CALCUL MATRICIEL

INTRODUCTION, DEFINITION ET NOTATIONS

Une ***matrice réelle*** est un tableau de nombres (réels).
Elle est caractérisée par un nombre de lignes n et un nombre de colonnes p **:** on dit alors qu'elle est d'ordre (n, p) ou de dimension $n \times p$

Les éléments m_{ij} de la matrice sont numérotés par i et j, les ***indices*** des lignes et des colonnes, m_{ij} est aussi appelé ***terme général*** de la matrice. Attention, ces indices correspondent à une numérotation et donc commencent par 1. Lorsqu'on on représente une matrice dans un langage informatique par des listes de listes ou des tableaux, les indices des objets manipulés commencent très souvent par 0 (mais pas toujours, cela dépend des langages).

Notation de la matrice M de terme général m_{ij} : $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

MATRICES PARTICULIERES

- MATRICE CARREE
  Lorsque le nombre de lignes n est égal au nombre de colonnes p, on dit que la matrice est ***carrée d'ordre*** n : $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$
- MATRICE LIGNE
  Une ***matrice-ligne*** ou ***vecteur-ligne*** ne comporte qu'une ligne. Elle est d'ordre $(1, p)$.
- MATRICE COLONNE
  Une ***matrice-colonne*** ou ***vecteur-colonne*** ne comporte qu'une colonne. Elle est d'ordre $(n, 1)$.
- MATRICE DIAGONALE
  Une matrice carrée constituée de zéros sauf sur la diagonale (haut-gauche à bas-droite) est dite ***diagonale***. Si la diagonale n'est composée que de 1, on l'appelle ***matrice identité*** ou ***unité*** et on la note I ou I_n.
- MATRICE NULLE
  Une ***matrice nulle*** est une matrice dont tous les termes sont égaux à 0, elle se note O ou $O_{n,p}$
- MATRICE SYMETRIQUE
  Une ***matrice symétrique*** est une matrice dans laquelle, pour tout indice i, la i-ème ligne contient les mêmes éléments que la i-ème colonne, ce qui revient à la propriété :
  $$m_{ij} = m_{ji} \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$
  Une ***matrice symétrique*** est nécessairement carrée.
  Une ***matrice diagonale*** est toujours symétrique.

EXEMPLES

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1{,}4 \\ 0 & -4 & 7 & -5 \\ 6 & 8 & 4{,}9 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de 3 lignes et 4 colonnes, M est d'ordre $(3{,}4)$
  $$m_{23} = 7 \ ; \ m_{13} = -3 \dots$$
- $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 9 & 2{,}6 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3
- $V = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice-ligne ou un vecteur-ligne d'ordre $(1{,}3)$
- $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice-colonne ou un vecteur-colonne d'ordre $(3{,}1)$

- $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3
- $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité (ou unité) d'ordre 3
- $O = O_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle d'ordre $(4,3)$
- $S = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 12 \\ 9 & 2{,}6 & 4 \\ 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique d'ordre 3

  $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont également des matrices symétriques d'ordre 3.

EXEMPLES D'UTILISATIONS DES MATRICES

Les matrices permettent de représenter les données numériques et de les traiter de façon synthétique en utilisant des opérations matricielles.

EN STATISTIQUE

Tableau de données

Prénom	Math	Phys	Fr	Ang
Pierre	6	6	5	5,5
Paul	8	8	8	8
Jules	6	7	11	9,5
Jacques	14	14	15,5	15
Jeanne	14	14	12	12,5
Lucie	11	10	5,5	7
Antoine	5,5	7	14	11,5

Matrice de données

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 5{,}5 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 11 & 9{,}5 \\ 14 & 14 & 15{,}5 & 15 \\ 14 & 14 & 12 & 12{,}5 \\ 11 & 10 & 6 & 7 \\ 5{,}5 & 7 & 14 & 11{,}5 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel (un exemple…)

Matrice des corrélations

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}98 & 0{,}31 & 0{,}58 \\ 0{,}98 & 1 & 0{,}48 & 0{,}72 \\ 0{,}31 & 0{,}48 & 1 & 0{,}00 \\ 0{,}58 & 0{,}72 & 0{,}00 & 1 \end{pmatrix}$$

La représentation sous forme matricielle permet de traiter les données de façon synthétique

MATRICES ET IMAGES

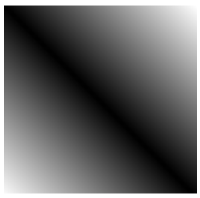
Une image numérique est constituée de pixels. Dans une image en noir et blanc, chaque pixel est défini par une intensité unique. Si celle-ci est codée sur 8 bits, 256 valeurs sont possibles, 256 niveaux de gris.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 254 & 255 \\ 0 & 1 & \cdots & 254 & 255 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 254 & 255 \\ 0 & 1 & \cdots & 254 & 255 \end{pmatrix}$$

Image en niveaux de gris

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 254 & 254 & \cdots & 254 & 255 \\ 255 & 255 & \cdots & 255 & 255 \end{pmatrix}$$

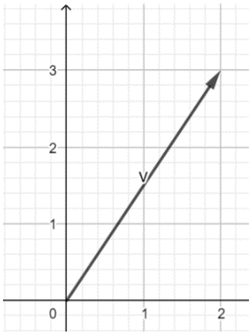
Calcul matriciel : $|M - M'|$ (un exemple…)



MATRICES ET TRANSFORMATIONS DE VECTEURS DANS LE PLAN

Les matrices sont associées à des transformations particulières de vecteurs dans le plan, appelées **applications linéaires.**

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan défini par ses coordonnées (x, y), ce vecteur peut être représenté par une matrice colonne (ou vecteur colonne) $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Représentation du vecteur

$$V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

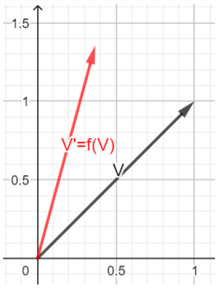
Pour déterminer l'image de $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par une application linéaire f définie par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous utilisons la formule suivante : $f(V) = MV = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Pour l'instant, il n'est pas nécessaire de retenir la formule ci-dessus, nous y reviendrons.

Prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}$ qui est donc associée à une transformation f et calculons et représentons l'image de plusieurs vecteurs du plan.

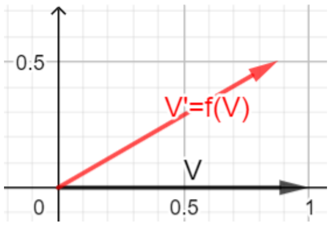
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V' = f(V) = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}37 \\ 1{,}37 \end{pmatrix}$$



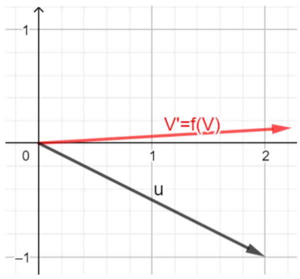
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V' = f(V) = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}87 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$



$$V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V' = f(V) = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}37 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$$



Nous remarquons que l'angle entre le vecteur V et le vecteur image V' est toujours le même (30°), la transformation associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}$ est donc une rotation d'angle 30°.

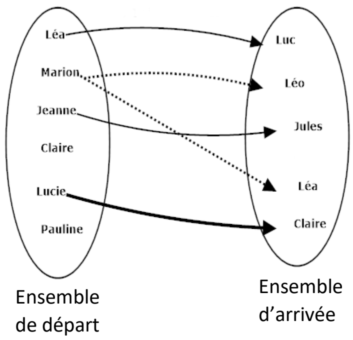
LES GRAPHES ET RELATIONS BINAIRES PEUVENT ETRE REPRESENTES PAR DES MATRICES

La mise en relation d'objets se prête bien à une représentation matricielle.

EXEMPLE 1 : RELATION BINAIRE

Relation « est la maman de »

Léa est en relation avec Luc, Léa n'est pas en relation avec Léo.



	Luc	Léo	Jules	Léa	Claire
Léa	**Oui**	Non	Non	Non	Non
Marion	Non	**Oui**	Non	**Oui**	Non
Jeanne	Non	Non	**Oui**	Non	Non
Claire	Non	Non	Non	Non	Non
Lucie	Non	Non	Non	Non	**Oui**
Pauline	Non	Non	Non	Non	Non

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

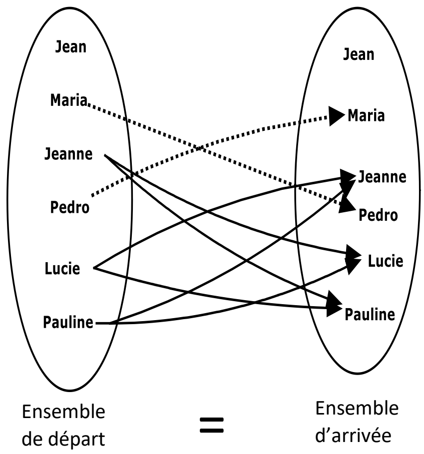
Représentation par une matrice binaire ou booléenne de type (6,5)

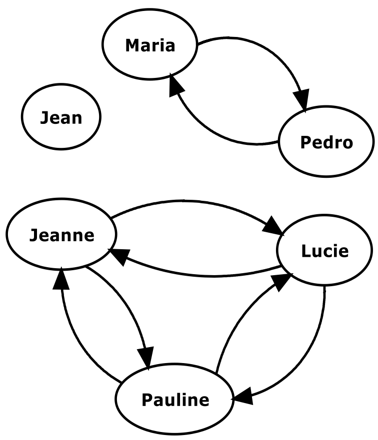
EXEMPLE 2 : GRAPHES

Lorsque l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée, la relation est aussi appelée ***graphe*** et peut-être représentée par une ***matrice carrée***. Les graphes sont très utilisés en informatique pour modéliser des situations complexes, leur théorie sera approfondie en S2.

Dans ce cours, nous aborderons quand même l'intérêt du calcul matriciel pour la manipulation de graphes.

Relation « est frère/sœur de »





Des sommets et des arcs !

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERATIONS SUR LES MATRICES

Pour les opérations matricielles qui suivent, les définitions seront illustrées sous Python, avec des matrices représentées par des listes de listes.

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

Comme nous l'avons vu dans le notebook d'introduction, à notre niveau, la multiplication par un ***scalaire*** correspondra toujours à une multiplication par un ***réel.*** Nous utilisons ce terme pour multiplier par un réel un objet plus complexe : matrice, vecteur, fonction…*

Toute matrice A peut être multipliée par un réel. Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $2M = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Dans la théorie des espaces vectoriels que vous pourrez voir plus tard dans vos poursuites d'études, la multiplication par un scalaire est une opération « externe » : l'une des opérandes n'est pas un élément de l'espace (un réel n'est pas un vecteur)*

Définition mathématique

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le J \le p}}$ une matrice d'ordre (n, p) et x un réel.

La matrice xM ou $x \times M$ est la matrice de terme général $xm_{ij} = x \times m_{ij}$: $xM = (xm_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

PYTHON

```
# Ecriture de la matrice M sous forme de liste de liste
M=[[5,-3],[1,2],[0,1]]
# Si nous multiplions M par 2 nous n'obtenons pas la multiplication par un réel
# print(2*M)donnerait : [[5, -3], [1, 2], [0, 1], [5, -3], [1, 2], [0, 1]]

# Définition d'une fonction prod_reel, prenant en paramètres
# une matrice mat et un réel x et renvoyant la matrice produit xmat

# Plusieurs méthodes

# En initialisant la matrice produit par une matrice de dimension (n,p)
# contenant des None (valeurs manquantes)
def prod_reel1(mat,x):
    # dimensions de la matrice
    n=len(mat)
    p=len(mat[0])
    # Initialisation de la matrice résultat, appelée prod, de dimension (n,p)
    prod=[[None for j in range(p)] for i in range(n)]
    # Double boucle pour parcourir tous les éléments de la matrice et les multiplier par x
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            prod[i][j]=x*mat[i][j]
    return(prod)

# En initialisant la matrice produit par une liste vide
def prod_reel2(mat,x):
    # dimensions de la matrice
    n=len(mat)
    p=len(mat[0])
    # Initialisation de la matrice résultat,prod
    prod=[]
    # Double boucle pour parcourir tous les éléments de la matrice et les multiplier par x
    for i in range(n):
        prod.append([])
        for j in range(p):
            prod[i].append(x*mat[i][j])
    return(prod)

# Plus directement, par une définition "en compréhension" de
# la matrice produit

def prod_reel3(mat,x):
    # dimensions de la matrice
    n=len(mat)
    p=len(mat[0])
    # définition "en compréhension" du produit
    return [[x*mat[i][j] for j in range(p)] for i in range(n)]
```

```
Les trois fonctions prod_reel1, prod_reel2 et prod_reel3 renvoient le même résultat.

print(prod_reel1(M,2))

Résultat : [[10, -6], [2, 4], [0, 2]]
```

ADDITION DE MATRICES

On peut ajouter ou retrancher deux matrices de même ordre. Cette opération se fait « termes à termes », il faut pour cela que les matrices aient les mêmes dimensions (ou soient de même ordre).

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors $M + N = \begin{pmatrix} 5+1 & -3-1 \\ 1+2 & 2-2 \\ 0+0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

> Définition mathématique
>
> Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $N = (n_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices de même ordre (n, p).
>
> La somme $M + N$ est la matrice de terme général $m_{ij} + n_{ij}$: $M + N = (m_{ij} + n_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

PYTHON

```
# Ecriture des matrices M et N sous forme de liste de liste
M=[[5,-3],[1,2],[0,1]]
N=[[1,-1],[2,-2],[0,-1]]

# Si nous faisons la somme M+N nous n'obtenons pas le résultat attendu
# "+" appliqué sur les listes est un opérateur d'ajout de liste
print(M+N)
# Résultat : [[5, -3], [1, 2], [0, 1], [1, -1], [2, -2], [0, -1]]

# Définition d'une fonction som_mat, prenant en paramètres deux matrices de
# mêmes dimensions et renvoyant la matrice somme

def som_mat(mat1,mat2):
    # dimensions des matrices (on suppose que les dimensions des deux matrices sont les mêmes)
    n=len(mat1)
    p=len(mat1[0])
    # définition "en compréhension" de la somme
    return [[mat1[i][j]+mat2[i][j] for j in range(p)] for i in range(n)]

print(som_mat(M,N))

# Résultat [[6, -4], [3, 0], [0, 0]]
```

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

EXERCICE 1 : MATRICES ET TRANSFORMATIONS DE VECTEURS DANS LE PLAN

Nous avons vu qu'une matrice M pouvait être associée à une des transformation f, grâce à la formule suivante : : $f(V) = MV = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ où $f(V)$ est le vecteur « image » de $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par f.

1. Ecrire une fonction *image(M,V)* :
   - qui prend en paramètres une liste de listes M représentant une matrice d'ordre n et V une liste de n éléments représentant un vecteur colonne V d'ordre $(n, 1)$
   - qui renvoie une liste de n éléments représentant le vecteur colonne MV, image de V par l'application associée à M.

2. Vérifier les résultats obtenus en introduction, avec la matrice de rotation $M = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}87 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : SUPPRIMER UNE LIGNE ET UNE COLONNE

Ecrire une procédure *suppr(M,i,j)* prenant en paramètres une liste de listes M représentant une matrice d'ordre (n, p) et deux indices i et j, et supprimant dans M la i-ème ligne et la j-ème colonne.