Программа курса «Математическая логика»

Вопросы к зачёту и экзамену.

ИТМО, группы M3232–M3239, осень 2024 г.

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
2. Теорема о полноте исчисления высказываний.
3. Интуиционистское исчисление высказываний. ВНК-интерпретация. Алгебраические типы и интуиционистская дизъюнкция. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.
4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.
5. Топологическое пространство. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Связность. Компактность. Непрерывные функции. Путь. Линейная связность. Теорема о том, что лес связен (является деревом) тогда и только тогда, когда связан в топологическом смысле.
6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний. Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний.
7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.
8. Категорические силлогизмы (предикат, субъект, средний термин, фигуры), модусы (сильные, слабые, «плохие»), примеры каждого типа модусов в каждой фигуре. Теорема о корректности исчисления предикатов.
9. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.
10. Машина Тьюринга. Задача об останове, её неразрешимость. Доказательство неразрешимости исчисления предикатов.
11. Порядок теории (0, 1, 2). Теории первого порядка. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Формальная арифметика. Арифметизация логики Лейбница, категорические силлогизмы в арифметизации Лейбница.
12. Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Примитивная рекурсивность арифметических операций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике. Функция Аккермана.
13. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.
14. Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω-непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.
15. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёба. Теорема Тарского о невыразимости истины. Неразрешимость формальной арифметики.
16. Сколемизация. Эрбранов универсум. Эрбрановы оценки. Основные примеры. Система основных примеров. Теорема Эрбрана. Метод резолюции для исчисления высказываний. Унификация. Метод резолюции для исчисления предикатов. SMT-решатели.
17. Лямбда-исчисление. Пред-лямбда-термы и лямбда-термы. Альфа-эквивалентность, бета-редукция и бета-эквивалентность. Теорема Чёрча-Россера (формулировка). Комбинатор неподвижной точки. Чёрчевские нумералы. Просто-типизированное лямбда исчисление и натуральный вывод. Изоморфизм Карри-Ховарда. Комбинаторный базис SK и исчисление высказываний гильбетровского типа.

18. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности. Конечные ординалы, существование ординала ω, операции над ординалами, доказательство $1 + \omega \neq \omega + 1$. Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.

19. Кардинальные числа, мощность множеств. Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.

20. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Сколема, парадокс Сколема.

21. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).

22. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон-Неймана. Аксиома конструктивности.

23. Индукция и полная индукция. Трансфинитная индукция. Система S_∞. Сечение, устранение сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.