

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ВОПРОСЫ К ТРЕТЬЕМУ КОЛЛОКВИУМУ.

ИТМО, группы М3232–М3239, осень 2024 г.

1. Лямбда-исчисление. Пред-лямбда-термы и лямбда-термы. Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность. Теорема Чёрча-Россера. Комбинатор неподвижной точки. Комбинаторный базис SK . Истина и ложь. Чёрчевские нумералы.
2. Натуральный вывод. Импликативный фрагмент интуиционистского исчисления высказываний. Теорема о замкнутости доказуемости И.ф.И.И.В. Просто-типизированное лямбда-исчисление. Изоморфизм Карри-Ховарда (высказывание, доказательство, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, ложь).
3. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности.
4. Конечные ординалы, существование ординала ω , операции над ординалами, доказательство $1 + \omega \neq \omega + 1$. Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.
5. Кардинальные числа, мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.
6. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Сколема, парадокс Сколема.
7. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).
8. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон-Неймана. Аксиома конструктивности.
9. (в зависимости от даты коллоквиума, вопросы по пункту могут отсутствовать) Индукция и полная индукция. Трансфинитная индукция. Применение трансфинитной индукции. Система S_∞ . Сечение, устранение сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.