



Aplicações sobre Transformações Lineares e PCA

Disciplina: Álgebra Linear para Ciência de Dados I

Professor: Prof. Dr. Ayslan Santos P. da Costa

Alunas (o): Larissa Castor, Fernanda Amaral, João Antônio Silveira; Samuel Moreira; Tênisson José

Aracaju

2025

1. INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear constitui a base matemática para a compreensão de transformações de dados em espaços vetoriais. Essas transformações lineares, desenvolvidas a partir de operações matriciais, que permitem modificar a posição, o tamanho ou a orientação de uma imagem preservando relações lineares entre os pontos (ABDI; WILLIAMS, 2010).

Conceitos como autovalores, autovetores, decomposições de matrizes e projeções lineares possibilitam a representação e manipulação de dados multidimensionais. O entendimento desses conceitos é essencial para o desenvolvimento de diversos algoritmos utilizados em aprendizado de máquina e visão computacional (STRANG, 2016).

A Análise de Componentes Principais (PCA) é uma técnica de redução de dimensionalidade baseada em transformações lineares. Seu objetivo é projetar os dados em um novo sistema de eixos (autovetores) de forma que as variáveis resultantes (componentes principais) capturem a maior parte da variabilidade original (JOLLIFFE; CADIMA, 2016).

Essa técnica de componentes principais pode ser empregada para extrair características relevantes e reduzir redundâncias, preservando as informações essenciais para o diagnóstico automático. E, presente trabalho apresenta a aplicação prática desses conceitos em um projeto de detecção de fraturas ósseas, utilizando o dataset público Bone Fracture Detection: Computer Vision Project (DARABI, 2024).

2. METODOLOGIA

O trabalho foi realizado utilizando um dataset disponibilizado por Darabi (2024) composto por imagens radiográficas de ossos com e sem fratura. As imagens foram previamente pré-processadas por meio de técnicas de padronização e redução de ruído, visando uniformizar a base de dados e otimizar a extração de características.

O método de Análise de Componentes Principais (PCA) foi empregado como etapa de extração e redução de características. A aplicação do PCA teve como objetivo transformar o espaço original das imagens (de alta dimensionalidade) em um espaço de

componentes ortogonais, onde as direções de maior variância correspondem às características mais relevantes para discriminar padrões de fratura.

Para a análise e preparação do conjunto de imagens, foi utilizado o algoritmo de visão computacional YOLO (*You Only Look Once*), empregado para gerar amostras anotadas (com caixas delimitadoras) e visualizar as imagens de treino, validação e teste. Adicionalmente, foram aplicadas transformações lineares clássicas como rotação, espelhamento, escala e translação que poderiam auxiliar na ampliação do conjunto de dados e reduzir o risco de sobreajuste (*overfitting*).

Um estudo específico sobre a aplicação do PCA em imagens segmentadas e anotadas foi conduzido para analisar e comprimir as representações visuais já classificadas (fratura ou não fratura). Matematicamente, a Análise de Componentes Principais foi obtida por meio da decomposição espectral da matriz de covariância dos dados. A partir da avaliação da variância explicada acumulada, determinou-se o número ideal de componentes principais necessários para representar 90% e 95% da variância total.

Foram utilizadas bibliotecas Python modernas como NumPy, Matplotlib, scikit-learn, Pandas e OpenCV combinadas para reproduzir um fluxo completo de pré-processamento, transformação linear e análise estatística sobre o conjunto de imagens. Essa integração permitiu demonstrar, de forma prática, como os fundamentos matemáticos da Álgebra Linear se traduzem em soluções computacionais aplicadas à visão computacional e ao aprendizado de máquina.

3. RESULTADOS

A Figura 1 apresenta exemplos de imagens da base de treino com e sem fraturas, identificadas por meio do algoritmo YOLO (*You Only Look Once*). As caixas delimitadoras em vermelho representam as regiões de interesse onde foram detectadas fraturas. Essa etapa permitiu confirmar a correção das anotações e a coerência visual da base de dados utilizada para o treinamento, validação e teste, distinguindo adequadamente imagens positivas (fratura presente) e negativas (sem fratura).

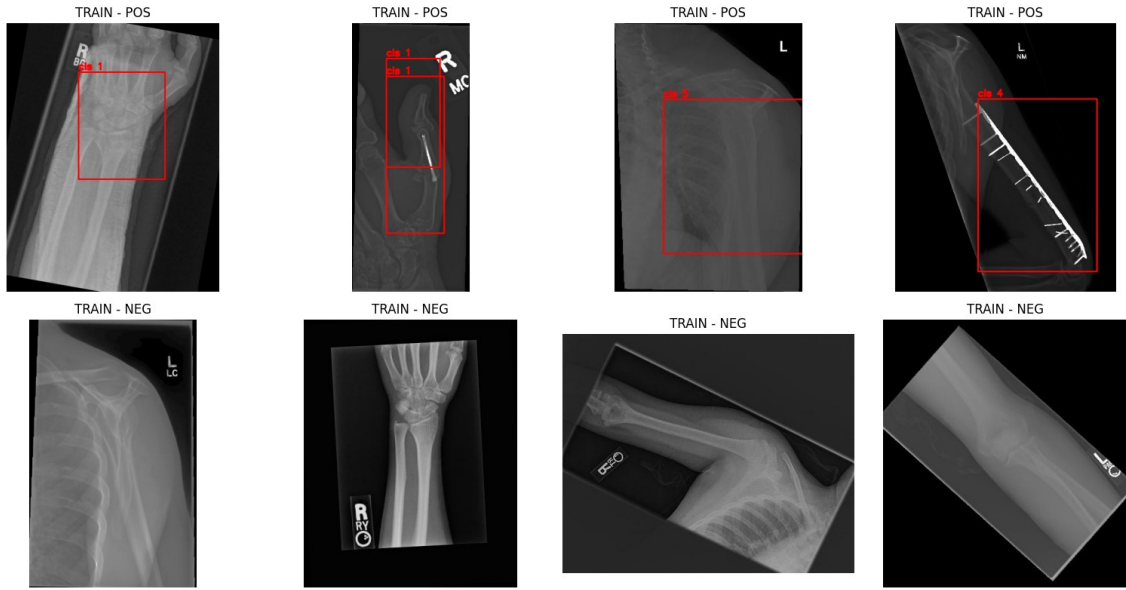


Figura 1: Identificação de fraturas em imagens radiográficas com YOLO.

As transformações lineares aplicadas neste experimento podem ser compreendidas como operações matriciais que mapeiam um espaço vetorial em outro, preservando propriedades fundamentais como proporcionalidade e aditividade. Em termos práticos, ao transformar uma imagem, cada ponto (ou pixel) é reposicionado de acordo com uma matriz de transformação que define como o espaço será rotacionado, redimensionado ou transladado.

Matematicamente, uma transformação linear em duas dimensões é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Aplicando essa matriz a um vetor (x,y), obtém-se o novo vetor transformado:

$$(x', y') = A \cdot (x, y)$$

Cada elemento de A determina como as coordenadas originais são combinadas para gerar as novas posições. Um caso particular amplamente utilizado neste trabalho foi a rotação de imagens, cuja matriz é dada por:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

onde θ representa o ângulo de rotação. Essa operação realiza uma mudança linear de base no plano, girando os vetores (ou pixels) em torno da origem sem alterar a escala nem distorcer a imagem.

Na Figura 2, observam-se as transformações lineares aplicadas às imagens, incluindo rotação ($+15^\circ$ e -15°), espelhamento horizontal (*flip H*), escalonamento e translação. Essas operações representam transformações lineares no espaço bidimensional das imagens, podendo ser expressas por matrizes de rotação, escala e translação.



Figura 2: Transformações lineares aplicadas a imagens radiográficas.

Essas modificações geométricas podem ser empregadas como estratégia de aumento de dados, permitindo maior variabilidade nas amostras e melhorando a capacidade de generalização do modelo.

Da mesma maneira às transformações geométricas, o PCA (*Principal Component Analysis*) também pode ser interpretado como uma transformação linear. Ele busca uma nova base ortogonal que maximize a variância dos dados, projetando-os em um subespaço reduzido sem perder informação relevante. O PCA é fundamentado na decomposição espectral da matriz de covariância, dada por:

$$C = \frac{1}{n} X^T X$$

onde X representa a matriz de dados centralizados e C expressa a relação de covariância entre as variáveis originais. A decomposição espectral dessa matriz gera autovetores (v_i) e autovalores (λ_i), onde os autovetores definem as direções principais de variação (componentes principais), e os autovalores quantificam a variância explicada por cada direção.

Podemos observar na Figura 3 a curva de variância explicada acumulada em função do número de componentes principais. Nota-se que cerca de 33 componentes explicam 90% da variância total, e aproximadamente 114 componentes são necessários para representar 95% da variância.

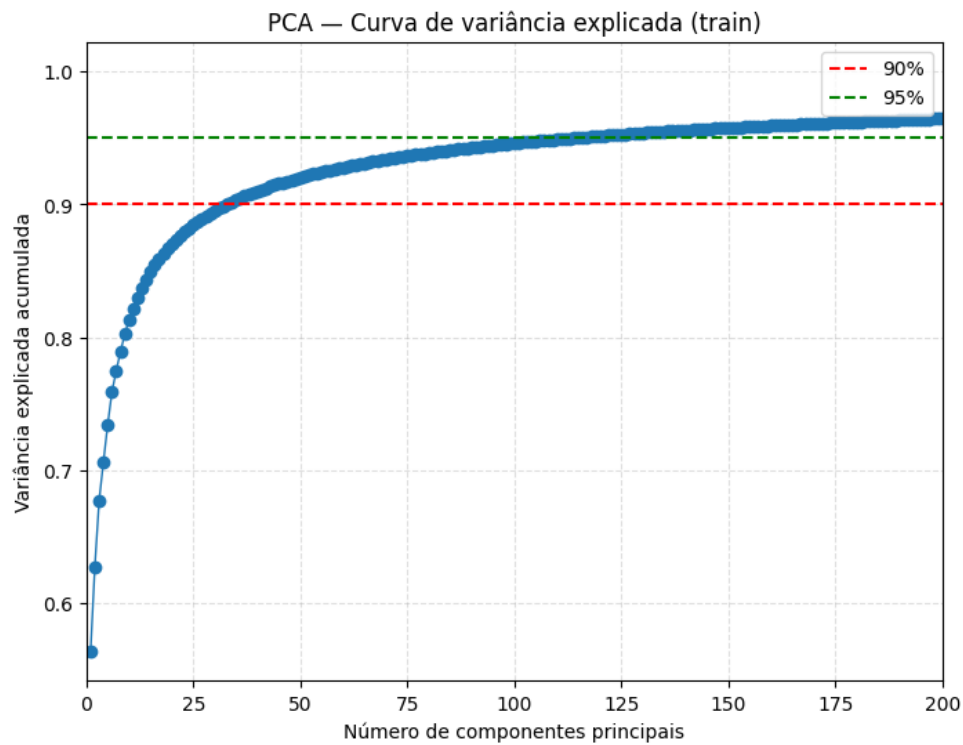


Figura 3: Curva de variância explicada acumulada pelo PCA.

Esse resultado demonstra que o PCA foi capaz de condensar a informação contida nas imagens originais em um subespaço muito menor, preservando a estrutura estatística essencial dos dados. Para avaliar o efeito prático dessa redução, a Figura 4 apresenta a reconstrução das imagens utilizando diferentes números de componentes principais ($k = 5, 10, 33, 50, 114$).

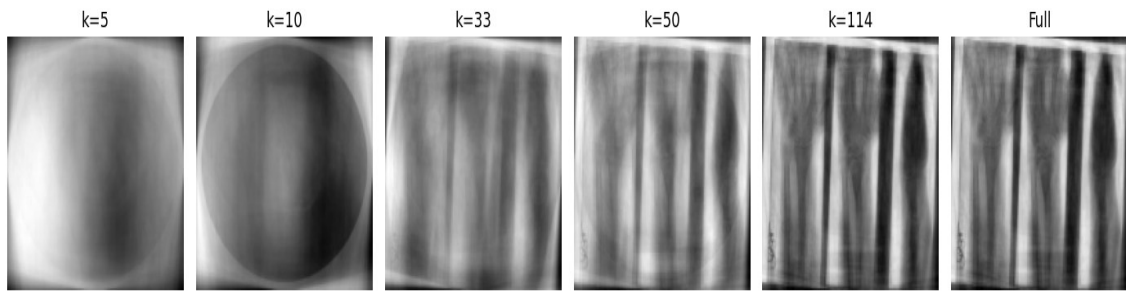


Figura 4: Compactação e reconstrução de imagens com diferentes números de componentes principais.

Quando o número de componentes é demonstrado por $k=5$ e $k=10$, apenas as formas globais são perceptíveis, enquanto para $k=33$ e $k=50$, os contornos ósseos tornam-se mais nítidos. Já com $k=114$, a imagem reconstruída aproxima-se significativamente da original, evidenciando que boa parte da informação visual é preservada mesmo após a compressão linear dos dados. Esses resultados reforçam o papel do PCA como uma técnica de redução de dimensionalidade eficiente, capaz de representar as imagens de forma compacta, mantendo as características diagnósticas relevantes.

Por fim, a Figura 5 mostra a projeção dos dados no espaço bidimensional formado pelas duas primeiras componentes principais (PC1 e PC2). Observa-se uma tendência de agrupamento entre as imagens positivas (fraturas) e negativas (sem fraturas), demonstrando que o PCA foi capaz de capturar padrões estruturais distintos entre as classes.

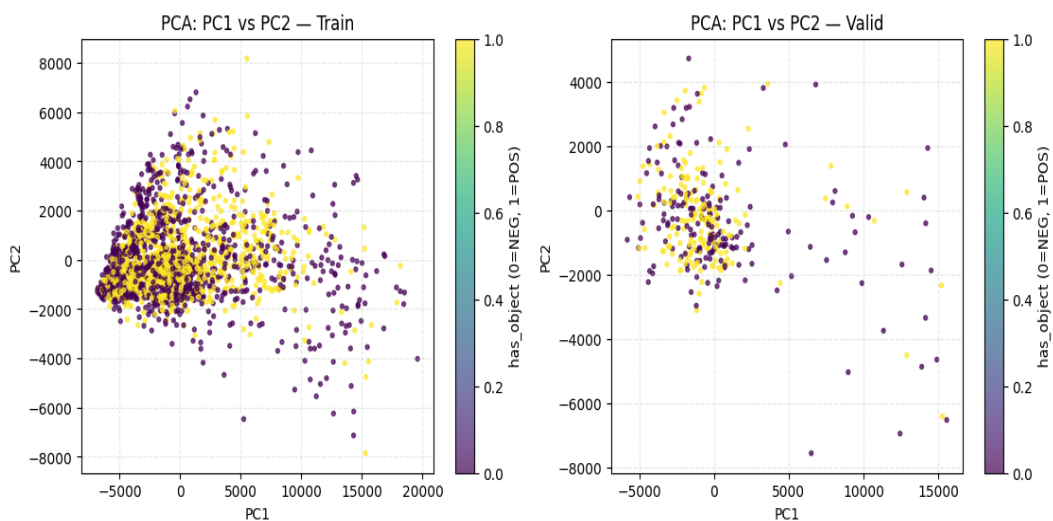


Figura 5: Projeção bidimensional das duas primeiras componentes principais ($PC1 \times PC2$) referente às imagens treino e de validação.

Embora exista certa sobreposição, característica comum em dados de imagem médica, o resultado indica que as duas primeiras componentes já retêm informações discriminantes significativas, que podem ser utilizadas em modelos de classificação supervisionada.

4. CONCLUSÃO

As transformações lineares desempenham um papel essencial em Ciência de Dados e nos modelos de Machine Learning e Deep Learning, pois permitem representar e manipular os dados de forma estruturada, mantendo suas relações e proporções originais. Elas servem de base para diversos métodos, como o PCA, e também para o funcionamento das redes neurais, onde cada camada aplica uma combinação linear dos dados antes de introduzir uma não linearidade, possibilitando o aprendizado de padrões.

O PCA, por sua vez, é um exemplo clássico de transformação linear, já que projeta os dados originais em novas direções que explicam a maior parte da variância, reorganizando o espaço de forma a destacar as informações mais relevantes sem alterar a natureza dos dados. Quando aplicado a imagens, o PCA oferece vantagens importantes, como a redução de dimensionalidade, a eliminação de ruídos e a otimização do processamento, mas também apresenta limitações, pois pode causar perda de detalhes e não é capaz de capturar relações não lineares entre pixels.

Nesses casos, técnicas mais avançadas, como o Kernel PCA e os Autoencoders, tornam-se necessárias, já que conseguem representar de forma mais fiel as estruturas complexas e curvas presentes nos dados, preservando padrões e significados que as transformações lineares não conseguem expressar plenamente.

5. REFERÊNCIAS

ABDI, H.; WILLIAMS, L. J. Principal component analysis. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, v. 2, n. 4, p. 433–459, 2010.

DARABI, P. Bone Fracture Detection: Computer Vision Project. ResearchGate, 2024.

JOLLIFFE, I. T.; CADIMA, J. Principal component analysis: a review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 374, n. 2065, p. 20150202, 2016.

STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. 5. ed. Wellesley–Cambridge Press, 2016.