Produit matriciel

Introduction
Propriétés

Applications

Introduction au produit matriciel

- Le produit matriciel **ne correspond pas** au produit **« terme à terme »** de deux matrices de mêmes dimensions (produit d'Hadamard)

- Pour faire le produit de deux matrices il **n'est pas nécessaire** que deux matrices aient **les mêmes dimensions**

- Mais il faut par contre que **le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième.**

Produit d’une matrice ligne par une matrice colonne

Produit « ligne – colonne »

$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: vecteur **ligne**

$V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: vecteur **colonne**

$$UV = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \mathbf{4} \times (\mathbf{-1}) + \mathbf{2} \times \mathbf{2} + \mathbf{1} \times \mathbf{3}$$

Généralisation

$U = (u_{1j})_{1 \leq j \leq n}$ d'ordre $(1, n)$

$V = (v_{i1})_{1 \leq j \leq n}$ d'ordre $(n, 1)$

U et ***V*** ont le même nombre d'éléments

Comment écrire le produit ***UV*** ?

Produit « ligne – colonne »

$U = (u_{1j})_{1 \leq j \leq n}$ d'ordre $(1, n)$
$V = (v_{i1})_{1 \leq j \leq n}$ d'ordre $(n, 1)$

$$\boldsymbol{UV = u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} + \cdots + u_{1n}v_{n1} = \sum_{k=1}^{n} u_{1k}v_{k1}}$$

Python ?

Ecrire une fonction **prod_ligne_col(U,V)** :

- **En entrée : U** un vecteur ligne, **V** un vecteur colonne, **U** et **V** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **UV**

Produit « ligne – colonne

$U = (u_{1j})_{1\leq j\leq n}$ d'ordre $(1, n)$
$V = (v_{i1})_{1\leq j\leq n}$ d'ordre $(n, 1)$

$$\boldsymbol{UV = u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} + \cdots +}$$

```python
def prod_ligne_col(u,v):
    prod=0
    for i in range(len(u)):
        prod=prod+u[i]*v[i]
    return prod

# Exemple
U=[4,2,1]
V=[-1,2,3]

# Appel de la fonction
prod_ligne_col(U,V)
```

Python ?

Ecrire une fonction **prod_ligne_col(u,v)** :

- **En entrée : u** un vecteur ligne, **v** un vecteur colonne, **u** et **v** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **uv**

Produit « ligne – colonne

$U = (u_{1j})_1$

$V = (v_{i1}$

$+ \cdots +$

Produit matriciel

On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la deuxième

```python
def prod_ligne_col(u,v):
    prod=0
    for i in range(len(u)):
        prod=prod+u[i]*v[i]
    return prod

# Exemple
U=[4,2,1]
V=[-1,2,3]

# Appel de la fonction
prod_ligne_col(U,V)
```

Pyth

Ecrire un :

- **En entré** n vecteur colonne, **U** et **V** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **UV**

Produit matriciel

On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

- En multipliant la 1ère ligne par la 1ère colonne, on obtient l'élément de la 1ère ligne et première colonne : $2 \times 2 + 1 \times 1 = \mathbf{5}$

Produit matriciel

On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & & & \\ \mathbf{11} & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

- En multipliant la 1ère ligne par la 1ère colonne, on obtient l'élément de la 1ère ligne et première colonne : $\mathbf{5} = 2 \times 2 + 1 \times 1$
- En multipliant la 2ème ligne par la 2ème colonne, on obtient l'élément de la 1ère ligne et première colonne : $4 \times 2 + 3 \times 1 = \mathbf{11}$

Produit matriciel

On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & & & \\ \mathbf{11} & & & \\ \mathbf{0} & & & \end{pmatrix}$$

On termine le calcul !

- En mul… colonne, on obtient l'élément de la 1ère … $\times 2 + 1 \times 1$
- En … colonne, on obtient l'élément de la 1ère lig… : $\mathbf{11} = 4 \times 2 + 3 \times 1$
- En multipliant la 3ème ligne par la 3ème colonne, on obtient l'élément de la 1ère ligne et première colonne : $\mathbf{0} = 1 \times 2 + (-3) \times 1$

Produit matriciel

On multiplie les lignes de la première matrice par les colonnes de la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{3} \\ \mathbf{11} & \mathbf{10} & \mathbf{33} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{-11} \end{pmatrix}$$

Bilan

Dimension de la matrice produit et des opérandes

Terme général

Bilan - Dimensions

$$M \times N = Matrice\ Produit$$

$$(3,2) \times (2,4) \longrightarrow (3,4)$$

Remarque sur les dimensions :

Les lignes de ***M*** doivent avoir le même nombre d'éléments que les colonnes de ***N***

Pour pouvoir faire le produit ***MN***, il faut donc que le nombrede colonnes de ***M*** soit égal au nombre de lignes de ***N***

Le nombre de lignes de ***MN*** est donc le nombre de lignes ***M***

Le nombre de colonnes de ***MN*** est le nombre de colonnes de ***N***

Bilan - Terme général

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{4 \quad 3} \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & \boxed{6} & -1 \\ 1 & -2 & \boxed{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{3} \\ \mathbf{11} & \mathbf{10} & \boxed{\mathbf{33}} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{-11} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 2}}}$ $\boldsymbol{N = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 4}}}$ $\boldsymbol{MN = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 4}}}$

a_{ij} le terme général de la matrice $\boldsymbol{M}$

b_{ij} le terme général de la matrice $\boldsymbol{N}$

c_{ij} le terme général de la matrice $\boldsymbol{MN}$

$\boldsymbol{c_{23}}$ en fonction des $\boldsymbol{a_{ij}}$ et $\boldsymbol{b_{ij}}$?

Bilan terme général

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{4 \quad 3} \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{3} \\ \mathbf{11} & \mathbf{10} & \mathbf{33} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{-11} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{M = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 2}}}$ $\boldsymbol{N = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 4}}}$ $\boldsymbol{MN = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 4}}}$

$$\boldsymbol{c_{23} = 4 \times 6 + 3 \times 3 = a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23}}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j}}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} \times b_{kj}}$$

Bilan terme général

$$\boldsymbol{M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}}$$

$$\boldsymbol{N = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le m}}}$$

$$\boldsymbol{MN = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}}$$

Définition mathématique

Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ et $N = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ deux matrices d'ordres respectifs (m, n) et (n, p) :

$$MN = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

EXERCICE 1

1. La multiplication de deux matrices non carrées est-elle commutative ?
2. La multiplication de deux matrices carrées est-elle commutative ?
3. Qu’en est-il de l’addition ?

EXERCICE 2 : Python

Ecrire une fonction **prod (m,n)** :

- **En entrée : m** et **n** deux matrices, le nombre de colonne de **m** étant égal au nombre de lignes de **n**.
- **En sortie :** le produit **mn**

FONCTION INTERMÉDIAIRES

ligne(m,i)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de ligne **i**
- **en sortie :** la ième ligne sous forme de liste

colonne(m,j)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de colonne **j**
- **en sortie :** la jème colonne sous forme de liste

prod_ligne_col(u,v)

- **En entrée : u** un vecteur ligne, **v** un vecteur colonne, **u** et **v** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **uv**

EXERCICE 2 : Python

```python
# fonction ligne,renvoie la ième ligne de'la matrice m
def ligne(m,i)
    return m[i]

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
ligne(M,1)
```

olonne de **m** étant égal au nombre de

FONCTION INTERMÉDIAIRES

ligne(m,i)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de ligne **i**
- **en sortie :** la ième ligne sous forme de liste

colonne(m,j)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de colonne **j**
- **en sortie :** la jème colonne sous forme de liste

prod_ligne_col(u,v)

- **En entrée : u** un vecteur ligne, **v** un vecteur colonne, **u** et **v** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **uv**

EXERCICE 2 : Python

```
# fonction ligne,renvoie la ième ligne de'la matrice m
def ligne(m,i)
    return m[i]

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
ligne(M,1)
```

olonne de **m** étant égal au nombre de

```
# fonction colonne, renvoie la jème colonne de la matrice m
def colonne(m,j):
    col=[]
    for i in range(len(m)):
        col.append(m[i][j])
    return col

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
colonne(M,1)
```

colonne(m,j)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de colonne **j**
- **en sortie :** la jème colonne sous forme de liste

prod_ligne_col(u,v)

- **En entrée : u** un vecteur ligne, **v** un vecteur colonne, **u** et **v** ayant le même nombre d’éléments.
- **En sortie :** le produit **uv**

EXERCICE 2 : Python

```python
# fonction ligne,renvoie la ième ligne de'la matrice m
def ligne(m,i)
    return m[i]

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
ligne(M,1)
```

```python
# fonction colonne, renvoie la jème colonne de la matrice m
def colonne(m,j):
    col=[]
    for i in range(len(m)):
        col.append(m[i][j])
    return col

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
colonne(M,1)
```

colonne(m,j)

- **en entrée :** une matrice **m** et un indice de colonne **j**
- **en sortie :** la jème colonne sous forme de liste

ol

```python
# produit ligne-colonne
def prod_ligne_col(u,v):
    prod=0
    for i in range(len(u)):
        prod=prod+u[i]*v[i]
    return prod

# Exemple et appel de la fonction
U=[4,2,1]
V=[-1,2,3]
prod_ligne_col(U,V)
```

prod_ligne_col(u,v)

- **En entrée : u** un vecteur ligne, **v** un vecteur colonne, **u** et **v** ayant le même nombre d'éléments.
- **En sortie :** le produit **uv**

EXERCICE 2 : Python

```python
# fonction ligne,renvoie la ième ligne de'la matrice m
def ligne(m,i)
    return m[i]

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
ligne(M,1)
```

```python
# produit ligne-colonne
def prod_ligne_col(u,v):
    prod=0
    for i in range(len(u)):
        prod=prod+u[i]*v[i]
    return prod

# Exemple et appel de la fonction
U=[4,2,1]
V=[-1,2,3]
prod_ligne_col(U,V)
```

ol

```python
# fonction colonne, renvoie la jème colonne de la matrice m
def colonne(m,j):
    col=[]
    for i in range(len(m)):
        col.append(m[i][j])
    return col

#Exemple et appel de la fonc
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
colonne(M,1)
```

```python
# produit matriciel
def prod_mat(m,n):
    prod=[]
    for i in range(len(m)):
        prod.append([])
        for j in range(len(n[0])):
            prod[i].append(prod_ligne_col(ligne(m,i),colonne(n,j)))
    return prod

#Exemple et appel de la fonction
M=[[1,2],[3,4],[5,6]]
N=[[1,2,3,4],[5,6,7,8]]
prod_mat(M,N)
```

colonne(m,j)

- **en entrée :** une matrice
- **en sortie :** la jème colon