

Larissa Degen de Almeida

# **Métrica de Buracos Negros: Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera**

Alegre - ES, Brasil

2021

Larissa Degen de Almeida

## **Métrica de Buracos Negros: Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física.

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Orientador: Prof. Dr. Roberto Colistete Júnior

Alegre - ES, Brasil

2021

Larissa Degen de Almeida

## **Métrica de Buracos Negros: Singularidade, Horizonte de Eventos e Ergosfera**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado em: 08 de Outubro de 2021.

Comissão Examinadora:

---

**Prof. Dr. Roberto Colistete Júnior**  
Orientador

---

**Professor Dr. Júnior Diniz Toniato**

---

**Professor MSc. Ramón Giostri**  
Campos

Alegre - ES, Brasil

*Ad astra per aspera.*

# Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Gercino e Sônia, pelo apoio para que eu pudesse ficar todo esse tempo na graduação. As minhas irmãs, Amanda e Giseli, meu cunhado Miguel e especialmente meu sobrinho Theo. Meus avós Theofilo, Elzina, Maria Derlinda e Argeuni. E meus tios, tias, primos.

Agradeço a meu orientador Roberto Colistete Júnior por embarcar nessa ideia junto comigo.

Ao Robson por me apoiar em todos os momentos, e aos Amigos que fiz em Alegre. Muito obrigada.

# Resumo

Uma das soluções encontradas para as equações de campo de Einstein são os buracos negros. Estas soluções são descritas através de métricas, que contém características intrínsecas a uma única solução, como massa, rotação e carga elétrica. Estes objetos ainda possuem regiões em que existem singularidades, onde as leis da Física não funcionam, bem como regiões com horizonte de eventos e ergosfera. Numa modelagem computacional em Python, conseguimos visualizar o horizonte de eventos, a ergosfera e o comportamento dos buracos negros em relação aos parâmetros que caracterizam cada um.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Buraco Negro, Horizonte de Eventos, Ergosfera.

## Lista de ilustrações

Figura 1	–	Horizonte de eventos de Schwarzschild com $M = 4.2$ .	21
Figura 2	–	Horizonte de eventos de Schwarzschild com $M = 2.1$ .	22
Figura 3	–	Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr com $M = 4.2$ e $a = 4.0$ .	23
Figura 4	–	Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr com $M = 4.2$ e $a = 3.3$ .	23
Figura 5	–	Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com $M = 4.2$ , $a = 3.0$ e $Q = 2.0$	25
Figura 6	–	Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com $M = 4.2$ , $a = 2.0$ e $Q = 2.0$	25
Figura 7	–	Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com $M = 4.2$ , $a = 3.0$ e $Q = 2.9$	26
Figura 8	–	Horizonte de eventos de Reissner-Nordström com $M = 4.2$ e $Q = 2.0$	27
Figura 9	–	Horizonte de eventos de Reissner-Nordström com $M = 4.2$ e $Q = 3.9$	28

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Características dos buracos negros físicos. . . . .	18
--	----



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
1.1	Apresentação . . . . .	10
1.2	Objetivos . . . . .	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	12
2.1	Gravitação Newtoniana . . . . .	12
2.2	Teoria da Relatividade Restrita e Geral . . . . .	12
2.3	Métrica de Schwarzschild . . . . .	14
2.4	Métrica de Kerr . . . . .	14
2.5	Métrica de Kerr-Newman . . . . .	15
2.6	Métrica de Reissner-Nordström . . . . .	16
3	METODOLOGIA . . . . .	18
3.1	Singularidade . . . . .	18
3.2	Horizonte de Eventos . . . . .	18
3.3	Ergosfera . . . . .	19
3.4	Desenvolvimento . . . . .	19
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	21
4.1	Horizonte de Eventos de Schwarzschild . . . . .	21
4.2	Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr . . . . .	22
4.3	Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr-Newman . . . . .	24
4.4	Horizonte de Eventos de Reissner-Nordström . . . . .	27
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	29
	REFERÊNCIAS . . . . .	30
A	CÓDIGO FONTE . . . . .	33

<b>A.1</b>	<b>Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos de Schwarzschild . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>A.2</b>	<b>Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>A.3</b>	<b>Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr-Newman . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>A.4</b>	<b>Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos de Reissner-Nordström . . . . .</b>	<b>35</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Apresentação

Entre os séculos XVII e XVIII, houve uma mudança de cenário na Física, onde era apenas sobre teorias e pensamentos aristotélicos, todas as coisas eram formadas por 4 elementos, o céu era apenas o que era visto a olho nu, para o começo de uma Física robusta, onde teorias e experimentos começaram a ser feitos provando que temos muito o que aprender e conhecer sobre todas as coisas que nos cercam.

Sir Isaac Newton (1642 – 1727), desenvolveu a Lei da Gravitação Universal [1], em seus estudos conseguiu correlacionar que um objeto caindo em direção ao chão pode ter a mesma explicação para um objeto como a Lua orbitar a Terra. A Lei diz que dois corpos com massa se atraem devido a uma força exercida pelo produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as mesmas, esta denominada força gravitacional, e que todos os corpos do universo estariam submetidos.

Mas com o passar dos anos, percebeu-se que alguns eventos que aconteciam no universo não poderiam ser explicados a partir da Lei que Newton descreveu. Quando Einstein no começo do século XX, apresenta seus artigos da Teoria da Relatividade Especial [2] e Teoria da Relatividade Geral [3], com seus estudos sobre a invariância da velocidade da luz, a unificação de três dimensões espaciais com a dimensão temporal, isso muda a percepção que a gravidade é uma força de ação imediata entre os corpos com massa. E traz que a gravidade é uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

Apenas um ano após a apresentação dos artigos, um físico alemão chamado Karl Schwarzschild (1873-1916), encontra uma solução para as Equação de Campo de Einstein. Na solução, ele descreve sobre um corpo de massa e densidade infinita que deforma a malha do espaço-tempo numa tamanha proporção que qualquer objeto que ultrapasse uma certa região gravitacional não tenha a oportunidade de retornar [4]. Mais tarde, esta região do espaço seria denominada como Buraco

Negro [5].

Após a primeira solução ser encontrada, houve em torno de 50 anos até a segunda solução da Equação de Campo ser apresentada para a comunidade científica. Hoje são aceitas pela comunidade quatro soluções que representam buracos negros físicos. Cada solução é descrita por uma métrica, esta caracteriza o buraco negro, com parâmetros de massa, de possuir ou não, momento angular e carga elétrica. Cada solução particular gera regiões entorno da singularidade, o horizonte de eventos e a ergosfera.

## 1.2 Objetivos

Neste trabalho apresentamos as principais métricas de buracos negros aceitas pela comunidade científica e comportamento destas em relação à singularidade, horizonte de eventos e ergosfera. Estas regiões serão modeladas na linguagem de programação Python [6], de modo a gerar gráficos que possibilitam visualizar e exemplificar de maneira clara e objetiva a estrutura dos buracos negros.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Gravitação Newtoniana

Em 1687 Isaac Newton (1643-1727), publicou seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* [1], um postulado que traz a ideia de que um corpo em qualquer lugar do Universo atrai outro corpo em sua direção por uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas, mas inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Este postulado é conhecido como Lei da Gravitação Universal, dado pela equação:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Onde  $F$  é a força atrativa na direção da reta que passa pelo centro das duas massas,  $G$  é a constante gravitacional de valor  $6,674 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$ ,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos envolvidos e  $r$  é a distância entre eles. Esta lei explica o porquê de uma maçã ao se desprender da árvore cai em direção ao solo, e também como a Lua tem seu movimento em torno da Terra, e os planetas em torno do Sol. Newton acreditava que, por se tratar de uma força instantânea que agia sobre todos os corpos, esta se estenderia por todo universo com velocidade infinita.

### 2.2 Teoria da Relatividade Restrita e Geral

Com o passar dos anos e a evolução do conhecimento científico, temos que no começo do século XX, mas precisamente em 1905, Albert Einstein (1879-1955) apresentou para a comunidade científica o artigo da Teoria da Relatividade Restrita, com dois postulados que assumem a invariância da velocidade da luz e que todas as leis da natureza são as mesmas para todos os sistemas de referência inerciais. Einstein descreveu para compatibilizar a mecânica Newtoniana com a teoria que descreve o campo eletromagnético, postulada por James Clerk Maxwell [8].

Esses postulados trazem consequências diretas que o espaço e o tempo não são absolutos, são relativos aos observadores e que a luz, um fenômeno eletromagnético, possui velocidade finita, e nada no universo ultrapassa sua velocidade. E isso vai contra teoria gravitacional de Newton, se aumentarmos a distância entre os corpos, os efeitos gravitacionais seriam sentidos imediatamente, pois viajam em velocidade infinita.

Em 1915, Einstein apresenta a Teoria da Relatividade Geral, onde ele amplia a abordagem da Teoria da Relatividade Restrita para referenciais não inerciais. Nesta, ele traz a ideia de que a gravidade não é uma força, mas o resultado da deformação do espaço-tempo provocado por uma distribuição de massa e energia. Ele descreve essa teoria matematicamente na forma das equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Na equação (1.2),  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de curvatura de Ricci,  $R$  o escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento,  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  a velocidade da luz. Esta equação é tensorial com 10 componentes independentes que resultam em 10 equações diferenciais parciais acopladas.

Pouco tempo depois de Einstein apresentar esta equação, o físico Karl Schwarzschild (1873-1916) encontra uma solução particular que mostra o comportamento do campo gravitacional ao redor de uma estrela segundo a Teoria da Relatividade Geral. E ao calcular o efeito que a curvatura do espaço-tempo causaria dentro e fora da estrela, e se a massa da estrela fosse comprimida até um espaço suficientemente pequeno, o tecido do espaço-tempo se deformaria gerando um campo gravitacional tão intenso que qualquer objeto que entre nele entrasse, jamais sairia, inclusive a luz. Esta solução apresenta os Buracos Negros.

Obter uma solução das equações de campo é de extrema complexidade, por se tratarem de equações não-lineares. São utilizados tensores métricos [9], ou apenas métricas, para descrever a solução, estas determinam algumas propriedades do espaço, como distância, homogeneidade, volume, isotropia, curvatura, etc. E na relatividade geral é usada para determinar a geometria do espaço-tempo.

São aceitas pela comunidade científica quatro métricas que descrevem buracos negros físicos, são as métricas de: Schwarzschild, Kerr, Kerr-Newman e Reissner-Nordström.

Existem diversas outras métricas, mas para este trabalho foram estas as escolhidas pois com elas as previsões da Relatividade Geral são verificadas observacionalmente e porque outras métricas existentes são derivações dessas quatro escolhidas.

## 2.3 Métrica de Schwarzschild

Karl Schwarzschild (1873-1916) descreve uma solução exata das equações de campo de Einstein para o campo gravitacional de uma massa pontual. Ele descreve a métrica em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Com o elemento de linha da solução como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

Onde o valor de  $r_s$ , o Raio de Schwarzschild, é definido como:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.5)$$

Tendo  $G$  a constante gravitacional de Newton,  $M$  a massa e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Esta métrica descreve um buraco negro com massa, sem momento angular e sem carga elétrica.

## 2.4 Métrica de Kerr

A solução encontrada por Schwarzschild perdurou por mais de 50 anos como única métrica local, até o matemático Roy Kerr (1934), em 1963, encontrar outra possibilidade de solução. Ele demonstrou a geometria espaço-temporal ao redor de um corpo pontual massivo em rotação, ou podemos descrever como a existência

de um buraco negro em rotação (momento angular). Kerr descreve a métrica a partir da métrica de Schwarzschild, onde ele substitui o que era  $r = 0$  para  $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ , obtendo a métrica [8]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

E o elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.7)$$

Onde:

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.8)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.9)$$

Com o momento angular  $|\vec{J}| = aM$ , massa  $M$  e  $a = \frac{|\vec{J}|}{M}$ .

## 2.5 Métrica de Kerr-Newman

A partir da métrica de Kerr, outra solução foi encontrada por Ezra T. Newman (1965), onde ele adiciona um parâmetro de carga elétrica. O buraco negro então possui momento angular  $\vec{J}$  e carga elétrica total  $Q$ , sua métrica é descrita como [9]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\Delta}{\Sigma}\right) & 1 & 0 & \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r_s r - r_Q) \\ 1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma^2 & 0 \\ \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r_s r - r_Q) & -a \sin^2 \theta & 0 & \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (\Delta a^2 \sin^2 \theta - (a^2 + r^2)^2) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



Seu elemento de linha é descrito como:

$$ds^2 = -\frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 - \Sigma^2 d\theta^2 + \frac{\Delta}{\Sigma^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left[ (r^2 + a^2) d\phi - a dt \right]^2 \quad (2.11)$$

Onde:

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 + r_Q^2 \quad (2.12)$$

$$r_Q^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.13)$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.14)$$

E  $r_s$  tem o valor da equação (2.2). Esta métrica é a mais particular, pois compreende os três parâmetros, massa, momento angular e carga elétrica para a descrição de um buraco negro físico.

## 2.6 Métrica de Reissner-Nordström

Desenvolvida por Gunnar Nordström (1881-1923) e Hans Reissner (1874-1967), esta métrica apresenta uma massa com simetria esférica, estática e carregada eletricamente. A partir das equações de Einstein-Maxwell, a métrica é descrita em coordenadas esféricas  $(ct, r, \theta, \phi)$  [17]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Com o elemento de linha:

$$ds_{RN}^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.16)$$

onde as quantidades  $r_s$  é dada pela equação (2.4) e  $r_Q^2$  é dado por:

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \quad (2.17)$$

Temos  $G$  a constante gravitacional de Newton,  $M$  a massa do corpo,  $Q$  a carga elétrica do corpo e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo.

## 3 Metodologia

Uma vez apresentadas as métricas, que estão demonstradas acima através de elementos de linha, vamos agora abordar estruturas que formam junto à singularidade o buraco negro. O problema escolhido foi desenvolver um código simples para demonstrar o comportamento dos buracos negros diante de suas características:

Métrica	Massa $M$	Rotação $\vec{J}$	Carga elétrica $Q$
Schwarzschild	Sim	Não	Não
Kerr	Sim	Sim	Não
Kerr-Newman	Sim	Sim	Sim
Reissner-Nordström	Sim	Não	Sim

Tabela 1 – Características dos buracos negros físicos.

Estas características geram estruturas conhecidas como horizonte de eventos e ergosfera. Como as métricas deduzem equações complexas para demonstrar estas estruturas, a parametrização destas equações foram a melhor escolha para a produção de gráficos em Python, possibilitando criar um código de poucas linhas e considerado simples.

### 3.1 Singularidade

Singularidade é um ponto ou região onde as teorias da Física não mais funcionam, ou seja, perdem a capacidade de predição, inclusive a Relatividade Geral. As singularidades são obtidas da análise dos invariantes de curvatura da Relatividade Geral na métrica respectiva.

### 3.2 Horizonte de Eventos

A estrutura do horizonte de eventos é a fronteira onde separa o Universo onde as leis da Física funcionam de um local onde estas leis não são mais válidas. Qualquer

objeto que o ultrapasse não mais retornará, isto devido à intensidade do campo gravitacional. Nem mesmo a luz poderá retornar, pois, a velocidade de escape da região é superior à velocidade da luz.

### 3.3 Ergosfera

Esta estrutura pertence apenas aos buracos negros com rotação, ou seja, momento angular  $|\vec{J}|$ , pois é formada a partir de um arrasto gravitacional dos referenciais gerado pelo movimento de rotação. Esta é uma região do espaço-tempo imediatamente externa ao horizonte de eventos, mas diferentemente desta, na ergosfera objetos e até mesmo a luz conseguem retornar.

### 3.4 Desenvolvimento

O desenvolvimento do algoritmo dos gráficos começou pela escolha da linguagem de programação Python. Bem como algumas ferramentas e softwares que facilitam o cálculo científico. As ferramentas escolhidas para o trabalho foram o LaTeX [18], GitHub [19] e Jupyter Notebook, todas gratuitas e de código fonte aberto (FOSS - Free and Open Source Software). E o módulo Python SymPy [20] (Symbolic Python) foi utilizado para visualização gráfica.

Após, a pesquisa procuramos identificar as equações de singularidade, do horizonte de eventos e da ergosfera na forma paramétrica, essas expressam funções explícitas com variáveis independentes e podem descrever superfícies. Optou-se por pela forma paramétrica por facilitar a escrita do código e obtendo um resultado muito próximo do esperado. E para visualização gráfica das curvas de horizontes de eventos e ergosferas, algumas constantes assumem valor natural adimensional unitário (1),  $G$ ,  $c$  e a multiplicação de constantes  $4\pi\epsilon_0$ . E para as variáveis  $m$ ,  $a$  e  $Q$  foram adotados números aleatórios.

Utilizando o Python e SymPy foram definidas as equações paramétricas com o valor determinado para variáveis. Denotando o horizonte de eventos interno e externo como:  $r\_hor\_m$  e  $r\_hor\_p$ , respectivamente  $m$  para o valor da equação negativa interna e  $p$  para positiva externa. Bem como as equações da ergosfera interna

e externa como:  $r\_erg\_m$  e  $r\_erg\_p$ , respectivamente  $m$  para equação interna negativa e  $p$  para positiva externa.

## 4 Resultados e Discussões

### 4.1 Horizonte de Eventos de Schwarzschild

O horizonte de eventos ou raio de Schwarzschild, é estabelecido através da equação:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.1)$$

O gráfico obtido para a solução de Schwarzschild:

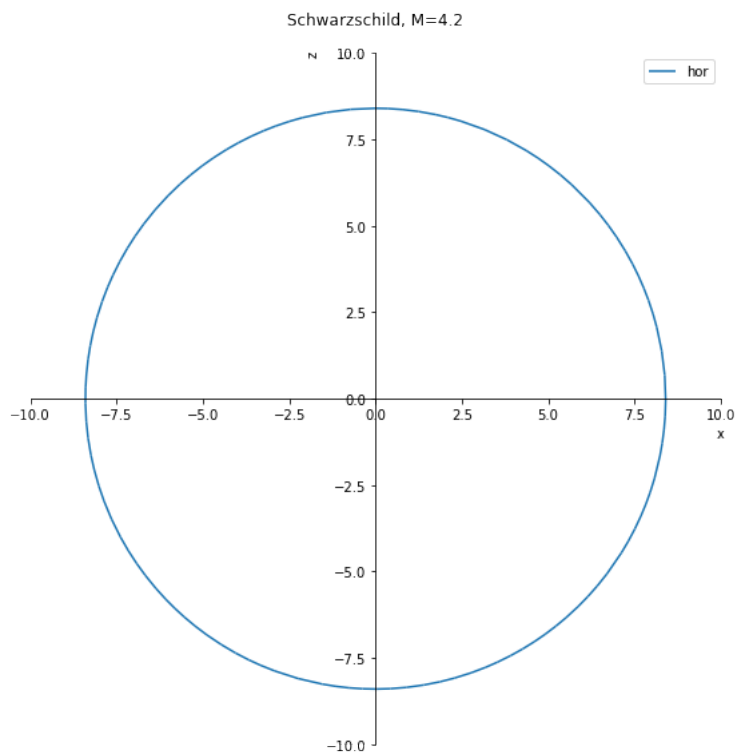


Figura 1 – Horizonte de eventos de Schwarzschild com  $M = 4.2$ .

Dimuindo a variável  $M$ , temos:

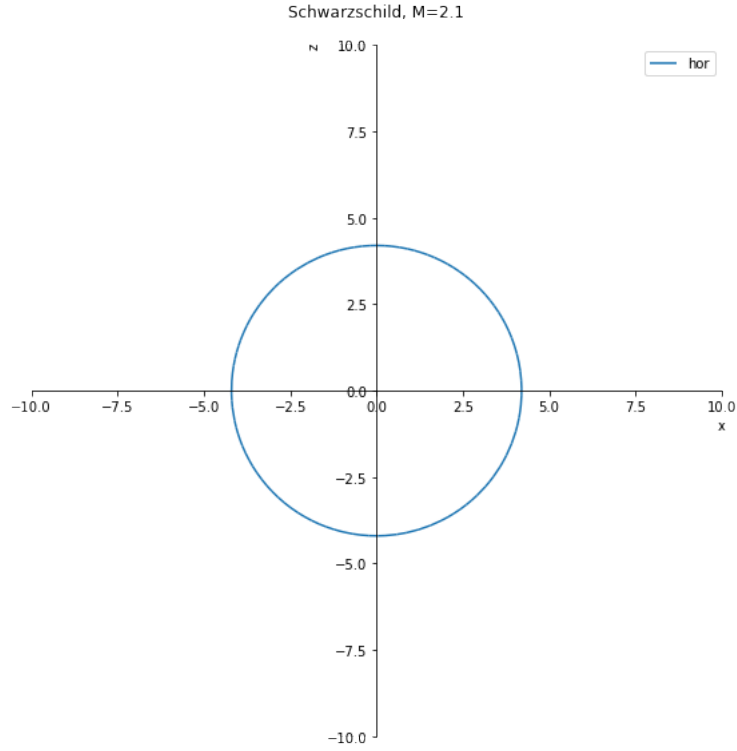


Figura 2 – Horizonte de eventos de Schwarzschild com  $M = 2.1$ .

O resultado desse gráfico mostra o comportamento esperado do buraco negro que possui apenas a massa  $M$  como parâmetro, uma superfície esférica (circunferência na seção do plano  $xz$ ) representando o horizonte de eventos e a singularidade no centro do buraco negro de Schwarzschild  $r = 0$ . Podemos observar, nas figuras 1 e 2, que o horizonte de eventos cresce linearmente com a massa  $M$ .

## 4.2 Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr

A equação do horizonte de eventos:

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M - a^2} \quad (4.2)$$

A equação da ergosfera:

$$r_{E\pm} = M \pm \sqrt{M - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4.3)$$

O gráfico obtido para a solução de Kerr:

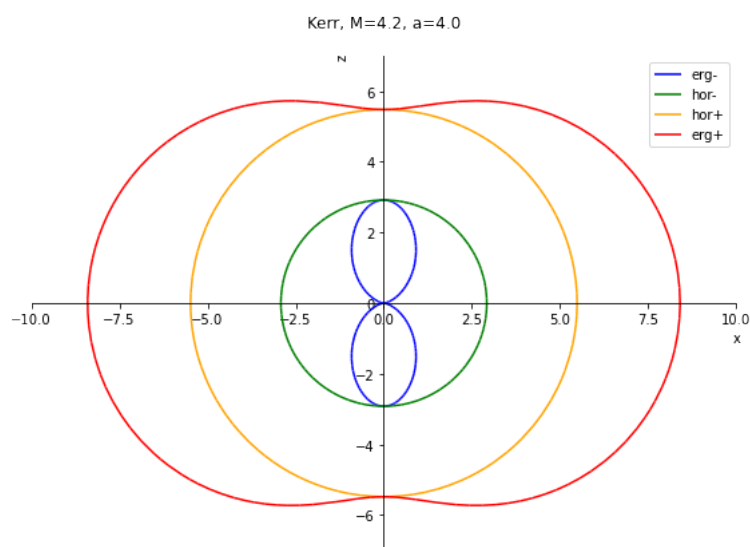


Figura 3 – Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr com  $M = 4.2$  e  $a = 4.0$ .

Diminuindo a variável  $a$ , temos:

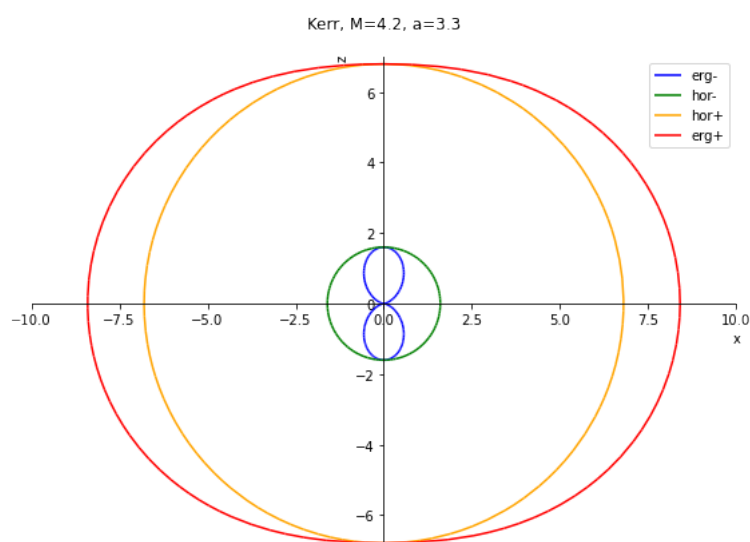


Figura 4 – Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr com  $M = 4.2$  e  $a = 3.3$ .



O resultado dos gráficos demonstram o comportamento esperado do buraco negro com massa  $M$  e momento angular  $a$ . Podemos ver o achatamento nos polos devido ao termo  $\cos^2$  que está na raiz quadrada e a existência da região ergosfera, compreendida entre a superfície externa da ergosfera, em vermelho e a superfície do horizonte de eventos externo, em laranja. Nesta região há um arrasto gravitacional, em que algumas partículas ficam presas e tem momento angular junto ao buraco negro.

Com uma pequena diminuição do momento angular  $a$ , notamos que o achatamento da superfície externa da ergosfera (em vermelho) fica mais suave, o aumento da superfície do horizonte de eventos externo (em laranja) e a diminuição da superfície do horizonte de eventos interno (em verde) e da superfície da ergosfera interna (em azul), isso é conveniente a rotação mais lenta do buraco negro. E também devido a rotação, a singularidade neste buraco negro se comporta como um anel, no gráfico identificamos como uma dobra equatorial da ergosfera mais interna, em azul. A equação do anel de singularidade [22] é dada por:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0 \quad (4.4)$$

### 4.3 Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr-Newman

A equação do horizonte de eventos interno e externo :

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - r_Q^2} \quad (4.5)$$

Com

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \quad (4.6)$$

A equação da ergosfera interna e externa:

$$r_{E\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - r_Q^2} \quad (4.7)$$

O gráfico obtido para a solução de Kerr-Newman:

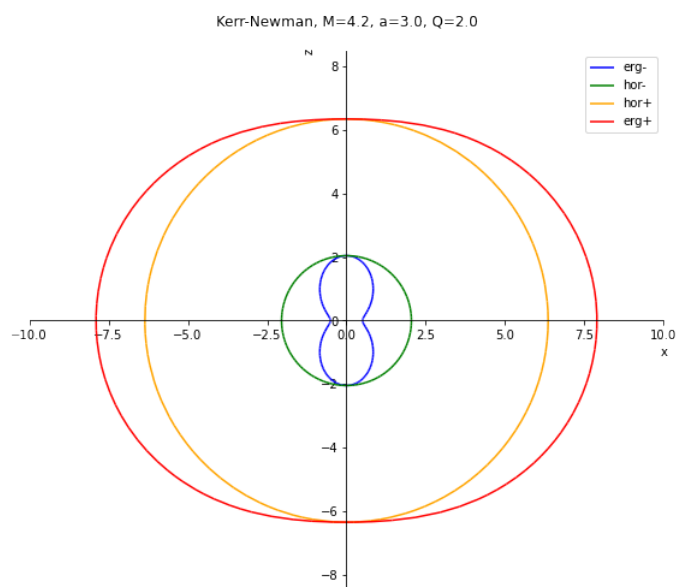


Figura 5 – Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com  $M = 4.2$ ,  $a = 3.0$  e  $Q = 2.0$

Diminuindo a variável  $a$ , temos:

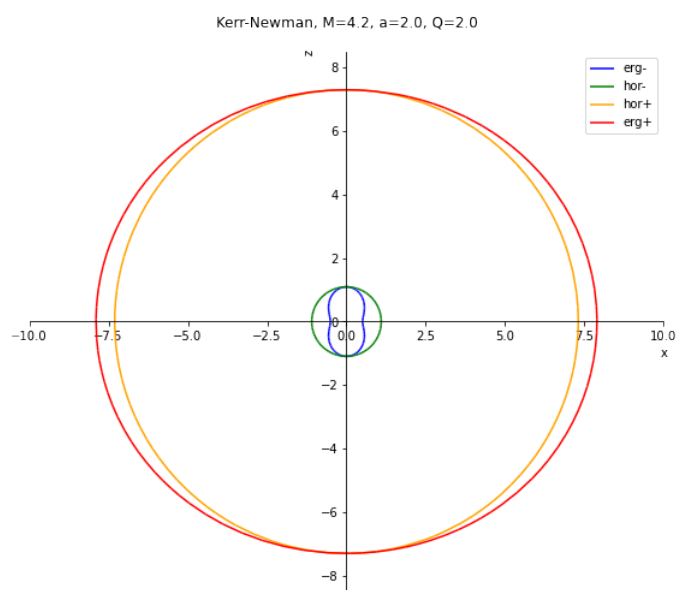


Figura 6 – Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com  $M = 4.2$ ,  $a = 2.0$  e  $Q = 2.0$

Aumentando a variável  $Q$ , temos:

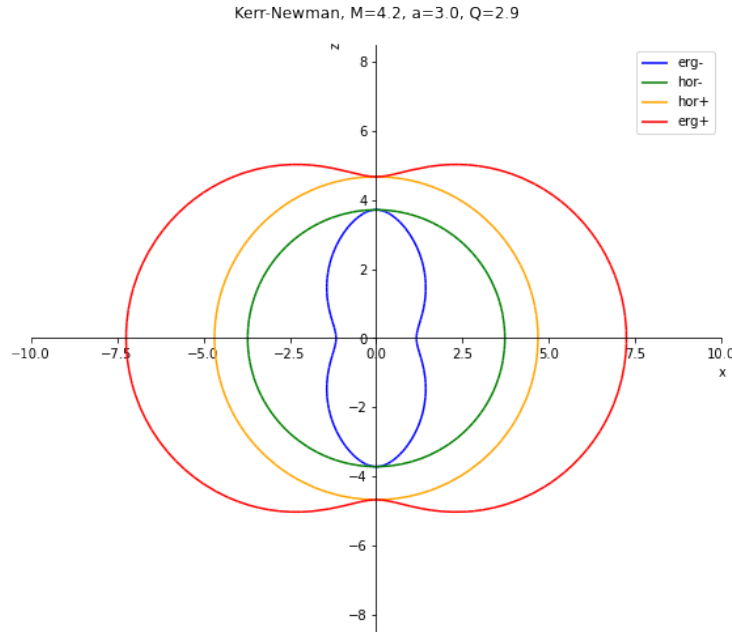


Figura 7 – Horizonte de eventos e ergosfera de Kerr-Newman com  $M = 4.2$ ,  $a = 3.0$  e  $Q = 2.9$

O resultado deste gráfico demonstra o comportamento do buraco negro mais geral, com massa  $M$ , momento angular  $a$  e com carga elétrica  $Q$ . Podemos ver o achatamento nos polos devido ao termo  $\cos^2$  que está na raiz quadrada e a existência da região ergosfera, compreendida entre a superfície externa da ergosfera, em vermelho e a superfície do horizonte de eventos externo, em laranja. Uma região onde há um arrasto gravitacional, em que algumas partículas ficam presas e tem momento angular junto ao buraco negro.

Com a mudança de duas variáveis, temos uma clara mudança no visual dos gráficos. Nos três gráficos temos o mesmo valor de  $M$ , variando  $a$  e  $Q$ . Ao variar  $a$ , temos a diminuição da região de ergosfera e a diminuição das superfícies de ergosfera interna (em azul) e da superfície de horizonte de eventos interna (em verde), estas regiões quase se sobrepõem devido ao campo magnético moderado. Ao aumentar o valor de  $Q$ , vemos a região da ergosfera interior (em azul) aumentar consideravelmente, quase chegando aos limites superiores das outras regiões, isso devido ao  $Q$  ser maior

que  $a$ , o que gera um campo magnético muito intenso.

Devido à rotação, esta singularidade se comporta como um anel, com a equação:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0 \quad (4.8)$$

## 4.4 Horizonte de Eventos de Reissner-Nordström

A equação do horizonte de eventos e esgofera é escrita como:

$$r_{\pm} = \left( M \pm \sqrt{M^2 - r_Q^2} \right) \quad (4.9)$$

Com:

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \quad (4.10)$$

O gráfico obtido para a solução de Reissner-Nordström:

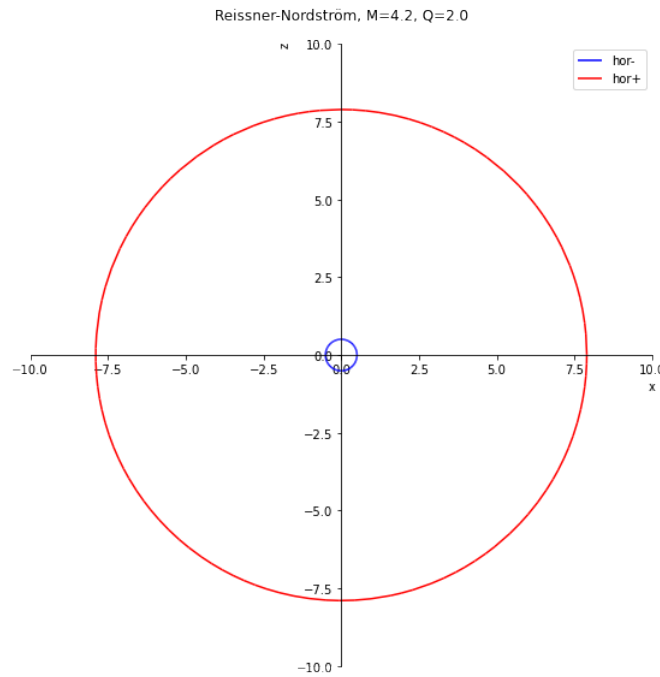


Figura 8 – Horizonte de eventos de Reissner-Nordström com  $M = 4.2$  e  $Q = 2.0$

Aumentando a variável  $Q$ , temos:

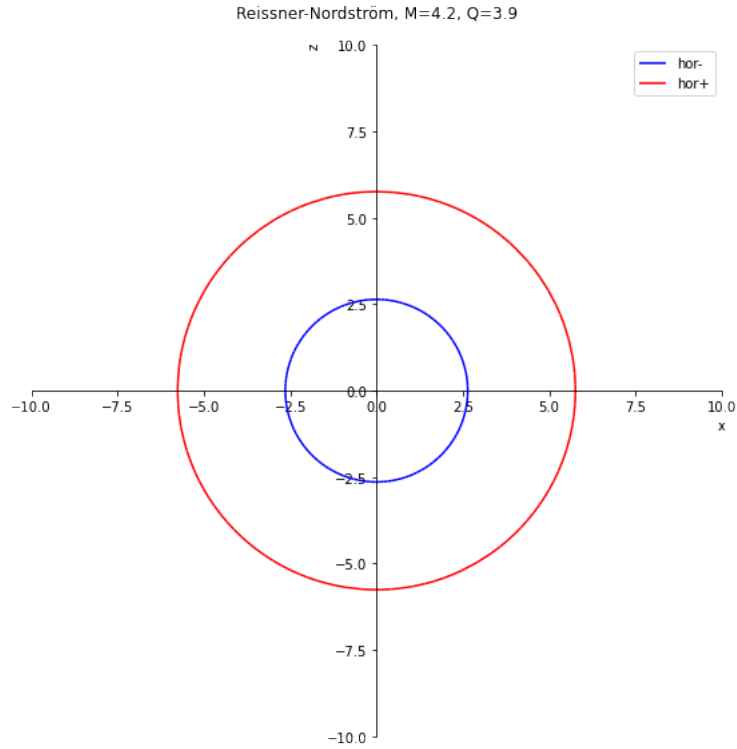


Figura 9 – Horizonte de eventos de Reissner-Nordström com  $M = 4.2$  e  $Q = 3.9$

O resultado do gráfico demonstra o comportamento de um buraco negro com massa  $M$  e carga elétrica  $Q$ . Possui dois horizontes de eventos, um externo (em vermelho) e outro interno (em azul), que condiz com a natureza de simetria entre as duas regiões. Quando o horizonte de eventos interno aumenta, o horizonte de eventos externo diminui. A singularidade desta métrica está no centro do buraco negro de Reissner-Nordström,  $r = 0$ . Caso  $Q$  for nulo, esta métrica se reduz à métrica de Schwarzschild.

## 5 Considerações Finais

Métricas denotam características dos buracos negros, com massa, momento angular e carga elétrica e também as regiões do horizonte de eventos e da ergosfera. Sabemos que estas regiões junto da singularidade formam a estrutura do buraco negro e são de grande importância de estudos. Neste trabalho, buscamos trazer, utilizando Python e SymPy, a visualização dessas regiões, assim podemos ver seu comportamento, que depende diretamente do valor das variáveis.

O buraco negro com métrica de Schwarzschild possui apenas a massa  $M$  como parâmetro, assim temos apenas uma região de horizonte de eventos. Com a adição de um parâmetro de momento angular  $a$ , visivelmente temos o aparecimento de mais três regiões, um horizonte de eventos interno e duas regiões de ergosfera, uma externa e uma interna. Este é o buraco negro com métrica de Kerr.

O buraco negro com métrica de Kerr-Newman, possui os três parâmetros, massa  $M$ , o momento angular  $a$  e a carga elétrica  $Q$ . Visualmente temos um buraco negro parecido com o de Kerr, mas ao adicionar o parâmetro de carga elétrica  $Q$  temos o comportamento da ergosfera interior (em azul) indo em direção ao horizonte de eventos interno (em verde), e o que determina o limite destas regiões é a relação dos parâmetros  $M$  e  $Q$ .

O buraco negro com métrica de Reissner-Nordström se assemelha à métrica de Schwarzschild. Ao introduzir o parâmetro de carga elétrica  $Q$ , notamos o aparecimento de um horizonte de eventos interno, agora então possuindo um horizonte de eventos interno e um externo, estes passam a depender não só da massa  $M$ , mas da carga elétrica  $Q$ .

Buracos negros são resultados das equações de campo de Einstein e extremamente complexos. Uma região no espaço onde um ponto adimensional possui densidade infinita, curvando o espaço-tempo e que a partir de um certo local as leis da Física não funcionam. A ciência ainda não desvendou o porquê da existência desses objetos. Sabemos que eles existem, mas ainda não conhecemos sua natureza.

# Referências

- [1] NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1687. Disponível em: <https://www.wdl.org/pt/item/17842/>. Acesso em: 15 ago. 2021.
- [2] A. Einstein, Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik* 322, 891–921 (1905). Disponível em: <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>. Acesso em 15 ago. 2021.
- [3] A. Einstein, Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse* 25, 844–847 (1915). Disponível em: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/276>. Acesso em: 15 ago. 2021.
- [5] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)* 1916 (1916) 189-196. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/physics/9905030v1>. Acesso em: 15 ago 2021.
- [6] BURACO NEGRO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Buraco\\_negro&oldid=61969354](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Buraco_negro&oldid=61969354). Acesso em: 25 ago. 2021.
- [7] Python. disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 16 set. 2021
- [8] JOSÉ, P. S. LEMOS. CARLOS, A. R. HERDEIRO. CARDOSO, V. Einstein e Eddington e as consequências da relatividade geral: Buracos negros e ondas gravitacionais. *Gazeta de Física*, ed. 42, número 2, 2019. Disponível em: <https://www.spf.pt/magazines/GFIS/473/article/1570/pdf>. Acesso em 25 de ago. 2021.
- [9] TENSOR MÉTRICO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Tensor\\_m%C3%A9trico&oldid=58256987](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Tensor_m%C3%A9trico&oldid=58256987). Acesso em: 23 ago . 2021.
- [10] SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Seção Especial - Ondas Gravitacionais, Rev. Bras. Ensino Fís.* 38 (4), 2016.

Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0191>. Acesso em: 15 ago 2021.

[11] SIQUEIRA-BATISTA, R.; HELAYËL NETO, J. A. Buracos negros estelares: A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild. *Cadernos de Astronomia*, Vitória, v. 2, n. 2, p. 123, 2021. DOI: 10.47456/Cad.Astro.v2n2.34640. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/34640>. Acesso em: 18 set. 2021.

[12] TEUKOLSKY, Saul A. The Kerr Metric. *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, n. 12, p. 124006, 2015. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/32/12/124006>. Acesso em: 25 de ago. 2021.

[13] VISSER, Matt. VICTORIA U., Wellington. Jun, 2007. The Kerr spacetime: A Brief introduction. Disponível em: [arXiv:0706.0622 \(gr-qc\)](https://arxiv.org/abs/0706.0622). Acesso em: 25 de ago. 2021.

[14] ADAMO, T. The Kerr-Newman metric: A Review. (Cambridge U., DAMTP), E.T. Newman(Pittsburgh U.) (Oct 24, 2014). Disponível em: [http://www.scholarpedia.org/article/Kerr-Newman\\_metric](http://www.scholarpedia.org/article/Kerr-Newman_metric). Acesso em: 25 ago 2021.

[15] MÉTRICA DE KERR-NEWMAN. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9trica\\_de\\_Kerr-Newman&oldid=59225978](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9trica_de_Kerr-Newman&oldid=59225978). Acesso em: 31 ago. 2021.

[16] NORDEBO, J. The Reissner-Nordström metric. 2016. Disponível em: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:912393/FULLTEXT01.pdf>. Acesso em: 01 set. 2021.

[17] MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9trica\\_de\\_Reissner-Nordstr%C3%B6m&oldid=59084619](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9trica_de_Reissner-Nordstr%C3%B6m&oldid=59084619). Acesso em: 18 ago. 2021.

[18] LaTeX, A document preparation system. Disponível em: <https://www.latex-project.org/>.

[19] GitHub, Inc. Disponível em: <https://github.com/>.



- 
- [20] SYMPY, Documentation. Disponível em: <https://docs.sympy.org/latest/modules/plotting.html>.
- [22] SINGULARIDADE DO ANEL. n: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2020. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ring\\_singularity&oldid=1030737229](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ring_singularity&oldid=1030737229). Acesso em: 20 set. 2021.
- [23] Repositório Larissa-degen/TCC-Buracos-Negros. Disponível em: <https://github.com/Larissa-degen/TCC-Buracos-Negros>.

## A Código Fonte

Para mais informações, o código fonte Python e o documento desse TCC estão disponíveis no repositório público GitHub "Larissa-degen/TCC-Buracos-Negros"[23].

### A.1 Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos de Schwarzschild

```

1 from sympy import *
2 from sympy.plotting.plot import plot_parametric
3 def figura_Schwarzschild(M):
4     theta = Symbol('theta')
5     r_hor = 2*M
6     plot_parametric((r_hor*sin(theta), r_hor*cos(theta)), (theta, 0,
7                     2*pi), aspect_ratio=(1, 1),
8                     xlim=[-10, 10], ylim=[-10, 10], xlabel="x",
9                     ylabel="z", legend=True, label='hor',
10                    title="Schwarzschild, M={}\n".format(M), size=(8,
11                    8))
12 figura_Schwarzschild(4.2)
13 figura_Schwarzschild(2.1)

```

### A.2 Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr

```

1 from sympy import *
2 from sympy.plotting.plot import plot_parametric
3 def figura_Kerr(M, a):
4     theta = Symbol('theta')
5     r_erg_m = M - sqrt(M**2 - (a**2)*(cos(theta)**2))
6     r_erg_p = M + sqrt(M**2 - (a**2)*(cos(theta)**2))
7     r_hor_m = M - sqrt(M**2 - a**2)

```

```

8      r_hor_p = M + sqrt(M**2 - a**2)
p = plot_parametric((r_erg_m*sin(theta), r_erg_m*cos(theta)),
10                    (r_hor_m*sin(theta), r_hor_m*cos(theta)),
                    (r_hor_p*sin(theta), r_hor_p*cos(theta)),
12                    (r_erg_p*sin(theta), r_erg_p*cos(theta)),
                    (theta, 0, 2*pi), aspect_ratio=(1, 1), xlim
                    =[-10, 10], ylim=[-7, 7],
14                    xlabel="x", ylabel="z", legend=True,
                    title="Kerr, M={}, a={} \n".format(M, a), size
                    =(8, 8), show=False)

16      p[0].line_color = 'blue'
p[0].label = 'erg-'
18      p[1].line_color = 'green'
p[1].label = 'hor-'
20      p[2].line_color = 'orange'
p[2].label = 'hor+'
22      p[3].line_color = 'red'
p[3].label = 'erg+'
24      p.show()
figura_Kerr(4.2, 4.0)
26 figura_Kerr(4.2, 3.3)

```

### A.3 Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos e Ergosfera de Kerr-Newman

```

from sympy import *
2 from sympy.plotting.plot import plot_parametric
def figura_Kerr_Newman(M, a, Q):
4     theta = Symbol('theta')
r_erg_m = M - sqrt(M**2 - (a*cos(theta))**2 - Q**2)
6     r_erg_p = M + sqrt(M**2 - (a*cos(theta))**2 - Q**2)
r_hor_m = M - sqrt(M**2 - a**2 - Q**2)
8     r_hor_p = M + sqrt(M**2 - a**2 - Q**2)
p = plot_parametric((r_erg_m*sin(theta), r_erg_m*cos(theta)),
10                    (r_hor_m*sin(theta), r_hor_m*cos(theta)),
                    (r_hor_p*sin(theta), r_hor_p*cos(theta)),
12                    (r_erg_p*sin(theta), r_erg_p*cos(theta)),

```

```

14         (theta, 0, 2*pi), aspect_ratio=(1, 1), xlim
            =[-10, 10], ylim=[-8.5, 8.5],
            xlabel="x", ylabel="z", legend=True,
            title="Kerr-Newman, M={}, a={}, Q={} \n".
                format(M, a, Q), size=(8, 8), show=False)
16 p[0].line_color = 'blue'
    p[0].label = 'erg-'
18 p[1].line_color = 'green'
    p[1].label = 'hor-'
20 p[2].line_color = 'orange'
    p[2].label = 'hor+'
22 p[3].line_color = 'red'
    p[3].label = 'erg+'
24 p.show()
    figura_Kerr_Newman(4.2, 3.0, 2.0)
26 figura_Kerr_Newman(4.2, 2.0, 2.0)
    figura_Kerr_Newman(4.2, 3.0, 2.9)

```

## A.4 Código Fonte dos Gráficos de Horizonte de Eventos de Reissner-Nordström

```

1 from sympy import *
    from sympy.plotting.plot import plot_parametric
3 def figura_Reissner_Nordstrom(M, Q):
    theta = Symbol('theta')
5    r_hor_m = M - sqrt(M**2 - Q**2)
    r_hor_p = M + sqrt(M**2 - Q**2)
7    p = plot_parametric((r_hor_m*sin(theta), r_hor_m*cos(theta)), (
        r_hor_p*sin(theta), r_hor_p*cos(theta)),
            (theta, 0, 2*pi), aspect_ratio=(1, 1), xlim
            =[-10, 10], ylim=[-10, 10],
9        xlabel="x", ylabel="z", legend=True,
            title="Reissner-Nordstr m, M={}, Q={} \n".
                format(M, Q), size=(8, 8),
11        show=False)
    p[0].line_color = 'blue'
13    p[0].label = 'hor-'

```

```
15     p[1].line_color = 'red'
16     p[1].label = 'hor+'
17     p.show()
18 figura_Reissner_Nordstrom(4.2, 2.0)
19 figura_Reissner_Nordstrom(4.2, 3.9)
```