

# ЭТО БАЗА

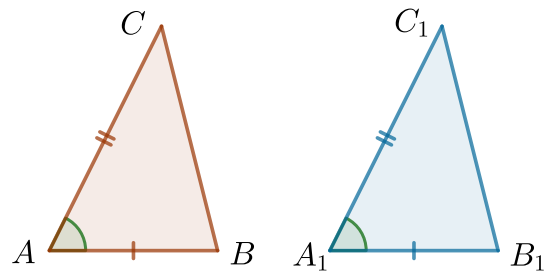
## Содержание

<b>1</b>	<b>Признаки равенства треугольников (6:50)</b>	<b>2</b>
1.1	Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)	2
1.2	Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам)	2
1.3	Третий признак (по трем сторонам)	2
<b>2</b>	<b>Свойства и признаки параллельных прямых (9:00)</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Вертикальные углы (9:30)</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Смежные углы (9:40)</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Сумма углов треугольника, внешний угол (9:50)</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Параллелограмм (8:30)</b>	<b>3</b>
6.1	Свойства (11:35)	3
6.2	Признаки (12:50)	3
<b>7</b>	<b>Теорема Фалеса (15:25)</b>	<b>4</b>
7.1	Прямая теорема Фалеса	4
7.2	Обратная теорема Фалеса (21:00)	4
<b>8</b>	<b>Средняя линия треугольника (23:00)</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>Обобщенная теорема Фалеса (т. о пропорциональных отрезках)</b>	<b>5</b>
9.1	Прямая теорема о пропорциональных отрезках (29:15)	5
9.2	Обратная теорема о пропорциональных отрезках (34:40)	5
<b>10</b>	<b>Биссектриса (40:00)</b>	<b>5</b>
10.1	Что такое биссектриса?	5
10.2	Бомбическое свойство биссектрисы (42:50)	5
10.3	Точка пересечения биссектрис, вписанная окружность (48:34)	6
10.4	Биссектриса в параллелограмме (54:50)	6
10.5	Углы между биссектрисами (57:00)	6
<b>11</b>	<b>Высота (1:22:00)</b>	<b>7</b>
11.1	Что такое высота и ортоцентр?	7
<b>12</b>	<b>Медиана (1:01:35)</b>	<b>8</b>
12.1	Что такое медиана?	8
12.2	Удвоение медианы (1:11:50)	8
12.3	Точка пересечения медиан (1:02:50)	8
12.4	Медиана прямоугольного треугольника (1:15:05)	9
<b>13</b>	<b>Серединный перпендикуляр и описанная окружность (1:26:05)</b>	<b>9</b>
13.1	Что такое серединный перпендикуляр?	9
13.2	Точка пересечения серединных перпендикуляров	10

# 1 Признаки равенства треугольников (6:50)

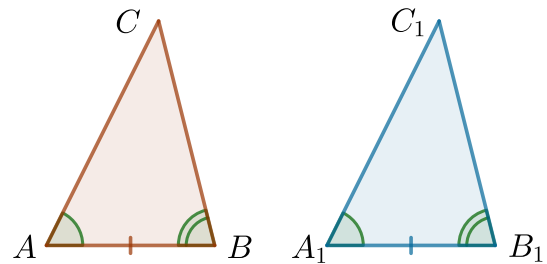
## 1.1 Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)

Если  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и  $\angle A = \angle A_1$ ,  
то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .



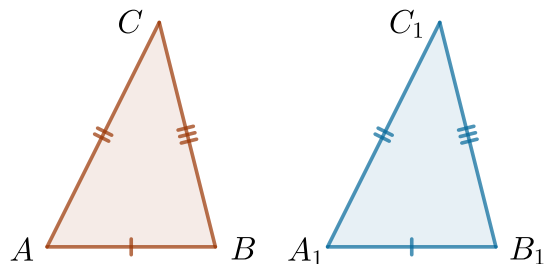
## 1.2 Второй признак (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Если  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  и  $\angle B = \angle B_1$ ,  
то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .



## 1.3 Третий признак (по трем сторонам)

Если  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и  $BC = B_1C_1$ ,  
то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .



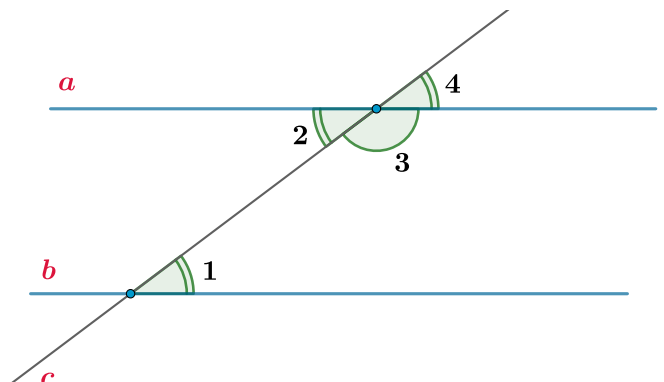
# 2 Свойства и признаки параллельных прямых (9:00)

Три свойства: если  $a \parallel b$  и  $c$  — секущая, то

1.  $\angle 1 = \angle 2$  (накрест лежащие углы)
2.  $\angle 1 = \angle 4$  (соответственные углы)
3.  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$  (односторонние углы)

Три признака:  $a \parallel b$  при секущей  $c$ , если:

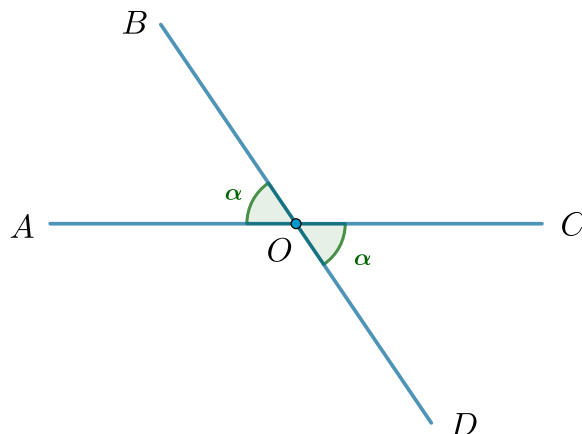
1.  $\angle 1 = \angle 2$  (накрест лежащие углы)
2.  $\angle 1 = \angle 4$  (соответственные углы)
3.  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$  (односторонние углы)



### 3 Вертикальные углы (9:30)

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны.

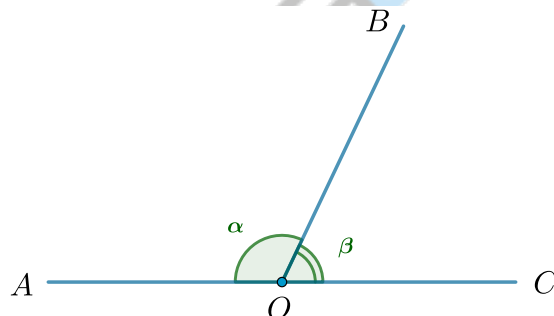
$$\angle AOB = \angle COD$$



### 4 Смежные углы (9:40)

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями друг друга, называются смежными. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

$$\angle AOB + \angle BOC = \alpha + \beta = 180^\circ$$

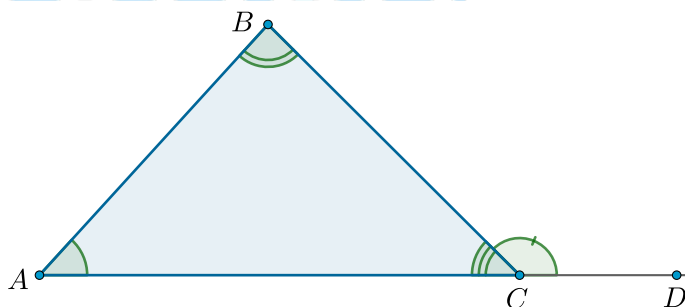


### 5 Сумма углов треугольника, внешний угол (9:50)

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .  
Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$$



### 6 Параллелограмм (8:30)

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

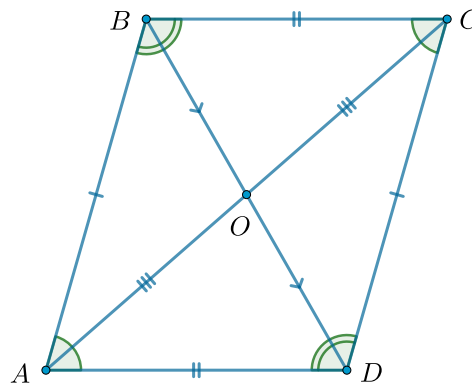
#### 6.1 Свойства (11:35)

1. Противоположные стороны попарно равны.
2. Противоположные углы попарно равны.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

#### 6.2 Признаки (12:50)

Четырехугольник является параллелограммом, если

1. Противоположные стороны попарно равны.
2. Две стороны равны и параллельны.
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.



## 7 Теорема Фалеса (15:25)

### 7.1 Прямая теорема Фалеса

Если параллельные прямые пересекают на одной из сторон угла равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

#### Доказательство

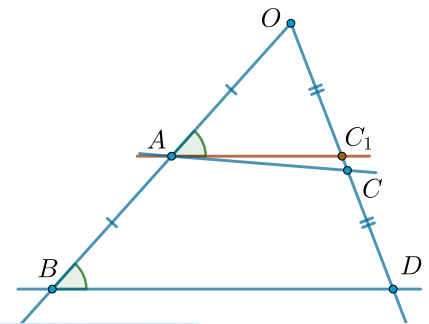
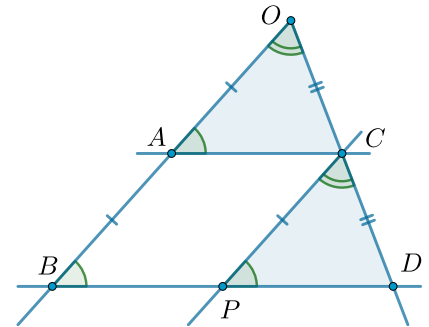
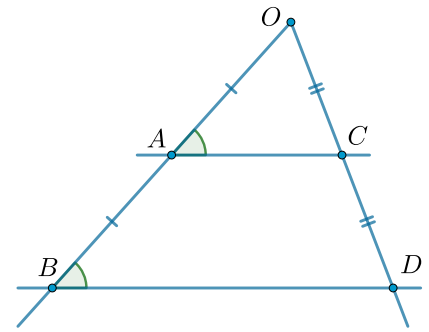
Пусть первая прямая соответственно пересекает стороны угла с вершиной  $O$  в точках  $A$  и  $C$ , а вторая — в точках  $B$  и  $D$ , и  $OA = AB$ .

Проведем через точку  $C$  прямую  $CP \parallel AB$ . Тогда  $BACP$  — параллелограмм (т.к.  $CP \parallel AB$  и  $AC \parallel BD$ ). Тогда  $AB = CP$ .

Так как  $AB \parallel CP$ , то  $\angle CPD = \angle ABD$  и  $\angle PCD = \angle AOC$ .

Так как  $AC \parallel BD$ , то  $\angle OAC = \angle ABD$ .

Значит,  $\angle CPD = \angle OAC$ . Тогда  $\triangle AOC = \triangle PCD$  по второму признаку. Следовательно,  $OC = CD$ .



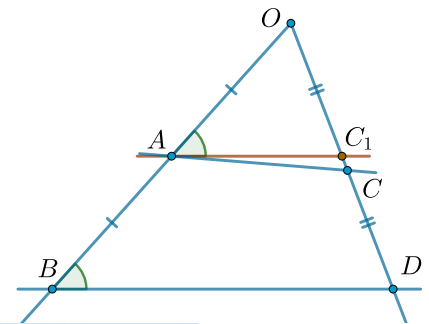
### 7.2 Обратная теорема Фалеса (21:00)

Если прямые пересекают равные отрезки на сторонах угла, то прямые параллельны.

#### Доказательство

Пусть первая прямая соответственно пересекает стороны угла с вершиной  $O$  в точках  $A$  и  $C$ , а вторая — в точках  $B$  и  $D$ .

Тогда предположим противное. Пусть  $AC \nparallel BD$ . Тогда проведем  $AC_1 \parallel BD$ . По теореме Фалеса  $OC_1 = C_1D$ . Значит, и точка  $C$ , и точка  $C_1$  делят отрезок  $OD$  пополам. Противоречие, следовательно,  $AC \parallel BD$ .



## 8 Средняя линия треугольника (23:00)

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Средняя линия треугольника равна половине третьей стороны и параллельна ей, то есть

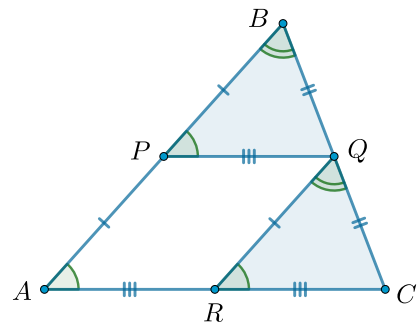
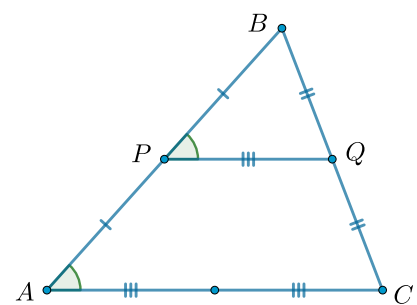
$$PQ = \frac{1}{2}AC \text{ и } PQ \parallel AC$$

#### Доказательство

1)  $PQ$  — средняя линия, то есть  $AP = PB$  и  $CQ = QB$ .

Тогда по обратной теореме Фалеса  $PQ \parallel AC$ .

2) Проведем через точку  $Q$  прямую  $OR \parallel AB$ . Тогда  $\triangle PBQ = \triangle RQC$  по второму признаку. Значит,  $PQ = RC$ . С другой стороны,  $APQR$  — параллелограмм, следовательно,  $PQ = AR$ . Тогда  $PQ = \frac{1}{2}AC$ .

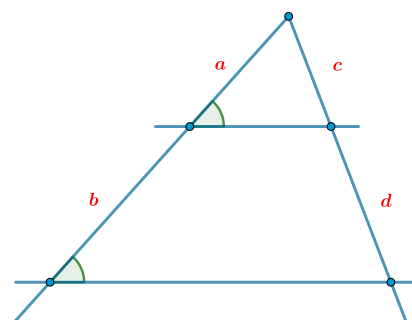


## 9 Обобщенная теорема Фалеса (т. о пропорциональных отрезках)

### 9.1 Прямая теорема о пропорциональных отрезках (29:15)

Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



### 9.2 Обратная теорема о пропорциональных отрезках (34:40)

Если прямые отсекают пропорциональные отрезки на сторонах угла, то прямые параллельны.

## 10 Биссектриса (40:00)

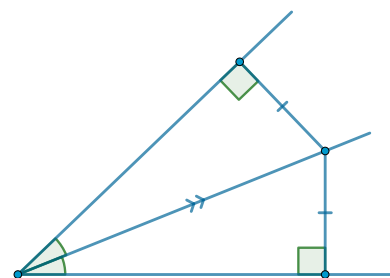
### 10.1 Что такое биссектриса?

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных.

Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Верно и обратное: если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.

#### Доказательство

В обоих случаях образующиеся прямоугольные треугольники будут равны. В первом — по острому углу и гипотенузе, а во втором — по катету и гипотенузе.



### 10.2 Бомбическое свойство биссектрисы (42:50)

Пусть  $BL$  — биссектриса в треугольнике  $ABC$ . Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$

#### Доказательство

Проведем через точку  $C$  прямую  $CP \parallel BL$ . Тогда  $\angle LBC = \angle PCB$  как накрест лежащие, образованные параллельными прямыми  $CP$  и  $BL$  и секущей  $BC$ . Также  $\angle ABL = \angle BPC$  как соответственные, образованные параллельными прямыми  $CP$  и  $BL$  и секущей  $BC$ .

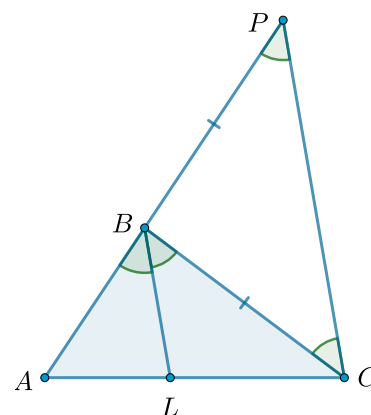
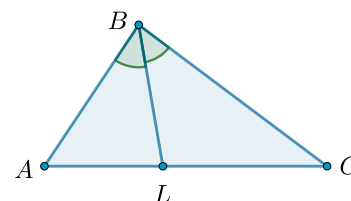
$BL$  — биссектриса, значит,

$$\angle PCB = \angle LBC = \angle ABL = \angle BPC$$

Таким образом,  $\triangle BCP$  — равнобедренный, то есть  $BC = BP$ .

По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BP} = \frac{AB}{BC}$$



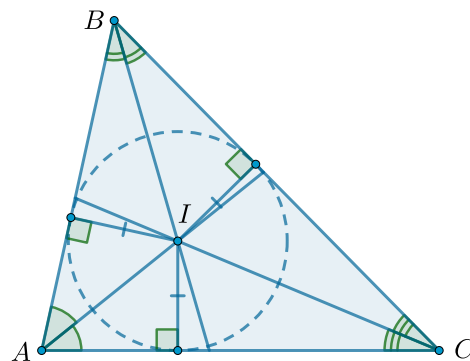
### 10.3 Точка пересечения биссектрис, вписанная окружность (48:34)

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности этого треугольника.

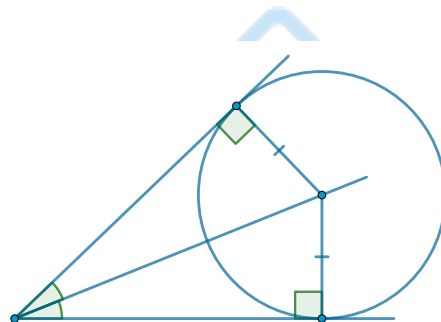
#### Доказательство

Пусть  $I$  — точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ . Тогда расстояния от точки  $I$  до прямых  $AB$  и  $AC$  равны и расстояния от точки  $I$  до прямых  $BA$  и  $BC$  равны, значит, расстояния от точки  $I$  до прямых  $CA$  и  $CB$  также равны. Таким образом,  $I$  лежит на биссектрисе угла  $C$  треугольника  $ABC$ .

Мы получили, что расстояния от точки  $I$  до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  равны, значит,  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .



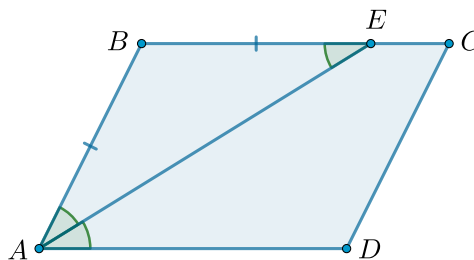
Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла.



### 10.4 Биссектриса в параллелограмме (54:50)

Биссектриса  $AE$  параллелограмма  $ABCD$  отсекает от него равнобедренный треугольник, то есть

$$\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA \Rightarrow AB = BE$$



### 10.5 Углы между биссектрисами (57:00)

Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны.

#### Доказательство 1

Биссектриса  $AE$  отсекает равнобедренный треугольник, значит,  $AB = BE$ .  $BO$  — биссектриса, выходящая из вершины равнобедренного треугольника, тогда она также является высотой. Следовательно,  $BO \perp AO$ .

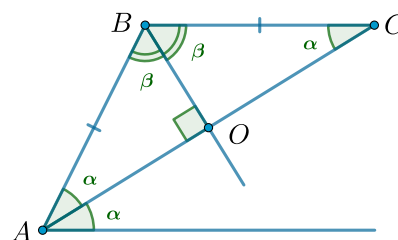
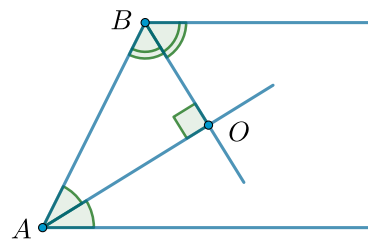
#### Доказательство 2

Сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ , то есть

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

По сумме углов треугольника  $ABO$

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle BAO + \angle ABO) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$$

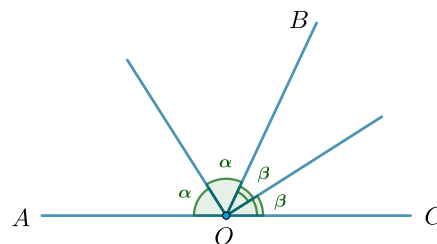


Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

### Доказательство (1:36:40)

Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ , то есть

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$



Пусть угол  $B$  треугольника  $ABC$  равен  $\alpha$ . Тогда угол между биссектрисами углов  $A$  и  $C$  равен  $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .

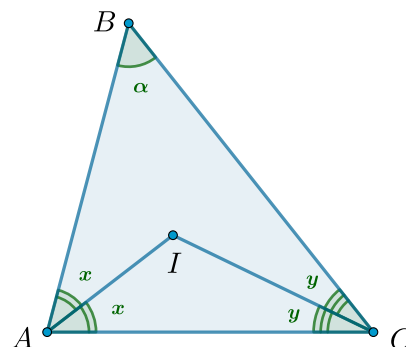
### Доказательство (1:31:40)

Пусть биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $I$ . Пусть  $\angle BAI = \angle IAC = x$ ,  $\angle BCI = \angle ICA = y$ . Тогда по сумме углов треугольника  $ABC$

$$2x + 2y = 180^\circ - \alpha \Rightarrow x + y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

По сумме углов треугольника  $ACI$

$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$



## 11 Высота (1:22:00)

### 11.1 Что такое высота и ортоцентр?

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

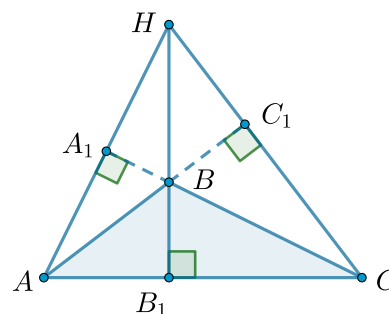
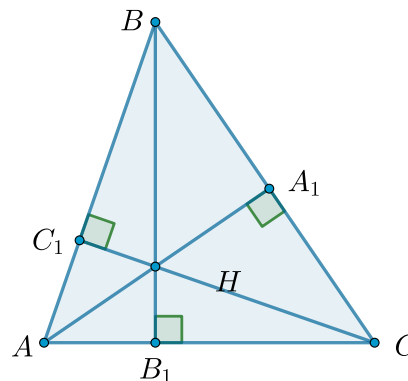
Три высоты треугольника, как три медианы и три биссектрисы, пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром.

Высота, опущенная из вершины острого угла тупоугольного треугольника, падает на продолжение противоположной стороны.

Важно помнить, что формула площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

где  $h$  — высота,  $a$  — сторона, на которую она опущена, работает для любого треугольника (даже для тупоугольного).



## 12 Медиана (1:01:35)

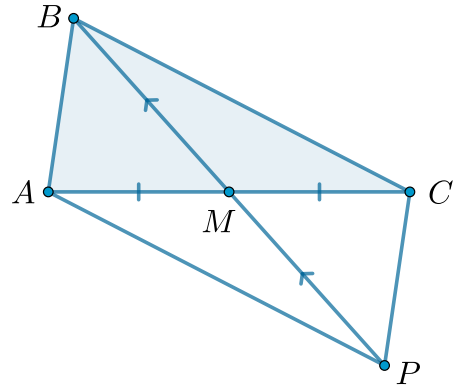
### 12.1 Что такое медиана?

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.

### 12.2 Удвоение медианы (1:11:50)

Удвоение медианы — это практически самое популярное и действенное дополнительное построение в задачах с медианой.

Возьмем треугольник  $ABC$  и продлим его медиану  $BM$  на свою длину за точку  $M$ . Пусть мы получили точку  $P$ . Тогда диагонали четырехугольника  $ABCP$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит,  $ABCP$  — параллелограмм.



### 12.3 Точка пересечения медиан (1:02:50)

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точкой пересечения делятся в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины:

$$AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$$

#### Доказательство

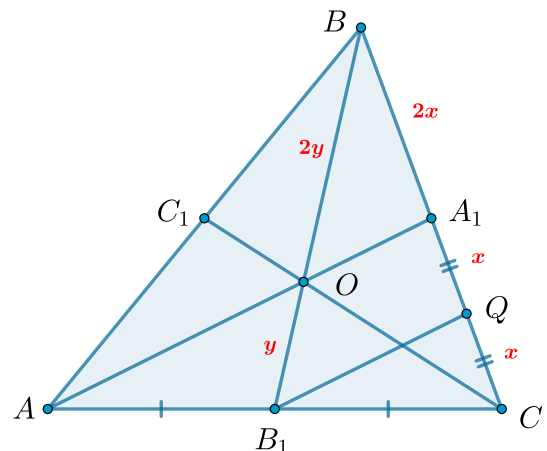
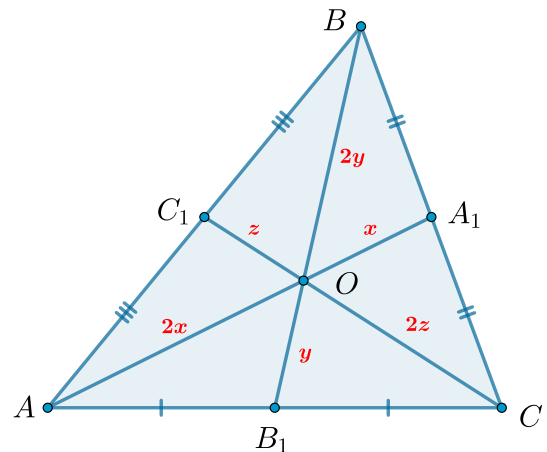
Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — медианы треугольника  $ABC$ ,  $O$  — их точка пересечения. Докажем, что  $AO : OA_1 = 2 : 1$ .

Проведем через точку  $B_1$  прямую  $B_1Q \parallel AA_1$ . Тогда, так как  $AB_1 = B_1C$ , по теореме Фалеса  $CQ = QA_1$ .

Пусть  $CQ = QA_1 = x$ .  $A_1$  — середина  $BC$ , тогда  $BA_1 = CA_1 = 2x$ . По теореме о пропорциональных отрезках для угла  $B_1BC$  и параллельных прямых  $AA_1$  и  $B_1Q$  имеем

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1Q} = \frac{2x}{x} = 2$$

Таким образом, мы получили, что медиана  $AA_1$  делит медиану  $BB_1$  в отношении  $2 : 1$  считая от вершины. Аналогично докажем, что медиана  $CC_1$  делит медиану  $BB_1$  в отношении  $2 : 1$  считая от вершины. На  $BB_1$  такая точка единственна, значит, три медианы пересекаются в ней.





## 12.4 Медиана прямоугольного треугольника (1:15:05)

Медиана треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = MB$$

Таким образом, получаются два равнобедренных треугольника:  $\triangle ACM$  и  $\triangle CBM$ .

### Доказательство

Удвоим медиану  $CM$ . Пусть мы получили точку  $D$ . Тогда  $ADBC$  — параллелограмм с прямым углом  $C$ , значит,  $ADBC$  — прямоугольник.

Диагонали прямоугольника разбиваются на 4 равных отрезка, следовательно,  $CM = AM = BM$ .

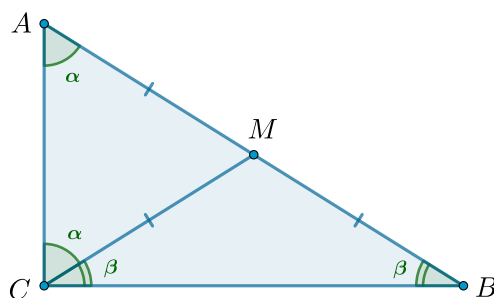
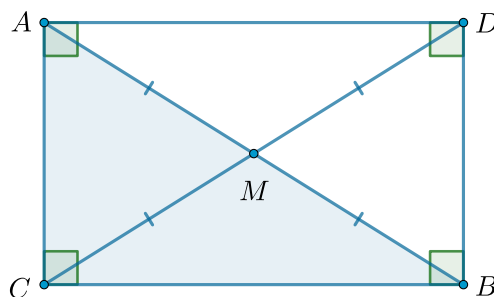
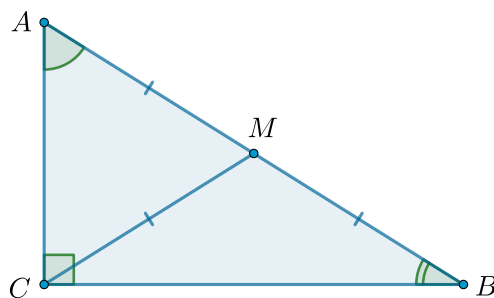
### Обратная теорема

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой проведена, то этот треугольник прямоугольный.

### Доказательство

Пусть медиана  $CM$  равна половине стороны  $AB$ . Тогда  $CM = AM = BM$ . Заметим, что  $\triangle ACM$  и  $\triangle BCM$  равнобедренные. Тогда пусть  $\angle MAC = \angle MCA = \alpha$  и  $\angle MBC = \angle MCB = \beta$ . По сумме углов треугольника имеем

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$



## 13 Серединный перпендикуляр и описанная окружность (1:26:05)

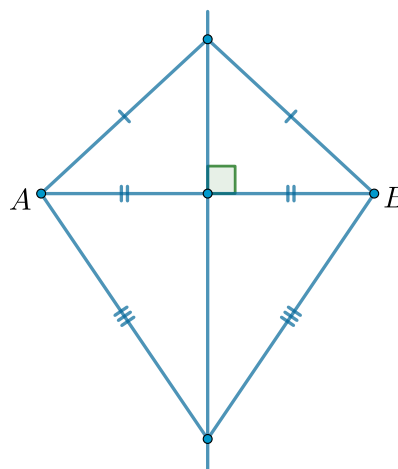
### 13.1 Что такое серединный перпендикуляр?

Серединный перпендикуляр — прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину.

Любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалена от его концов. Верно и обратное: если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

### Доказательство

В обоих случаях образующиеся прямоугольные треугольники будут равны. В первом — по двум катетам, а во втором — по катету и гипотенузе.



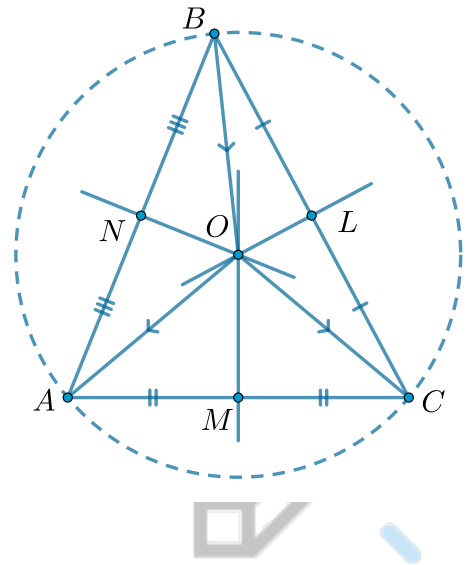
### 13.2 Точка пересечения серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности этого треугольника.

#### Доказательство

Пусть  $O$  — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , а  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ . Тогда расстояния от точки  $O$  до точек  $A$  и  $B$  равны и расстояния от точки  $O$  до точек  $A$  и  $C$  равны, значит, расстояния от точки  $O$  до точек  $B$  и  $C$  также равны. Таким образом,  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ .

Мы получили, что расстояния от точки  $O$  до точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны, значит,  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .



ШКОЛКОВО