

# Теоремы о формальной арифметике

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

## Определение

Формулой *Consis* назовём формулу  $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

# Consis

## Лемма

$\vdash 1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \alpha$  при любом  $\alpha$ .

## Определение

Обозначим за  $\psi(x, p)$  формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*:  $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$ , если  $p$  — гёделев номер доказательства  $\xi$ .

Обозначим  $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

## Определение

Формулой *Consis* назовём формулу  $\neg \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

Доказательство.

(неформально)

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ».

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ .



# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ , — и это можно доказать, то есть  $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .

# Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

## Теорема

*Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.*

## Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ ». То есть,  $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, p)$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . То есть, если Consis, то  $\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ , — и это можно доказать, то есть  $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ . Однако если формальная арифметика непротиворечива, то  $\not\vdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ .



## Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый  $\text{Consis}'$ :

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \\ \text{Consis}' &:= \neg \pi'(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то  $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$ :
  - ▶ если  $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$  и  $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = \text{И}$ , то  $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$
  - ▶ если  $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ , то  $\llbracket \psi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}, p) \rrbracket = \text{Л}$  при любом  $p$ .
2. Но  $\vdash \text{Consis}'$ .

# Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

## Определение

Будем говорить, что формула  $\psi$ , выражающая отношение *Proof*, формула  $\pi$  и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы  $\alpha$ :

1.  $\vdash \alpha$  влечет  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha})$
2.  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha})})$
3.  $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta})$

# Невыразимость доказуемости

## Определение

$$Th_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; Tr_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = \mathcal{I}\}$$

## Лемма

Пусть  $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$  для любой формулы  $\alpha(x)$ . Тогда  $D$  представима в формальной арифметике.

## Теорема

Если расширение Ф.А.  $S$  непротиворечиво и  $D$  представима в нём, то  $Th_S$  невыразимо в  $S$

## Доказательство.

Пусть  $\delta(a, p)$  представляет  $D$ , и пусть  $\sigma(x)$  выражает множество  $Th_S$  (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть  $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$ . Верно ли, что  $\ulcorner \alpha \urcorner \in Th$ ?



# Неразрешимость формальной арифметики

## Теорема

*Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима*

## Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция  $f(x)$ :  $f(x) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x \in \text{Th}_{\text{Ф.А.}}$ . То есть,  $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$  выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости,  $\text{Th}_{\text{Ф.А.}}$  невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. □

# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in Tr_{ФА}$ .*

### Доказательство.

Пусть теория  $\mathcal{S}$  — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что  $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$ . То есть  $Tr_{ФА}$  невыразимо в  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi$  таково, что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  при  $x \in Tr$ . Тогда  $\vdash \varphi(x)$ , если  $x \in Tr$  и  $\vdash \neg \varphi(x)$ , если  $x \notin Tr$ .

Тогда  $Tr$  выразимо в  $\mathcal{S}$ . Противоречие.





# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in Tr_{ФА}$ .*

### Доказательство.

Пусть теория  $\mathcal{S}$  — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что  $Th_{\mathcal{S}} = Tr_{\mathcal{S}} = Tr_{ФА}$ . То есть  $Tr_{ФА}$  невыразимо в  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi$  таково, что  $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = И$  при  $x \in Tr$ . Тогда  $\vdash \varphi(x)$ , если  $x \in Tr$  и  $\vdash \neg \varphi(x)$ , если  $x \notin Tr$ .

Тогда  $Tr$  выразимо в  $\mathcal{S}$ . Противоречие. □

Однако, если взять  $D = \mathbb{R}$ , истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Положительные результаты про исчисления.

## Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- По теореме о полноте можем рассматривать  $(\models)$  вместо  $(\vdash)$ . Напомним:  $M \models \alpha$ , если для всех  $M = \langle D, F, P, E \rangle$  выполнено  $M \models \alpha$ .

## Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать ( $\models$ ) вместо ( $\vdash$ ). Напомним:  $M \models \alpha$ , если для всех  $M = \langle D, F, P, E \rangle$  выполнено  $M \models \alpha$ .
- ▶ Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком большое разнообразие  $D$ , включая несчётные;
  3. даже  $D = \mathbb{N}$  в формальной арифметике представляет проблему.

# Что можно сделать для разрешимости исчисления предикатов?

- ▶ По теореме о полноте можем рассматривать  $(\models)$  вместо  $(\vdash)$ . Напомним:  $M \models \alpha$ , если для всех  $M = \langle D, F, P, E \rangle$  выполнено  $M \models \alpha$ .
- ▶ Что мешает:
  1. слишком сложные формулы — кванторы по бесконечным множествам;
  2. слишком большое разнообразие  $D$ , включая несчётные;
  3. даже  $D = \mathbb{N}$  в формальной арифметике представляет проблему.
- ▶ Будем последовательно бороться:
  1. упростим формулу (борьба с кванторами);
  2. заменим произвольное  $D$  на какое-то рекурсивно-перечислимое множество, устроенное некоторым фиксированным образом (борьба с разнообразием  $D$ );
  3. устроим правильный перебор, позволяющий быстро находить решения, если они есть (борьба с бесконечностью  $D$ ).

## Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем  $D$ .
3. Правильный перебор

## Упрощаем формулу $\alpha$ . Сколемизация

1. Предварённая форма (поверхностные кванторы) — для примера возьмём чередующиеся:

$$\beta := \forall x_1. \exists x_2. \forall x_3. \exists x_4 \dots \forall x_{n-1}. \exists x_n. \varphi$$

2. Убрать кванторы существования: заменим  $x_{2k}$  функциями Сколема  $e_{2k}(x_1, x_3, \dots, x_{2k-1})$ . Получим:

$$\gamma := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \varphi[x_2 := e_2(x_1), x_4 := e_4(x_1, x_3), \dots, x_n := e_n(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]$$

3. КНФ (с конъюнктов, в каждом  $d(c)$  дизъюнктов):

$$\delta := \forall x_1. \forall x_3 \dots \forall x_{n-1}. \bigwedge_c \left( \bigvee_{i=1, d(c)} (\neg) P_i(\theta_i) \right)$$

4. Исходная задача: проверка  $\vdash \alpha$ . Это эквивалентно  $\vdash \beta$ . Эквивалентно  $\models \beta$ . Эквивалентно выполнимости  $\delta$  при всех  $D$  (найдутся  $e_i$ , что  $\llbracket \delta \rrbracket = \text{И}$ ).

## Шаги рассуждения

1. Упростим формулу — поверхностные кванторы всеобщности, сколемизация.
2. Заменяем  $D$ .
3. Правильный перебор



# Эрбранов универсум.

## Определение

$H_0(\varphi)$  — все константы в формуле  $\varphi$  (либо особая константа  $a$ , если констант в  $\varphi$  нет)

$H_{k+1}(\varphi) = H_k(\varphi)$  и все функции от значений  $H_k(\varphi)$  (как строки)

$H = \cup H_n(\varphi)$  — основные термы.

## Пример

$P(a) \vee Q(f(b))$ :

$$H_0 = \{a, b\}$$

$$H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$$

$$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b))\}$$

...

$$H = \{f^{(n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0, x \in \{a, b\}\}$$

Выполнимость не теряется. Заменяем  $D$  на  $H$

## Теорема

*Формула выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима на Эрбрановом универсуме.*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  Пусть  $M \models \forall \bar{x}.\varphi$ . Тогда построим отображение  $\text{eval} : H \rightarrow M$  (смысл названия вдохновлён языками программирования:  $\text{eval}("f(f(b))")$  перейдёт в  $f(f(b))$ , где  $f$  и  $b$  — из  $M$ ).

Предикатам дадим согласованную оценку:

$P_H(t_1, \dots, t_n) = P_M(\text{eval}(t_1), \dots, \text{eval}(t_n))$ . Очевидно, любая формула сохранит своё значение, кванторы всеобщности по меньшему множеству также останутся истинными.

$(\Leftarrow)$  Очевидно.

