Теория множеств

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Определение

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двухместным функциональным символом $\in$, и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x.x \in A \to x \in B$

$A = B \equiv A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \to x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$

Определение

Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.
$\forall x. \forall y. \forall z. x = y \,\&\, x \in z \to y \in z.$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Определение

Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. *Каковы бы ни были два множества* a *и* b, *существует множество, состоящее в точности из них.*

$$\forall a.\forall b.\exists s.a \in s \,\&\, b \in s \,\&\, \forall c.c \in s \to c = a \vee c = b$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$*. Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x*.*

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. *Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x.

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \rightarrow \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Определение

Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. *Каково бы ни было множество* x, *существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества* x.

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

Определение

Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$. *Для любого множества* x *и любой формулы от одного аргумента* $\varphi(y)$ *(*b *не входит свободно в* φ*), найдется* b*, в которое входят те и только те элементы из множества* x*, что* $\varphi(y)$ *истинно.*

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow (y \in x \,\&\, \varphi(y))$$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X *существует множество* $\{X\}$, *содержащее в точности* X.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Доказательство.

$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$ $\square$

Упорядоченная пара

Определение

Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b\rangle$

Теорема

Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании $\{X\}$, аксиому пары. $\square$

Теорема

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\ldots$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\dots$

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, …

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$. Тогда $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$ подходит.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ не вполне упорядочено: в $\mathbb{Z}$ нет наименьшего.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ не вполне упорядочено: в $\mathbb{Z}$ нет наименьшего.

Пример

Отрезок $[0, 1]$ не вполне упорядочен: $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. Линейный: частичный $+ \forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный $+$ в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

$\mathbb{Z}$ не вполне упорядочено: в $\mathbb{Z}$ нет наименьшего.

Пример

Отрезок $[0, 1]$ не вполне упорядочен: $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Пример

$\mathbb{N}$ вполне упорядочено.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ транзитивное множество.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \& y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \ldots$

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x*, что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.*

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, $\ldots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.*

Теорема

Если x, y *— ординалы, то* $x = y$, *или* $x \in y$, *или* $y \in x$.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.
- ω предельный: Пусть θ таков, что $\theta' = \omega$. Тогда θ конечен и θ' тоже конечен.

$\square$

Пример

ω' — тоже ординал.

Порядковый тип

Определение (неформальное определение)

Порядковый тип множества — некоторое свойство, общее для всех множеств, изоморфных относительно биективных отображений, сохраняющих порядок.

Определение

Порядковый тип вполне упорядоченного множества $\langle S, (\preceq)\rangle$ *— ординал* A*, для которого есть биективное отображение* $f : S \to A$*, сохраняющее порядок:* $a \preceq b$ *тогда и только тогда, когда* $f(a) \leq f(b)$

Пример

Множество $\mathbb{Z}$ *не имеет порядкового типа (в смысле определения через ординалы): оно не вполне упорядочено.*

Операции над ординалами

Определение

$a+b$ — *порядковый тип* $a \uplus b$ *(отмеченного объединения), причём* $x_a < y_b$ *при любых* $x \in a$ *и* $y \in b$

Определение

$a \cdot b$ — *порядковый тип* $a \times b$*, произведение упорядочено лексикографически:* $\langle x_1, y_1\rangle < \langle x_2, y_2\rangle$*, если* $x_1 < x_2$ *или* $x_1 = x_2$ *и* $y_1 < y_2$.

Пример

$\overline{3}+\overline{4}$: *порядковый тип множества* $\{0_a, 1_a, 2_a, 0_b, 1_b, 2_b, 3_b\}$*, то есть* $\overline{7}$
$\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}$: *порядковый тип всех натуральных точек плоскости,* $\{\langle 0,0\rangle, \dots, \langle 0,100\rangle, \dots, \langle 100,0\rangle, \dots\}$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — *верхняя грань множества ординалов,* *upb* $x = \bigcup_{a \in x} a$.

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, upb $x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} =$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, upb x $= \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$\mathit{upb}\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$;

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a+c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = upb\ \{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \ldots\}$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, upb x $= \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$\mathit{upb}\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \mathit{upb}\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = \mathit{upb}\ \{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ upb\ \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — \textit{предельный ординал}} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ upb\ \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ upb\ \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ upb\ \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ upb\ \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega \cdot \omega = upb\ \{\omega \cdot 0, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\} = upb\ \{0, \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$*.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$*.* $1 + \omega = \omega$*.*
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$*.* $\omega + 1 \neq \omega$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$

```
shd@shdt:~$ ghci
GHCi, version 8.8.4: https://www.haskell.org/ghc/  :? for help
Loaded package environment from /home/shd/.ghc/x86_64-linux-8.8.4/enviro
efault
Prelude> import Data.Natural
Prelude Data.Natural> data Omega1 = N Natural | Omega deriving (Eq,Ord)
Prelude Data.Natural> N 5 < Omega
True
Prelude Data.Natural> N 5 > Omega
False
Prelude Data.Natural> 
```

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2.

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2*.*

$$\langle 3, 5\rangle < \langle 4, 3\rangle \qquad \omega \cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2.

$$\langle 3, 5\rangle < \langle 4, 3\rangle \qquad \omega\cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пример

Списки натуральных чисел — порядковый тип ω^ω.

$$\langle 3, 1, 4, 1, 5, 9\rangle \qquad \omega^5\cdot 3 + \omega^4\cdot 1 + \omega^3\cdot 4 + \omega^2\cdot 1 + \omega^1\cdot 5 + 9$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \& z \in x \& \neg y = z) \rightarrow \neg\exists t.t \in y \& t \in z$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t.t \in y \,\&\, t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \to \neg\exists t.t \in y \,\&\, t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1,2\},\{\to\},\{\alpha,\beta,\gamma\}\}$
Не дизъюнктное: $\{\{1,2\},\{\to\},\{\alpha,\beta,\gamma,1\}\}$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- *b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе*
- *b содержит элементы только из $\cup a$.*

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \,\&\, x \in b)$$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- *b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе*
- *b содержит элементы только из $\cup a$.*

$$\forall b.b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y.y \in a \to \exists! x.x \in y \,\&\, x \in b)$$

Пример

$\times\{\{\triangle,\square\},\{1,2,3\}\} = \{\{\triangle,1\},\{\triangle,2\},\{\triangle,3\},\{\square,1\},\{\square,2\},\{\square,3\}\}$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить,

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Теорема

Теорема Диаконеску: ZFC поверх интуиционистского исчисления предикатов содержит правило исключённого третьего.

Аксиома фундирования

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \,\&\, \forall z.z \in x \to z \notin y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению $(\in)$.

Идея Рассела: каждому множеству припишем *тип* (тип пустого 0, тип множеств 1, тип множеств множеств 2 и т.п.). Тогда конструкция невозможна: $\{x \mid x \in x\}$.

Аксиома фундирования позволяет определить функцию ранга:

$$rk(x) = \mathrm{upb}\ \{rk(y) \mid y \in x\}$$

.

Схема аксиом подстановки

Определение

Схема аксиом подстановки. Пусть задана некоторая функция f, представимая в исчислении предикатов: то есть задана некоторая формула ϕ*, такая, что* $f(x) = y$ *тогда и только тогда, когда* $\phi(x, y)\ \&\ \exists! z.\phi(x, z)$*. Тогда для любого множества S существует множество f(S) — образ множества S при отображении f.*

$$\forall s.(\forall x.\forall y_1.\forall y_2.x \in s \& \phi(x, y_1) \& \phi(x, y_2) \to y_1 = y_2) \to (\exists t.\forall y.y \in t \leftrightarrow \exists x.x \in s \& \phi(x, y))$$