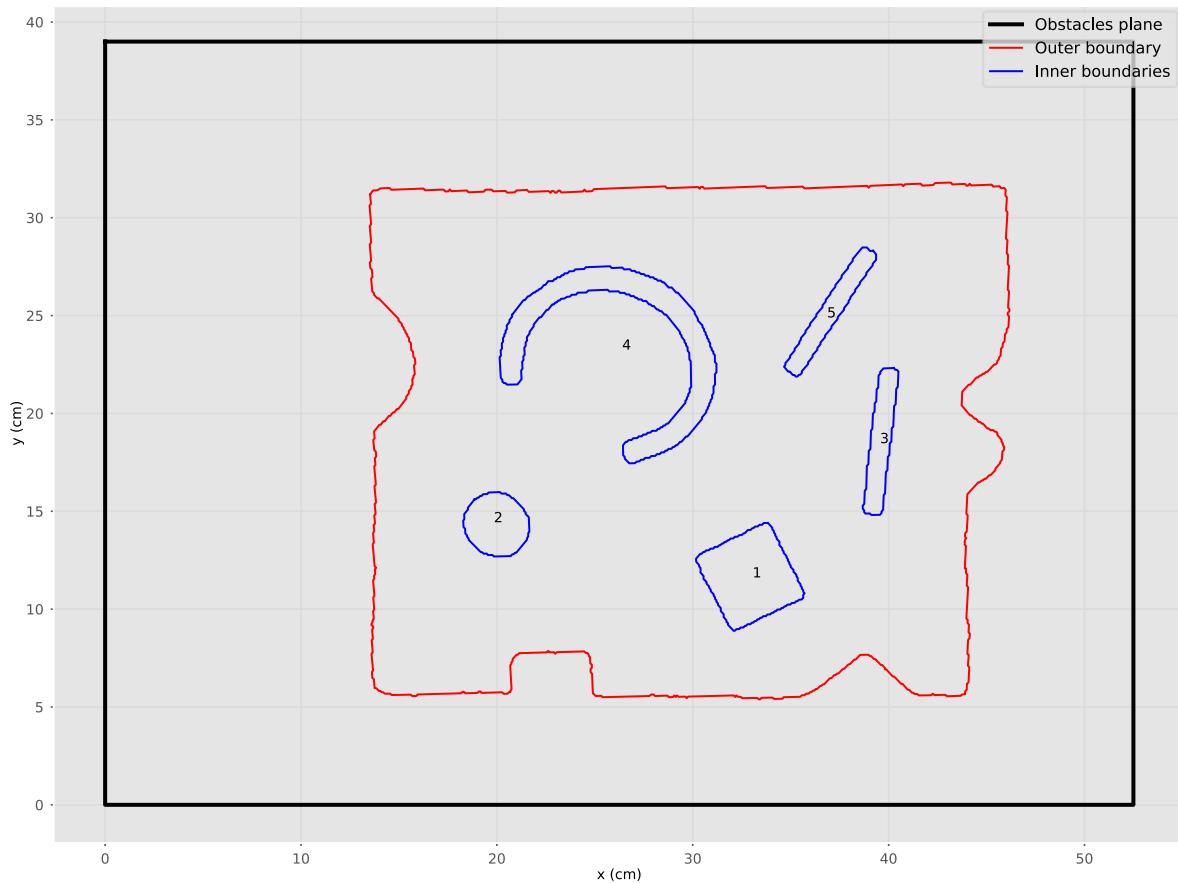
$$\begin{aligned} & \left(s_{3,1}^{obst} \cdot \hat{p}_{1_o}^c + s_{3,2}^{obst} \cdot \hat{p}_{2_o}^c + s_{3,3}^{obst} \right) \cdot Z_o^c + s_{3,4}^{obst} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow Z_o^c = -\frac{s_{3,4}^{obst}}{s_{3,1}^{obst} \cdot \hat{p}_{1_o}^c + s_{3,2}^{obst} \cdot \hat{p}_{2_o}^c + s_{3,3}^{obst}} \end{aligned} \quad (85)$$

Όπου $s_{3,1}^{obst}, s_{3,2}^{obst}, s_{3,3}^{obst}, s_{3,4}^{obst} \in \mathbb{R}$ είναι τα στοιχεία της τρίτης γραμμής του πίνακα S_c^{obst} . Υπολογίστηκαν λοιπόν τα σημεία P_o^c και μέσω αυτών γίνεται πλέον να προσδιοριστούν πολύ εύκολα τα 2D σημεία $[X_o^{obst} \quad Y_o^{obst}]^\top$ από την (84), καθώς και οι επιθυμητές 3D συντεταγμένες $[X_o^w \quad Y_o^w \quad Z_o^w]^\top$ των συνόρων ως προς το παγκόσμιο πλαίσιο συντεταγμένων:

$$P_o^w = \begin{bmatrix} X_o^w \\ Y_o^w \\ Z_o^w \\ 1 \end{bmatrix} = M_{extrinsic}^{-1} \cdot P_o^c = S_c^w \cdot P_o^c \quad (86)$$

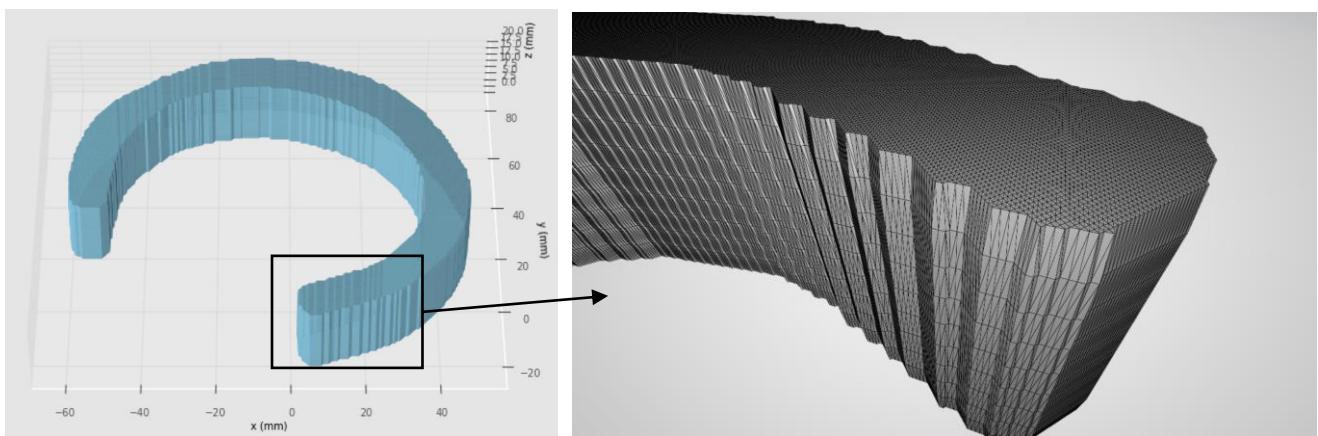
Τα 2D σημεία $[X_o^{obst} \quad Y_o^{obst}]^\top$ είναι οι κορυφές των πολυγωνικών συνόρων στο επίπεδο P_{obst} (εκφρασμένες στο πλαίσιο συντεταγμένων που σημειώνεται στην Εικόνα 41 στα δεξιά). Έχουν σχεδιαστεί στην Εικόνα 45, με μία μετατόπιση κατά $\begin{bmatrix} l_p & w_p \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^\top$ προκειμένου να βρίσκεται η αρχή $O(0,0)$ στην κάτω αριστερά γωνία. Οι κορυφές των συνόρων απαιτείται να είναι διακριτές, γι' αυτό φροντίζω να διαγράψω

τυχόν επαναλήψεις των ίδιων σημείων (στα πλαίσια της ακρίβειας των 0.1 mm που έχω θεωρήσει για την αποθήκευσή τους). Έχω κάνει την παραδοχή ότι το τελικό σημείο δράσης έχει αμελητέες διαστάσεις, ώστε να μην είναι απαραίτητη η τεχνητή ψηφιακή διόγκωση των ανιχνευμένων συνόρων.



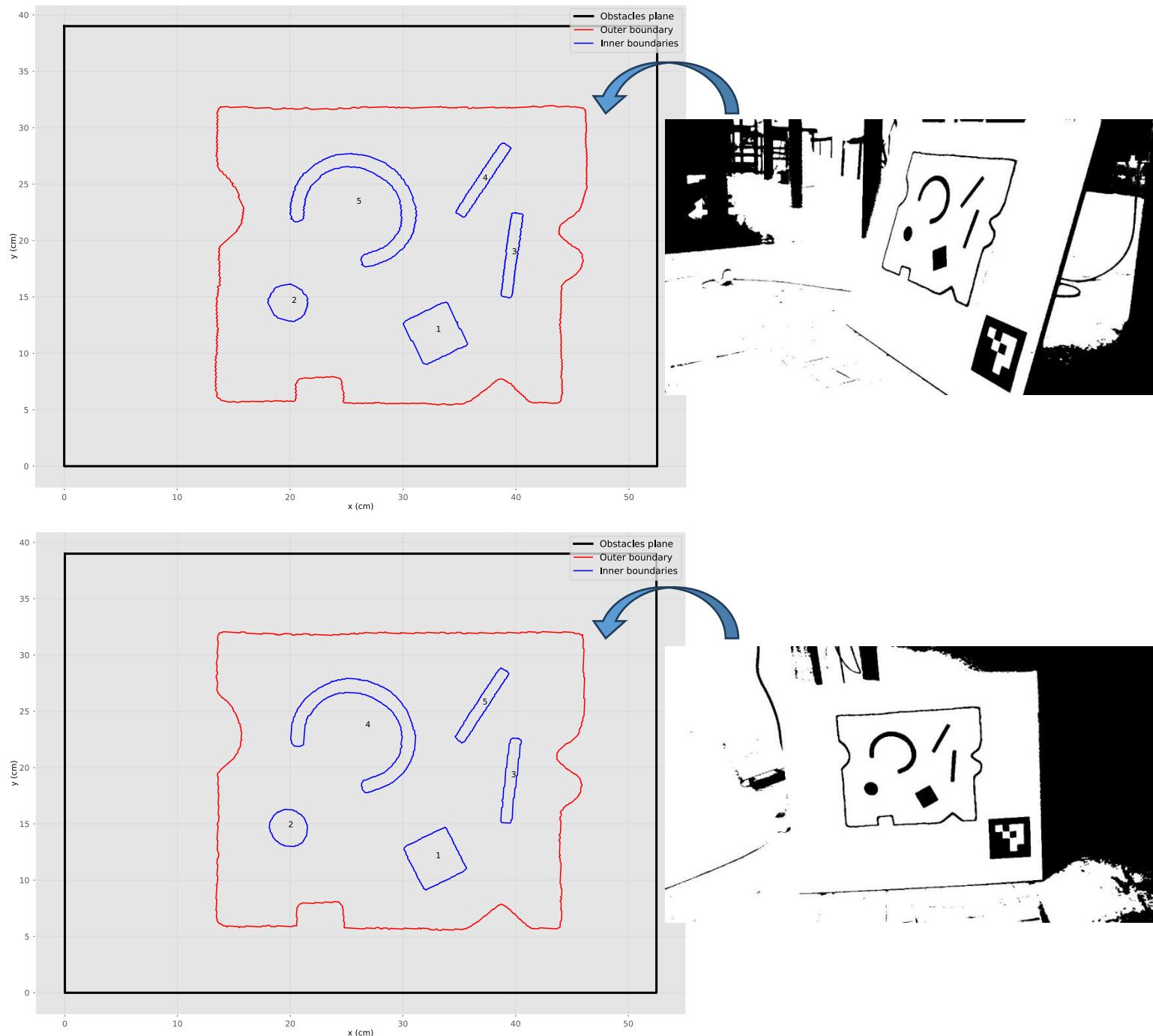
Εικόνα 45 Η εκτίμηση των πραγματικών διαστάσεων των συνόρων των εμποδίων στο επίπεδο P_{obst} για την Εικόνα 40

Για τον online προσομοιωτή Swift έχω κατασκευάσει stl αρχεία με τα 3D meshes όλων των πρισματικών εμποδίων (π.χ. Εικόνα 46), με τη συνάρτηση “marching_cubes()” της python βιβλιοθήκης skimage.measure (δέχεται ως όρισμα δειγματοληφθέντα εσωτερικά σημεία του όγκου των εμποδίων).



Εικόνα 46 Το 3D mesh (αριστερά) του 4^{ου} εμποδίου από την Εικόνα 45 και μία άποψη των τριγωνικών επιφανειών του πλέγματος του περιβλήματος (δεξιά)

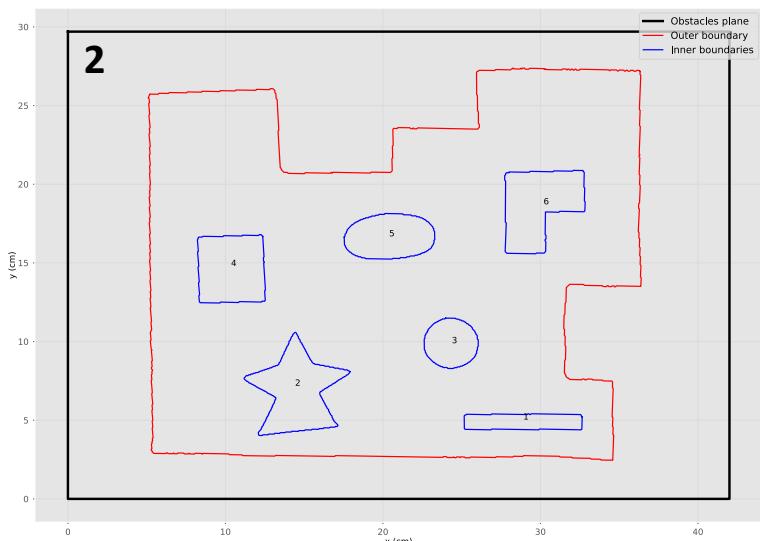
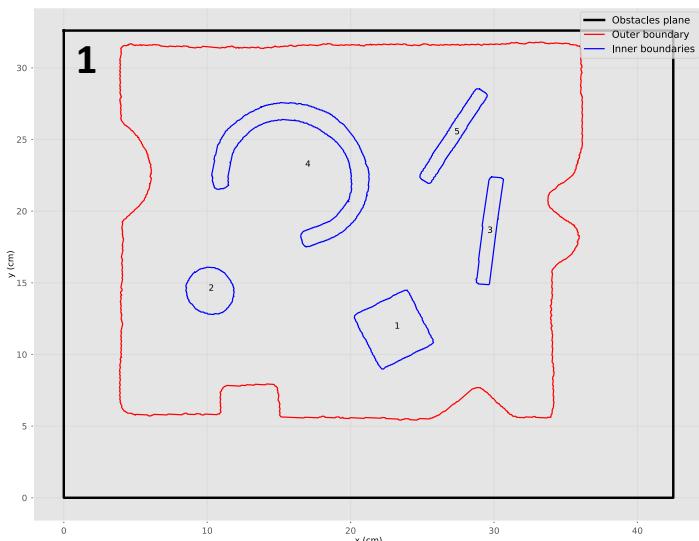
Για την περαιτέρω επαλήθευση της ορθότητας της προαναφερόμενης διαδικασίας, τράβηξα επιπρόσθετες φωτογραφίες του πραγματικού χώρου των εμποδίων από την Εικόνα 40, τοποθετώντας την κάμερα σε διαφορετικές γωνίες και αποστάσεις. Συμπεραίνω από την Εικόνα 47, πως προκύπτουν συγκριτικά τα ίδια σχεδόν αποτελέσματα στην αναγνώριση των συνόρων (συμφωνούν και με αυτά στην Εικόνα 45), με τα ενδεχόμενα σφάλματα εκτίμησης να μην ξεπερνούν το 1 cm (λαμβάνοντας υπόψη τη χειρότερη παρατηρούμενη περίπτωση λάθους).



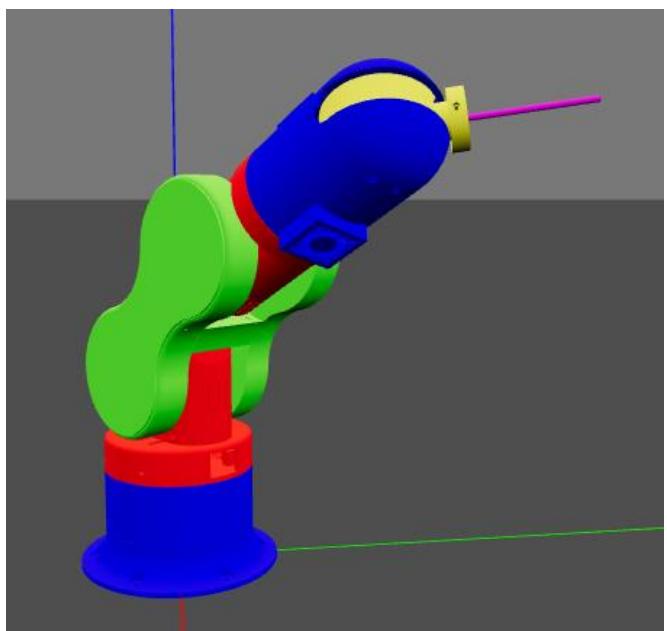
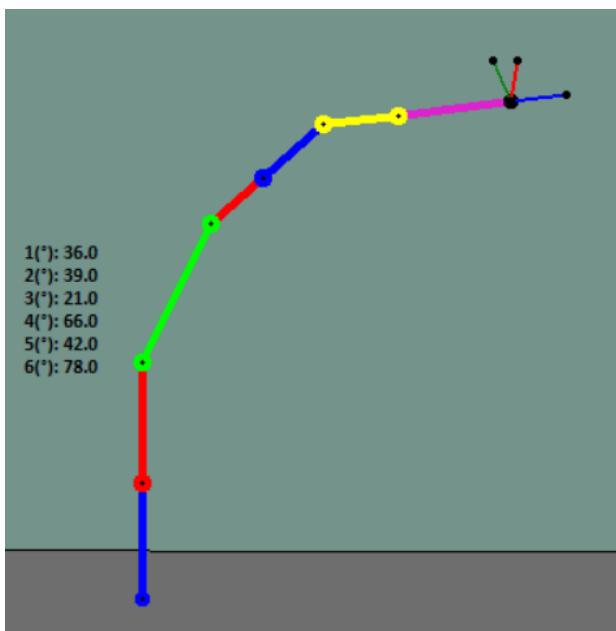
Εικόνα 47 Ασπρόμαυρες λήψεις του πραγματικού χώρου εργασίας από την Εικόνα 40 από διαφορετικές αποστάσεις και γωνίες της κάμερας, μαζί με τα αντίστοιχα εκτιμώμενα σύνορα των εμποδίων

6. Εφαρμογή του νόμου ελέγχου κίνησης και υπολογισμός τροχιών – Παρουσίαση προσομοιώσεων, πειραμάτων και αποτελεσμάτων

Στη συγκεκριμένη ενότητα εξετάζω την αποτελεσματικότητα του νόμου ελέγχου κίνησης (61) για τον ρομποτικό βραχίονα Thor, με τον οποίον εκτελώ και το πραγματικό πείραμα (Εικόνα 49), καθώς και για άλλους δύο ρομποτικούς χειριστές τύπου Scara (Εικόνα 50) και Gantry (Εικόνα 51), που τους εξετάζω μόνο σε προσομοιώσεις. Μεταχειρίζομαι επίσης δύο ξεχωριστούς επίπεδους χώρους εργασίας, με το ίδιο περίπου μέγεθος, αλλά με διαφορετικά εμπόδια (Εικόνα 48). Και οι δύο κατασκευάστηκαν με τη διαδικασία που περιεγράφηκε στην ενότητα 5, με τον πρώτο να προέρχεται από την Εικόνα 40 με τα 3D εκτυπωμένα εμπόδια, ενώ ο δεύτερος έχει προκύψει από σχεδίαση με μαύρο μαρκαδόρο σε λευκό χαρτί.

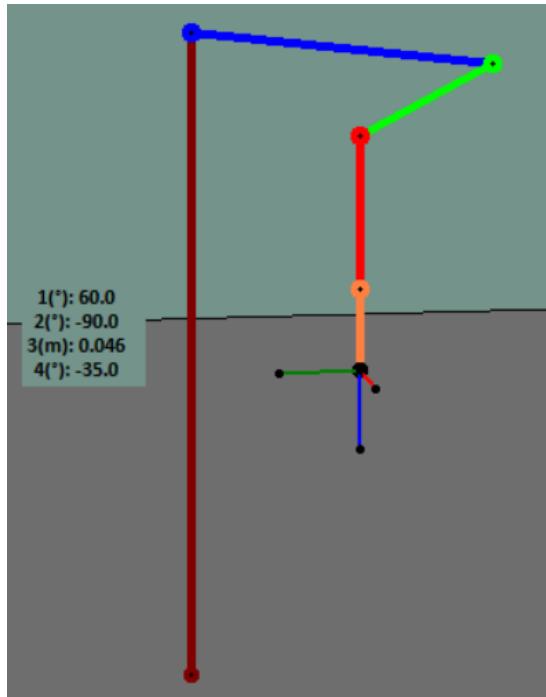


Εικόνα 48 Οι επίπεδοι πραγματικοί χώροι εργασίας με εμπόδια, με τον αριστερό (1) να έχει υλοποιηθεί για το πραγματικό πείραμα και τον δεξιό (2) να θρίσκεται μόνο σε προσομοίωση



Εικόνα 49 Σκελετική δομή στην προσομοίωση και ρεαλιστικό ψηφιακό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα Thor

Στην Εικόνα 50 και στην Εικόνα 51 παρουσιάζονται οι σκελετικές δομές και οι DH παράμετροι των δύο ρομποτικών χειριστών τύπου Scara και Gantry αντίστοιχα. Απεικονίζονται σε τυχαίες διαμορφώσεις, με τον κάθε σύνδεσμο να έχει ξεχωριστό χρώμα και τον καφέ σύνδεσμο να λειτουργεί ως η βάση τους.

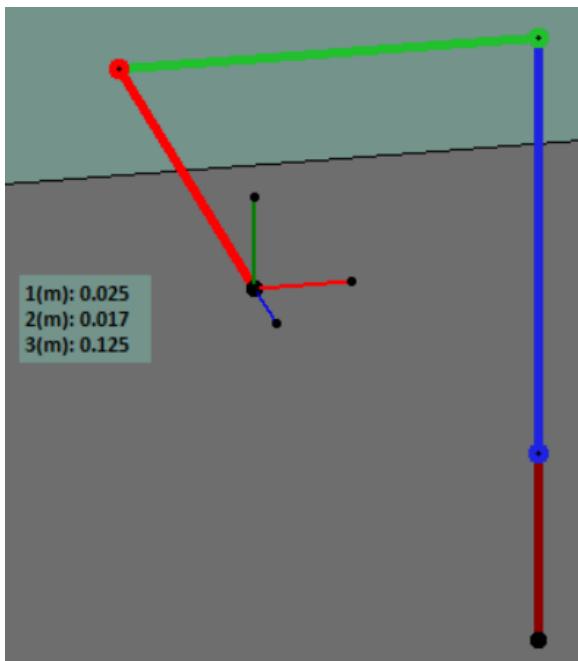


Θέση βάσης ως προς τον κόσμο: $[0.1 \quad 0.2 \quad 0]^T m$
 Θέση πλαισίου "0" ως προς τη βάση: $[0 \quad 0 \quad 0.4]^T m$
 Θέση end – effector ως προς το πλαίσιο "4": $[0 \quad 0 \quad 0.05]^T m$

Αρθρώσεις	$a (m)$	$\alpha (rad)$	$d (m)$ $\theta (rad)$	offsets	$q_{min} \rightarrow q_{max}$
1 (R)	0.200	0	$d_1 = 0$	0 rad	$[-\pi, \pi) rad$
2 (R)	0.200	π	$d_2 = 0$	0 rad	$[-\pi, \pi) rad$
3 (P)	0	0	$\theta_3 = 0$	0.050 m	$[0, 0.3] m$
4 (R)	0	0	$d_4 = 0$	0 rad	$[-\pi, \pi) rad$

Πίνακας 4 Παράμετροι Denavit-Hartenberg του ρομποτικού χειριστή τύπου Scara

Εικόνα 50 Σκελετική δομή και DH παράμετροι του ρομποτικού χειριστή Scara που μελετώ στην προσομοίωση



Θέση βάσης ως προς τον κόσμο: $[0.1 \quad 0.5 \quad 0]^T m$
 Θέση πλαισίου "0" ως προς τη βάση: $[0 \quad 0 \quad 0.1]^T m$
 Θέση end – effector ως προς το πλαίσιο "3": $[0 \quad 0 \quad 0]^T m$

Αρθρώσεις	$a (m)$	$\alpha (rad)$	$d (m)$ $\theta (rad)$	offsets	$q_{min} \rightarrow q_{max}$
1 (P)	0	$\frac{\pi}{2}$	$\theta_1 = 0$	0.200 m	$[0, 0.4] m$
2 (P)	0	$\frac{\pi}{2}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$	0.200 m	$[0, 0.4] m$
3 (P)	0	0	$\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$	0.200 m	$[0, 0.3] m$

Πίνακας 5 Παράμετροι Denavit-Hartenberg του ρομποτικού χειριστή τύπου Gantry

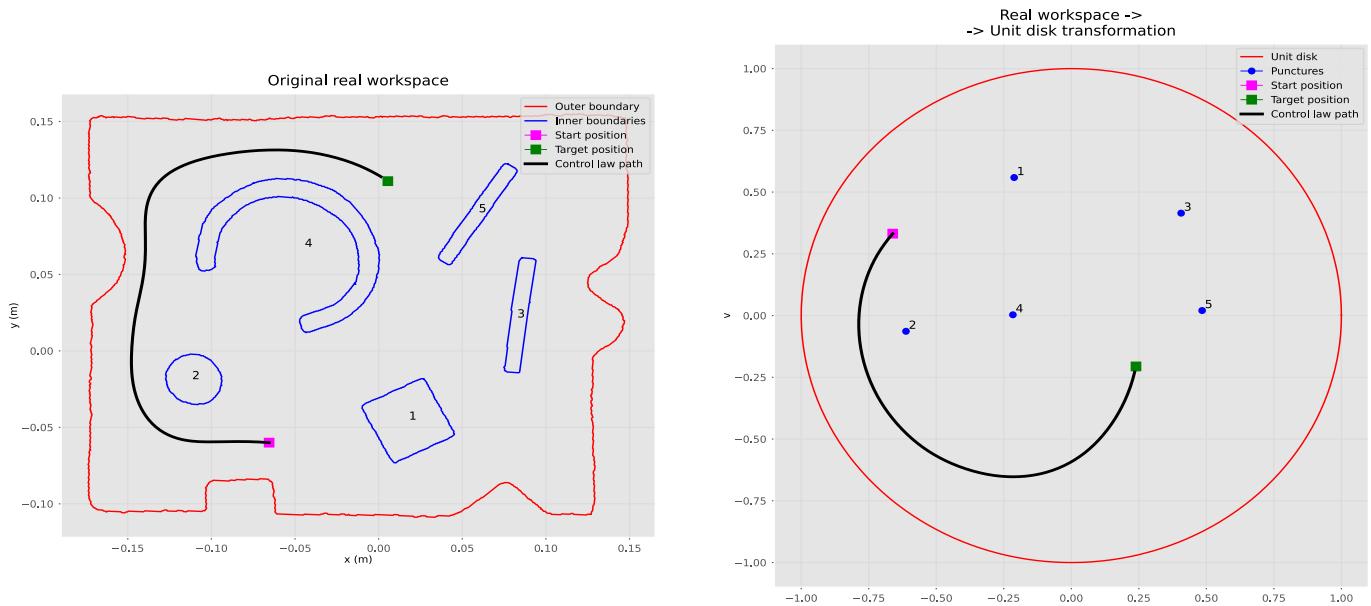
Εικόνα 51 Σκελετική δομή και DH παράμετροι του ρομποτικού χειριστή Gantry που μελετώ στην προσομοίωση

a. Έλεγχος κίνησης σε πραγματικούς χώρους εργασίας με εμπόδια

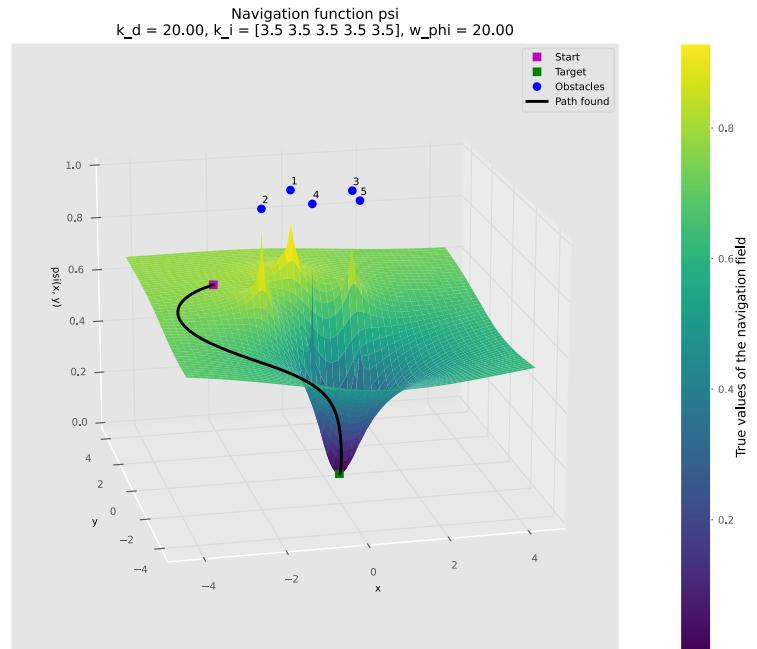
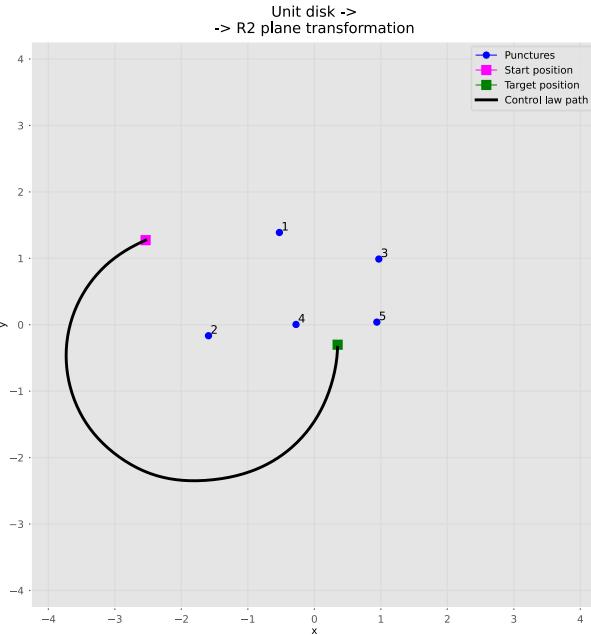
Στα επόμενα, επεξεργάζομαι τους επίπεδους χώρους με εμπόδια που φαίνονται στην Εικόνα 48, αξιοποιώντας τα θεωρητικά ευρήματα της ενότητας 4. Ειδικότερα, δείχνω τους αντίστοιχους μετασχηματισμένους χώρους (που διαθέτουν την ίδια μορφή για ορισμένο επίπεδο πραγματικό χώρο εργασίας, ανεξαρτήτως των παραμέτρων ελέγχου), τα δυναμικά πεδία πλοιήγησης και τα χαρακτηριστικά τους, καθώς και τις διαδρομές που παράγει ο νόμος ελέγχου (61) για διάφορα αρχικά και τελικά σημεία. Επίσης, ερμηνεύω τις μορφές των διαδρομών που προκύπτουν για ποικίλες τιμές των παραμέτρων του νόμου ελέγχου. Σε όλα τα παραδείγματα έχω ορίσει χρονικό βήμα $dt = 0.01 \text{ sec} = 10 \text{ msec}$ και μέγιστο ανεκτό σφάλμα σύγκλισης $e_{max} = 0.5 \text{ cm}$.

- 1^{ος} επίπεδος χώρος με εμπόδια:

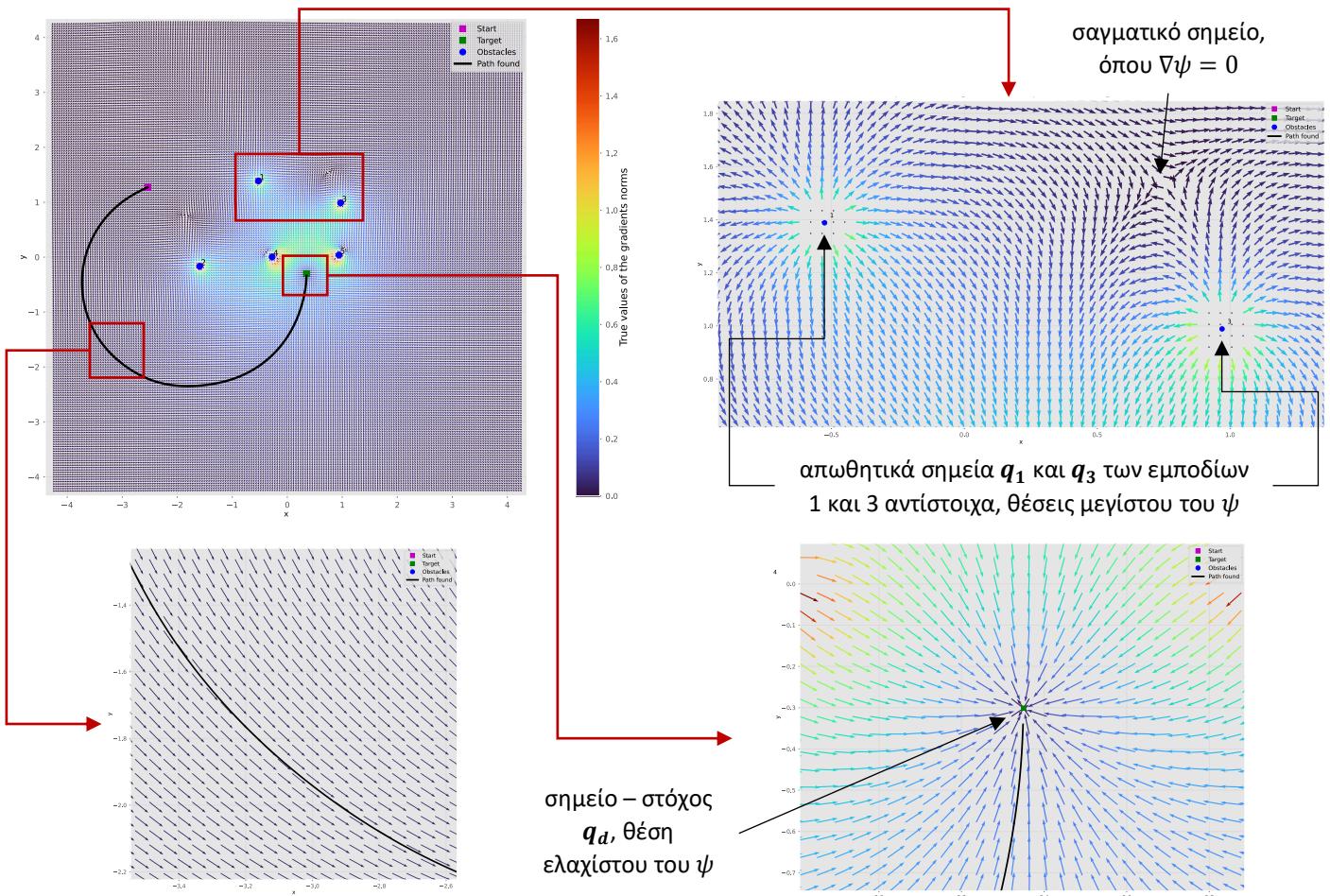
Οι δύο μετασχηματισμοί του 1^{ου} χώρου προβάλλονται στην Εικόνα 52 (δεξιά) και στην Εικόνα 53 (αριστερά). Στο πρώτο παράδειγμα αναζητώ διαδρομές με αρχικό σημείο το $\mathbf{p}_{init} = [-6.6 \quad -6.0]^T \text{ cm}$ και τελικό σημείο το $\mathbf{p}_d = [0.6 \quad 11.1]^T \text{ cm}$ (εκφραζόμενα με αναφορά το πλαίσιο συντεταγμένων του επιπέδου στην Εικόνα 41). Αρχικά, διαλέγω παραμέτρους $k_d = 20.0$, $k_i = 3.5$, $\forall i = 1, \dots, 5$, $w_\phi = 20.0$, $\dot{\rho}_{max} = 10.0 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ και $\epsilon_p = 3.0 \text{ cm}$. Η παραγόμενη διαδρομή C_1 φαίνεται στην Εικόνα 52 και στην Εικόνα 53, στον πραγματικό και στους μετασχηματισμένους χώρους. Στην Εικόνα 53 απεικονίζεται επίσης, με διαβαθμισμένα χρώματα, το βαθμωτό δυναμικό πεδίο πλοιήγησης ψ στον τελικό μετασχηματισμό \mathbb{R}^2 , με τα σημεία των εμποδίων q_1, \dots, q_5 να είναι οι θέσεις μεγίστου (κίτρινα υψώματα) και το τελικό σημείο q_d να είναι η μοναδική θέση ελαχίστου (μπλε κοιλάδα). Η C_1 συγκλίνει στο “πηγάδι” ελαχίστου κινούμενη κατά μήκος της ροής του διανυσματικού πεδίου $-\nabla_q \psi$ (αντίθετο της κλίσης του ψ , σύμφωνα με τη μέθοδο gradient descent), που απεικονίζεται με έναν χρωματικό χάρτη (ενδεικτικό της νόρμας των κλίσεων) στην Εικόνα 54. Παρατηρείται ότι τα βέλη του $-\nabla_q \psi$ απομακρύνονται από τα σημεία των εμποδίων και κατευθύνονται προς το τελικό σημείο – στόχο.



Εικόνα 52 Η διαδρομή C_1 στον πραγματικό χώρο 1 (αριστερά) και στον μετασχηματισμένο κυκλικό δίσκο (δεξιά)



Εικόνα 53 Η διαδρομή C_1 στον τελικό μετασχηματισμένο χώρο \mathbb{R}^2 (αριστερά), και το θαυμωτό δυναμικό πεδίο πλοιήγησης ψ (δεξιά)



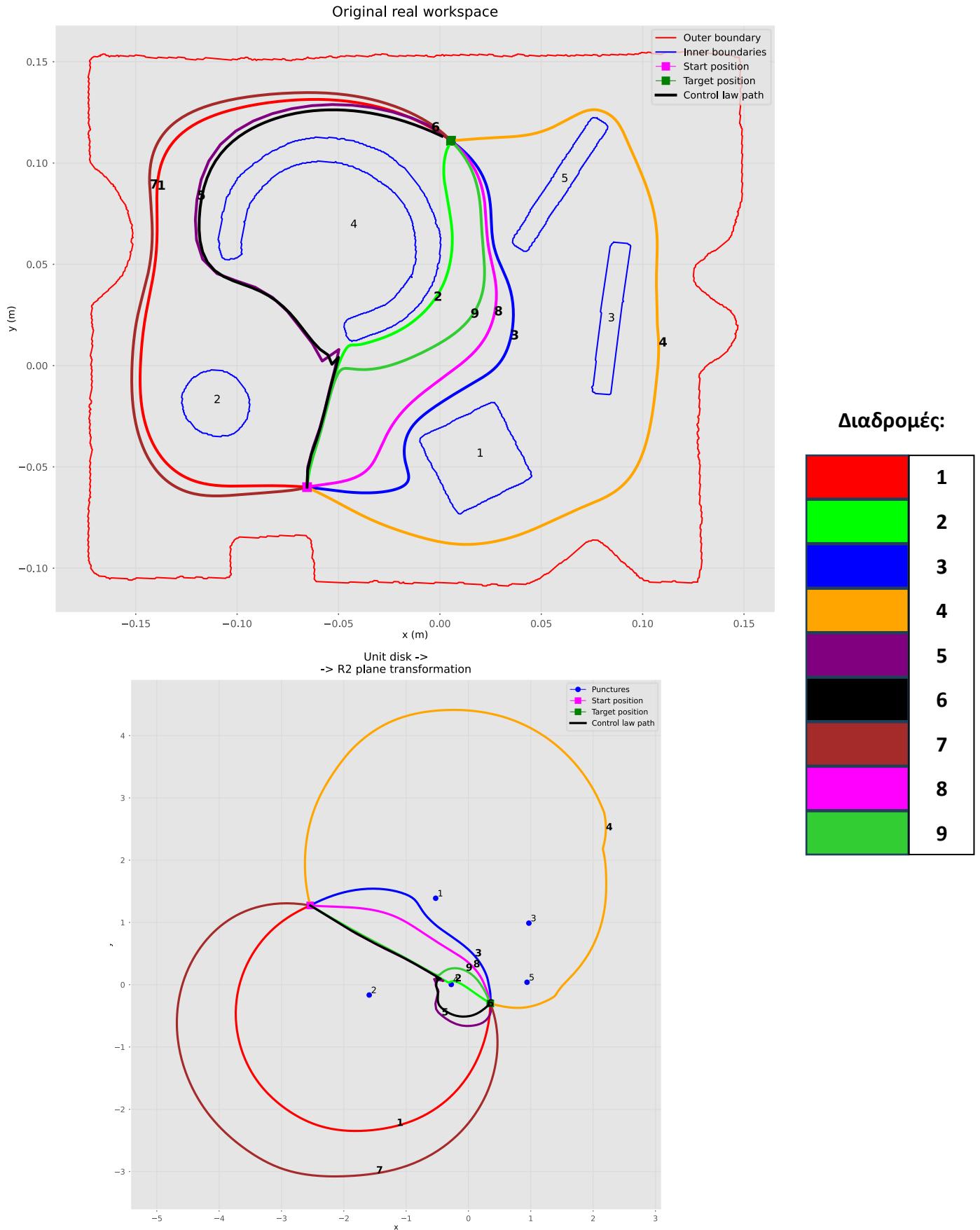
Εικόνα 54 Το διανυσματικό πεδίο $-\nabla_q \psi$ με τονισμένα τα σημαντικά σημεία του και σημειωμένη τη διαδρομή C_1

Στην Εικόνα 55 παρουσιάζονται μερικές διαδρομές, στον 1^o πραγματικό χώρο και στον αντίστοιχο \mathbb{R}^2 μετασχηματισμό, που δημιουργούνται για τα ίδια με προηγουμένως σημεία αφετηρίας και προορισμού, αλλά με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων (Πίνακας 6). Οι μεγαλύτερες αλλαγές προκαλούνται από τη μεταβολή των k_d, k_1, \dots, k_N . Πρέπει να σημειωθεί ότι η παράμετρος w_ϕ , πέραν της μορφής του πεδίου πλοϊγησης ψ , δεν καθορίζει τελικώς το σχήμα της διαδρομής C_{path} . Αυτό συμβαίνει διότι η w_ϕ επηρεάζει μονάχα το μέτρο της κλίσης του ψ και όχι την κατεύθυνσή του την οποία λαμβάνω υπόψη στον έλεγχο (είναι φανερό από την (59)). Επομένως, δεν θα συμπεριληφθεί στην παρακάτω συγκριτική ανάλυση. Ακόμα, οι παράμετροι \dot{p}_{max} και ϵ_p λειτουργούν συνεργατικά ρυθμίζοντας το μέτρο του νόμου ελέγχου και κατά συνέπεια την ταχύτητα σύγκλισης, επιδρώντας γενικά κατά ελάχιστο βαθμό στη μορφή της C_{path} , εκτός αν παρουσιάζουν έντονες μεταβολές.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι για μικρές τιμές της ποσότητας $k_d - \sum_{i=1}^5 k_i$, οι διαδρομές διαθέτουν μεγαλύτερο μήκος και συγκλίνουν πιο αργά, κινούμενες κοντά στο εξωτερικό σύνορο, όπως συμβαίνει στις C_1, C_4 και C_7 . Επίσης, για ορισμένα k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 , η αύξηση του k_d οδηγεί σε πιο σύντομες σε μήκος διαδρομές (αυτό φαίνεται στις C_7 και C_9). Ακόμα, η αύξηση κάποιου $k_i, i = 1, \dots, 5$, προκαλεί την περαιτέρω απομάκρυνση από το αντίστοιχο εσωτερικό σύνορο ∂W_i . Για παράδειγμα, η C_9 ($k_4 = 5.0$) είναι πιο μακριά από το εμπόδιο 4 σε σχέση με τη C_2 ($k_4 = 1.0$), και η C_3 ($k_2 = 5.0$) διατηρεί μεγαλύτερη απόσταση από το εμπόδιο 2 συγκριτικά με τη C_9 ($k_2 = 1.0$). Η μορφή της C_3 ομοιάζει σε αυτήν της C_8 , διότι και οι δύο δίνουν μεγαλύτερο βάρος στους συντελεστές των ίδιων εσωτερικών συνόρων (2 και 4). Τέλος, η διαδρομή C_5 φανερώνει την επιτάχυνση της σύγκλισης για υψηλά όρια ταχυτήτων \dot{p}_{max} (αλλάζει επιπλέον η διαγραφόμενη πορεία σε σχέση με τη C_9 , με την οποία έχουν κοινές τις υπόλοιπες παραμέτρους), ενώ η C_6 δείχνει την επιβράδυνση που προκαλείται λόγω της μεγάλης τιμής του ϵ_p (στην περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα αισθητή, αφού έχει τεθεί $\epsilon_p > \|p_d - p_{init}\|$).

1 ^o επίπεδος πραγματικός χώρος: $p_{init} = [-6.6 \quad -6.0]^T \text{ cm}$ και $p_d = [0.6 \quad 11.1]^T \text{ cm}$								
C_{path}	k_d	k_1, k_2, k_3, k_4, k_5	$\dot{p}_{max} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$	$\epsilon_p \text{ (cm)}$	steps	$t_{path} \text{ (sec)}$	$l_{path} \text{ (cm)}$	
C_1	20.0	3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5	10.0	3.0	421	4.21	37.8	
C_2	20.0	1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0	10.0	3.0	243	2.43	19.9	
C_3	20.0	1.0, 5.0, 1.0, 5.0, 1.0	10.0	3.0	292	2.92	24.8	
C_4	20.0	1.0, 10.0, 1.0, 5.0, 2.0	10.0	3.0	480	4.80	43.6	
C_5	20.0	1.0, 1.0, 1.0, 5.0, 1.0	100.0	3.0	38	0.38	33.8	
C_6	20.0	1.0, 1.0, 1.0, 5.0, 1.0	100.0	25.0	458	4.58	32.6	
C_7	10.0	1.0, 1.0, 1.0, 5.0, 1.0	10.0	3.0	441	4.41	39.7	
C_8	10.0	0.5, 2.0, 0.5, 2.0, 0.5	10.0	3.0	263	2.63	21.9	
C_9	20.0	1.0, 1.0, 1.0, 5.0, 1.0	10.0	3.0	264	2.64	22.0	

Πίνακας 6 Παράμετροι, χρόνοι και μήκη των διαδρομών στον 1^o επίπεδο πραγματικό χώρο εργασίας, με αρχικό σημείο το $p_{init} = [-6.6 \quad -6.0]^T \text{ cm}$ και τελικό σημείο το $p_d = [0.6 \quad 11.1]^T \text{ cm}$

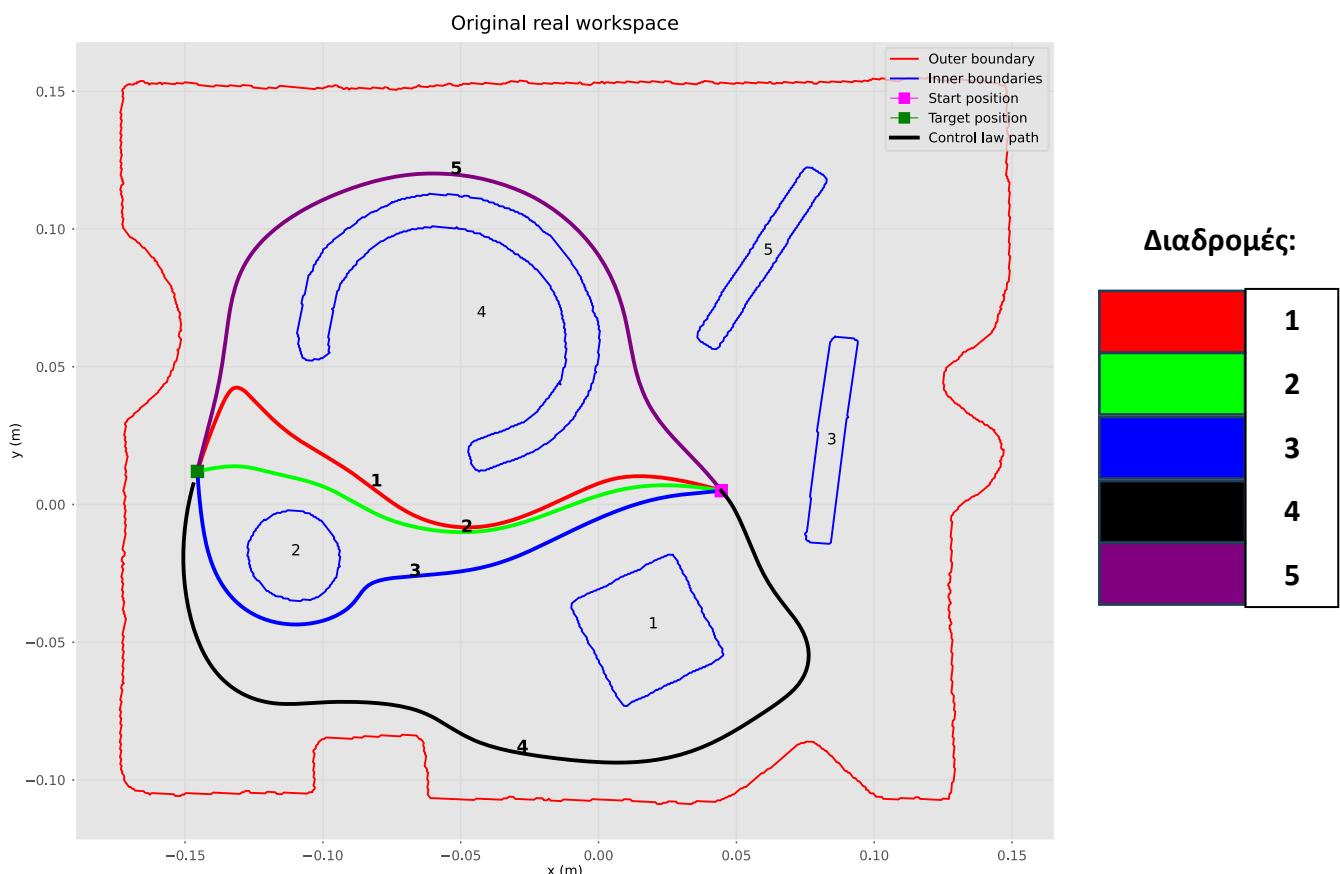


Εικόνα 55 Απεικόνιση των διαδρομών στον 1^o πραγματικό χώρο εργασίας (πάνω) και στον \mathbb{R}^2 μετασχηματισμό (κάτω), με αρχικό σημείο το $p_{init} = [-6.6 \quad -6.0]^T$ cm και τελικό σημείο το $p_d = [0.6 \quad 11.1]^T$ cm

Για το δεύτερο παράδειγμα έχω επιλέξει $p_{init} = [4.5 \quad 0.5]^T \text{ cm}$ και $p_d = [-14.6 \quad 1.2]^T \text{ cm}$. Ο Πίνακας 7 περιέχει συγκεντρωμένους τους συνδυασμούς παραμέτρων που δοκιμάστηκαν, και στην Εικόνα 56 παρατίθενται οι αντίστοιχες παραγόμενες διαδρομές στον 1^o πραγματικό χώρο. Και σε αυτό το παράδειγμα επιβεβαιώνονται οι θεωρητικές προβλέψεις της ενότητας 4.

1 ^o επίπεδος πραγματικός χώρος: $p_{init} = [4.5 \quad 0.5]^T \text{ cm}$ και $p_d = [-14.6 \quad 1.2]^T \text{ cm}$							
C_{path}	k_d	k_1, k_2, k_3, k_4, k_5	$\dot{p}_{max} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$	$\epsilon_p \text{ (cm)}$	steps	$t_{path} \text{ (sec)}$	$l_{path} \text{ (cm)}$
C_1	20.0	1.0, 5.0, 1.0, 1.0, 1.0	10.0	3.0	269	2.69	22.5
C_2	20.0	1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0	5.0	1.0	388	3.88	19.2
C_3	7.0	1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0	5.0	1.0	473	4.73	23.5
C_4	10.0	1.0, 3.0, 1.0, 3.0, 1.0	20.0	1.0	190	1.90	37.7
C_5	20.0	10.0, 0.5, 5.0, 0.5, 1.0	20.0	1.0	162	1.62	32.0

Πίνακας 7 Παράμετροι των διαδρομών στον 1^o επίπεδο πραγματικό χώρο εργασίας, με αρχική θέση $p_{init} = [4, 5 \quad 0.5]^T \text{ cm}$ και τελική θέση $p_d = [-14, 6 \quad 1, 2]^T \text{ cm}$



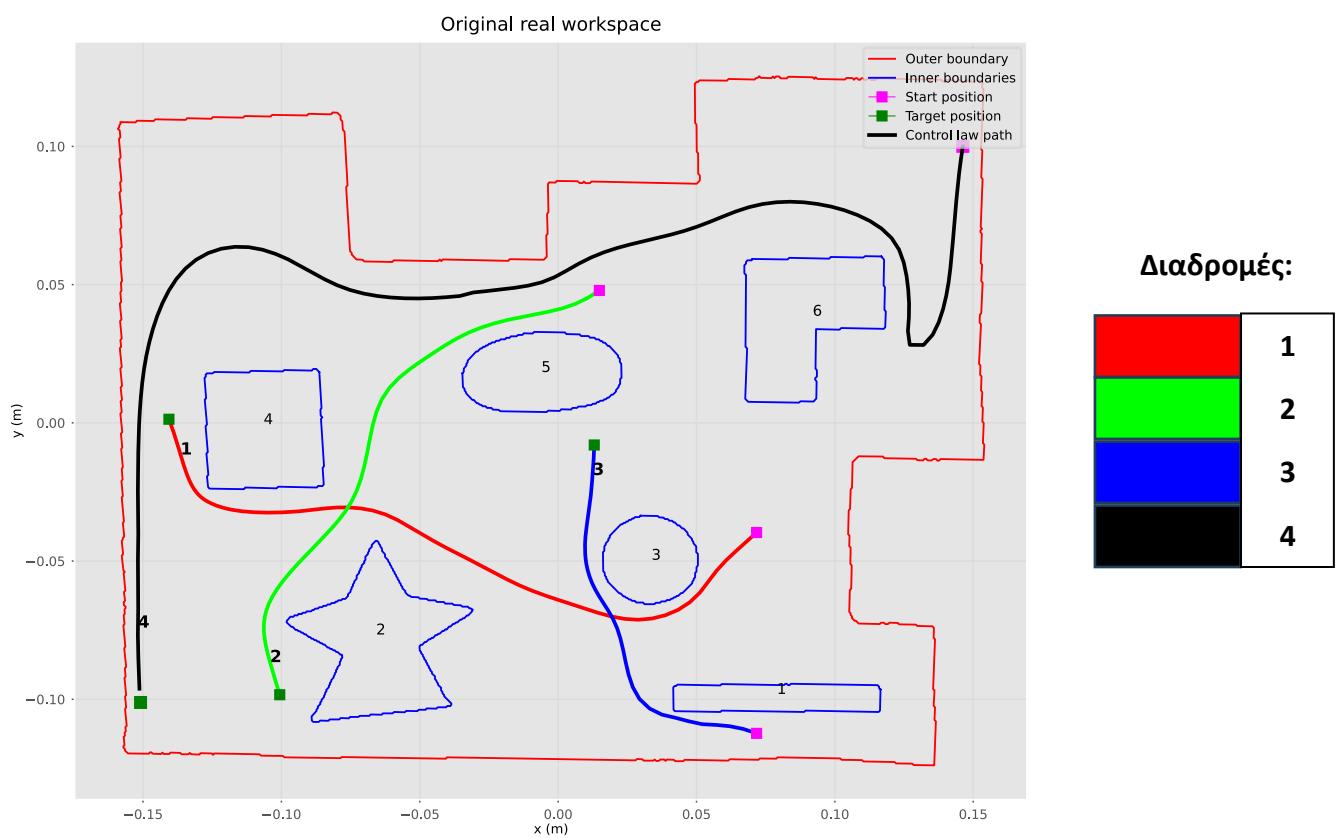
Εικόνα 56 Απεικόνιση διαδρομών στον 1^o πραγματικό χώρο εργασίας για αρχική θέση $p_{init} = [4, 5 \quad 0.5]^T \text{ cm}$ και τελική θέση $p_d = [-14, 6 \quad 1, 2]^T \text{ cm}$

- 2^{ος} επίπεδος χώρος με εμπόδια:

Ο 2^{ος} επίπεδος χώρος εργασίας δεν κατασκευάστηκε με 3D εκτυπώσιμα εμπόδια, αλλά έχει ζωγραφιστεί με μαύρο μαρκαδόρο σε άσπρο χαρτί και αναγνωριστεί με την κάμερα για μηδενικό ύψος των εμποδίων. Διαθέτει 6 εσωτερικά σύνορα και αξιοποιείται αποκλειστικά για περισσότερες δοκιμές του νόμου ελέγχου. Εδώ θεωρώ παραμέτρους $k_d = 20.0$, $k_1 = 1.0$, $k_i = 0.1 \forall i = 2, \dots, 6$, $\dot{p}_{max} = 50 \frac{cm}{sec}$ και $\epsilon_p = 10.0 cm$, και υπολογίζω διαδρομές (Εικόνα 57) για ποικίλες αρχικές και τελικές θέσεις. Αυτές καταγράφονται αμέσως μετά (Πίνακας 8), μαζί με τα μήκη και τα χρονικά διαστήματα των διαδρομών.

2 ^{ος} επίπεδος πραγματικός χώρος: $k_d = 20.0$, $k_1 = 1.0$, $k_i = 0.1 \forall i = 2, \dots, 6$, $\dot{p}_{max} = 50 \frac{cm}{sec}$, $\epsilon_p = 10.0 cm$					
C_{path}	$p_{init} (cm)$	$p_d (cm)$	steps	$t_{path} (sec)$	$l_{path} (cm)$
C_1	[7.2 -4.0] ^T	[-14.1 0.1] ^T	178	1.78	24.9
C_2	[1.5 4.8] ^T	[-10.1 -9.8] ^T	168	1.68	20.5
C_3	[7.2 -11.2] ^T	[1.3 -0.8] ^T	152	1.52	13.6
C_4	[14.6 10.0] ^T	[-15.1 -10.1] ^T	234	2.34	54.5

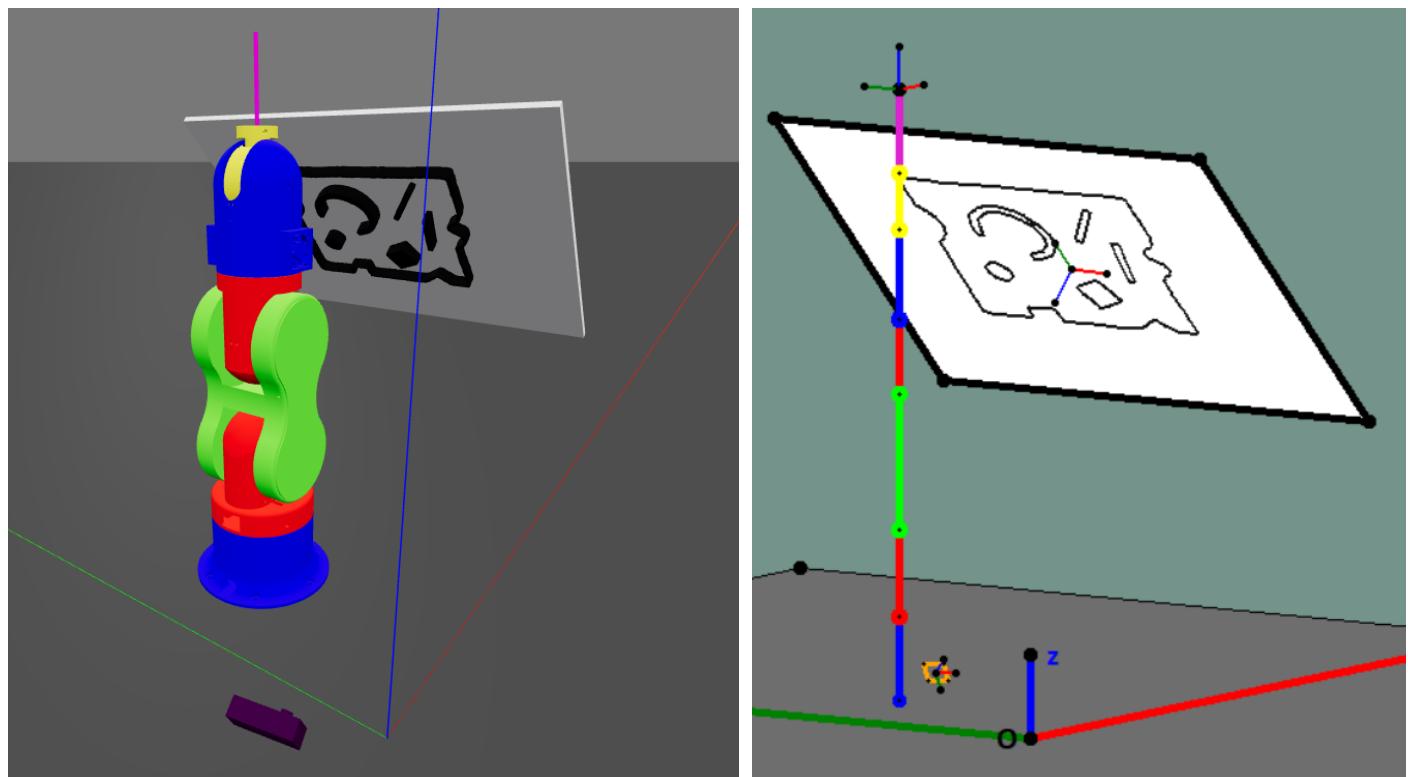
Πίνακας 8 Αρχικές και τελικές θέσεις, χρόνοι και μήκη των διαδρομών στον 2^ο επίπεδο πραγματικό χώρο εργασίας



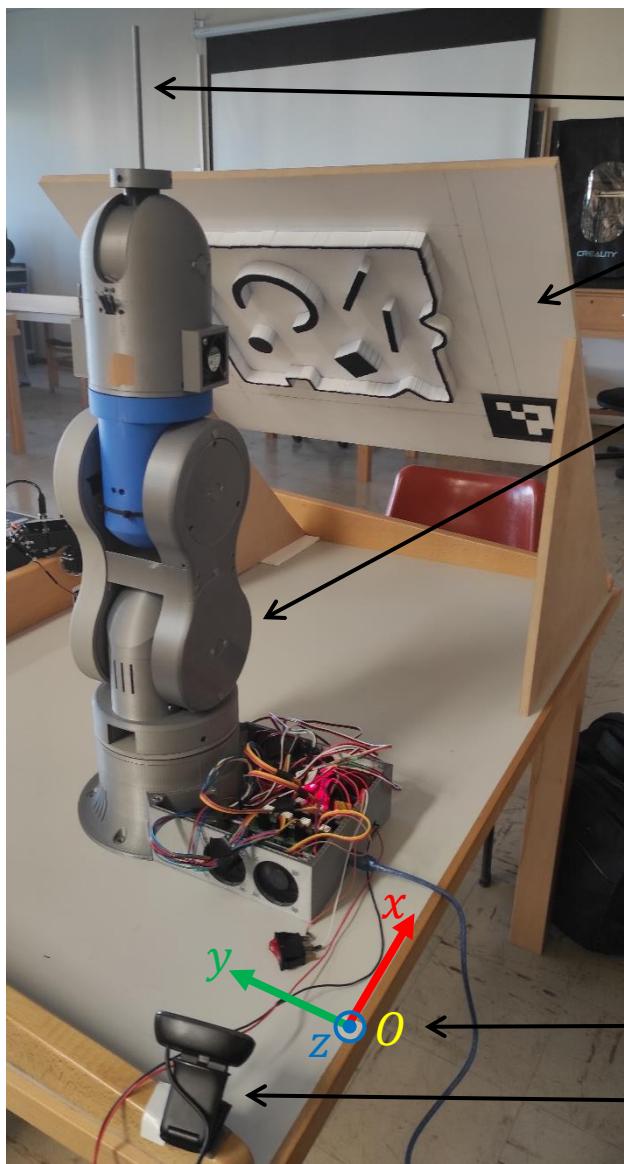
Εικόνα 57 Απεικονίσεις των διαδρομών στον 2^ο πραγματικό χώρο εργασίας

b. Υπολογισμός τροχιών για τον ρομποτικό βραχίονα Thor

Ο ρομποτικός βραχίονας Thor λειτουργεί στην online προσομοίωση swift (Εικόνα 58, αριστερά) και στο περιβάλλον της python γραφικής διεπαφής (Εικόνα 58, δεξιά), καθώς και σε πειραματική διάταξη που κατασκευάστηκε στο εργαστήριο και φαίνεται στην Εικόνα 59. Η προσομοίωση swift απεικονίζεται σε προοπτική προβολή, γι' αυτό είναι ρεαλιστικότερη σε σχέση με το GUI που χρησιμοποιεί ορθογραφική προβολή. Και τα τρία βασικά στοιχεία της πραγματικής κατασκευής είναι πακτωμένα σε σταθερές διαμορφώσεις ως προς το πλαίσιο του κόσμου. Ειδικότερα, η οπή της κάμερας βρίσκεται προσεγγιστικά στη θέση $[-0.120 \quad 0.053 \quad 0.088]^T \text{ m}$ με τον οπτικό άξονα στην κατεύθυνση $[0.850 \quad 0.163 \quad 0.500]^T$ (και μικρή γωνία δεξιόστροφης περιστροφής $1^\circ - 2^\circ$ ως προς τον άξονα), το γεωμετρικό κέντρο του επιπέδου των εμποδίων στη θέση $[0.530 \quad 0.300 \quad 0.467]^T \text{ m}$ με κλίση 45° ως προς το επίπεδο xy του κόσμου (που είναι η επιφάνεια ενός εργαστηριακού πάγκου), και η βάση του ρομποτικού βραχίονα στο σημείο $[0.170 \quad 0.300 \quad 0.000]^T \text{ m}$ με μηδενικό προσανατολισμό. Ο βραχίονας μπορεί να τοποθετηθεί εύκολα στην επιθυμητή στάση. Το επίπεδο των εμποδίων P_{obst} είναι ένα ορθογώνιο κομμάτι διαστάσεων $0.425 \text{ m} \times 0.326 \text{ m}$, της επιφάνειας μίας ξύλινης σανίδας διαστάσεων $0.6 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$. Έχει στερεωθεί σε μία ξύλινη βάση στήριξης με δύο σκέλη σχήματος ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου (προκειμένου να δημιουργείται η απαιτούμενη κλίση) και η διαμόρφωσή του ορίζεται σχετικά εύκολα με τη βοήθεια μετροταινίας. Η κάμερα είναι κολλημένη σε ένα ύψωμα του πάγκου εργασίας και η στάση της μπορεί να προσδιοριστεί από τη γνωστή διαμόρφωση του P_{obst} και τον δείκτη ArUco μέσω του δεύτερου μέρους της σχέσης (76). Η μέτρηση αυτή γίνεται να επιβεβαιωθεί με χάρακα και μοιρογνωμόνιο και να εισαχθεί έπειτα στο πρώτο μέρος της σχέσης (76) για την επαλήθευση του P_{obst} . Έχω φροντίσει έτσι ώστε η σχετική διαμόρφωση του επιπέδου ως προς τον ρομποτικό χειριστή να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτήν που βρήκα στην Εικόνα 33, για να αποφύγω ιδιόμορφες ή/και μη προσβάσιμες καταστάσεις.



Εικόνα 58 Η πειραματική διάταξη στο online περιβάλλον προσομοίωσης (αριστερά, προοπτική προβολή) και στην python γραφική διεπαφή (δεξιά, ορθογραφική προβολή)



λεπτή ράβδος μήκους 10 cm ως
τελικό στοιχείο δράσης

επίπεδος πραγματικός χώρος εργασίας
με εμπόδια

ρομποτικός βραχίονας Thor



το επίπεδο με τα εμπόδια όπως το
αντιλαμβάνεται η κάμερα, όταν δεν
παρεμβάλλεται μεταξύ τους ο βραχίονας

παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων

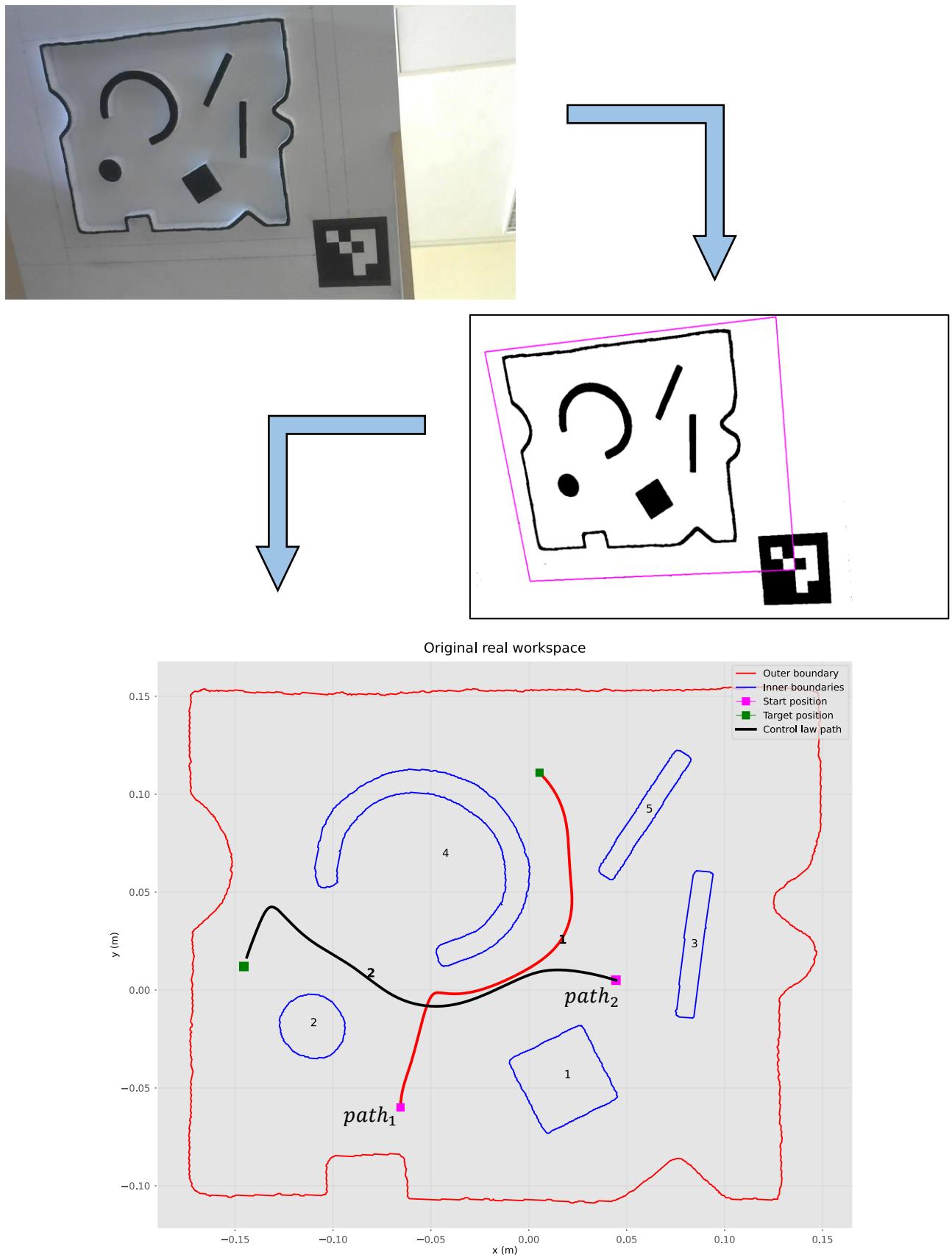
RGB κάμερα

Εικόνα 59 Ολόκληρη η πραγματική πειραματική διάταξη – κατασκευή

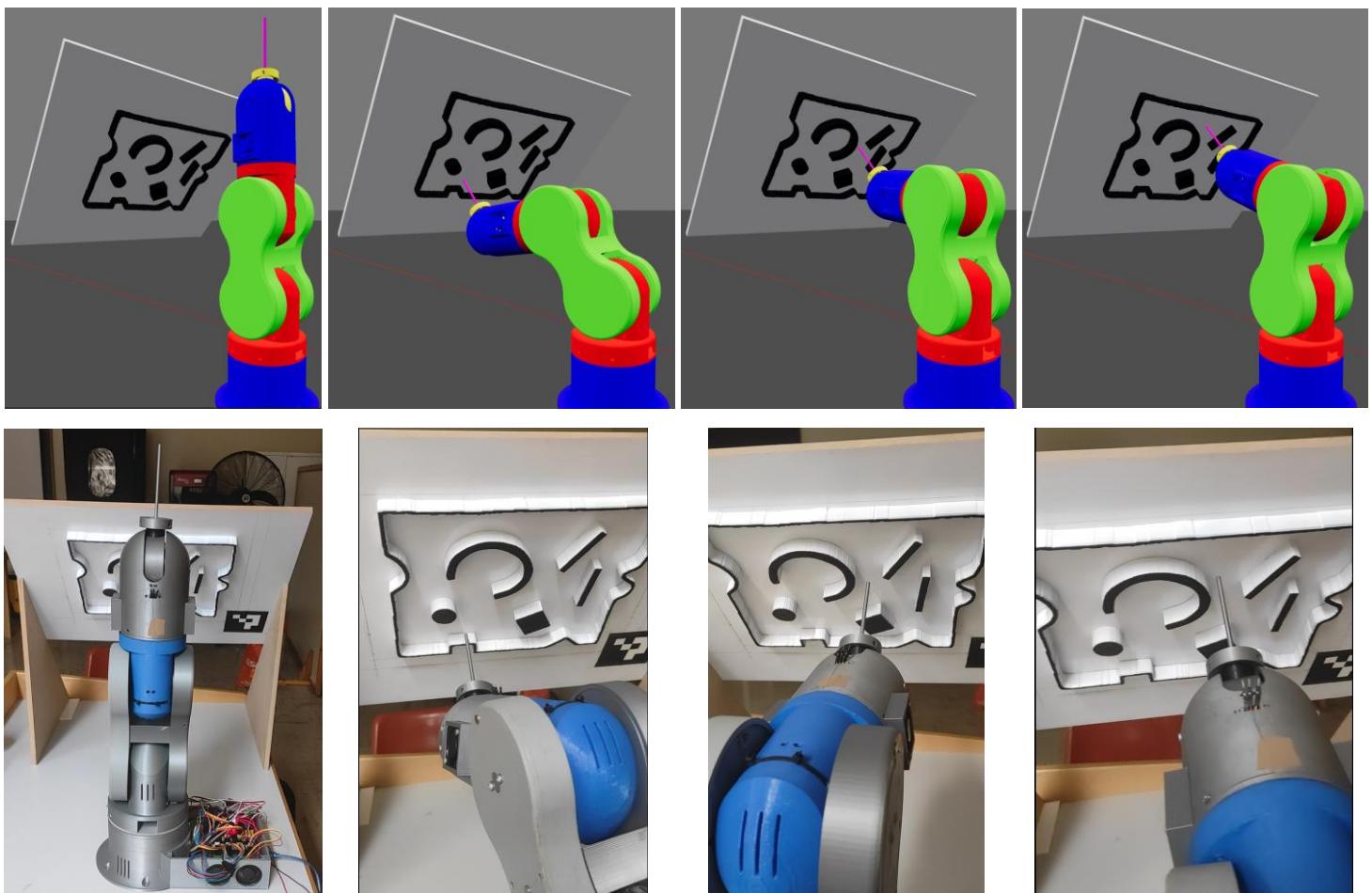
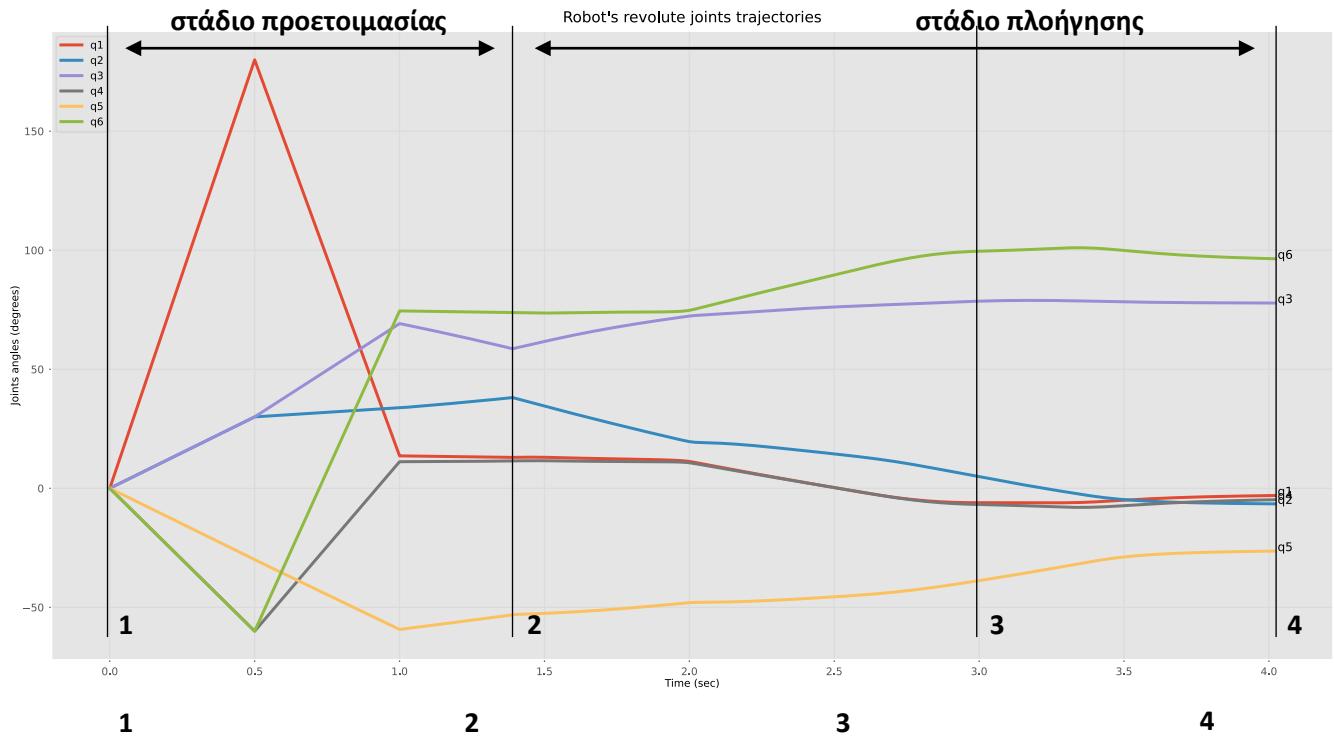
Ο επίπεδος χώρος εργασίας μπορεί να λάβει αυθαίρετα θέσεις και προσανατολισμούς μέσα στον τριδιάστατο κόσμο, οι οποίες πρέπει φυσικά να υπάκειντο στους κινηματικούς περιορισμούς του ρομπότ. Στην ενότητα 4 έχει ήδη περιγραφεί ο τρόπος υπολογισμού εφικτών τροχιών για έναν ρομποτικό χειριστή, που χρειάζεται να οδηγήσει το τελικό στοιχείο δράσης του από μία θέση αφετηρίας προς μία θέση προορισμού, κινούμενο κάθετα πάνω στο εκάστοτε επίπεδο και αποφεύγοντας τη σύγκρουση με τα υπάρχοντα εμπόδια. Μέχρι τώρα λοιπόν, έχω προβεί στην υπόθεση ότι ξεκινάω από τη θέση αφετηρίας στο επίπεδο, κάτι που περιορίζει την πρακτική λειτουργία του ρομπότ, διότι αυτό δύναται να αρχίσει την κίνησή του από ένα οιοδήποτε σημείο στον προσβάσιμο χώρο εργασίας του. Έτσι, για τη γενίκευση της θεώρησης, διακρίνω τρεις ξεχωριστές ακολουθίες κινήσεων: από την αρχική διαμόρφωση των αρθρώσεων $q_{initial}$ προς τη διαμόρφωση αφετηρίας q_{start} (στάδιο προετοιμασίας), από την αφετηρία στη διαμόρφωση προορισμού q_{target} (στάδιο πλοήγησης) και από τον προορισμό στη μηδενική διαμόρφωση q_{zero} (στάδιο επαναφοράς). Προτείνω το εξής σχήμα χρονικά ταξινομημένων ενεργειών:

- 1) Σε περίπτωση που ο ρομποτικός χειριστής βρίσκεται στο $q_{target,old}$ μίας προηγούμενης γενομένης τροχιάς, ή γενικότερα οι αρθρώσεις του έχουν αρχική διαμόρφωση $q_{initial} \neq q_{zero}$ (αλλιώς πιγαίνω απευθείας στο βήμα 4), εφαρμόζεται ταχύτητα $v_e^e = [0 \ 0 \ -\nu \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ ως προς το πλαίσιο του τελικού στοιχείου δράσης, όπου ν είναι μικρού μεγέθους ταχύτητα. Έτσι, ο βραχίονας απομακρύνεται από το επίπεδο P_{obst} .
- 2) Επιλέγεται μία τυχαία ενδιάμεση διαμόρφωση $q_{middle,1} \in WS_R$ στην οποία οδηγείται πρώτα το τελικό στοιχείο δράσης, και στη συνέχεια κατευθύνεται προς τη διαμόρφωση q_{zero} (κατακόρυφη στάση του βραχίονα). Οι δύο σειρές κινήσεων πραγματοποιούνται σε ορισμένο αριθμό διακριτών βημάτων, με γραμμική παρεμβολή μεταξύ της εκάστοτε αρχικής και τελικής διαμόρφωσης.
- 3) Οι κινήσεις του βήματος 2 ελέγχονται για περιπτώσεις σύγκρουσης με το επίπεδο P_{obst} ή με τα εμπόδια. Σε τέτοιο ενδεχόμενο επιλέγεται μία νέα $q'_{middle,1} \in WS_R$ και επιστρέφω στο βήμα 2, αλλιώς προχωρώ στο βήμα 4, έχοντας ολοκληρώσει επιτυχώς το στάδιο της επαναφοράς.
- 4) Γίνεται έλεγχος για το αν αντιστρέφονται κινηματικά οι επιθυμητές διαμορφώσεις s_{start} (θέση και προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης στο σημείο αφετηρίας της διαδρομής C_{path} , στο P_{obst}) και $s_{start,top}$ (παρόμοια, στο σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου $P_{obst,top}$ στην πάνω επιφάνεια των εμποδίων, σε κάθετη απόσταση ακριβώς πάνω από την αφετηρία). Έτσι, αν είναι δυνατόν, ανακτώνται οι διαμορφώσεις $q_{start} = fk^{-1}(s_{start})$ και $q_{start,top} = fk^{-1}(s_{start,top})$ των αρθρώσεων και προχωρώ στο βήμα 5, αλλιώς η αναζητούμενη τροχιά είναι ανέφικτη.
- 5) Επιλέγεται μία από τις πιθανώς πολλαπλές διαμορφώσεις q_{start} , της οποίας οι μεταβλητές είναι καλό να απέχουν όσο το δυνατόν περισσότερο από τις ακραίες τιμές που οριοθετούν το εύρος κάθε άρθρωσης, ώστε να υφίσταται ικανό περιθώριο κίνησης στο τελευταίο στάδιο της πλοήγησης. Στη συνέχεια, επαναλαμβάνονται οι ενέργειες του βήματος 2, όμως αυτή τη φορά για μία ενδιάμεση $q_{middle,2} \neq q_{middle,1} \in WS_R$ διαμόρφωση και τελικό στόχο τη $q_{start,top}$.
- 6) Οι κινήσεις του βήματος 5 εξετάζονται επίσης για την πρόκληση ανεπιθύμητων συγκρούσεων, με το θετικό ενδεχόμενο να σημαίνει επιστροφή στο βήμα 5, ενώ σε αρνητική περίπτωση πηγαίνω στο επόμενο βήμα 7.
- 7) Εφαρμόζω ταχύτητα $v'_e^e = [0 \ 0 \ \nu \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ ως προς το πλαίσιο του τελικού στοιχείου δράσης (υπενθυμίζεται ότι ο άξονας z αυτού είναι κάθετος στο P_{obst}), μέχρι να φτάσει στο σημείο αφετηρίας της C_{path} (διανύοντας απόσταση ίση με το ύψος h_{obst} των εμποδίων). Αυτό είναι το τέλος του σταδίου προετοιμασίας.
- 8) Υπολογίζεται η τροχιά για την πλοήγηση του ρομπότ πάνω στη διαδρομή C_{path} , βάσει της ενότητας 4. Κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει περίπτωση υπέρβασης των ορίων των αρθρώσεων, οπότε χρειάζεται να επανέλθω στο βήμα 5. Αν όλες οι αρθρώσεις διατηρούνται εντός του πεδίου ορισμού τους, τότε έχει εντοπιστεί μία εφικτή τροχιά και το στάδιο πλοήγησης λήγει επιτυχώς.

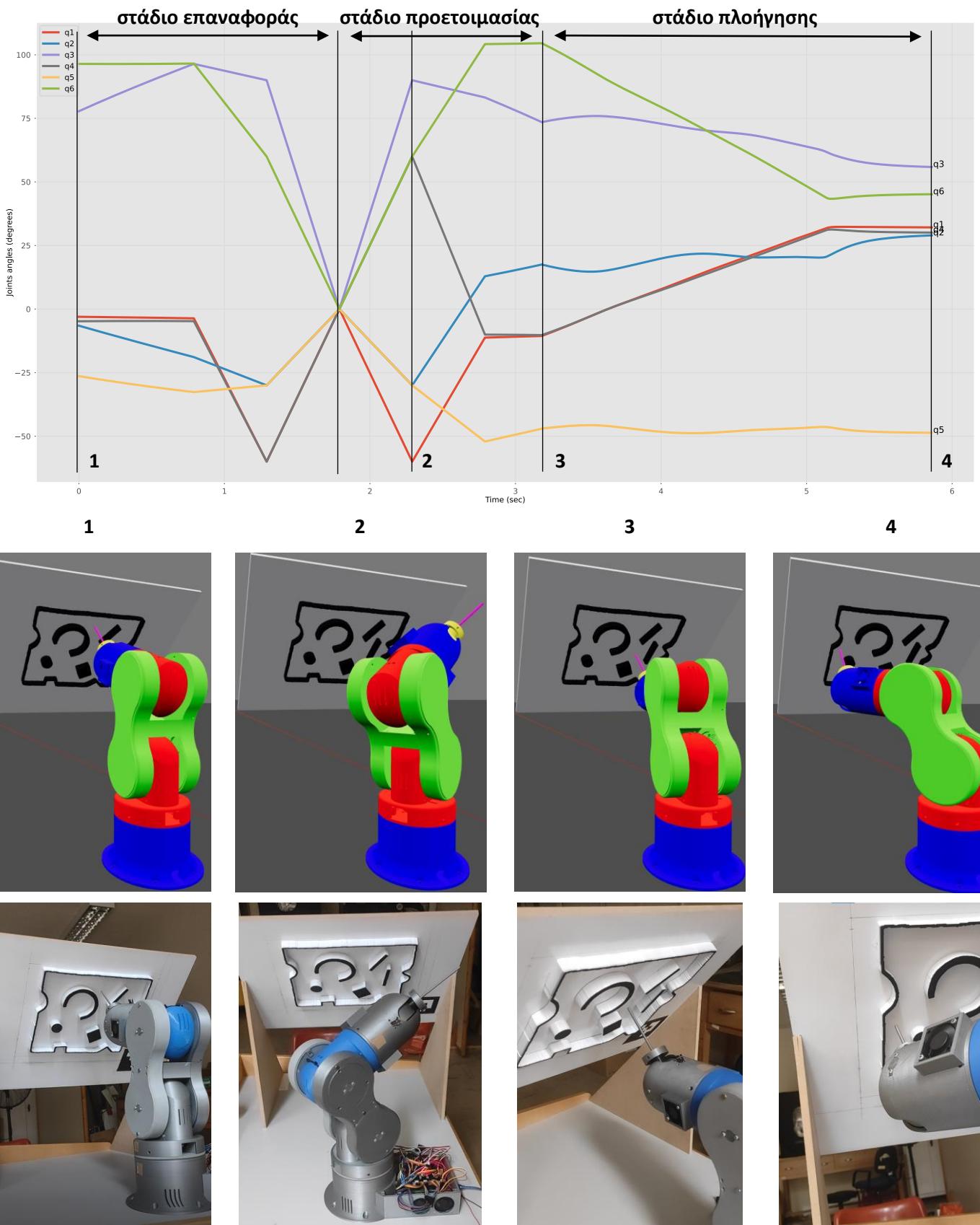
Όλα τα παραπάνω βήματα εκτελούνται με κώδικα στον υπολογιστή, ώστε να καταλήξω σε μία διακριτή χρονική ακολουθία των μεταβλητών των αρθρώσεων. Οι ενδιάμεσες διαμορφώσεις $q_{middle,1}$ και $q_{middle,2}$ ήταν αναγκαίο να εισαχθούν στην τροχιά, επειδή διαπίστωσα πως οι άμεσες μεταβολές $q_{initial} \rightarrow q_{zero}$ και $q_{zero} \rightarrow q_{start}$ των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή καταλήγουν σχεδόν πάντα σε σύγκρουση του τελικού στοιχείου δράσης με τα εμπόδια ή με το επίπεδο P_{obst} . Για την επίδειξη της αποτελεσματικότητας της διαδικασίας αξιοποίησα τις διαδρομές C_9 από την Εικόνα 55 και C_1 από την Εικόνα 56 (προβάλλονται μαζί στην Εικόνα 60), τις οποίες θα αποκαλώ $path_1$ και $path_2$ αντιστοίχως. Οι παραγόμενες τροχιές παρουσιάζονται στην Εικόνα 61 και στην Εικόνα 62. Βίντεο με την επιτυχή διεξαγωγή των πειραμάτων βρίσκονται στον σύνδεσμο [\[23\]](#). Ας επισημανθεί ότι οι χρόνοι που σημειώνονται στα γραφήματα είναι ενδεικτικοί μονάχα των προσομοιώσεων, αφού η κίνηση του πραγματικού βραχίονα είναι πιο αργή, με αποτέλεσμα τα πραγματικά γραφήματα να εμφανίζονται κλιμακωμένα ως προς τον άξονα του χρόνου.



Εικόνα 60 Από την καταγραφή των συνόρων των εμποδίων, στην αναγνώρισή τους και τη σχεδίαση τροχιών



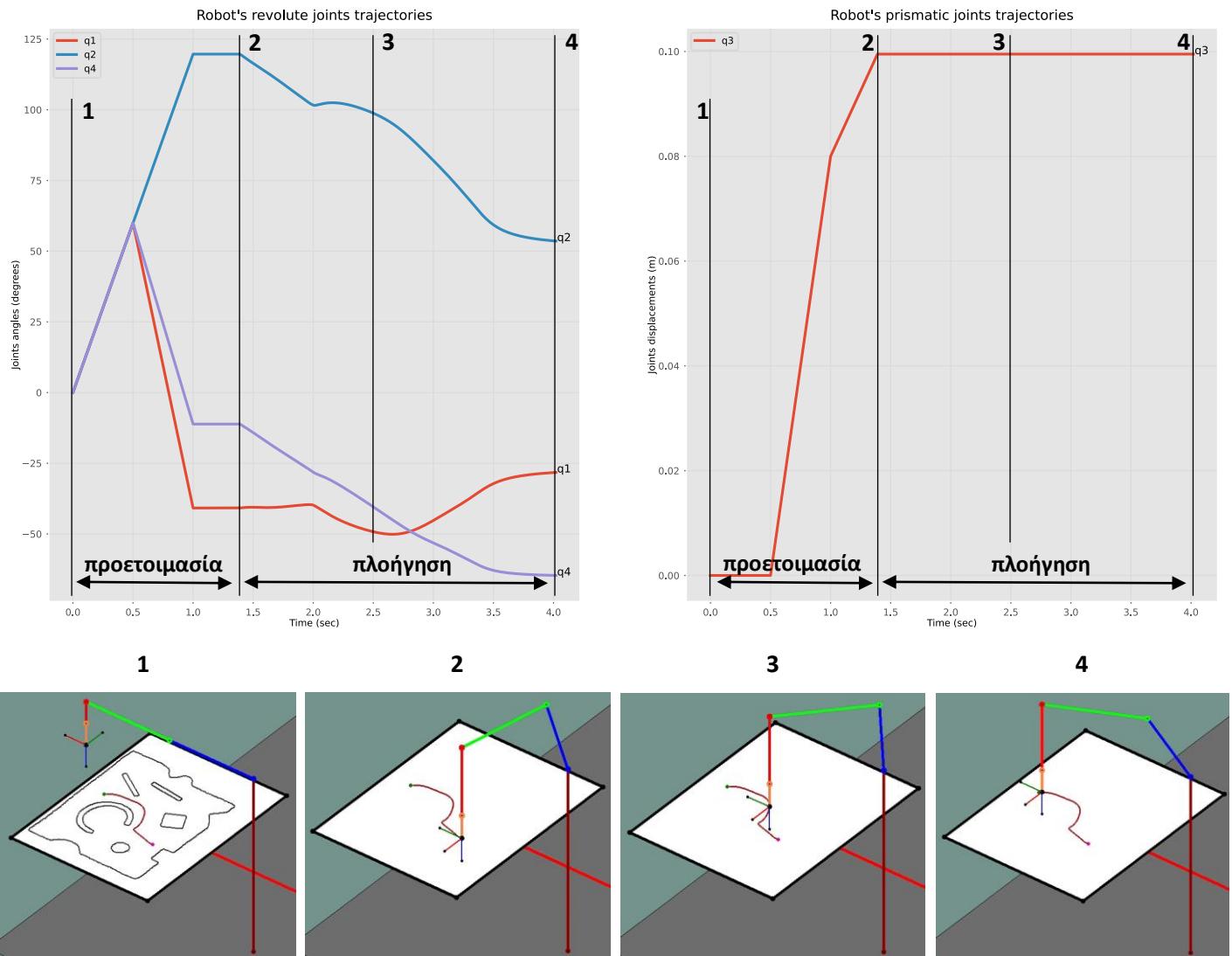
Εικόνα 61 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του βραχίονα Thor για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_1$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την προσομοίωση και το πείραμα



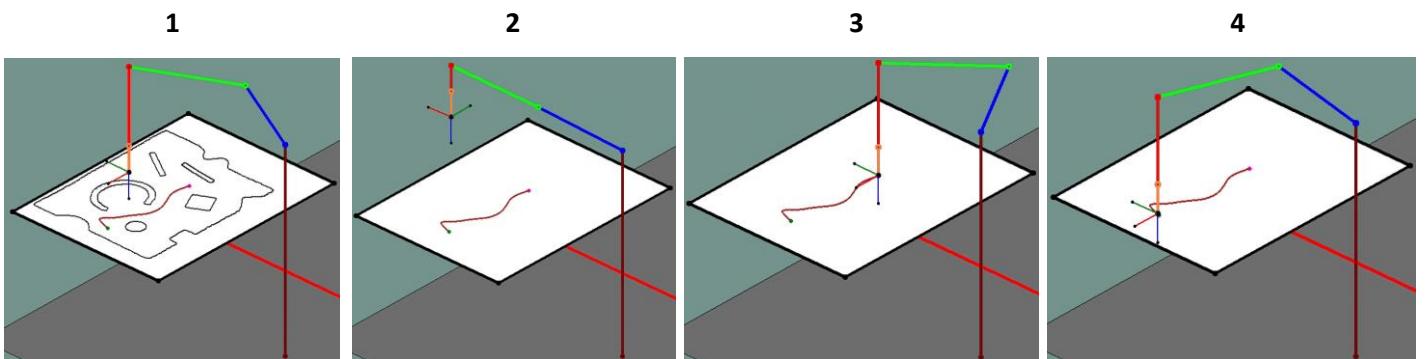
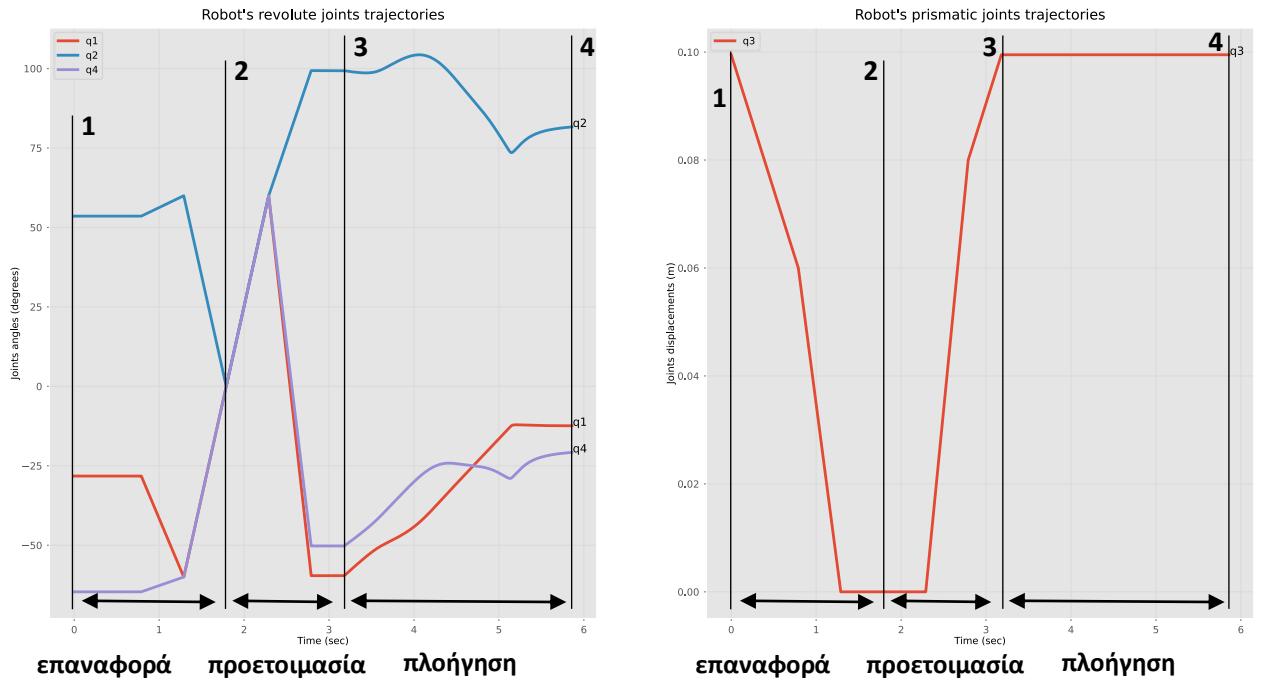
Εικόνα 62 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του βραχίονα Thor για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_2$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την προσομοίωση και το πείραμα

c. Υπολογισμός τροχιών άλλων ρομποτικών χειριστών στην προσομοίωση

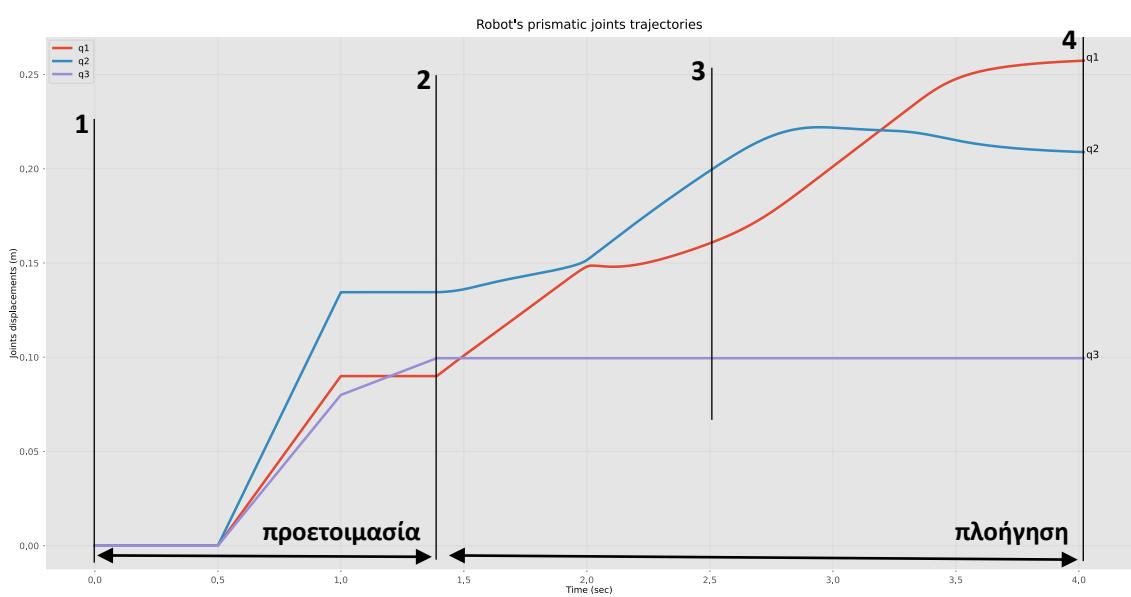
Κι εδώ σχεδίασα τροχιές για τις διαδρομές $path_1$ και $path_2$ από την Εικόνα 60. Εργάστηκα με τα ρομποτικά συστήματα Scara από την Εικόνα 50 και Gantry από την Εικόνα 51. Και για τους δύο χειριστές δημιούργησα επίπεδα εμποδίων P_{obst} διαστάσεων $0.6 m \times 0.5 m$. Για τον χειριστή Scara το τοποθέτησα παράλληλα στο δάπεδο xy , στη θέση $[0.35 \quad 0.20 \quad 0.20]^T m$ και στραμμένο ως προς το normal διάνυσμά του $\hat{n} = \hat{z}$ κατά γωνία -90° . Για τον χειριστή Gantry το έβαλα κάθετα στο δάπεδο xy , στη θέση $[0.40 \quad 0.10 \quad 0.45]^T m$ και με περιστροφή 180° ως προς τον άξονα του normal του $\hat{n} = -\hat{y}$. Τα χρονικά γραφήματα των τροχιών παρουσιάζονται στις Εικόνα 63 και Εικόνα 64 για τον Scara και στις Εικόνα 65 και Εικόνα 66 για τον Gantry. Βίντεο από τις προσομοιώσεις βρίσκονται στον σύνδεσμο [23].

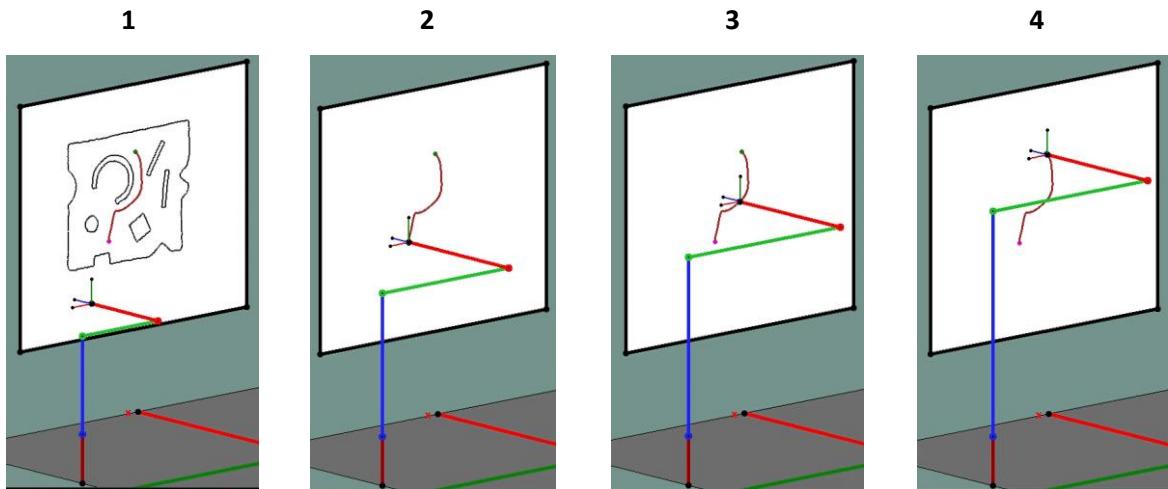


Εικόνα 63 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του χειριστή Scara για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_1$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμότυπα από την προσομοίωση στην python γραφική διεπαφή

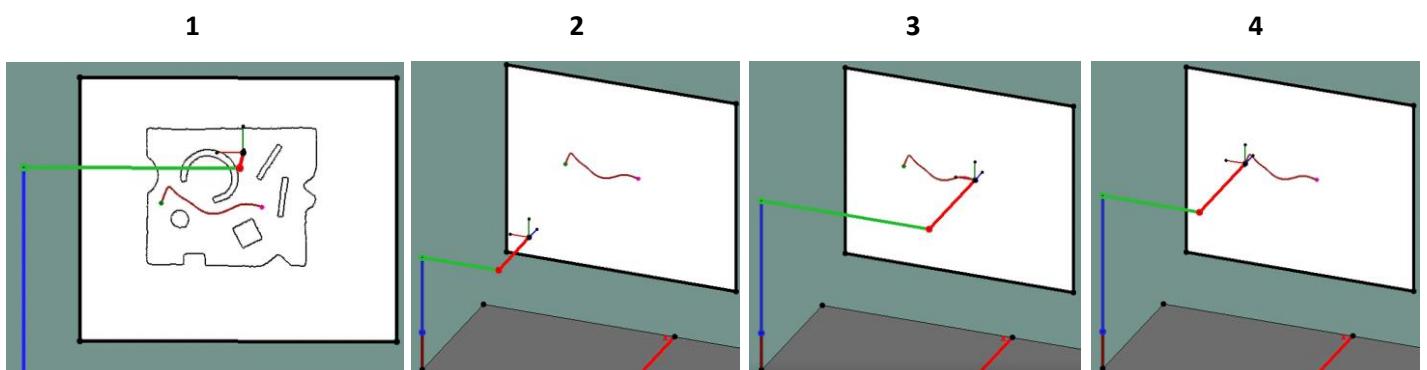
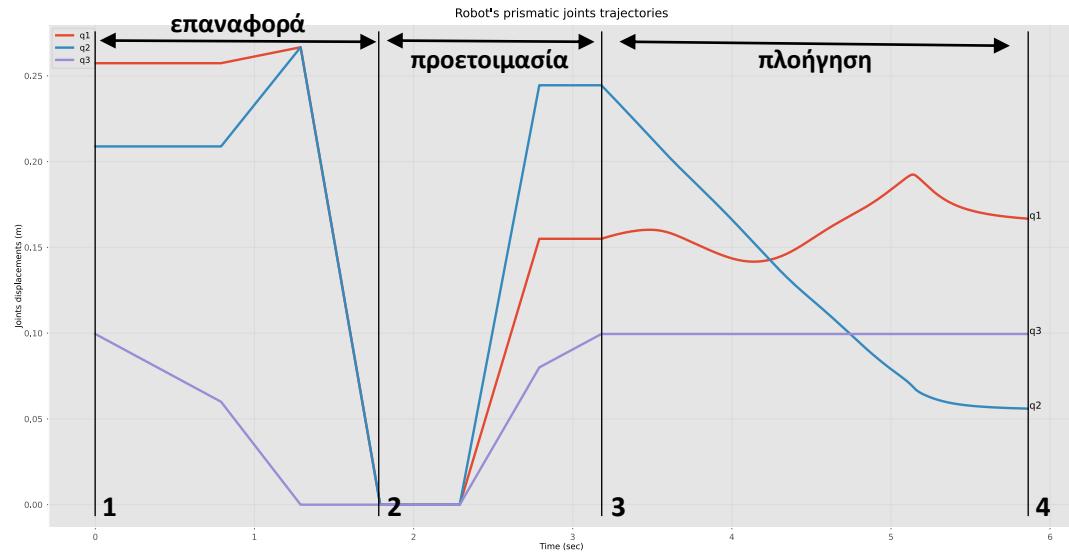


Εικόνα 64 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του χειριστή Scara για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_2$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμότυπα από την προσομοίωση στην python γραφική διεπαφή





Εικόνα 65 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του χειριστή Gantry για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_1$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την προσομοίωση στην python γραφική διεπαφή



Εικόνα 66 Το χρονοδιάγραμμα των μεταβλητών των αρθρώσεων του χειριστή Gantry για μία εφικτή τροχιά της διαδρομής $path_2$, μαζί με χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την προσομοίωση στην python γραφική διεπαφή

7. Συμπεράσματα και μελλοντικοί στόχοι

Τα τελικά αποτελέσματα των προσομοιώσεων και των πειραμάτων πιστοποιούν την επίτευξη των βασικών στόχων της διπλωματικής εργασίας. Αυτά περιγράφονται με περιεκτικό τρόπο ακολούθως, μαζί με τον εκτιμώμενο χρόνο ολοκλήρωσής τους:

- 1) Ικανοποιητική ακρίβεια ανίχνευσης των συνόρων των εμποδίων του πραγματικού επίπεδου χώρου εργασίας, με μία απλή κάμερα και έναν οπτικό δείκτη ArUco ($2\text{ min} - 3\text{ min}$).
- 2) Ταχύς υπολογισμός των μετασχηματισμών του αναγνωρισμένου πραγματικού χώρου, με τη βοήθεια των οποίων σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου κίνησης ($5\text{ sec} - 10\text{ sec}$).
- 3) Εφαρμογή του παραμετρικού νόμου ελέγχου, με τη χρήση τεχνητού αρμονικού δυναμικού πεδίου πλοήγησης, για την εύρεση πολλών ξεχωριστών διαδρομών από μία αρχική προς μία τελική θέση στον ελεύθερο χώρο του επιπέδου, τις οποίες καλείται να ακολουθήσει ο ρομποτικός χειριστής ($10\text{ sec} - 30\text{ sec}$).
- 4) Εύρεση εφικτών τροχιών για τον ρομποτικό χειριστή (με πρωτεύον και υλοποιήσιμο παράδειγμα τον ρομποτικό βραχίονα Thor), που να πλοηγούν το τελικό στοιχείο δράσης πάνω στο επίπεδο, με σκοπό τη σύγκλιση στη θέση – στόχο και την ταυτόχρονη αποφυγή σύγκρουσης με τα εμπόδια ($30\text{ sec} - 1\text{ min}$).

Συνοψίζοντας την παραπάνω διαδικασία, όλα τα απαιτούμενα βήματα από την αναγνώριση του πραγματικού χώρου εργασίας μέχρι και τον υπολογισμό μιας εφικτής τροχιάς για τον ρομποτικό βραχίονα Thor, υλοποιούνται αποτελεσματικά, εύκολα και γρήγορα (σε λιγότερο από 5 min), έχοντας αυτοματοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό μέσω μίας *python* γραφικής διεπαφής. Βέβαια, δεν έχει συνυπολογιστεί το χρονοβόρο στήσιμο της πειραματικής διάταξης, με τις τεχνικές δυσκολίες της αναζήτησης κατάλληλης θέσης και προσανατολισμού στον κόσμο για την κάμερα, για τον επίπεδο χώρο εργασίας και για τον ρομποτικό βραχίονα. Αυτά επιλύονται άνετα σε ψηφιακό περιβάλλον προσομοίωσης σε λιγότερο από 5 min , όμως σε πραγματικές, ατελείς συνθήκες ενδέχεται να χρειαστούν πολύ παραπάνω χρόνο.

Προφανώς, η θεωρητική και πρακτική μελέτη του προβλήματος αποφυγής σύγκρουσης με εμπόδια στο επίπεδο, με όλα τα πιθανά σενάρια που το συνοδεύουν, δεν έχει εξαντληθεί στη συγκεκριμένη διπλωματική. Θα ήθελα λοιπόν να αναφέρω πιθανές επεκτάσεις και βελτιώσεις της παρούσας εργασίας. Αρχικά, παρότι παρουσιάστηκαν παραδείγματα ελέγχου της κίνησης κι άλλων ρομποτικών χειριστών στην προσομοίωση, πέραν του Thor, αυτά δεν έγιναν στην πράξη στο εργαστήριο. Η πρακτική δοκιμή χειριστών Gantry, Scara κ.ά., που είναι και πιο ταιριαστοί στην εφαρμογή κινήσεων στο επίπεδο, αποτελεί έναν από τους μελλοντικούς στόχους. Επίσης, το μόνο αντικείμενο που χρησιμοποίησα στη θέση του τελικού στοιχείου δράσης του βραχίονα Thor ήταν μία ράβδος μικρού μήκους και αμελητέας διαμέτρου. Θα μπορούσε λοιπόν να εξεταστεί ο χειρισμός αντικειμένων με μεγαλύτερες διαστάσεις και περισσότερες ασυμμετρίες. Αυτά θα καθιστούσαν αναγκαία τόσο την ψηφιακή διόγκωση των συνόρων των εμποδίων, ώστε να ληφθεί υπόψη ο μη αμελητέος όγκος και το σχήμα του χειριζόμενου αντικειμένου, όσο και τον προσεκτικότερο σχεδιασμό του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης κατά την εκτέλεση της επιθυμητής τροχιάς. Τέλος, μολονότι η τελική πειραματική διάταξη αποδείχθηκε αρκετά αξιόπιστη, η χρήση ενός συστήματος πολλαπλών καμερών θα μπορούσε να προσφέρει καλύτερη χωροθέτηση των διαφόρων αντικειμένων στον τριδιάστατο χώρο, ενισχύοντας την ακρίβεια του συστήματος και την επαναληψιμότητα των ζητούμενων εργασιών.

8. Αναφορές στο διαδίκτυο – Βιβλιογραφία

- 1) J.Denavit, R.S.Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", Transactions ASME Journal of Applied Mechanics, 1955
- 2) https://intuhceh.ac.in/faculty_portal/uploads/staff_downloads/873_ic29-2014.pdf
(A. Chennakesava Reddy, "Difference between Denavit – Hartenberg (D-H) classical and modified conventions for forward kinematics of robots with case study")
- 3) Roger W. Brockett, "Robotic Manipulators and the Product of Exponentials Formula", 1984
- 4) <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=8554117>
(Chi, W.; Wang, C.; Wang, J.; Meng, M.Q. "Risk-DTRRT-Based Optimal Motion Planning Algorithm for Mobile Robots". IEEE Trans. Autom. Sci. Eng. 2019, 16, 1271–1288)
- 5) <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/9/4464>
(P. Vlantis, C. Vrohidis, C. P. Bechlioulis and K. J. Kyriakopoulos, "Robot Navigation in Complex Workspaces Using Harmonic Maps," 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2018, pp. 1726-1731, doi: 10.1109/ICRA.2018.8460695:
η εργασία με την ανάλυση και τον υπολογισμό του αρμονικού μετασχηματισμού και του νόμου ελέγχου πλοϊγήσης, στα οποία βασίστηκε το θεωρητικό μέρος της παρούσας διπλωματικής)
- 6) <https://ieeexplore.ieee.org/document/9954158>
(Li Fan, Jianchang Liu, Wenle Zhang, Peng Xu, "Robot Navigation in Complex Workspaces Using Conformal Navigation Transformations", IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 8, no. 1, 2023)
- 7) <https://ieeexplore.ieee.org/document/163777>
(E. Rimon and D. E. Koditschek, "Exact robot navigation using artificial potential functions", IEEE Trans. Robot. Automat., vol. 8, no. 5, pp. 501–518, Oct. 1992)
- 8) <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/10164805>
(Albin Dahlin, Yiannis Karayannidis, "Creating Star Worlds: Reshaping the Robot Workspace for Online Motion Planning", IEEE Transactions on Robotics, vol. 39, no. 5, October 2023)
- 9) <https://www.di.ens.fr/willow/pdfs/cvpr07a.pdf>
(Furukawa, Y. and Ponce, J., "Accurate, dense, and robust multi-view stereopsis." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, August 2010)
- 10) <https://arxiv.org/pdf/1406.2283>
(Eigen, D., Puhrsch, C., and Fergus, R., "Depth map prediction from a single image using a multi-scale deep network.", Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), 2014)
- 11) <https://link.springer.com/article/10.1007/s11263-007-0071-y>
(Ashutosh Saxena, Sung H. Chung, Andrew Y. Ng, "3-D Depth Reconstruction from a Single Still Image", International Journal of Computer Vision, 2008)
- 12) <https://arxiv.org/pdf/1603.04992>
(Ravi Garg, Vijay Kumar B. G., Gustavo Carneiro, Ian Reid, "Unsupervised CNN for Single View Depth Estimation: Geometry to the Rescue", European Conference on Computer Vision (ECCV), 2016)
- 13) <http://thor.angel-lm.com/>
(η επίσημη ιστοσελίδα που φιλοξενεί όλες τις λεπτομέρειες κατασκευής, συναρμολόγησης και ελέγχου του open source 3D εκτυπώσιμου ρομποτικού βραχίονα Thor)
- 14) <https://www.linkedin.com/in/angellarranagamuro/>
(η LinkedIn σελίδα του Ισπανού μηχανικού ρομποτικής Ángel Larrañaga Muro, σχεδιαστή του ρομποτικού βραχίονα Thor)
- 15) <https://www.freecad.org/>
(η επίσημη ιστοσελίδα του λογισμικού FreeCAD)
- 16) <https://grobotronics.com/creality-3d-42-40-stepper-motor.html>
(Nema 17 stepper motor από το ηλεκτρονικό κατάστημα της Grobotronics, με την περιγραφή των βασικότερων τεχνικών χαρακτηριστικών του)

- 17) <https://grobotronics.com/a4988.html>
 (οδηγός A4988 από το ηλεκτρονικό κατάστημα της Grobotronics, όπου περιγράφονται τα pins σύνδεσής του με τον μικροελεγκτή Arduino και με τις φάσεις του βηματικού κινητήρα που ελέγχει)
- 18) <https://grobotronics.com/optical-endstop-with-wires.html>
 (οπτικός τερματικός διακόπτης από το ηλεκτρονικό κατάστημα της Grobotronics)
- 19) <https://grobotronics.com/creality-3d-end-stop-switch.html>
 (μικροτερματικός διακόπτης από το ηλεκτρονικό κατάστημα της Grobotronics)
- 20) <https://grobotronics.com/arduino-mega-2560-rev3.html>
 (μικροελεγκτής Arduino Mega Rev3 από το ηλεκτρονικό κατάστημα της Grobotronics)
- 21) <http://thor.angel-lm.com/documentation/electronics/>
 (περιλαμβάνονται τα τεχνικά χαρακτηριστικά της PCB πλακέτας και παρατίθεται το κυκλωματικό διάγραμμα των συνδέσεων με τα εξαρτήματα του βραχίονα)
- 22) <https://github.com/gnea/grbl>
 (η GitHub ιστοσελίδα με τον κώδικα του firmware GRBL)
- 23) https://github.com/Lapricode/robotic_manipulators_playground
 (ο GitHub αποθηκευτικός χώρος με όλον τον python κώδικα που αναπτύχθηκε για τη διπλωματική εργασία, ο οποίος περιλαμβάνει τόσο τη σχετική γραφική διεπαφή GUI όσο και την επίλυση του προβλήματος αποφυγής εμποδίων στο επίπεδο, με εικόνες και βίντεο από τα πειράματα)
- 24) <https://github.com/jhavil/swift>
 (η GitHub ιστοσελίδα με τον κώδικα της python βιβλιοθήκης swift)
- 25) Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo, “Robotics: Modelling, Planning and Control”
 (από τα γνωστότερα βιβλία ρομποτικής, που καλύπτει ένα πολύ ευρύ φάσμα του πεδίου σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο και χρησιμοποιείται από σπουδαστές και ερευνητές)
- 26) <https://github.com/petercorke/robotics-toolbox-python>
 (η GitHub σελίδα με την υλοποίηση της βιβλιοθήκης robotics – toolbox στην python)
- 27) https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function
 (το κύριο άρθρο της Wikipedia για τις αρμονικές συναρτήσεις)
- 28) <https://msp.org/pjm/1997/180-2/pjm-v180-n2-p01-s.pdf>
 (Duren Peter and Hengartner Walter, Harmonic mappings of multiply connected domains. Pac. J. Math. 1997, 180:
 στη σελίδα 206 βρίσκεται το θεώρημα 2, το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη της αρμονικής απεικόνισης που αναφέρεται στην εργασία)
- 29) <https://github.com/maxchaos/hntf2d?tab=readme-ov-file#orgda5473b>
 (ο GitHub αποθηκευτικός χώρος με τον κώδικα που υλοποιεί την αρμονική απεικόνιση από τον πραγματικό χώρο εργασίας των εμποδίων στον σφαιρικό χώρο)
- 30) <https://gitlab.com/libeigen/eigen>
 (ο GitLab αποθηκευτικός χώρος με τα αρχεία της βιβλιοθήκης Eigen, που χρειάζεται για τον αρμονικό μετασχηματισμό)
- 31) <https://github.com/leethomason/tinyxml2>
 (ο GitHub αποθηκευτικός χώρος με τα αρχεία της βιβλιοθήκης TinyXML, που χρειάζεται για τον αρμονικό μετασχηματισμό)
- 32) <https://nasim.hormozgan.ac.ir/ostad/UploadedFiles/863740/863740-8707186354456456.pdf>
 (Khalil H.K., “Nonlinear Systems”, Prentice-Hall: Hoboken, NJ, USA, 1996:
 εδώ περιλαμβάνονται το θεώρημα 3.1 Ευστάθειας κατά Lyapunov στη σελίδα 100 και το θεώρημα 3.4 αμετάβλητων συνόλων του LaSalle στη σελίδα 115)
- 33) <https://github.com/opencv/opencv-python>
 (η GitHub σελίδα της OpenCV βιβλιοθήκης σε python διεπαφή)

- 34) <https://www.logitech.com/el-gr/products/webcams/c270-hd-webcam.960-001063.html>
(περιλαμβάνονται οι τεχνικές προδιαγραφές της Logitech C270 HD WEBCAM κάμερας που χρησιμοποιώ στην εργασία για την ανίχνευση των εμποδίων)
- 35) <https://towardsdatascience.com/what-are-intrinsic-and-extrinsic-camera-parameters-in-computer-vision-7071b72fb8ec>
(περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου, των εξωτερικών και των εσωτερικών παραμέτρων μιας κάμερας με οπή)
- 36) https://docs.opencv.org/4.x/dc/dbb/tutorial_py_calibration.html
(οδηγίες από το documentation της OpenCV για τη σωστή βαθμονόμηση της κάμερας και τη διόρθωση της εγγενούς παραμόρφωσης των εικόνων που προκαλείται από τον φακό της κάμερας)
- 37) <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734189X85900167>
(Suzuki, S. and Abe, K., Topological Structural Analysis of Digitized Binary Images by Border Following. CVGIP 30 1, pp 32-46 (1985):
το paper όπου περιγράφεται ο αλγόριθμος των Suzuki – Abe, που αξιοποιείται στην ανίχνευση των συνόρων των εμποδίων)
- 38) J.Denavit, R.S.Hartenberg, A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, Transactions ASME Journal of Applied Mechanics, 1955: 23, 215–221

Σημείωση για τον κώδικα:

Ο κώδικας για την αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της εργασίας μέσω γραφικής διεπαφής GUI στην python, βρίσκεται στον παρακάτω GitHub αποθηκευτικό χώρο:

https://github.com/Lapricode/robotic_manipulators_playground

9. Παράρτημα εικόνων από το διαδίκτυο

- 1) <https://www.computershop.ke/wp-content/uploads/2020/02/Tech-Nuggets-iRobot-Roomba-880.jpg>
(Εικόνα 1)
- 2) https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/Cmglee_Cambridge_Science_Festival_2015_da_Vinci.jpg/330px-Cmglee_Cambridge_Science_Festival_2015_da_Vinci.jpg
(Εικόνα 2)
- 3) <https://robodk.com/robot/ABB/IRB-6700-150-3-20-LeanID>
(Εικόνα 4)
- 4) <https://robodk.com/robot/KUKA/KR-6-R900-sixx>
(Εικόνα 5)
- 5) <https://cdn.hackaday.io/images/5591001470242723347.png>
<https://cdn.hackaday.io/images/2209461470242709662.png>
(Εικόνα 10, στα δεξιά, με τη σειρά που παρουσιάζονται από πάνω προς τα κάτω)
- 6) <https://www.3dexpert.gr/eshop/image/cache/data/uploads/202112/creality3d4240steppermotor-280x220.png>
<https://www.omc-stepperonline.com/image/cache/catalog/geared/17/nema-17-stepper-motor-bipolar-l33mm-w-gear-ratio-51-planetary-gearbox--52466-500x500.jpg>
<https://www.3dexpert.gr/eshop/image/cache/data/uploads/202112/creality3d4234steppermotor-280x220.png>
(Εικόνα 11, με τη σειρά που παρουσιάζονται από αριστερά προς τα δεξιά)
- 7) https://grobotronics.com/images/detailed/12/sku_260021_4_grobo.jpg
(Εικόνα 12)
- 8) https://grobotronics.com/images-thumbnails/350/350/detailed/123/xcr3d-3d-printer-parts-optical-endstop-for-board-limit-switch-module-with-1m-cable-photoelectric-light_1_grobo.jpg
(Εικόνα 13)
- 9) https://grobotronics.com/images-thumbnails/350/350/detailed/111/creality-3d-end-stop-switch-22649_grobo.jpg
(Εικόνα 15)
- 10) https://store.arduino.cc/cdn/shop/products/A000067_00.front_804x603.jpg?v=1637830343
(Εικόνα 16)
- 11) https://resource.logitech.com/w_1206,c_limit,q_auto,f_auto,dpr_1.0/d_transparent.gif/content/dam/logitech/en/products/webcams/c270/c270-intro.jpg
(Εικόνα 34)