Теоремы о формальной арифметике

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* α.

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* p *— гёделев номер доказательства* ξ.

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* α.

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, *если* p *— гёделев номер доказательства* ξ.
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* α.

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$, *если* p *— гёделев номер доказательства* ξ.

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p . \psi(x, p)$

Определение

Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* α.

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \mathit{Proof}$*, если* p *— гёделев номер доказательства* ξ*.*
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

Определение

Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. $\square$

Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis$'$:

$$\pi'(x) := \exists p.\psi(x, p) \mathbin{\&} \neg\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p)$$
$$\mathrm{Consis}' := \neg\pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $[\![\pi'(x)]\!] = [\![\pi(x)]\!]$:
   - если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $[\![\psi(x, p)]\!] =$ И, то $[\![\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p)]\!] =$ Л
   - если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) =$ Л при любом p.
2. Но $\vdash \mathrm{Consis}'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ, выражающая отношение Proof, формула π и формула Consis соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α:

1. $\vdash \alpha$ *влечет* $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$
2. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner})$
3. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

Невыразимость доказуемости

Определение

$Th_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid\ \vdash_{\mathcal{S}} \alpha\}$; $Tr_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid [\![\alpha]\!]_{\mathcal{S}} = И\}$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner$ для любой $\alpha(x)$. Тогда D представима в Ф.А.

Теорема

Если расширение Ф.А. $\mathcal{S}$ непротиворечиво и D представима в нём, то $Th_{\mathcal{S}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$

Доказательство.

Пусть $\delta(a,p)$ представляет D, и пусть $\sigma(x)$ выражает множество $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$.
Пусть $\alpha(x) := \forall p.\delta(x,p) \rightarrow \neg\sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner \in \mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$?

- Если $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$, то $\vdash_{\mathcal{S}} \forall p.\delta(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner},p) \rightarrow \neg\sigma(p)$, то есть $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\sigma(\overline{\ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})$
- Если $\not\vdash_{\mathcal{S}} \alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$, то по выразимости $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\sigma(\overline{\ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})$, отчего $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$

$\square$

Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$. То есть, $\mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $\mathrm{Th}_{\text{Ф.А.}}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. $\square$

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(x)]\!] = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{ФА}}$. То есть $\mathrm{Tr}_{\mathrm{ФА}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.

Пусть φ таково, что $[\![\varphi(x)]\!] = \mathrm{И}$ при $x \in \mathrm{Tr}$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in \mathrm{Tr}$ и $\vdash \neg\varphi(x)$, если $x \notin \mathrm{Tr}$.

Тогда Tr выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. $\square$

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(x)]\!] = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{\Phi A}$.

Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$. То есть $\mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.
Пусть φ таково, что $[\![\varphi(x)]\!] = \text{И}$ при $x \in \mathrm{Tr}$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in \mathrm{Tr}$ и $\vdash \neg\varphi(x)$, если $x \notin \mathrm{Tr}$.
Тогда Tr выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. $\square$

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Положительные результаты про исчисления.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать $(\models)$ вместо $(\vdash)$. Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать ($\models$) вместо ($\vdash$). Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком большое разнообразие D, включая несчётные;
  3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.

Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать ($\models$) вместо ($\vdash$). Напомним: $\models \alpha$, если для всех $M = \langle D, F, P, E \rangle$ выполнено $M \models \alpha$.
- Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком большое разнообразие D, включая несчётные;
  3. даже $D = \mathbb{N}$ в формальной арифметике представляет проблему.
- Будем последовательно бороться:
  1. упростим формулу (борьба с кванторами);
  2. заменим произвольное D на какое-то рекурсивно-перечислимое множество, устроенное некоторым фиксированным образом (борьба с разнообразием D);
  3. устроим правильный перебор, позволяющий быстро находить решения, если они есть (борьба с бесконечностью D).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D.
3. Правильный перебор

Упрощаем формулу α. Сколемизация

1. Предварённая форма (поверхностные кванторы) — *для примера* возьмём чередующиеся:
$$\beta := \forall x_1.\exists x_2.\forall x_3.\exists x_4 \dots \forall x_{n-1}.\exists x_n.\varphi$$
2. Убрать кванторы существования: заменим x_{2k} функциями Сколема $e_{2k}(x_1, x_3, \dots, x_{2k-1})$. Получим:
$$\gamma := \forall x_1.\forall x_3 \dots \forall x_{n-1}.\varphi[x_2 := e_2(x_1), x_4 := e_4(x_1, x_3), \dots, x_n := e_n(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]$$
3. КНФ (c конъюнктов, в каждом $d(c)$ дизъюнктов):
$$\delta := \forall x_1.\forall x_3 \dots \forall x_{n-1}.\bigwedge_c \left(\bigvee_{i=\overline{1,d(c)}} (\neg)P_i(\theta_i) \right)$$
4. Исходная задача: проверка $\vdash \alpha$. Это эквивалентно $\vdash \beta$. Эквивалентно $\models \beta$. Эквивалентно выполнимости δ при всех D (найдутся e_i, что $[\![\delta]\!] = \text{И}$).

Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем D.
3. Правильный перебор

Эрбранов универсум.

Определение

$H_0(\varphi)$ — *все константы в формуле* φ *(либо особая константа* a*, если констант в* φ *нет)*
$H_{k+1}(\varphi)$ — $H_k(\varphi)$ *и все функции от значений* $H_k(\varphi)$ *(как строки)*
$H = \cup H_n(\varphi)$ — *основные термы.*

Пример

$P(a) \vee Q(f(b))$:
$H_0 = \{a, b\}$
$H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$
$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))\}$
$\dots$
$H = \{f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0, x \in \{a, b\}\}$

Выполнимость не теряется. Заменяем D на H

Теорема

Формула выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима на Эрбрановом универсуме.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $M \models \forall \overline{x}.\varphi$. Тогда построим отображение $\mathrm{eval} : H \to M$ (смысл названия вдохновлён языками программирования: eval(“$f(f(b))$“) перейдёт в $f(f(b))$, где f и b — из M).
Предикатам дадим согласованную оценку:
$P_H(t_1, \dots, t_n) = P_M(eval(t_1), \dots, eval(t_n))$. Очевидно, любая формула сохранит своё значение, кванторы всеобщности по меньшему множеству также останутся истинными.
($\Leftarrow$) Очевидно. $\square$