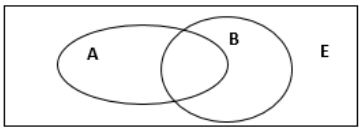
R1.06 – MATHEMATIQUES DISCRETES

PREMIERE PARTIE : ENSEMBLES

QCM PARTITIONS (COURS)

QCM1

Parmi les ensembles suivants, préciser (en justifiant) ceux qui sont des partitions de E :



- $\{A, \bar{A}\}$ **: partition**
- $\{A \cup B, \overline{A \cup B}\}$ **: partition**
- $\{A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \overline{A \cup B}\}$: **partition**
- $\{A, B, \overline{A \cup B}\}$: **A et B ne sont pas disjoint, $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}\}$ n'est pas une partition**
- $\{A, \bar{A}, C, \bar{C}\}$: **A et C ne sont pas disjoint, $\{\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{C}, \bar{\boldsymbol{C}}\}$ n'est pas une partition**

QCM2

Soit S un ensemble non vide et soit Q une partition de S.
Dégagez le vrai du faux parmi les énoncés suivants :

- $Q \in P(S)$: **Faux**
- $Q \subset P(S)$: **Vrai**
- $Q \in P\big(P(S)\big)$: **Vrai**

Pour illustrer ces réponses prenons comme exemple de partition $Q = \{TD1, TD2, TD3\}$ partition de S, ensemble des étudiants de S1.

$TD1 \subset S, TD2 \subset S, TD3 \subset S$

$donc\ TD1 \in P(S), TD2 \in P(S), TD3 \in P(S)$

$donc\ \{TD1, TD2, TD3\} \subset P(S)$: $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S})$ **et** $\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}))$

EXERCICES

QCM 1 : APPARTENANCE-INCLUSION

Soit $\boldsymbol{S}$ un ensemble, $\boldsymbol{A}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{a}$ un élément de $\boldsymbol{A}$.

	Vrai	Faux	*Commentaires*
$A \in S$	☐	☒	A sous ensemble de S : $A \subset S$
$a \in S$	☒	☐	A est un sous-ensemble de S donc tous les éléments de A appartiennent à S : a est élément de A donc a est aussi élément de S
$a \in P(\{a\})$	☐	☒	$P(\{a\}) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$ donc on peut dire que $\{a\} \in P(\{a\})$ mais pas que $a \in P(\{a\})$
$\{a\} \subset P(A)$	☐	☒	$a \in A$ donc $\{a\} \subset A$ donc $\{a\} \in P(A)$ On ne peut pas dire $\{a\} \subset P(A)$, on pourrait dire $\big\{\{a\}\big\} \subset P(A)$ …
$A \subset S$	☒	☐	$\boldsymbol{A}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{S}$: $A \subset S$
$\{A\} \in S$	☐	☒	$A \subset S$ donc $\{A\} \in P(S)$
$\{a\} \subset P(\{a\})$	☐	☒	$\{a\} \subset \{a\}$ donc $\{a\} \in P(\{a\})$

EXERCICE 1 : OPERATIONS - SIGNIFICATION

On s'intéresse aux étudiants d'une faculté F. On note M l'ensemble des étudiants suivant le cours de mathématique, I l'ensemble des étudiants suivant le cours d'informatique et E l'ensemble des étudiants suivant le cours d'économie.

Exprimer en fonction de M,I et E les ensembles suivants :

a. E_1 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent aucun des trois cours
$\boldsymbol{E_1 = \overline{M} \cap \overline{I} \cap \overline{E} = \overline{M \cup E \cup I}}$

b. E_2 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent que le cours d'économie
$\boldsymbol{E_2 = \overline{M} \cap \overline{I} \cap E}$ (étudiants qui suivent le cours d'économie et qui ne suivent ni le cours de math, ni le cours d'informatique)

c. E_3 : L'ensemble des étudiants qui suivent le cours d'économie et le cours de math mais pas celui d'informatique
$\boldsymbol{E_3 = M \cap \overline{I} \cap E = (M \cap E) \setminus I}$

d. E_4 : L'ensemble des étudiants qui suivent au plus deux des trois cours.

- Une méthode un peu longue : $\boldsymbol{E_4 = C_0 \cup C_1 \cup C_2}$

Où $\boldsymbol{C_0}$ = {étudiants ne suivant aucun cours}, $\boldsymbol{C_1}$ = {étudiants suivant un seul cours} et $\boldsymbol{C_2}$ = {étudiants suivant deux cours}

$\boldsymbol{C_0 = E_1 = \overline{M} \cap \overline{I} \cap \overline{E}}$

$\boldsymbol{C_1}$ = {étudiants suivant uniquement le cours d'économie}
∪ {étudiants suivant uniquement le cours de math}
∪ {étudiants suivant uniquement le cours d'informatique}

$\boldsymbol{C_1 = (\overline{M} \cap \overline{I} \cap E) \cup (\overline{E} \cap \overline{I} \cap M) \cup (\overline{M} \cap \overline{E} \cap I)}$

$\boldsymbol{C_2}$ = {étudiants suivant uniquement les cours d'économie et de math}
∪ {étudiants suivant uniquement les cours d'économie et d'informatique}
∪ {étudiants suivant uniquement le cours d'informatique et de math}

$\boldsymbol{C_2 = (M \cap \overline{I} \cap E) \cup (\overline{M} \cap I \cap E) \cup (M \cap \overline{E} \cap I)}$

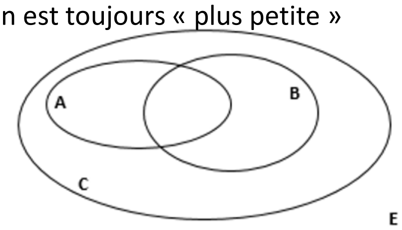
$\boldsymbol{E_4 = C_0 \cup C_1 \cup C_2}$
$\boldsymbol{= (\overline{M} \cap \overline{I} \cap \overline{E}) \cup (\overline{M} \cap \overline{I} \cap E) \cup (\overline{E} \cap \overline{I} \cap M) \cup (\overline{M} \cap \overline{E} \cap I) \cup (M \cap \overline{I} \cap E) \cup (\overline{M} \cap I \cap E)}$
$\boldsymbol{\cup (M \cap \overline{E} \cap I)}$

- Plus rapide, en passant par le complémentaire de $\boldsymbol{E_4}$. On peut remarquer que les étudiants qui ne suivent pas « au plus deux cours » sont les étudiants qui suivent les trois cours : $\boldsymbol{\overline{E_4} = M \cap I \cap E}$
Donc $\boldsymbol{E_4 = \overline{M \cap I \cap E} = \overline{M} \cup \overline{E} \cup \overline{I}}$
Ce qui veut dire aussi que si on suit au plus deux cours, il y a au moins un des trois cours que l'on ne suit pas (l'union traduit « au moins un »)

QCM 2

A, B et C sont trois sous-ensembles de E. On suppose que A et B sont inclus dans C.

$\bar{A} \cap C \subset C$	☒ Vrai	☐ Faux	l'intersection est toujours « plus petite »
$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{C}$	☐ Vrai	☒ Faux	
$A \cap C = C$	☐ Vrai	☒ Faux	$A \cap C = A$
$A \cup B \cup C = C$	☒ Vrai	☐ Faux	



QCM 3 : PARTITIONS

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Parmi les ensembles suivants, cochez les partitions de E :

☒ $\{A \cup B, \overline{AUB}\}$

☐ $\{A, \bar{A}, C, \bar{C}\}$
☒ $\{A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}, C \cap \bar{A} \cap \bar{B}\}$
☐ $\{A \cup B \cup C, \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}\}$
☒ $\{A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cap B, \overline{A \cup B}\}$

QCM4 : PARTITIONS, APPARTENANCE, INCLUSION

Soit E un ensemble, $P = \{A, B, C\}$ une partition de E, $\boldsymbol{a}$ un élément de A et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

$P \in P(E)$	☐ Vrai	☒ Faux
$\{a\} \in P(A)$	☒ Vrai	☐ Faux
$A \in P$	☒ Vrai	☐ Faux
$B \subset P$	☐ Vrai	☒ Faux
$A \cup B \subset P$	☐ Vrai	☒ Faux
$\{A, B\} \subset P$	☒Vrai	☐ Faux
$a \in P$	☐ Vrai	☒Faux
$\{A\} \in P$	☐ Vrai	☒ Faux

QCM5 : PARTITIONS, ENSEMBLE DES PARTIES

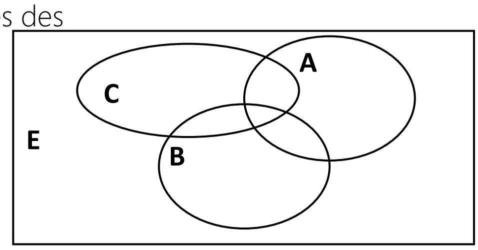
Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

$P(E)$ est une partition de E	☐ Vrai	☒ Faux
Une partition de E est incluse dans E	☐ Vrai	☒ Faux
$E \in P(E)$	☒ Vrai	☐ Faux

PROPRIETES DES OPERATIONS - DISTRIBUTIVITE ET LOIS DE MORGAN

EXERCICE 1 : ENTRAINEMENT A LA REDACTION

Simplifiez les expressions ci-dessus en utilisant les propriétés des opérations ensemblistes.

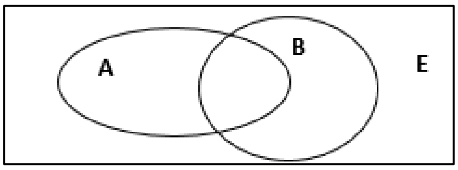


- $A \cup (A \cap B)$
  $\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A}$ **car** $\boldsymbol{(A \cap B) \subset A}$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
  $\boldsymbol{(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap E = A}$
- $\big(A \cup (A \cap B)\big) \cap B$
  $\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A}$ **car** $\boldsymbol{(A \cap B) \subset A}$ **donc** $\boldsymbol{\big(A \cup (A \cap B)\big) \cap B = A \cap B}$
- $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \bar{A})$
  $\boldsymbol{(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \bar{A}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (C \cup \bar{A}) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap (C \cup \bar{A}) = \bar{A} \cap \bar{B}}$ **car** $\boldsymbol{\bar{A} \subset C \cup \bar{A}}$
- $\big((A \cup B) \cap C\big) \cup B$
  $\boldsymbol{\big((A \cup B) \cap C\big) \cup B = \big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \cup B = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup B}$
  $\boldsymbol{= (A \cap C) \cup B}$ **car** $\boldsymbol{(B \cap C) \subset B}$
- $\big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)\big) \cap \bar{B}$
  $\boldsymbol{\big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)\big) \cap \bar{B} = (A \cap B \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C \cap \bar{B}) = (A \cap \emptyset) \cup (\bar{A} \cap C \cap \emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset}$
- $\big((A \cap \bar{B}) \cup \bar{B}\big) \cap C$
  $\boldsymbol{(A \cap \bar{B}) \cup \bar{B} = \bar{B}}$ **car** $\boldsymbol{(A \cap \bar{B}) \subset \bar{B}}$
  Donc $\boldsymbol{\big((A \cap \bar{B}) \cup \bar{B}\big) \cap C = \bar{B} \cap C}$
- $\big((C \cup A) \cap (\bar{B} \cup C)\big) \cup A$
  $\boldsymbol{\big((C \cup A) \cap (\bar{B} \cup C)\big) \cup A = \big(C \cup (A \cap \bar{B})\big) \cup A = C \cup (A \cap \bar{B}) \cup A = C \cup A}$
  car $\boldsymbol{(A \cap \bar{B}) \subset A}$

QCM 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Parmi les ensembles suivants, précisez ceux qui sont égaux à A :

- $A \cup (A \cap B) = \boldsymbol{A}$ car $(A \cap B) \subset A$
- $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cup (B \cap \bar{B}) = A \cup \emptyset = \boldsymbol{A}$
- $A \cap (A \cup B) = \boldsymbol{A}$ car $A \subset (A \cup B)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \backslash B) = \mathbf{A}$



QCM 2

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Parmi les assertions suivantes, précisez celles qui sont vraies (pour que l'assertion soit vraie, il faut que **l'égalité et la justification** soient vraies)

☐ $B \cup (\bar{B} \cap A) = (B \cup \bar{B}) \cap A$ car la réunion et l'intersection sont associatives

La justification n'est pas bonne : il aurait fallu dire « car la réunion est distributive par rapport à l'intersection »

☐ $A \cap (B \cup A) = A \cup B$ car $A \subset A \cup B$

$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ *car* $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

☒ $A \cup (B \cap A) = A$ car $A \cap B \subset A$

QCM 3

$\big(E \cup (E \cap F)\big) \cap F$	*est égal à :*	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☒ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cap (E \cup F)$	*est égal à :*	☒ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cup (E \cap F)$	*est égal à :*	☒ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$(E \cap F) \cap (E \cup \bar{F})$	*est égal à :*	☐ E	☐ F	☒ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cap (\bar{E} \cup F)$	*est égal à :*	☐ E	☐ F	☒ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$F \cup (E \cap \bar{F})$	*est égal à :*	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☒ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cup \overline{\big(\bar{F} \cup (\bar{F} \cap E)\big)}$	*est égal à :*	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☒ $E \cup F$	☐ $\varnothing$

EXERCICE 2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble, noté $A \Delta B$, défini par :

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \;\; ou \;\; A \Delta B = (A \cup B) \backslash (B \cap A)$$

3. Montrer que les deux expressions ci-dessus sont équivalentes.

   $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \backslash (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\overline{\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\boldsymbol{A}})$

   On développe (double distributivité) :

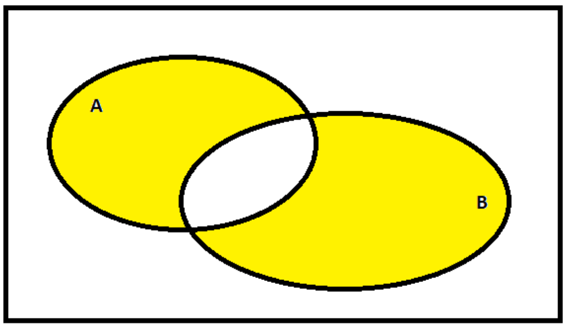
   $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\boldsymbol{B} \cup \overline{\boldsymbol{A}})$

   Or $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \emptyset$ et $\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \emptyset$

   Donc $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A})$

   $$\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \backslash (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A})$$

4. Représenter la différence symétrique sur un diagramme de Venn.



3. Expliciter les ensembles suivants :
   a. $\boldsymbol{A} \Delta \emptyset = \boldsymbol{A}$
   b. $\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{A} = \emptyset$
   c. $\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$
   d. $(\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \Delta \overline{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{A}$