



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII
BIOMEDYCZNEJ**

Identyfikacja procesów technologicznych

Stanowisko TRAS („helikopter”)

Autorzy: *Paweł Lato, Kamil Nowobilski, Artur Olszówka*

Kierunek studiów: *Automatyka i Robotyka*

Rok studiów: *III*

Kraków, 2025

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było przeprowadzenie procesu identyfikacji układu składającego się z silnika zamontowanego na belce oraz stworzenie regulatora LQR, który był odpowiedzialny za stabilizację położenia śmigła.

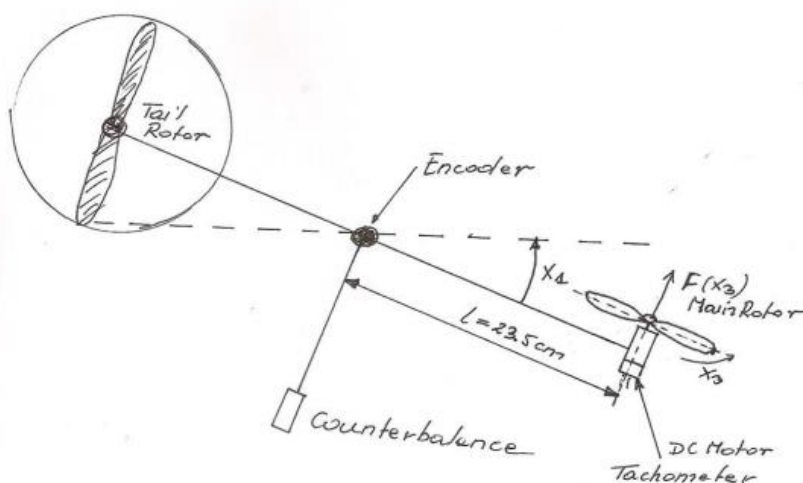
2. Opis stanowiska i ćwiczenia

Stanowisko laboratoryjne to układ dwuwirnikowego systemu aerodynamicznego TRAS (Two Rotor Aero-dynamical System), który jest modelem przypominającym zachowanie helikoptera. Główne elementy stanowiska obejmują belkę zamocowaną na osi obrotu, na której końcach znajdują się dwa wirniki: główny i ogonowy, napędzane silnikami prądu stałego (DC). Ruch belki w płaszczyznach poziomej i pionowej jest rejestrowany za pomocą sensorów położenia, a prędkości kątowe wirników mierzone są przez tachoprądnice.

System posiada przeciwwagę stabilizującą belkę, która pozwala na precyzyjne sterowanie jej ruchem. Sterowanie siłą aerodynamiczną odbywa się poprzez zmianę prędkości obrotowej wirników, co zmienia napięcia wejściowe dostarczane do silników.

Na stanowisku wykorzystano komputer sterujący wyposażony w interfejs RT-DAC4/PCI, umożliwiający komunikację z modelem fizycznym i realizację algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym.

Ze względu na skomplikowanie obliczeń oraz czas ćwiczenia, stanowisko zostało uproszczone do sterowania jednym śmigłem w płaszczyźnie pionowej, przy jednoczesnym zablokowaniu ruchu drugiego śmigła.



Rys. 1. Rysunek poglądowy obiektu na stanowisku.

Zachowanie układu można opisać przy pomocy 3 równań stanu. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie parametrów k_p , ω_0 , ξ , c , α , K oraz dwóch charakterystyk F_t oraz H .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_0(1 + c|\omega_3|)x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha) + k_p F_t(\omega_3) \\ \dot{\omega}_3 &= K(u - H(\omega))\end{aligned}$$

x_1 wychylenie kątowe, x_2 – prędkość kątowa belki, ω_3 – prędkość kątowa śmigła
 ξ – współczynnik tłumienia, ω_0 – częstotliwość drgań własnych, F_t – siła ciągu
 K – wzmacnienie układu sterowania, k_p – wzmacnienie układu sterowania
 $H(\omega)$ – charakterystyka statyczna silnika DC

3. Wykonanie ćwiczenia

• Wyznaczenie charakterystyki statycznej silnika

Wyznaczanie charakterystyki statycznej silnika rozpoczęto od zebrania danych pomiarowych, obejmujących sygnał sterujący u , napięcie z tachometru oraz sygnał analogowy. Prędkość obrotową rpm obliczono na podstawie napięcia za pomocą, współczynnika przeliczeniowego $c=0.52$. Następnie, na podstawie wyników wykonano regresję wielomianową trzeciego stopnia, opisującą zależność sygnału sterującego u od prędkości obrotowej rpm .

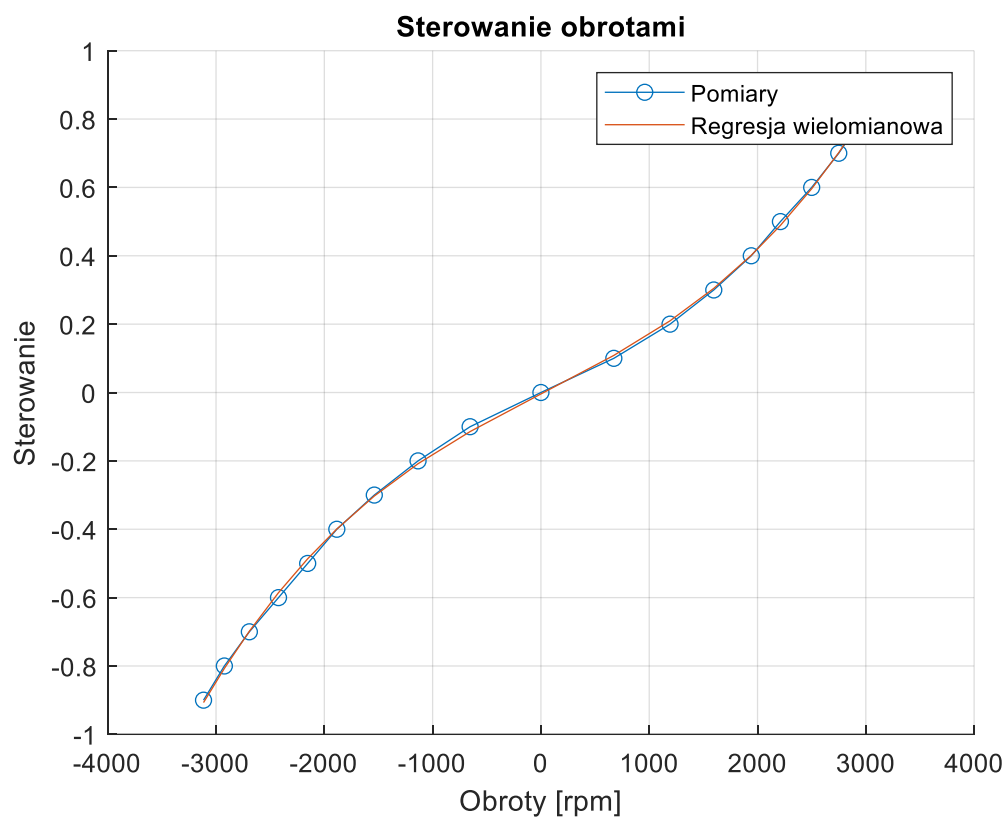
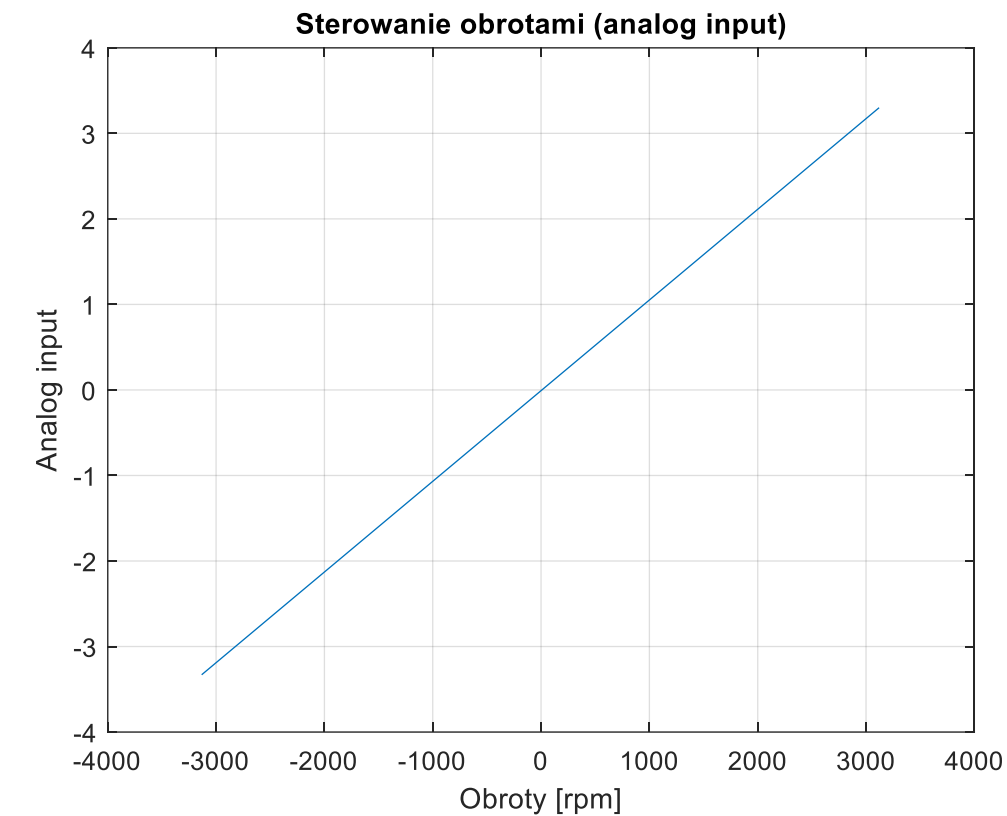
Tabela 1. Zestawienie pomiarów użytych do wyznaczenia stałej K .

Wartość sterowania	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1
Wartość napięcia na tachometrze	-3.3	-3.1	-2.8	-2.5	-2.3	-2	-1.6	-1.2	-0.7
Wartości z tachometru	-1.6	-1.5	-1.4	-1.3	-1.1	-1	-0.8	-0.6	-0.3

Wartość sterowania	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Wartość napięcia na tachometrze	0	0.7	1.3	1.7	2.1	2.3	2.6	3	3.2	3.3
Wartości z tachometru	0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.1	1.3	1.4	1.5	1.6

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów (funkcja *polyfit*, Matlab), wyznaczono wielomian opisujący charakterystykę statyczną.

$$H(u) = 1.283u^3 \cdot 10^{-11} - 9.477u^2 \cdot 10^{-10} + 0.1623u \cdot 10^{-3} - 0.00418$$



Rys. 2. Wykresy zależności między sterowaniem i obrotami.

- Wyznaczenie stałej K dla silnika

Celem tego eksperymentu jest wyznaczenie wartości parametru K , który odpowiada za wzmocnienie w modelu silnika. Wartość K jest dopasowywana w taki sposób, aby odpowiedź modelu możliwie najlepiej zgadzała się z rzeczywistymi danymi pomiarowymi.

Aby przeprowadzić identyfikację parametru K , wykonano dynamiczny eksperyment układu. Zamiast podania stałej wartości sterowania, zastosowano sygnał prostokątny o stałej amplitudzie i częstotliwości. Tego rodzaju sygnał pozwala wyraźnie zaobserwować dynamikę układu. Do tego celu zdefiniowano funkcję błędu (funkcję celu), która została zminimalizowana za pomocą funkcji *fminsearch*.

$$e(K) = \sum (\omega(t) - y(t))^2$$

$$\frac{d\omega}{dt} = K(u(t) - (1.283u^3 \cdot 10^{-11} - 9.477u^2 \cdot 10^{-10} + 0.1623u \cdot 10^{-3} - 0.00418))$$

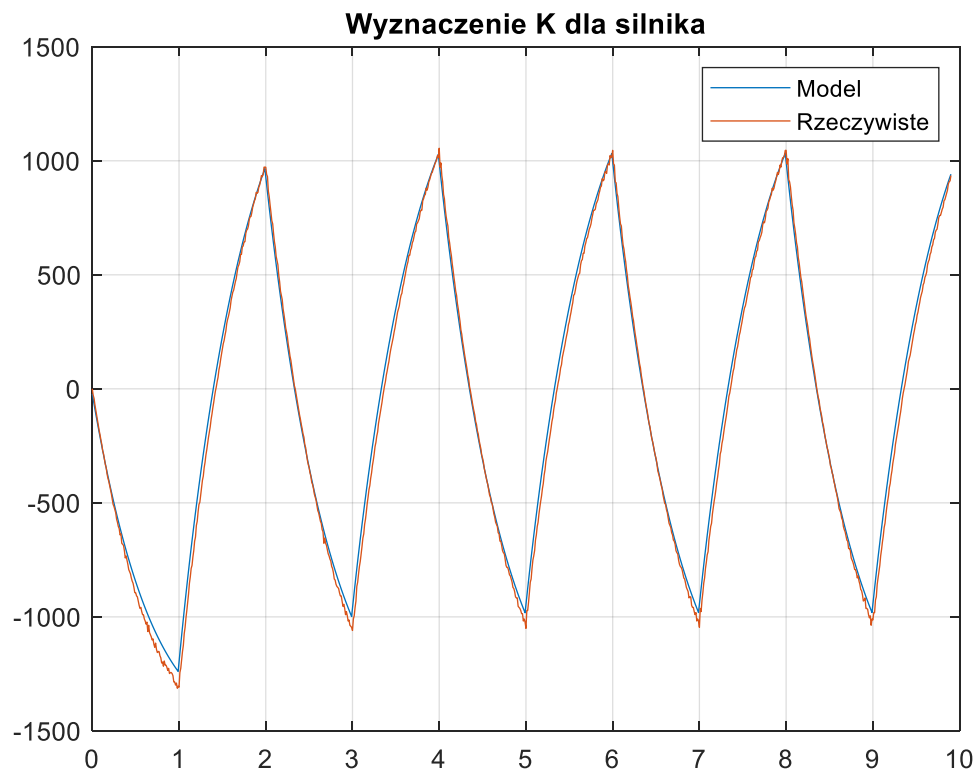
gdzie,

$\omega(t)$ – wynik symulacji dla modelu danego K ,

$y(t)$ – dane rzeczywiste (pomiarowe),

$e(K)$ – suma kwadratów różnic między odpowiedzią modelu a rzeczywistymi danymi.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów wyznaczono wartość wzmocnienia silnika, która wynosi $K=7645.47$.



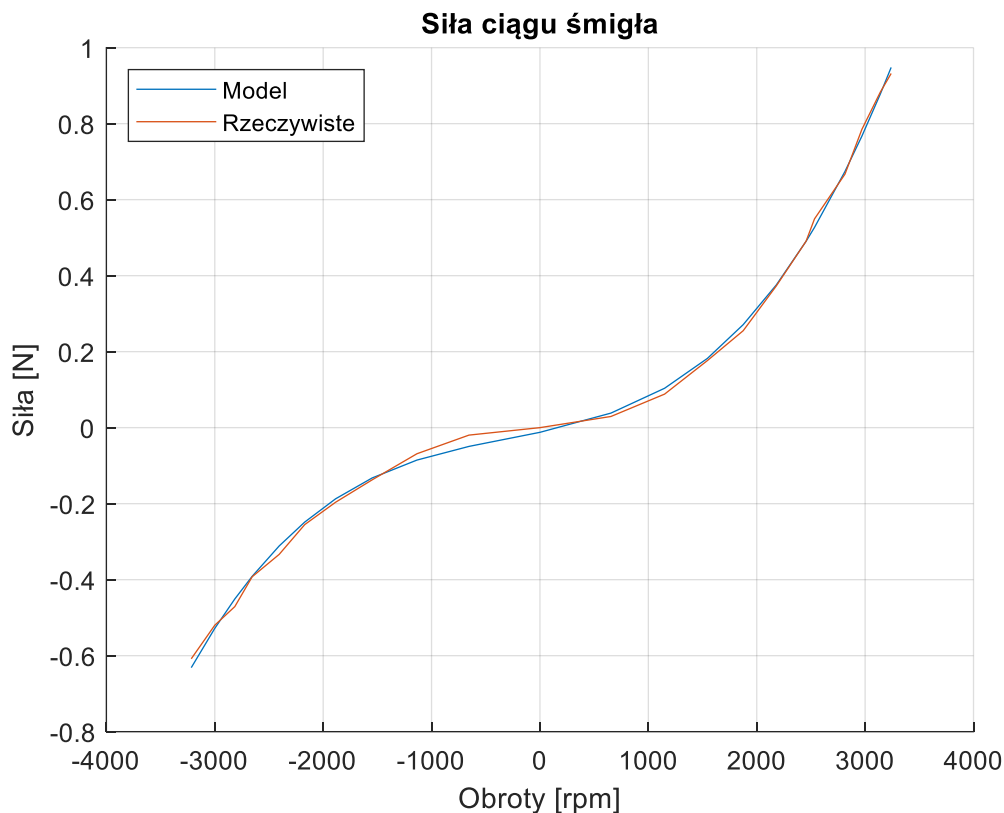
Rys. 3. Porównanie modelu i rzeczywistych pomiarów.

- Wyznaczenie siły ciągu

W celu wyznaczenia siły ciągu konieczna była modyfikacja stanowiska laboratoryjnego. Do belki przymocowano ciężarek, który spoczywał na wadze, co pozwoliło badać zmianę ciężaru w zależności od prędkości obrotowej śmigła.

Na podstawie zebranych danych oraz korzystając z metody najmniejszych kwadratów (funkcja *polyfit*, Matlab), wyznaczono wielomian opisujący zależność siły ciągu F_t od prędkości obrotowej *rpm*. Otrzymane równanie ma postać:

$$F_t = (1.77 \cdot 10^{-10} - 1.57\omega^2 \cdot 10^{-7} + 5.93\omega \cdot 10^{-4} - 0.0123$$



Rys. 4. Porównanie modelu i pomiarów siły ciągu.

- Drgania swobodne bez śmigła

Równania przy zerowym sterowaniu zmieniają swoją postać na

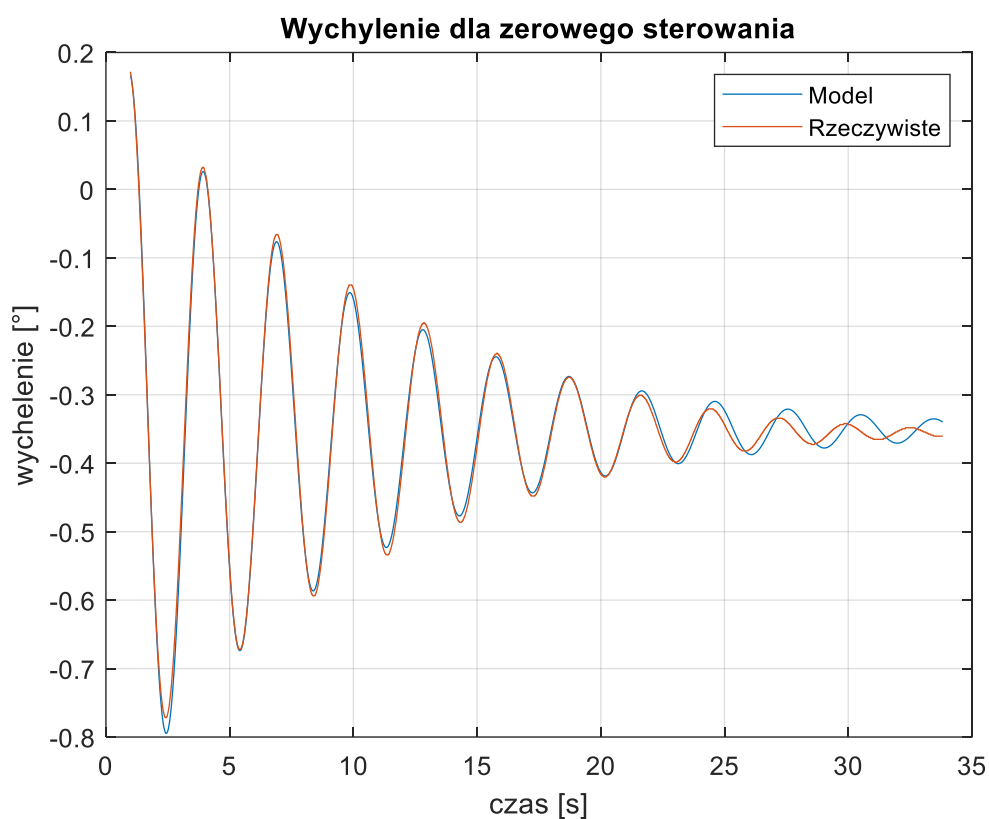
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_0 x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha).\end{aligned}$$

Do wyznaczenia parametrów równań wykorzystano funkcję *lsqnonlin*, która służy do rozwiązywania nieliniowych problemów najmniejszych kwadratów. W naszym przypadku dobrano optymalne wartości parametrów $a(2\xi\omega_0)$, $c(\omega_0^2)$ i α . W celu zebrania pomiarów wychylenia belkę z pozycji równowagi.

$$e(K) = \sum (x(:,1)(t) - y(t))^2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a x_2 - c \sin(x_1 + \alpha) \end{bmatrix}$$

Otrzymano wyniki, $\omega_0 = 2.130$, $\xi = 0,049$ i $\alpha = 0.351$.



Rys. 5. Porównanie modelu i pomiarów drgań swobodnych obiektu.

- Wyznaczenie parametrów K_p oraz c

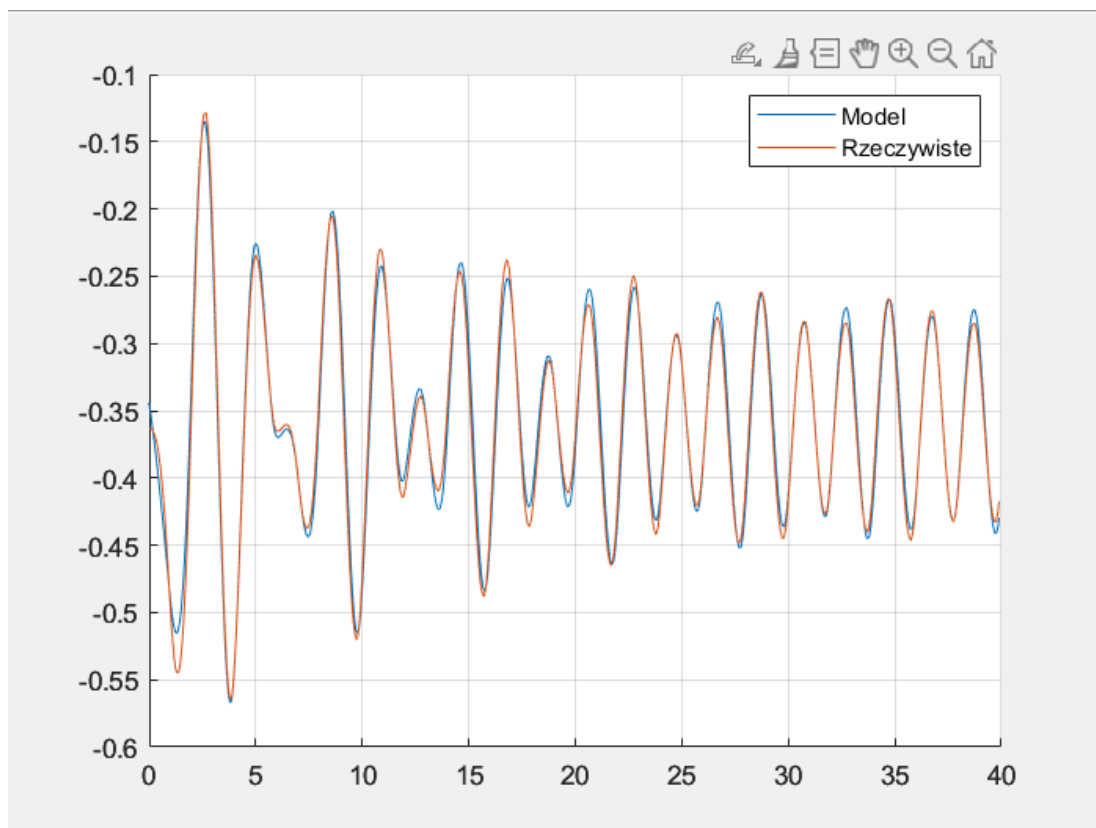
Parametr k_p oraz c wyznaczamy z dynamicznych eksperymentów podobnie jak wcześniej stałą K . Model w Simulinku został zmodyfikowany i w miejsce sterowania został dodany generator sygnału prostokątnego z wartościami -0.35 i 0.35 z okresem 2s. Ponownie korzystamy z funkcji *lsqnonlin*.

$$e(K) = \sum (x(:,1)(t) - y(t))^2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\xi\omega_0 x_2 - c x_2 |x_3| - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha) + k_p F_t \\ K(u - H(w)) \end{bmatrix}$$

$$c = -0.000453$$

$$k_p = 5.811312$$

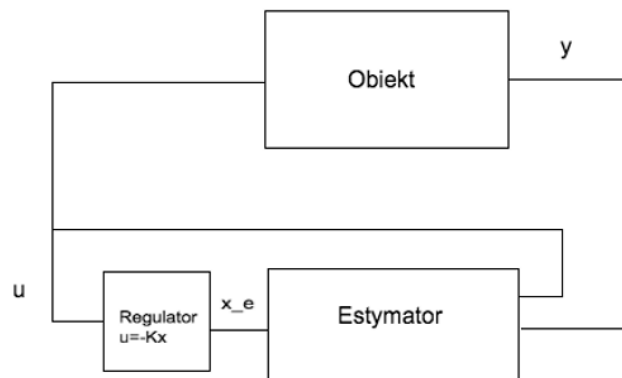


Rys. 6. Porównanie modelu i pomiarów dla pełnego modelu obiektu.

- Stabilizacja z wykorzystaniem filtru Kalmana i regulatora LQ

W tym punkcie musimy stworzyć regulator, dzięki któremu będziemy w stanie stabilizować belkę w zadanym położeniu oraz będziemy w stanie niwelować zakłócenia powstałe poprzez działanie sił zewnętrznych.

Regulator LQ to algorytm optymalnego sterowania, który minimalizuje funkcję kosztu. W naszym przypadku (system dynamiczny) dąży do zminimalizowania odchylenia stanu układu od wartości zadanej oraz ograniczenia wielkości sygnału sterującego. Regulator LQ wymaga znajomości wszystkich zmiennych stanu. W naszym przypadku nie jest możliwy pomiar prędkości kątowej belki, dlatego wykorzystaliśmy filtr Kalmana. Filtr Kalmana pozwala na optymalną estymację stanów układu dynamicznego (nawet tych niemierzonych) w obecności szumów pomiarowych i zakłóceń procesowych



Rys. 7. Rysunek poglądowy obiektu i regulatora.

W pierwszej kolejności musieliśmy znaleźć punkty równowagi układu. W tym celu rozwiązujemy poniższy układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -2\xi\omega_0(1 + c|x_3| - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha) + k_p F_t = 0 \\ \dot{x}_3 = K(u - H(x_3)) = 0 \end{cases}$$

Punkt równowagi dla $x_1 = 0$ wynosi $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1868.89 \end{bmatrix}$, $u_r = 0.37$. Następnie w okolicy punktu równowagi zlinearyzowano układ i uzyskano w ten sposób macierze A, B, C i D.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega_0^2 \cos(x_1 + \alpha) & -2\xi\omega_0(1 + c|x_3|) & k_p \frac{\partial F_t}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & -K \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}$$

Mierzmy położenie belki oraz jej prędkość, dlatego macierz obserwacji wygląda tak:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast macierz D jest macierzą zerową.

Aby zredukować błąd w stanie ustalonym, dodajemy do równań stanu dodatkową zmienną reprezentującą całkę błędów. Zakładając, że interesuje nas stabilizacja pierwszej zmiennej stanu do wartości zadanej w , dodatkowe równanie będzie miało postać.

$$\dot{x}_{n+1} = x_1 - w$$

Macierze systemu (rozszerzonego) zlinearyzowane w punkcie x_r i u_r wynoszą:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.45 & 0.23 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 2.45 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7645.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

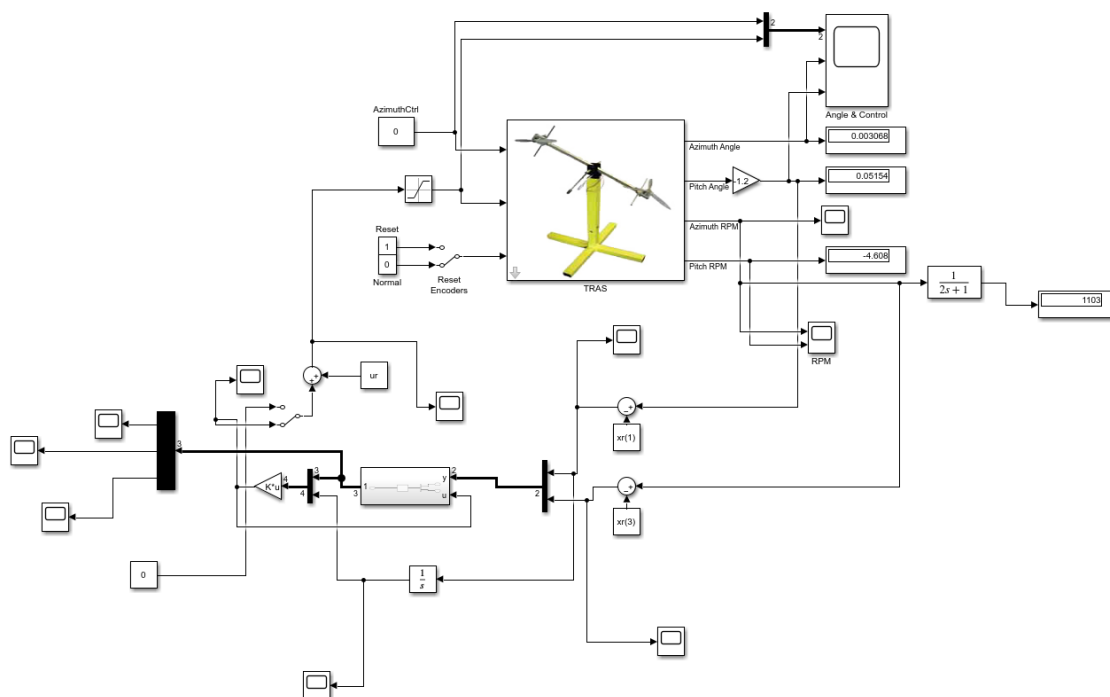
Następnie ustalamy macierz wag dla regulatora LQ. Macierz Q służy do określenia wag dla zmiennych stanu, a macierz R służy do ustalenia wag dla sterowania.

$$Q = [100000 \quad 100 \quad 0.01 \quad 100]$$

Obliczenie wzmocnienia regulatora odbywa się za pomocą funkcji **lqr**, która wyznacza optymalne wzmocnienie dla układu sterowania zgodnie z metodą regulacji LQ (Linear-Quadratic). Wzmocnienie to jest następnie wykorzystywane w modelu Simulink, gdzie jest mnożone wektorowo z estymowanymi zmiennymi stanu, wyznaczony przez filtr Kalmana. Aby zredukować uchyb w stanie ustalonym, wprowadzono dodatkowy człon całkujący, który uwzględnia różnicę pomiędzy sygnałem wyjściowym a zadany. Człon ten, rozszerzając model dynamiczny układu, pozwala lepiej kompensować działanie zakłóceń.

Po zastosowaniu wzmocnienia LQ oraz dodaniu składowej sterowania odpowiadającej punktowi równowagi, wynikowa wartość sterowania trafia na wejście obiektu. Wyjście obiektu,

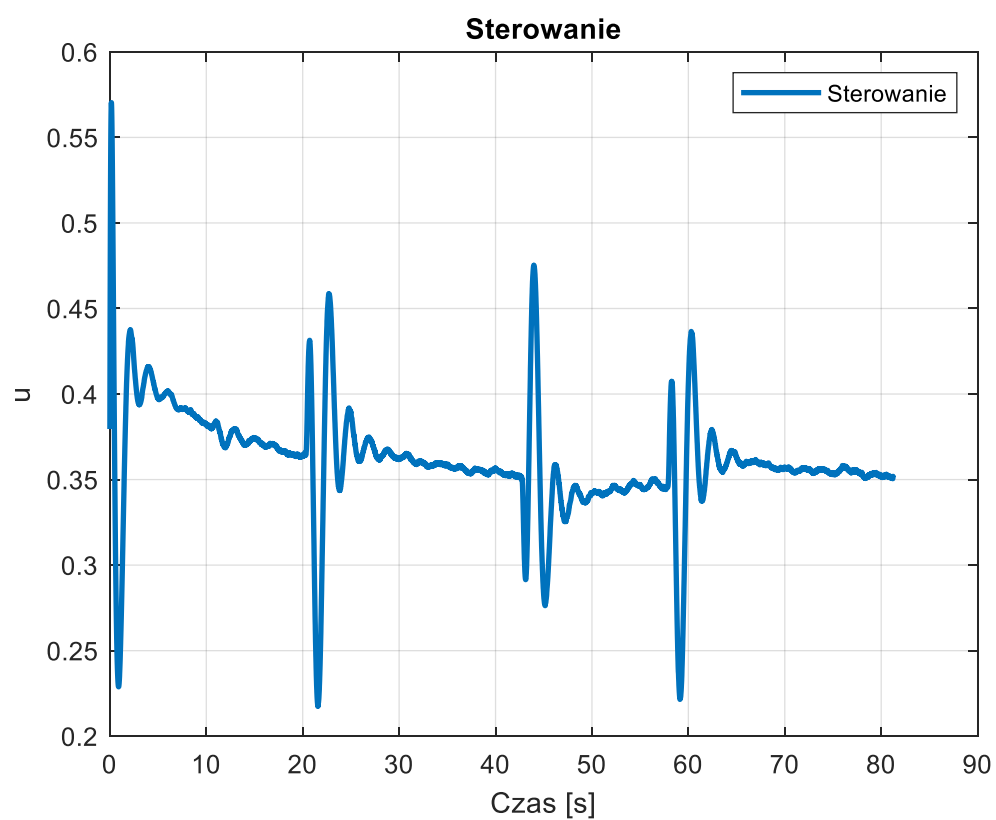
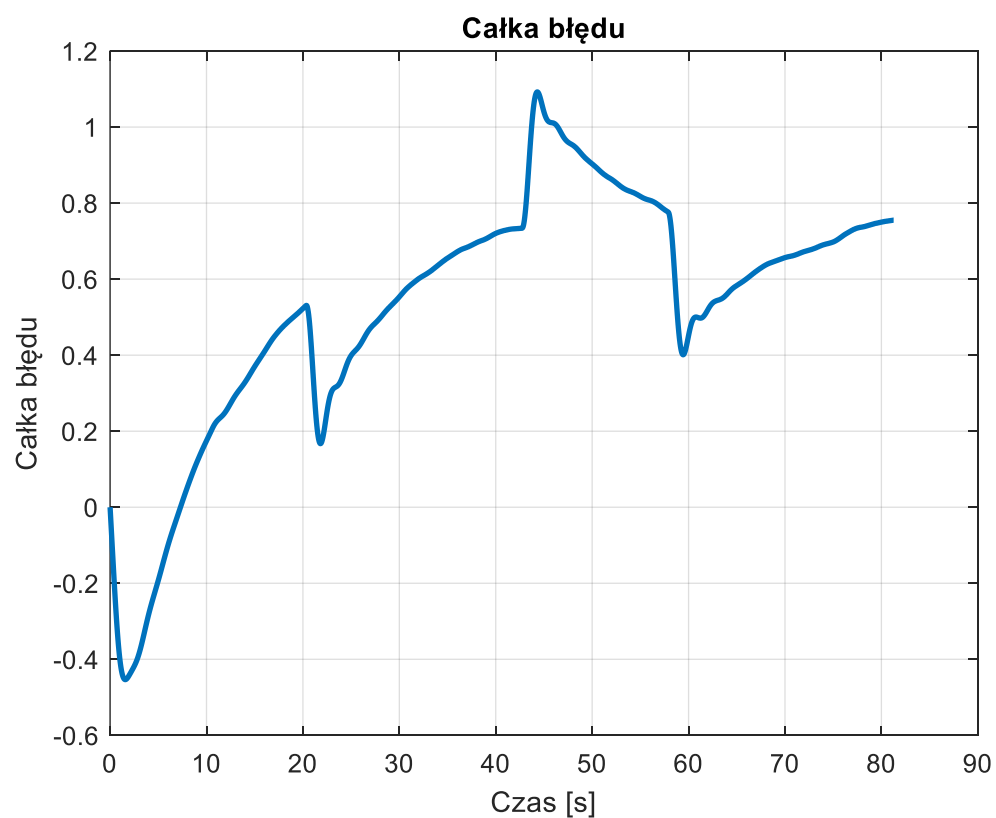
zawierające parametry dynamiczne układu (prędkość śmigła i położenie belki), jest przesyłane do estymatora stanu, który na tej podstawie wyznacza bieżące estymacje stanów układu.

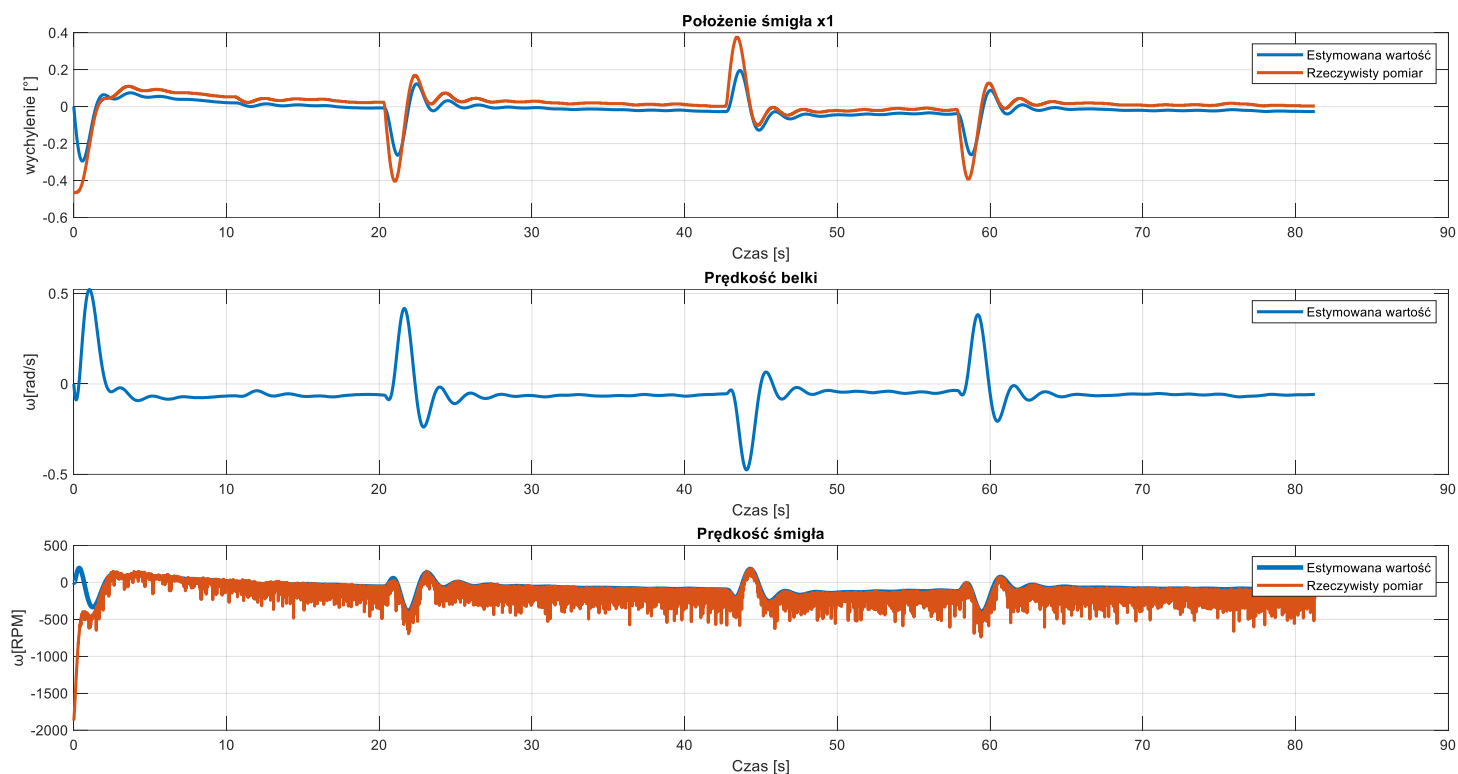


Rys. 8. Schemat obiektu w Simulinku.

• Testowanie regulatora

Zadaliśmy położenie równe $x_1 = 0$, a następnie po ustabilizowaniu się w zadanej pozycji wprowadzaliśmy zakłócenia popychając belkę trzykrotnie: w dół, w górę i ponownie w dół.





Rys. 9. Wykresy uzyskane w czasie pracy regulatora.

4. Wnioski

W trakcie ćwiczeń udało nam się poprawnie zidentyfikować parametry obiektu regulacji, w taki sposób, że model w bardzo małym stopniu różnił się od pomiarów

Przy tworzeniu regulatora wystąpiły pewne problemy. Raz dążył do miejsca poza swoim zakresem ruchu, raz nie reagował na zakłócenia związane z pozycją belki. Ostatecznie udało się go skalibrować poprzez odpowiednie wartości zawarte w macierzy Q , która ma swoje zastosowanie przy filtrze Kalmana