РАСКРАСКИ

«Больше сыра - больше дырок, больше дырок - меньше сыра. Больше сыра - меньше сыра»

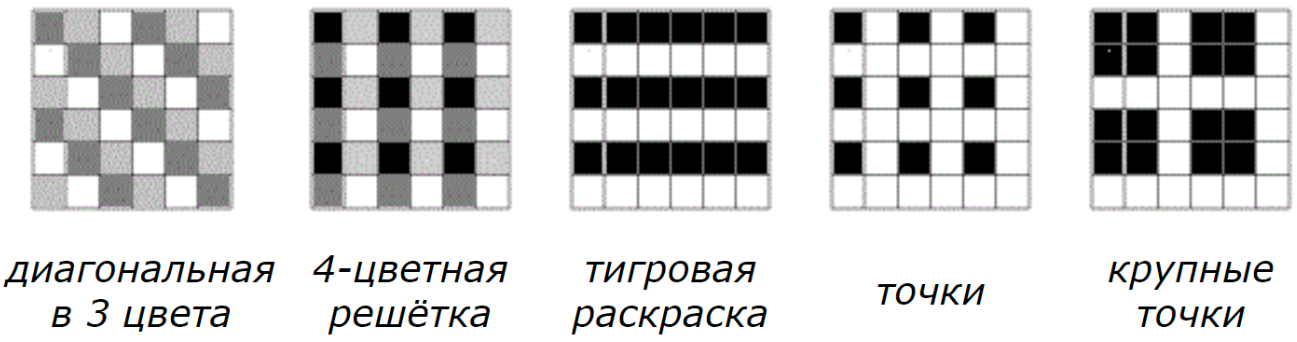

Рис. 1. Познакомьтесь с вашими друзьями на эти 2 дня

№1 Кусок сыра имеет форму кубика $3\times3\times3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1\times1\times1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1\times1\times1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

№2 Можно ли все клетки доски 9x9 обойти конём по одному разу и вернуться в исходную клетку?

№3 На каждой клетке доски 7×7 сидит жук. По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток.

1) Докажите, что хотя бы на одной клетке будут 2 жука.

2) Докажите, что после команды найдётся 7 свободных клеток.

№4 . Можно ли замостить доску 10×10 фигурами L-тетрамино (т. е. фигурами из 4 клеток в форме буквы L или Г)?

Можно ли замостить доску 10×10 фигурами Т-тетрамино?

№5 Можно ли квадрат 10×10 разрезать на части 1×4? Решите задачу:

а) с помощью диагональной раскраски в 4 цвета (как она устроена?);

б) с помощью 4-цветной решётки;

в) с помощью «точек».

№6 а) Можно ли из квадрата 7×7 вырезать 10 квадратов $2{\times}2$?
б) Из листа клетчатой бумаги размером $29{\times}29$ клеточек вырезали 99 квадратиков $2{\times}2$ (режут по линиям сетки). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

№7 На клетчатой бумаге (неизвестно, какого размера) отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них наверняка можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

№8 В квадрате $5{\times}5$ без наложений разместили 8 прямоугольников $1{\times}3$. Какая клетка могла оказаться не накрытой ни одним прямоугольником?

№9 В левый нижний угол шахматной доски $8{\times}8$ поставлено в форме квадрата $3{\times}3$ девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку (по вертикали, горизонтали и диагонали).
Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки в форме квадрата $3{\times}3$:
а) в левом верхнем;
б) в правом верхнем углу?

№10 Можно ли три попарно соседние грани куба $4{\times}4{\times}4$ оклеить 16 полосками $3{\times}1$?

№11 Доска $8{\times}8$ разрезана на доминошки размером $2{\times}1$. Может ли быть 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

№12 Из листа клетчатой бумаги размером $17{\times}17$ клеточек вырезали 35 квадратиков $2{\times}2$ (режут по линиям). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

№13 Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис.). Лина прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Лина была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, . . . , на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Лина на клетке 10?

№14 Дан куб $6{\times}6{\times}6$. Можно ли его разбить на параллелепипеды $4{\times}1{\times}1$?

№15 Клетчатая доска 10×10 замощена T-тетрамино и L-тетрамино . Какое наибольшее количество фигурок L-тетрамино могло быть использовано?

№16 Какое наибольшее кол-во не соприкасающихся (даже по диагонали) кораблей 1×4 можно разместить на доске 10×10 ?

№17 Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

№18 В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причём каждая сторона рамки состоит из нечётного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – чёрный и белый. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках равна сумме чисел в белых клетках. Пифагорова таблица умножения – это клетчатая таблица, в которой на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число $m \cdot n$ (для любых натуральных m и n).

№19 В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат , все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

Примечание: Решайте следующие задачи после всех и подойдите к проверяющим для получения дополнительной теории.

№20 Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты – по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

№21 В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат , все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?