

Cálculo de las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento de elipsoides en la aproximación cuasiestática como primera aproximación de eritrocitos

DANA LARISSA LUNA GONZÁLEZ

I. INTRODUCCIÓN

II. APROXIMACIÓN CUASIESTÁTICA

El **límite cuasiestático** consiste en considerar el tamaño de la partícula a estudiar mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente. En el caso de un elipsoide caracterizado por una función dieléctrica ϵ_1 , de semieje mayor a , se debe de considerar a este último mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente λ . Esta aproximación garantiza que el elipsoide esté sujeto a un campo eléctrico de la misma intensidad y dirección. [1]

En distancias mucho mayores que el tamaño de una partícula, es posible aproximar a esta como un *dipolo eléctrico puntual*, por lo cual, es conveniente estudiar el potencial y campo eléctrico que produce.

Un **dipolo eléctrico** consiste en dos cargas puntuales q y $-q$ separadas a una distancia d (ver Fig.1), con momento dipolar $\vec{p} = p\hat{e}_z$ donde $p = qd$. Si las cargas se encuentran embebidas en un medio homogéneo e infinito con función dieléctrica ϵ_m , entonces el potencial ϕ del dipolo en cualquier punto P es [2, 3]

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right), \quad (1)$$

donde, usando la ley de cosenos y considerando que $\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r}$, se tiene que

$$r_{\pm}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 \mp \frac{d \cos \theta}{r} \right) = r^2 \left(1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right),$$

o bien,

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right)^{-1/2}.$$

Como la región de interés es para $r \gg d$, entonces el segundo término tiende a 0 y se tiene que

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right)^{-1/2},$$

luego, usando la expansión binomial a primer orden de $(1 \mp x)^n = 1 \mp nx$, se tendrá que

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d \right).$$

De esta forma,

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d - 1 + \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right) = \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} d. \quad (2)$$

Si d se aproxima a cero de tal forma que qd permanezca constante, se obtiene el potencial para un dipolo puntual

$$\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_m r^2}. \quad (3)$$

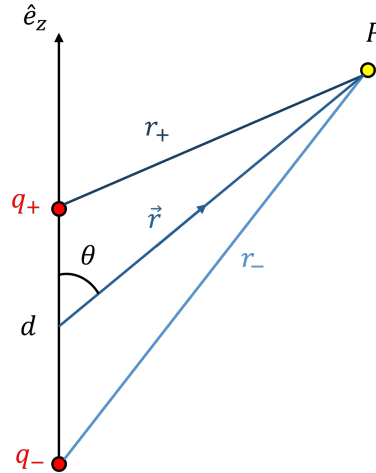


Figura 1: Dipolo eléctrico.



Considerando un sistema de cargas y corrientes variando con el tiempo, se puede hacer una expansión en series de Fourier de la dependencia del tiempo y manejar cada componente de Fourier por separado. De esta forma, no se pierde generalidad de considerar a los potenciales y campos de un sistema localizado de cargas y corrientes variando en el tiempo [4]

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

considerando que el significado físico lo posee la parte real. Las fuentes estarán consideradas localizadas en el espacio vacío.

De acuerdo con la norma de Lorenz se tiene que la solución para el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ es [4]

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')e^{i\omega\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (4)$$

donde la función Delta de Dirac asegura el comportamiento causal de los campos electromagnéticos.

Sea $k = \omega/c$ y omitiendo la dependencia temporal

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (5)$$

Considerando un tiempo $t > t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ y el carácter sinusoidal dependiente del tiempo se tiene que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (6)$$



Luego, dadas las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E}, \quad (10)$$

$$(11)$$

y como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, entonces

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}. \quad (12)$$

Si las dimensiones de la fuente son del orden d y la longitud de onda es $\lambda = 2\pi c/\omega$, y $d \ll \lambda$, entonces hay tres regiones de interés [4]

- La región cercana (estática): $d \ll \lambda$
- La región intermedia (inducción): $d \ll r \sim \lambda$
- La región lejana (de radiación): $d \ll \lambda \ll r$

En la región de campo cercano los campos son como los campos estáticos con componentes radiales. En la región de campo lejano, los campos son transversales al vector radial y decaen como r^{-1} . Para la región de campo cercano donde $r \ll \lambda$ (o $kr \ll 1$) la exponencial del potencial vectorial puede ser reemplazada por 1 y con ello encontramos la expresión conocida de este. En la región de campo lejano ($kr \gg 1$) dado que la exponencial oscila rápidamente, determina el comportamiento del potencial vectorial. En esta región es suficiente aproximar:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}', \quad (13)$$

con \hat{e}_r un vector unitario en la dirección de \vec{r} . Más aún, considerando la región de campo lejano, si sólo se consideran los términos que decaen como r^{-1} , la distancia inversa en Ec. (5) puede ser reemplazada por r . Entonces, el potencial vectorial es

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3r',$$

donde además se puede expandir en potencias de k :

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{r}') (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')^n d^3r'.$$

Si sólo se conserva el primer término de la expresión anterior

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3r', \quad (14)$$

integrando por partes,

$$\int \vec{J} d^3r' = - \int \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3r' = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r',$$

de donde se usa la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega \rho(\vec{r}). \quad (15)$$

Entonces,

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r' = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}, \quad (16)$$

con \vec{p} el momento dipolar eléctrico. De esto se sigue que los campos de un dipolo eléctrico son (ver *Apéndice*)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \quad (17)$$

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{e}_r(\hat{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}. \quad (18)$$

Obsérvese que el campo \vec{H} es transversal al vector radial para cualquier distancia, mientras el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a \hat{e}_r .

En la zona de radiación cuando $kr \gg 1$ se tiene que

$$\vec{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (19)$$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H} \times \hat{e}_r = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}). \quad (20)$$

Si el momento dipolar oscila a la frecuencia del campo incidente, entonces el dipolo radia campo electromagnético, es decir, esparrca un campo eléctrico \vec{E}_{scat} dado por

$$\vec{E}_{scat} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}), \quad (21)$$

donde el factor de dependencia temporal $e^{i\omega t}$ se ha omitido. Sustituyendo el momento dipolar de un dipolo puntual $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$, se tiene que podemos reescribir al campo esparrcido como

$$\vec{E}_{scat} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} (\epsilon_m \alpha E_0) \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi} (\alpha E_0 e^{ikz}) \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E,$$

donde $E = E_0 e^{ikz}$ y $\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x)$ es el vector de amplitud de esparrcimiento. Más aún, $\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = -\cos\theta \cos\phi \hat{e}_\theta + \sin\phi \hat{e}_\phi$.



Dado el coeficiente de extinción [2]

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\} \quad (22)$$

como

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_x) - \hat{e}_x (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r)) \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2\theta \cos^2\phi - 1), \quad (23)$$

entonces,

$$C_{ext} = k \text{Re} \left[\left(i\alpha (\sin^2\theta \cos^2\phi - 1) \right)_{\theta=0} \right] = k \text{Re} [-i\alpha], \quad (24)$$

pero la polarizabilidad es compleja $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, por lo que $-i\alpha = \alpha_2 - i\alpha_1$; de forma que la parte real de $-i\alpha$ es igual a la parte imaginaria de α , por lo que se sigue que

$$C_{ext} = k \text{Im}[\alpha]. \quad (25)$$

Asimismo, el coeficiente de esparrcimiento está descrito por [2]

$$\begin{aligned} C_{scat} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{(\alpha \cdot \alpha^*) k^4}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2\theta \cos^2\phi + 1) \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{|\alpha|^2 k^4}{(4\pi)^2} \frac{8\pi^2}{3} = \frac{|\alpha|^2 k^4}{6\pi}, \end{aligned} \quad (26)$$

y se tiene que [2]

$$C_{abs} = C_{ext} - C_{scat}. \quad (27)$$



I. Elipsoide en la aproximación cuasiestática

En esta sección se busca estudiar el esparramiento de luz por un elipsoide centrado en el origen, con semiejes (a, b, c) paralelos a los ejes $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ respectivamente, y con dimensiones tales que $\lambda \gg a > b > c$.

La partícula regular suave más general que cumple con lo anterior es un elipsoide con semiejes $a > b > c$, cuya superficie está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (28)$$

Las coordenadas más naturales, aunque poco conocidas, para estudiar el sistema enunciado previamente son las **coordenadas elipsoidales** (ver Fig.). Introduciendo la familia de superficies confocales de segundo grado [5]

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \quad (29)$$

donde $a > b > c$. La ecuación para calcular u corresponde a un polinomio de tercer grado, por lo que tiene tres raíces reales diferentes ξ, η, ζ , que se encuentran en los rangos

$$-c^2 < \xi < \infty, \quad -b^2 < \eta < -c^2, \quad -a^2 < \zeta < \infty \quad (30)$$

por lo cual,

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad -c^2 < \xi < \infty; \quad (31)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -b^2 < \eta < -c^2; \quad (32)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad -a^2 < \zeta < -b^2. \quad (33)$$

donde $(\hat{e}_\xi, \hat{e}_\eta, \hat{e}_\zeta)$ corresponden al sistema de coordenadas elipsoidales conveniente para la simetría del problema. Obsérvese que si ξ es constante, se obtiene un elipsoide confocal. De esta forma, la superficie de la partícula a estudiar se tiene cuando $\xi = 0$. Cuando η es constante, se obtiene un hiperboloide de una hoja y cuando ζ es constante se tiene un hiperboloide de dos hojas.

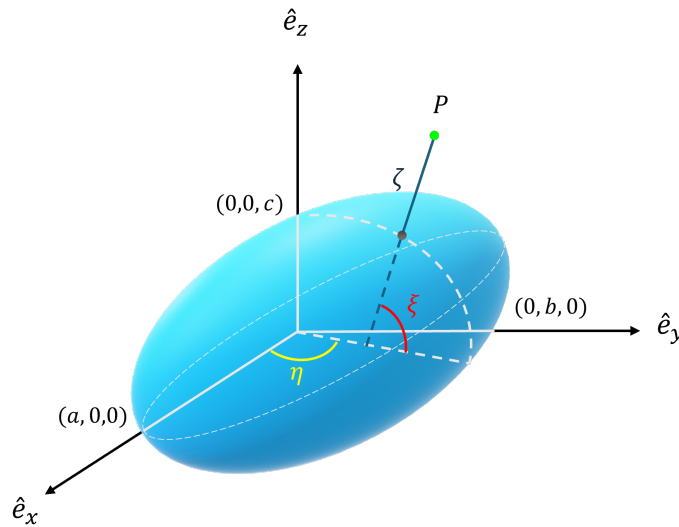


Figura 2: Sistema coordenado elipsoidal con un elipsoide centrado en el origen, con semiejes (a, b, c) , $a > b > c$.

Las ecuaciones anteriores constituyen un sistema de ecuaciones que se puede expresar de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2+\xi} & \frac{1}{b^2+\xi} & \frac{1}{c^2+\xi} \\ \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{a^2+\eta} \\ \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{a^2+\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución se encontrará encontrando la inversa de la matriz anterior, que es [1]

$$\begin{pmatrix} \frac{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} & \frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(b^2+\eta)(c^2+\eta)(a^2+\xi)}{(b^2-a^2)(a^2-c^2)(\xi-\eta)(\eta-\zeta)} & -\frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)(b^2+\zeta)(c^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(\xi-\zeta)(\zeta-\eta)} \\ \frac{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} & \frac{(c^2+\eta)(b^2+\zeta)(b^2+\xi)(b^2+\eta)(a^2+\eta)}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)(\xi-\eta)(\eta-\zeta)} & \frac{(b^2+\xi)(b^2+\eta)(a^2+\zeta)(b^2+\zeta)(c^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(\xi-\zeta)(\zeta-\eta)} \\ -\frac{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(c^2-b^2)(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} & \frac{(c^2+\xi)(a^2+\eta)(b^2+\eta)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(c^2-b^2)(\xi-\eta)(\eta-\zeta)} & \frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(a^2+\zeta)(b^2+\zeta)(c^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)(\xi-\zeta)(\zeta-\eta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o

Entonces, se tiene que

$$x^2 = \frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \quad (34)$$

$$y^2 = \frac{(b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \quad (35)$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \quad (36)$$

De esta forma, a cualquier punto (x, y, z) le corresponde un conjunto de coordenadas elipsoidales (ξ, η, ζ) . Sin embargo, esto no es cierto para el caso contrario. Estas coordenadas determinan ocho puntos simétricamente localizados en cada uno de los octantes cuyo espacio está particionado por los ejes coordenados x, y, z anteriormente mencionados.

Consideremos un elipsoide homogéneo bajo un campo eléctrico incidente uniforme alineado a lo largo del eje \hat{e}_z . El potencial tiene las propiedades de simetría

$$\phi(x, y, z) = \phi(-x, y, z) = \phi(x, -y, z) = \phi(-x, -y, z), \quad (37)$$

$$\phi(x, y, -z) = \phi(-x, y, -z) = \phi(x, -y, -z) = \phi(-x, -y, -z), \quad (38)$$

donde x, y, z son positivas. Entonces, solo se tiene que considerar el potencial en dos octantes: uno con z positivo y otro con z negativo. Más aún, el potencial y su derivada con respecto a z deben de ser continuos en el plano $z = 0$. El campo incidente $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$ se puede describir mediante el potencial como

$$\phi_0 = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z = -E_0 \left[\frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} \right]^{1/2}. \quad (39)$$

Se debe de considerar un potencial de perturbación (ϕ_p) asociado al esparramiento producido por la partícula. En consecuencia, el potencial fuera de la partícula ϕ_{ext} está formado por la superposición del potencial incidente ϕ_0 y el potencial de perturbación ϕ_p

$$\phi_{ext}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \phi_p(\xi, \eta, \zeta). \quad (40)$$

Además, el potencial debe de ser continuo en la superficie de la elipse

$$\phi_{int}(0, \eta, \zeta) = \phi_{ext}(0, \eta, \zeta) + \phi_p(0, \eta, \zeta), \quad (41)$$

y, para distancias lo suficientemente lejanas a la partícula, es decir, cuando $\xi \gg a^2$, al factorizar ξ de la Ec.(34), se tiene que

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{\xi} + 1} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{\xi} + 1} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{\xi} + 1} = \xi,$$

donde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\frac{a^2}{\xi} + 1} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{\xi} + 1} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{\xi} + 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

entonces, $\xi \simeq r^2$. Asimismo, en esta aproximación el potencial de perturbación es despreciable, por lo que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_p = 0. \quad (42)$$

Sean ϕ_{int} y ϵ_1 el potencial y la permitividad eléctrica en el interior del elipsoide y las mismas cantidades ϕ_{ext} y ϵ_m para el exterior de este, como el potencial es continuo y la componente tangencial del **campo eléctrico** también

$$\phi_{int} = \phi_{ext}, \quad (43a)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \epsilon_m \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}. \quad (43b)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior se necesita hacer un cambio de base de un sistema a otro. Para ello, se debe de encontrar un vector unitario en la dirección de la coordenada i , que mide cómo es que cambia el vector posición en una dirección dada y se define como [6]

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, 2, 3; \quad (44)$$

donde h_i es el factor de escala

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (45)$$

Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + \xi} \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}. \quad (46)$$

Análogamente, para y y z

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2y} \frac{\partial y^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{2z} \frac{\partial z^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}, \quad (48)$$

entonces, se tiene que el cuadrado del primer factor de escala h_1 es

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} \right]. \quad (49)$$

Por otro lado, se propone que

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} = \frac{g(u)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (50)$$

donde $g(u)$ es una función cúbica con tres raíces reales dentro del rango descrito por las limitaciones de cada variable. Considerando la función $g(u) = (u - \xi)(u - \eta)(u - \zeta)$, al derivar la ecuación anterior con respecto de u se tiene que

$$\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} = \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \eta} + \frac{1}{u - \zeta} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right], \quad (51)$$

con

$$f(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \quad (52)$$

De esta forma, se puede reescribir al primer factor de escala de la Ec.(49) como

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \eta} + \frac{1}{u - \zeta} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{(u - \zeta)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \zeta)}{g(u)} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right]. \end{aligned}$$

Considerando $u \rightarrow \xi$, $g(u) \rightarrow 0$, se tiene que el factor de escala h_1 es

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}, \quad (53)$$

análogamente,

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)}, \quad (54)$$

y

$$h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}. \quad (55)$$

El laplaciano en coordenadas generalizadas es [6]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (56)$$

donde ϕ es un escalar invariante. Por lo tanto, el laplaciano en coordenadas elipsoidales es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{\frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)} \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}}{\frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)} \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}}{\frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)} \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)}}{\frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \Lambda = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\xi)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}}{8f(\xi)f(\eta)f(\zeta)},$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\xi-\eta)}}{2\Lambda f(\eta)f(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\xi-\zeta)}}{2\Lambda f(\zeta)f(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\eta-\xi)}}{2\Lambda f(\eta)f(\xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right), \end{aligned}$$

y que simplificando es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{4f(\xi)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{4f(\eta)}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{4f(\zeta)}{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \\ = & \frac{4}{Y} \left[(\eta-\zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\xi-\zeta)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi-\zeta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right], \end{aligned} \quad (57)$$

donde a Y se le conoce como el valor absoluto del determinante funcional [7]

$$Y = (\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta). \quad (58)$$

Como resultado de lo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales es

$$\nabla^2 \phi = (\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\xi - \zeta)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (59)$$

Esta ecuación no es sencilla de resolver a pesar de ser considerablemente simétrica. Para resolverla se podría proponer hacerlo por el método de separación de variables y así expandir al potencial real como una suma de armónicos elipsoidales, pero como la solución a esta ecuación está determinada por la forma del campo incidente, que a su vez está descrito por el potencial anterior, y que necesariamente cumple las condiciones de contorno, se buscará resolver mediante el método de reducción de orden proponiendo una solución no trivial y buscar una segunda solución como se verá a continuación.

En la Ec.(39) se propuso a los potenciales ϕ_{int} y ϕ_p de la forma

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi, \eta, \zeta) = & -E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} \\ = & F(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \end{aligned} \quad (60)$$

los cuales tienen que satisfacer la Ec. (59). Por un lado,

$$(\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = (\eta - \zeta)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \left[f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) \right], \quad (61)$$

y,

$$\begin{aligned} (\xi - \zeta)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = & (\xi - \zeta)F(\xi)(c^2 + \zeta)^{1/2} \left[f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} (c^2 + \eta)^{1/2} \right) \right] \\ = & \frac{1}{4}(\xi - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2}(a^2 + b^2 + 2\eta)F(\xi). \end{aligned} \quad (62)$$

Análogamente,

$$(\xi - \eta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{4}(\xi - \eta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2}(a^2 + b^2 + 2\zeta)F(\xi). \quad (63)$$

Sumando las Ecs.(61), (62) y (63)

$$(\eta - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2} \left[f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \frac{1}{4}F(\xi)(a^2 + b^2 + 2\xi) \right] = 0, \quad (64)$$

por lo que para que se satisfaga la Ec.(59) basta que

$$f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) F(\xi) = 0. \quad (65)$$

Existen dos soluciones linealmente independientes a la ecuación diferencial (ordinaria) anterior. Se propone la primera solución como

$$F_1(\xi) = (c^2 + \xi)^{1/2}, \quad (66)$$

y la segunda solución se obtendrá mediante el método de reducción de orden. Como $F_1(\xi)$ es solución de la Ec.(66), entonces también $F_2(\xi) = v(\xi)F_1(\xi)$ lo es. Derivando la ecuación anterior respecto a ξ

$$\frac{dF_2(\xi)}{d\xi} = F_1(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi}, \quad (67)$$

$$\frac{d^2F_2(\xi)}{d\xi^2} = F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2 \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}, \quad (68)$$

y sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec.(66), se obtiene

$$\begin{aligned} f^2(\xi) \left(F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2 \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2} \right) \\ + \left(F_1(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right) f(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} - \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) v(\xi) F_1(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (69)$$

de donde tres términos se eliminan, pues

$$v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2} f^2(\xi) = -\frac{1}{4} v(\xi) [(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)^{-1/2}]$$

$$\begin{aligned} v(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} f(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{4} v(\xi) (a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)^{-1/2} + \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) v(\xi) F_1(\xi) \\ - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) v(\xi) F_1(\xi), \end{aligned}$$

es así como

$$f^2(\xi) F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dv(\xi)}{d\xi} \left[f(\xi) F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $V(\xi) = dv(\xi)/d\xi$, se tiene que

$$f^2(\xi) F_1(\xi) \frac{dV(\xi)}{d\xi} + V(\xi) \left[f(\xi) F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0,$$

$$\frac{1}{V(\xi)} \frac{dV(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{f^2(\xi) F_1(\xi)} \left[f(\xi) F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right].$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \ln[V(q)] = \int^q \frac{1}{V(\xi)} dV(\xi) = - \left[\int^q \frac{df(\xi)}{f(\xi)} + 2 \int^q \frac{dF_1(\xi)}{F_1(\xi)} \right] \\ = -\{\ln[f(q)] + \ln[F_1^2(q)]\} = -\ln[F_1^2(q)f(q)], \end{aligned} \quad (70)$$

entonces,

$$\frac{dv(q)}{dq} = \frac{1}{F_1^2(q)f(q)}, \quad (71)$$

donde $dv(q)/dq \neq 0$, por lo que $v(q) \neq \text{constante}$. Integrando lo anterior se tiene que

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}, \quad (72)$$

por lo tanto,

$$F_2(\xi) = F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}, \quad (73)$$

donde, en principio, los límites de integración son arbitrarios; sin embargo se han elegido los que aparecen en la Ec.(73), pues al escribir explícitamente el integrando, usando las Ecs. (66) y (73), se obtiene

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)[(a^2 + q)(b^2 + q)(c^2 + q)]^{1/2}} \\ &= \frac{2F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} - \frac{1}{(a^2 - c^2)^{1/2}} E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 + q} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right\} \bigg|_0^{\infty}, \end{aligned} \quad (74)$$

donde $E(\phi|k)$ es una integral elíptica de segundo orden definida como [8]

$$E(x|m) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{1 - t^2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (75)$$

donde el parámetro m se define como $m \equiv k^2$, el módulo angular es $\alpha = \arcsin k$ y φ es la amplitud que cumple $x = \sin \varphi$. En el primer límite de integración (∞) de $F_2(\xi)$ al evaluar se obtiene que el primer sumando es cero, y en el segundo la función arcoseno es cero. De esta forma, la parte angular de la integral es cero, es decir, $E(0|m) = 0$. En consecuencia, considerando la definición de F_1 en la Ec.(66) se tiene que F_1 y F_2 cumplen

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} F_1(\xi) = c \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_2(\xi) = 0. \quad (76)$$

De esta forma, los potenciales ϕ_{int} y ϕ_p , propuestos como en la Ec.(60), considerando que F_1 no satisface la condición impuesta sobre ϕ_p en la Ec. (42) y que el potencial dentro de la partícula debe de ser finito y F_2 no cumple con esto, están dados por

$$\phi_{int} = C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (77)$$

$$\phi_p = C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (78)$$

donde C_1 y C_2 son constantes determinadas a partir de las condiciones de frontera dadas por las Ecs.(43). Usando la primera condición de contorno de la Ec.(43a), se tiene que,

$$C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} = E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \quad (79)$$

entonces,

$$\begin{aligned} C_1 F_1(\xi) &= E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi) \\ \Rightarrow \frac{C_2 F_2(\xi) - C_1 F_1(\xi)}{(c^2 + \xi)^{1/2}} &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \\ \Rightarrow \frac{C_2 F_1(\xi) \int_0^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 F_1(\xi)}{(c^2 + \xi)^{1/2}} &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \\ \Rightarrow C_2 \int_0^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Si definimos

$$L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)}, \quad (81)$$

entonces,

$$C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \quad (82)$$

Usando la segunda condición de contorno de la Ec.(43b), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_1 C_1}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} &= \frac{\epsilon_m E_0}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \frac{\epsilon_m C_2}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \\ &\quad + \epsilon_m C_2 [(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral del tercer sumando es

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_\xi^a \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)} = - \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)}.$$

Al evaluar en $\xi = 0$ se tiene que

$$\frac{\epsilon_1 C_1}{2} = \epsilon_m E_0 \left[\frac{1}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1),$$

por tanto,

$$\epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_1 C_1 = \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (83)$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones entre las Ecs. (82) y (83), por lo cual, al multiplicar la Ec. (82) por ϵ_1 menos la Ec.(83)

$$\epsilon_1 C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 \epsilon_1 - \epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_1 C_1 = \epsilon_1 \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} - \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}},$$

simplificando se obtiene que

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{E_0(\epsilon_1 - \epsilon_m)}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left[L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m) + \epsilon_m \right]^{-1}, \quad (84)$$

por lo tanto, al sustituir C_2 en la Ec.(82) se tiene que:

$$C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\}. \quad (85)$$

De esta forma, ya se puede determinar el potencial dentro de la partícula sustituyendo F_1 y C_1 en la Ec.(77), por lo que

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\} \\ &= \phi_0 \left[\frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m) + \epsilon_m} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0 \end{aligned} \quad (86)$$

y,

$$\phi_p = \frac{abc}{2} \frac{\frac{(\epsilon_m - \epsilon_1)}{\epsilon_m} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0. \quad (87)$$

A pesar de que inicialmente se había considerado el octante donde x, y, z eran positivas, las ecuaciones anteriormente obtenidas nos dan el potencial en todos los puntos del espacio, como consecuencia de la simetría de la partícula.

Si consideramos distancias r muy alejadas del origen tales que $\xi \simeq r^2 \gg a^2$ se tiene que

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{q^{5/2}} = \frac{2}{3} \xi^{-3/2},$$

y entonces el potencial ϕ_p está dado por

$$\phi_p \sim \frac{E_0 \cos \theta}{r^2} \frac{\frac{abc}{3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_m}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}{\epsilon_m}}, \quad (r \gg a) \quad (88)$$

que identificamos como el potencial de un dipolo eléctrico con momento

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_m abc \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)} \vec{E}_0. \quad (89)$$

Entonces, la polarizabilidad α_3 de un elipsoide en un campo paralelo a uno de sus ejes principales es

$$\alpha^{(3)} = V \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(3)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}, \quad (90)$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide. Siguiendo con esta idea, las polarizabilidades α_1 y α_2 cuando el campo es aplicado en los ejes x y y son:

$$\alpha^{(1)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(1)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}, \quad (91)$$

$$\alpha^{(2)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(2)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)}, \quad (92)$$

donde

$$L^{(1)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(a^2 + q)f(q)}, \quad (93)$$

$$L^{(2)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(b^2 + q)f(q)}. \quad (94)$$

Se puede concluir en general que la polarizabilidad en una dirección arbitraria j , paralela a algún eje cartesiano es

$$\alpha^{(j)} = V \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(j)}(\epsilon_1 - \epsilon_m)} \quad (95)$$

donde a $L^{(j)}$ se le conoce como *factor geométrico*, dado por la integral

$$L^{(j)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(a_j^2 + q)f(q)} \quad (96)$$

donde el superíndice (j) de L indica la dirección en la que se calcula el factor de geométrico y a_j denota al semieje del elipsoide orientado en esa misma dirección.

Cabe mencionar que solo dos de los tres factores geométricos $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}$ son independientes, ya que tienen que cumplir la relación

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = 1, \quad (97)$$

y satisfacer que $L^{(1)} \leq L^{(2)} \leq L^{(3)}$. En el caso en el que los semiejes son iguales ($a = b = c$), es decir, en el caso de una esfera se tiene que

$$L_{\text{esfera}} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)^{5/2}} = L^{(1)} \left(-\frac{2}{3} \right) \left[\frac{1}{(a^2 + q)^{3/2}} \right] \Big|_0^\infty = \frac{1}{3}, \quad (98)$$

y en general,

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} \right] \frac{dq}{f(q)}, \quad (99)$$

como

$$\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} = -2f(q) \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right),$$

entonces,

$$L_1 + L_2 + L_3 = -abc \int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq,$$

~~donde haciendo un cambio de variable $u = f(q)^2$, se tiene que~~

$$\int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq = -\frac{1}{2} \int_{(abc)^2}^\infty \frac{du}{u^{3/2}} = u^{-1/2} \Big|_{(abc)^2}^\infty = -\frac{1}{abc},$$

y por consiguiente,

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (100)$$

Una clase especial de elipsoides **son los esferoides**, los cuales tienen dos ejes de igual longitud, por lo cual, solo uno de los factores geométricos es independiente. El esferoide prolato, para el cual $b = c$ y $L_2 = L_3$ es generado por la rotación de una elipse sobre su eje mayor; el esferoide oblato, para el cual $b = a$ y $L_1 = L_2$ es generado al rotar una elipse sobre su eje menor. Para los esferoides, se tiene una expresión **analítica para L_1** como función de la excentricidad e :



- Esferoide prolato ($b = c$):

$$L_1 = \frac{1 - e^2}{e^2} \left(-1 + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (101)$$

- Esferoide oblato ($a = b$):

$$L_1 = \frac{g(e)}{2e^2} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} g(e) \right] - \frac{g^2(e)}{2}, \quad (102)$$

$$g(e) = \left(\frac{1 - e^2}{e^2} \right)^{1/2}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad (103)$$

Los factores geométricos L_j están relacionados con los *factores de depolarización* \bar{L}_j definidos como:

$$E_{1x} = E_{0x} - \bar{L}_1 P_{1x}, \quad E_{1y} = E_{0y} - \bar{L}_2 P_{1y}, \quad E_{1z} = E_{0z} - \bar{L}_3 P_{1z}$$

donde \vec{E}_1 y \vec{P}_1 son el campo eléctrico y la polarización inducida en la partícula al aplicar el campo \vec{E}_0 . Los factores de depolarización se relacionan con los factores geométricos como [2]

$$\bar{L}_j = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \frac{L_j}{\epsilon_m}$$

Nótese que entonces los factores de depolarización dependen de la composición de la partícula, excepto cuando el medio en el que está embebida la partícula es el vacío, en ese caso $\bar{L}_j = L_j / \epsilon_0$. El campo inducido en un elipsoide es uniforme pero no necesariamente paralelo al campo aplicado como en el caso de la esfera.

REFERENCIAS

- [1] García, C. M. (2019). *Respuesta electromagnética de nanopartículas magnético/metálicas tipo core-shell*. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [2] Bohren, C.F. y Huffman D.R. (1998). *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons.
- [3] Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics*. 4.^a ed. Pearson.
- [4] Jackson, J.D. (1999). *Classical Electrodynamics*. 3.^a ed. John Wiley & Sons.
- [5] Weisstein, E. W. Confocal Ellipsoidal Coordinates. Recuperado el 27 de marzo de 2024, de MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html>
- [6] Arfken, G.B., Weber, H.J y Harris F.E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. 7.^a ed. Elsevier.
- [7] Kellogg, O. D. (1954). *Foundations of Potential Theory*. Springer.
- [8] Abramowitz, M. I., Stegun A. (1974). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc.