5. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3 для односторонних производных (конечных и бесконечных).

Примеры. 1. $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant \leqslant x \leqslant 1$. Применяя формулу (9.20), получаем

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin\, x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos\, y}.$$

Так как$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$, поэтому $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = = \sqrt{1-x^2}$. Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $y = \arccos x, x = \cos y, 0 \leqslant y \leqslant \pi, -1 \leqslant x \leqslant 1$. Аналогчино предыдущему примеру имеем:

$$\frac{dy}{dx} = (\text{arcxos}\ x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sin\, y} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2 y}} \ = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

т.е. $(\arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.$y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{tg} y, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, -\infty < x < +\infty$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \ = \frac{1}{1+x^2};$$

итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4.$y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{ctg} y, 0 \leqslant y \leqslant \pi, -\infty < x < \infty$. В этом случае

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} \ = -\frac{1}{1+x^2},$$

т.е.$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

5.Если $y = \log_a x, x = a^y, a > 0, a \neq 1, x > 0, -\infty < y < +\infty$,то

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

т.е.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

в частности, при $a = e$ имеем $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

9.7. Производная и дифферинциал сложной функции

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция* $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , *а функция* $z = F(y)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция Φ(x)= $F[f(x)]$ *также имеет производную при* $x = x_0$, *причем*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0) \tag{9.21}$$

Если сложную функцию Φ обозначить символом $\Phi = F \circ f$ (см. п. 5.2), то формулу (9.21) можно записать в виде

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0))f'(x_0)$$

Следует обратить внимание на то, что утверждение о существовании в точке x_0 производной сложной функции $F[f(x)]$ сожержит предположение о том, что рассматриваемая сложная функция имеет смысл, т.е. определена в некоторой окрестности точки x_0.

Опуская значения аргумента и используя запись производной с помощью дифференциалов, равенство (9.21) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Доказательство. Прежде всего, в силу самого определения производной, функция F определена в некоторой окрестности $V(y_0)$ точки y_0, а так как из существования производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции f, то для указанной окрестности $V(y_0)$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки x_0, что $f(U(x_0) \subset V(y_0))$, и, следовательно, для всех $x \in U(x_0)$ имеет смысл сложная функция $F(f(x))$.

Положим, как всегда, $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = F(y) - F(y_0)$. Функция F имеет в точке y_0 производную и поэтому дифференцируема в этой точке (см. п. 9.2). Это означает, что её приращение Δz при всех Δy, принаждлежащих некоторой окрестности точки $\Delta y = 0$ (в том числе и при $\Delta y = 0$), представимо (см. формулы (9.6) и (9.7)) в виде

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \tag{9.22}$$