Мощность множеств

Отношения

Определение

$A \times B := \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$

Бинарное отношение — $R \subseteq A \times B$

Функциональное бинарное отношение (функция) R *— такое, что* $\forall x. x \in A \rightarrow \exists! y. \langle x, y\rangle \in R$

R *— инъективная функция, если* $\forall x. \forall y. \langle x, t\rangle \in R \,\&\, \langle y, t\rangle \in R \rightarrow x = y$*.*

R *— сюръективная функция, если* $\forall y. y \in B \rightarrow \exists x. \langle x, y\rangle \in R$*.*

Равномощные множества

Определение

Множество A равномощно B ($|A| = |B|$), если существует биекция $f : A \to B$.
Множество A имеет мощность, не превышающую мощности B ($|A| \leq |B|$), если существует инъекция $f : A \to B$.

Теорема Кантора-Бернштейна

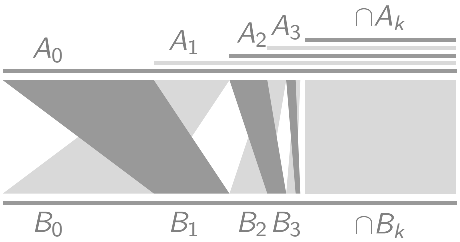
Теорема

Если $|A| \leq |B|$ *и* $|B| \leq |A|$, *то* $|A| = |B|$.

Заметим, $f : A \to B$, $g : B \to A$ — инъекции, но не обязательно $g(f(x)) = x$.

Доказательство.

Избавимся от множества B: пусть $A_0 = A$; $A_1 = g(B)$; $A_{k+2} = g(f(A_k))$.

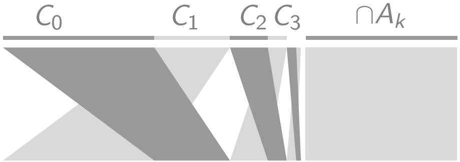


Тогда, если существует $h : A_0 \to A_1$ — биекция, то тогда $g^{-1} \circ h : A \to B$ — требуемая биекция.

$\square$

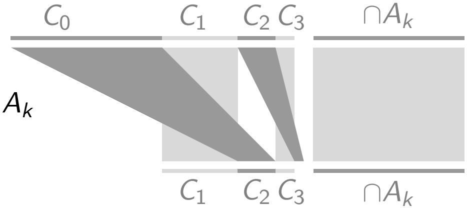
Построение биекции $h : A_0 \to A_1$

Пусть $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$. Тогда
$g(f(C_k)) = g(f(A_k)) \setminus g(f(A_{k+1})) = A_{k+2} \setminus A_{k+3} = C_{k+2}$.



Тогда определим $h(x)$ следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in C_{2k+1} \vee x \in \cap A_k \\ g(f(x)), & x \in C_{2k} \end{cases}$$



Кардинальные числа

Определение

Кардинальное число — наименьший ординал, не равномощный никакому меньшему:

$$\forall x.x \in c \to |x| < |c|$$

Теорема

Конечные ординалы — кардинальные числа.

Определение

Мощность множества ($|S|$) — равномощное ему кардинальное число.

Диагональный метод

Лемма

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Доказательство.

Рассмотрим $a \in (0,1)$ и десятичную запись: $0.a_0 a_1 a_2 \ldots$. Пусть существует биективная $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. По функции найдём значение σ, не являющееся образом никакого натурального числа.

n	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	$\ldots$
n_0	0.3	3	0	0	0	0	0	$\ldots$
n_1	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	$\ldots$
n_2	$1/7$	1	4	2	8	5	7	$\ldots$

Диагональный метод

Лемма

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Доказательство.

Рассмотрим $a \in (0,1)$ и десятичную запись: $0.a_0 a_1 a_2 \dots$. Пусть существует биективная $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. По функции найдём значение σ, не являющееся образом никакого натурального числа.

n	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	$\dots$
n_0	0.3	3	0	0	0	0	0	$\dots$
n_1	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	$\dots$
n_2	$1/7$	1	4	2	8	5	7	$\dots$
	σ	8	6	7	$\dots \sigma_k = (f(n_k)_k + 5)\%10$			

$\square$

Теорема Кантора

Теорема

$|\mathcal{P}(S)| > |S|$

Доказательство.

Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$

n	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$	$\dots$
a	И	Л	И	
b	Л	Л	И	
c	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

Теорема Кантора

Теорема

$|\mathcal{P}(S)| > |S|$

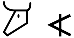
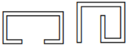
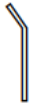
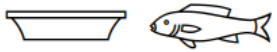
Доказательство.

Пусть $S = \{a, b, c, \dots\}$

n	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$	$\dots$
a	И	Л	И	
b	Л	Л	И	
c	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

Пусть $f : S \to \mathcal{P}(S)$ — биекция. Тогда $\sigma = \{y \in S \mid y \notin f(y)\}$. Пусть $f(x) = \sigma$. Но $x \in f(x)$ тогда и только тогда, когда $x \notin \sigma$, то есть $f(x) \neq \sigma$. $\square$

О буквах

иероглиф	протосинайский/финик.	греч./лат./кир.	евр.
 голова быка	 ’алп	α, a, A, ∀ альфа	א алеф
 дом/двор	 бейт	β, B, Б бета	ב бет
 метательная палка	 гамл	Г гамма	ג гимель
 дверь/рыба	 далт/даг	Δ, D, Д дельта	ד далет

Иерархии $\aleph_n$ и $\beth_n$

Определение

$\aleph_0 := |\omega|$; $\aleph_{k+1} := \min\{a \mid a$ *– ординал*, $\aleph_k < |a|\}$

Определение

$\beth_0 := |\omega|$; $\beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877): $\aleph_1 = \beth_1$ (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).
Обобщённая континуум-гипотеза: $\aleph_n = \beth_n$ при всех n.

Определение

Утверждение α противоречит аксиоматике: $\vdash \alpha$ ведёт к противоречию.
Утверждение α не зависит от аксиоматики: $\nvdash \alpha$ и $\nvdash \neg\alpha$.

Иерархии $\aleph_n$ и $\beth_n$

Определение

$\aleph_0 := |\omega|$; $\aleph_{k+1} := \min\{a \mid a$ – *ординал*, $\aleph_k < |a|\}$

Определение

$\beth_0 := |\omega|$; $\beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877): $\aleph_1 = \beth_1$ (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).

Обобщённая континуум-гипотеза: $\aleph_n = \beth_n$ при всех n.

Определение

Утверждение α *противоречит аксиоматике:* $\vdash \alpha$ *ведёт к противоречию.*
Утверждение α *не зависит от аксиоматики:* $\nvdash \alpha$ *и* $\nvdash \neg\alpha$.

Теорема (О независимости континуум-гипотезы, Дж.Коэн, 1963)

Утверждение $\aleph_1 = \beth_1$ *не зависит от аксиоматики ZFC.*

Примеры мощностей множеств

Пример	мощность
ω	$\aleph_0$
ω^2, ω^ω	$\aleph_0$
$\mathbb{R}$	$\beth_1$
все непрерывные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\beth_1$
все функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\beth_2$

Арифметика для кардинальных чисел

Определение

Если α *и* β *— кардинальные числа, то* $\alpha + \beta := |\alpha \uplus \beta|$, $\alpha \cdot \beta := |\alpha \times \beta|$, α^β *— мощность множества всех функций из* β *в* α

Теорема

Если α *— некоторое бесконечное кардинальное число, то* $\alpha \cdot \alpha = \alpha$

Теорема

Если $0 < \beta \leq \alpha$ *и* α *бесконечное, то* $\alpha \cdot \beta = \alpha$

Доказательство.

- $\alpha \cdot \beta \geq \alpha$: фиксируем $b_0 \in \beta$ (т.к. $\beta > 0$), тогда в качестве $f : \alpha \to \alpha \times \beta$ возьмём $f(a) = \langle a, b_0 \rangle$.
- $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha$.

$\square$

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е. $\langle j, y, n, p, r, c\rangle$:
   j — гёделев номер названия научного журнала (книги);
   y — год издания;
   n — номер;
   p — страница;
   r — строка;
   c — позиция

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е. $\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:
   j — гёделев номер названия научного журнала (книги);
   y — год издания;
   n — номер;
   p — страница;
   r — строка;
   c — позиция
2. Попробуете предъявить число x, не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ *для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность* D.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D.

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n. Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D.

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n. Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Пример

Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$,

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, *если:*

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — *сужение* F_n, P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*
$\forall x.\exists y.x \neq y$. *Истинно в* $\mathbb{N}$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — *элементарная подмодель* $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$*, если:*

1. $D' \subseteq D$*,* F'_n*,* P'_n *— сужение* F_n*,* P_n *(замкнутое на* D'*).*
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *при* $x_i \in D'$*.*

Пример

Когда сужение M *не является элементарной подмоделью?*
$\forall x.\exists y.x \neq y$*. Истинно в* $\mathbb{N}$*. Но пусть* $D' = \{0\}$*.*

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель $\mathcal{M}$. Тогда найдётся элементарная подмодель $\mathcal{M}'$, причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять D_i: $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \dots$, следя за мощностью. $D' = \cup D_i$.
3. Покажем, что $\langle D', F_n, P_n \rangle$ — требуемая подмодель.

$\square$

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{[\![f_k^0]\!]\}$, если есть хотя бы один f_k^0.
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D.

Очевидно, $|D_0| \le |T|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k. Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y.
   - 2.1 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
   - 2.2 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
   - 2.3 $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1}. Вместе добавим всевозможные $[\![\theta(y')]\!]$.

Оценка мощности D'

1. Всего добавили не больше $|T| \cdot |T|$ (для каждой формулы φ, возможно, будет добавлен y — и всевозможные выражения $\theta(y)$, допустимые в языке), и $|D_0| \leq |T| \leq |T| \cdot |T|$, отсюда $|D_k| \leq |T| \cdot |T|$.
2. $|D'| = |\bigcup D_i| \leq |T| \cdot |T| \cdot \aleph_0$.
3. Тогда $|T| \cdot |T| \cdot \aleph_0 = \max(|T|, \aleph_0)$. Разберём случаи:
   3.1 Если $|T| < \aleph_0$, тогда $(|T| \cdot |T|) \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
   3.2 Если $|T| \geq \aleph_0$, тогда $(|T| \cdot |T|) \cdot \aleph_0 = |T| \cdot \aleph_0 = |T|$.
4. Итого, $|D'| \leq \max(|T|, \aleph_0)$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению).

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от y, то тем более $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

$\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k+1$ связкой.
   - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
   - 2.2 $\tau \equiv \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t. Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от y, то тем более $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}'} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$.
   - 2.3 $\tau \equiv \exists y.\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ — аналогично.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — теория со счётным количеством формул. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.