

Cálculo de las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento de elipsoides en la aproximación cuasiestática como primera aproximación de eritrocitos

DANA LARISSA LUNA GONZÁLEZ

I. INTRODUCCIÓN

I. Aproximación cuasiestática

I.1. Dipolo eléctrico (caso estático)

En electrodinámica clásica, se entiende como *límite cuasiestático* el considerar a la partícula a estudiar mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente. [1] En el caso de una elipsoide caracterizado por una función dieléctrica ϵ_p , de semieje mayor a que se encuentra inmerso en un medio caracterizado por una función dieléctrica ϵ_m , estrictamente se puede definir el límite cuasiestático cuando el parámetro de tamaño $x = ka$ es mucho menor que la unidad [3], donde $k = 2\pi\sqrt{\epsilon_m}/\lambda$ representa el número de onda. Esta aproximación garantiza que el elipsoide esté sujeto a un campo eléctrico de la misma intensidad y dirección. [2]

En distancias mucho mayores que el tamaño de una partícula, es posible aproximar a esta como un *dipolo eléctrico puntual*, por lo cual, es conveniente estudiar el potencial y campo eléctrico que produce.

Un dipolo físico consiste en dos cargas puntuales q y $-q$ separadas a una distancia d (ver Fig.1), con momento dipolar $\vec{p} = p\hat{e}_z$ donde $p = qd$. Si las cargas se encuentran embebidas en un medio homogéneo e infinito con función dieléctrica ϵ_m , entonces el potencial ϕ del dipolo en un punto P en \vec{r} es [3, 4]

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right), \quad (1)$$

con,

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{d}{2r} \right)^2 \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d \right).$$

donde el primer término se origina de considerar la ley de cosenos con $\cos \theta = \vec{r} \cdot \hat{e}_z / r$. La primera aproximación surge debido a que la región de interés es para $r \gg d$ de forma que el segundo término tiende a cero y la segunda aproximación se obtiene de la expansión binomial a primer orden de $(1 \mp x)^n = 1 + nx$. De esta forma,

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d - 1 + \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{2r^2} d \right) \approx \frac{1}{r} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^2} d \right) = \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} d. \quad (2)$$

Si d se aproxima a cero de tal forma que qd permanezca constante [3], se obtiene el potencial para un dipolo puntual

$$\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_m r^2}. \quad (3)$$

I.2. Dipolo eléctrico (caso dinámico)

Dado que el interés está en el caso en el que el campo incidente es una onda plana variando en el tiempo y en el espacio, se puede considerar un sistema de cargas y corrientes variando con el tiempo, hacer una expansión en series de Fourier de la dependencia del tiempo y manejar cada componente de Fourier por separado. De esta

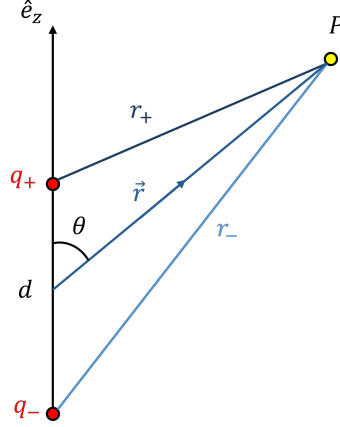


Figura 1: Esquema de un dipolo físico. Se muestran dos cargas puntuales de carga q y $-q$ separadas a una distancia d , así como un punto P localizado en \vec{r} . La distancia entre el punto P y las cargas q y $-q$ está dada por r_+ y r_- , respectivamente.

forma, no se pierde generalidad de considerar a los potenciales y campos de un sistema localizado de cargas y corrientes variando en el tiempo y que oscilan a la frecuencia ω del campo aplicado [5]

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (4)$$

considerando que el significado físico lo posee la parte real y que las fuentes están consideradas localizadas en el espacio vacío. Por consiguiente, las Ecuaciones de Maxwell están dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E}, \quad (8)$$

donde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, con \vec{A} el potencial vectorial y $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$. Entonces,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}. \quad (9)$$

Si se consideran fuentes armónicas en el tiempo, como las mostradas en la Ec.(4), es posible determinar los campos electromagnéticos mediante el potencial vectorial, el cuál está dado por [5]

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{i\omega\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

en donde se trabaja con la norma de Lorentz [4] y en donde la función delta de Dirac está evaluada en el tiempo de retardo $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$. Sea $k = \omega/c$ y omitiendo la dependencia temporal

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (10)$$

Si las dimensiones de la fuente son del orden d y la longitud de onda es $\lambda = 2\pi c/\omega$, y $d \ll \lambda$, entonces hay tres regiones de interés: la región cercana (estática) en donde $d \ll r \ll \lambda$, la región intermedia en donde $d \ll r \sim \lambda$

y la región lejana (de radiación) donde $d \ll \lambda \ll r$. En la región de campo cercano los campos, omitiendo la dependencia armónica, son como los campos estáticos con componentes radiales. En la región de campo lejano, los campos son transversales al vector de onda y decaen como r^{-1} . Para la región de campo cercano donde $r \ll \lambda$ (o $kr \ll 1$) la exponencial del potencial vectorial [Ec.10] se aproxima a la unidad y con ello encontramos la expresión conocida de este [5]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

En la región de campo lejano ($kr \gg 1$) dado que la exponencial oscila rápidamente, determina el comportamiento del potencial vectorial. En esta región es suficiente aproximar

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}', \quad (11)$$

con \hat{e}_r un vector unitario en la dirección de \vec{r} .¹

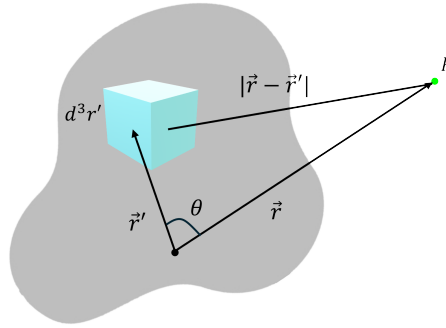


Figura 2: Vectores de posición \vec{r}, \vec{r}' del elemento de volumen dV y del punto P , respectivamente. Se muestra la distancia $|\vec{r} - \vec{r}'|$ entre estos últimos.

Más aún, considerando la región de campo lejano, si sólo se consideran los términos que decaen como r^{-1} , el inverso de la distancia en la Ec.(10) puede ser reemplazada por r . Entonces, el potencial vectorial es

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3 r',$$

que se puede reescribir al realizar la expansión en serie de potencias de la exponencial dentro de la integral de volumen, dando como resultado

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{r}') (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')^n d^3 r'.$$

Al considerar únicamente el primer término de la expansión como una primera aproximación, se concluye que

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3 r', \quad (12)$$

integrando por partes,²

$$\int \vec{J} d^3 r' = - \int \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3 r' = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r', \quad (13)$$

de donde se usa la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega \rho(\vec{r}).$$

¹Usando la ley de cosenos y haciendo una expansión binomial $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta} = r \sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \theta} \simeq r \left\{ 1 - (\hat{e}_r \cdot \vec{r}'/r) + 1/2 (r'/r)^2 \right\} \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$.

²acá hay que hacer lo de la notación de tensores

Al sustituir la Ec.(13) en la Ec.(12) y usando la definición del momento dipolar

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r',$$

se tiene que

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}, \quad (14)$$

con \vec{p} el momento dipolar eléctrico. Al calcular el campo H como el rotacional de A/μ , y emplando la ley de Faraday-Lenz para determinar el campo eléctrico, se concluye que ³

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \quad (15)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (16)$$

Obsérvese que el campo \vec{H} es transversal al vector radial para cualquier distancia, mientras el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a \hat{e}_r .

En la zona de radiación cuando $kr \gg 1$ se tiene que

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H} \times \hat{e}_r = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}), \quad (17)$$

$$\vec{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (18)$$

Con base en la Ec. (14) al iluminar el sistema con una onda plana monocromática de frecuencia angular ω , el dipolo inducido p [Ec. (16)] y por tanto los campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{H} [Ecs. (17) y (18)] oscilarán a esa misma frecuencia. Por lo tanto, los campos electromagnéticos esparcidos \vec{E}_s y \vec{H}_s , generados por el dipolo inducido, son

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times p) e^{i\omega t}, \quad (19)$$

$$\vec{H}_s = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Sustituyendo el momento dipolar de un dipolo puntual $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$, se pueden reescribir a los campos esparcidos como

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} (\epsilon_m \alpha E_0) \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi} (\alpha E_0 e^{ikz}) \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E, \quad (21)$$

$$\vec{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_s. \quad (22)$$

donde $E = E_0 e^{ikz}$ y $\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x)$ es el vector de amplitud de esparcimiento y su polarización en la base de vectores esféricos es $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} (\sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi)$ ⁴.

II. Secciones transversales

Si se considera una partícula embebida en un medio no absorbente iluminada por una onda plana⁵ y se construye una esfera imaginaria de radio r alrededor de esta [Fig. 3], la energía electromagnética por unidad de

³Ver Apéndice A para el desarrollo de estas expresiones

⁴Es decir, $\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) = -\cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta + \sin \phi \hat{e}_\phi$.

⁵Se puede generalizar a campos electromagnéticos arbitrarios al reconstruir dicho campo ondas planas debido al teorema de Fourier

tiempo que cruza la superficie A de la esfera es

$$W_a = - \int_A \vec{S} \cdot \hat{e}_r dA^6,$$

donde $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es el vector de Poynting. Dado que el vector de Poynting en cualquier punto en el medio que rodea a la partícula se puede considerar como la suma de los términos \vec{S}_i , \vec{S}_s y \vec{S}_{ext} [3] asociados al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores⁷, respectivamente, se tendrá que $W_a = W_i - W_s + W_{ext}$, donde

$$W_i = - \int_A \vec{S}_i \cdot \hat{e}_r dA \quad (23a) \quad W_s = \int_A \vec{S}_s \cdot \hat{e}_r dA \quad (23b) \quad W_{ext} = - \int_A \vec{S}_{ext} \cdot \hat{e}_r dA. \quad (23c)$$

Para un medio no absorbente, W_i es igual en todas partes, por lo que se anula⁸, entonces

$$W_{ext} = W_a + W_s. \quad (24)$$

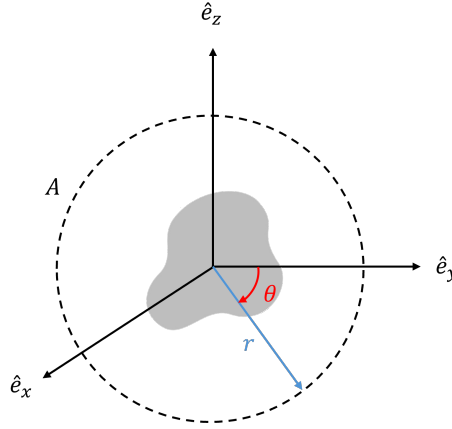


Figura 3: Esquema de la esfera imaginaria de radio r y superficie A centrada en el origen y en la partícula de interés.

Si se considera el campo incidente $\vec{E}_i = E\hat{e}_x$ polarizado en la dirección \hat{e}_x y a $\vec{H}_i = (1/\mu\omega) \vec{k} \times E\hat{e}_x$ en un medio no absorbente, W_a es independiente del radio r de la esfera imaginaria, por lo que se puede considerar al radio lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como las Ecs. (21) y (22), por lo cual, W_{ext} estará dado por [3]

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\},$$

donde I_i es la irradiancia incidente y por consiguiente,

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\}, \quad (25)$$

que es la sección de área transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec.(25) puede ser rescrita como

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} \quad (26)$$

⁶Esta expresión se puede considerar como una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan la superficie de integración, cuando $W_a > 0$ entran más líneas de campo a la superficie cerrada en comparación con las que salen, por lo que se puede concluir que hay algún proceso por el cual se atenúa el campo electromagnético en el interior de la superficie. Mientras que cuando $W_a < 0$, salen más líneas de campo hacia la superficie con respecto a la cantidad de líneas que entran en la misma. Este último caso no es considerado en el análisis pues implicaría que la energía se está creando en el interior de la partícula.

⁷ $\vec{S}_{ext} = 1/2 \text{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^*\}$

⁸ $W_i = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |S_i(r, \theta, \phi)| \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 0$

donde $C_{abs} = W_{abs}/I_i$ y $C_{sca} = W_s/I_i$ corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (21) y (22) en la Ec.() se obtiene

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (27)$$

Estos coeficientes son propiedades macroscópicas y medibles, que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por un partícula. Debido al teorema óptico, la extinción solo depende del esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones.

Considerando al vector de amplitud de esparcimiento

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x) \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_x) - \hat{e}_x (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r)) \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1),$$

y sustituyéndolo en la Ec.(25), la sección transversal de extinción es

$$C_{ext} = k \text{Re} [(i\alpha(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1))_{\theta=0}] = k \text{Re} [-i\alpha],$$

pero la polarizabilidad es compleja $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, por lo que $-i\alpha = \alpha_2 - i\alpha_1$; de forma que la parte real de $-i\alpha$ es igual a la parte imaginaria de α , por lo que se sigue que

$$C_{ext} = k \text{Im}[\alpha]. \quad (28)$$

Asimismo, a partir de la Ec.(27) la sección transversal de esparcimiento se describe por

$$\begin{aligned} C_{sca} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{(\alpha \cdot \alpha^*) k^4}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + 1) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{|\alpha|^2 k^4}{(4\pi)^2} \frac{8\pi^2}{3} = \frac{|\alpha|^2 k^4}{6\pi}. \end{aligned} \quad (29)$$

III. Elipsoide en la aproximación cuasiestática

En esta sección se busca estudiar el esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen, con semiejes (a, b, c) paralelos a los ejes $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ respectivamente, y con dimensiones tales que $\lambda \gg a > b > c$. La partícula regular suave más general que cumple con lo anterior es un elipsoide con semiejes $a > b > c$, cuya superficie está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (30)$$

Las coordenadas más naturales, aunque poco conocidas, para estudiar el sistema enunciado previamente son las coordenadas elipsoidales (ver Fig.4). Para construir este conjunto de coordenadas, se modifica la Ec. (30) como

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \quad (31)$$

donde debe determinarse el valor del parámetro u . La Ec. (31) es una ecuación de tercer grado para u , por lo que las soluciones (reales) son un conjunto de tres valores reales $\{\xi, \eta, \zeta\}$ tales que

$$\infty < \xi < -c^2, \quad -b^2 < \eta < -c^2, \quad -a^2 < \zeta < \infty \quad (32)$$

y que corresponden a tres formas cuadráticas con focos en común (<https://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html>). Por lo tanto,

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \infty < \xi < -c^2; \quad (33)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -b^2 < \eta < -c^2; \quad (34)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad -a^2 < \zeta < -b^2. \quad (35)$$

donde $(\hat{e}_\xi, \hat{e}_\eta, \hat{e}_\zeta)$ corresponden al sistema de coordenadas elipsoidales conveniente para la simetría del problema. Obsérvese que si ξ es constante, se obtiene un elipsoide confocal. De esta forma, la superficie de la partícula a estudiar se tiene cuando $\xi = 0$. Cuando η es constante, se obtiene un hiperboloide de una hoja y cuando ζ es constante se tiene un hiperboloide de dos hojas.

Es así como, a cualquier punto (x, y, z) le corresponde un conjunto de coordenadas elipsoidales (ξ, η, ζ) . Sin embargo, esto no es cierto para el caso contrario. Estas coordenadas determinan ocho puntos simétricamente localizados en cada uno de los octantes cuyo espacio está particionado por los ejes coordenados x, y, z anteriormente mencionados.

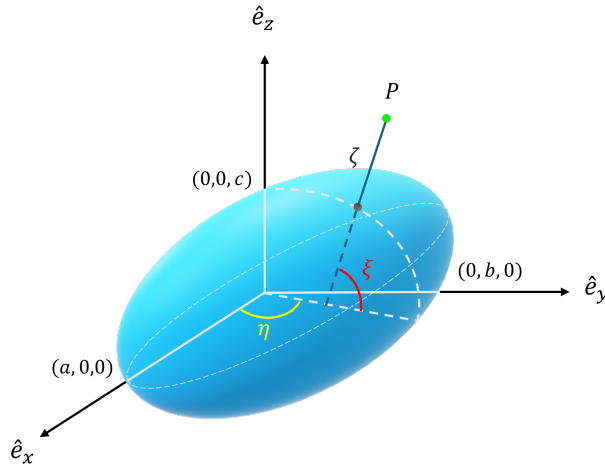


Figura 4: Sistema coordenado elipsoidal con un elipsoide centrado en el origen, con semiejes (a, b, c) , $a > b > c$.

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 + \xi} & \frac{1}{b^2 + \xi} & \frac{1}{c^2 + \xi} \\ \frac{1}{a^2 + \eta} & \frac{1}{b^2 + \eta} & \frac{1}{c^2 + \eta} \\ \frac{1}{a^2 + \zeta} & \frac{1}{b^2 + \zeta} & \frac{1}{c^2 + \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cuya solución está dada por las expresiones:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad (36)$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}, \quad (37)$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \quad (38)$$

Dado que se quiere resolver el problema del esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen, lo primero que hay que hacer, dado que se considera el límite cuasiestático, es resolver la ecuación de Laplace para el potencial; por lo cual, lo más conveniente es emplear las coordenadas anteriores. Para ello, se expresa al laplaciano en coordenadas generalizadas [7]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (39)$$

donde ϕ es una función escalar, y h_i con $i = 1, 2, 3$ los factores de escala que, para coordenadas elipsoidales se asocian como $1 \rightarrow \xi, 2 \rightarrow \eta$ y $3 \rightarrow \zeta$, y se determinan al hacer un cambio de base de coordenadas cartesianas a elipsoidales. Para ello, se encuentra un vector unitario en la dirección de la i -ésima coordenada, que mide cómo es que cambia el vector posición $\vec{r} = (x, y, z)$ en una dirección dada y se define como [7]

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right), \quad ; \quad (40)$$

con

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \quad (41)$$

Para la variación en x , empleando la Ec.(36), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + \xi} \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}.$$

Análogamente, empleando las Ecs.(37) y (38) para y y z , respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2y} \frac{\partial y^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2z} \frac{\partial z^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}. \end{aligned}$$

De esta forma, el cuadrado del primer factor de escala h_1 es

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} \right]. \quad (42)$$

Se propone que la Ec.(31), correspondiente al lugar geométrico de los elipsoides se modifique como

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} = \frac{g(u)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (43)$$

donde $g(u)$ es una función cúbica con tres raíces reales dentro del rango descrito por las limitaciones de cada variable. Es decir, que $g(u)$ se reescribe como $g(u) = (u - \xi)(u - \eta)(u - \zeta)$. Al derivar la ecuación anterior con respecto de u se tiene que

$$\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} = \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \zeta} + \frac{1}{u - \eta} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right], \quad (44)$$

con

$$f(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \quad (45)$$

Es así como se puede reescribir al primer factor de escala de la Ec.(42) como

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \zeta} + \frac{1}{u - \eta} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{(u - \zeta)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \zeta)}{g(u)} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dado que ξ es una raíz de $g(u)$, entonces, $g(u) = 0$, por lo que el factor de escala h_1 es

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}. \quad (46)$$

Desarrollando un proceso análogo, se cumple que

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \quad \text{y} \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}. \quad (47)$$

De la Ec.(39)

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)} \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}}{\frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)$$

$$\text{Sea } \Lambda = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \xi)(\eta - \zeta)(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{8f(\xi)f(\eta)f(\zeta)},$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\zeta - \eta)}}{2\Lambda f(\eta)f(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (48)$$

Ánalogamente,

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\xi - \zeta)}}{2\Lambda f(\zeta)f(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \quad (49)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\eta - \xi)}}{2\Lambda f(\eta)f(\xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right). \quad (50)$$

Sustituyendo las Ecs.(48), (49) y (50) en la Ec.(39) y simplificando

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{4f(\xi)}{(\xi - \eta)(\zeta - \xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{4f(\eta)}{(\xi - \eta)(\eta - \zeta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{4f(\zeta)}{(\zeta - \xi)(\eta - \xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \\ &= \frac{4}{\Upsilon} \left[(\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \zeta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

donde a Υ se le conoce como el valor absoluto del determinante funcional [8]

$$\Upsilon = (\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta). \quad (52)$$

Como resultado de lo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales es

$$\nabla^2 \phi = (\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (53)$$

Como la solución a esta ecuación está determinada por la forma del campo incidente, descrito por el potencial anterior, y que cumple las condiciones de contorno, la ecuación se resuelve mediante el método de reducción de

orden al proponer una solución no trivial y buscar una segunda solución.

Si se considera un elipsoide homogéneo bajo un campo eléctrico incidente uniforme alineado a lo largo del eje \hat{e}_z , como a cada punto en las coordenadas elipsoidales le corresponde ocho distintos en las coordenadas cartesianas debido a la simetría del problema, el potencial electrostático hereda las siguientes propiedades de simetría:

$$\phi(x, y, z) = \phi(-x, y, z) = \phi(x, -y, z) = \phi(-x, -y, z), \quad (54)$$

$$\phi(x, y, -z) = \phi(-x, y, -z) = \phi(x, -y, -z) = \phi(-x, -y, -z), \quad (55)$$

donde x, y, z son positivas. Entonces, solo se tiene que considerar el potencial en dos octantes: uno con z positivo y otro con z negativo. Más aún, el potencial y su derivada con respecto a z deben de ser continuos en el plano $z = 0$ ⁹. El potencial eléctrico asociado a una onda plana se puede describir como

$$\phi_0 = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z = -E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}, \quad (56)$$

en donde se empleó la Ec.(38).

Se debe de considerar un potencial de perturbación ϕ_p asociado al esparcimiento producido por la partícula. En consecuencia, el potencial fuera de la partícula ϕ_{ext} está formado por la superposición del potencial incidente ϕ_0 y el potencial de perturbación ϕ_p

$$\phi_{ext}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \phi_p(\xi, \eta, \zeta). \quad (57)$$

Además, el potencial debe de ser continuo en la superficie de la elipse

$$\phi_{int}(0, \eta, \zeta) = \phi_{ext}(0, \eta, \zeta) + \phi_p(0, \eta, \zeta), \quad (58)$$

y, para distancias lo suficientemente lejanas a la partícula, es decir, cuando $\xi \gg a^2$, al factorizar ξ de la Ec.(??), se tiene que

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{\xi} + 1} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{\xi} + 1} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{\xi} + 1} = \xi,$$

donde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\frac{a^2}{\xi} + 1} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{\xi} + 1} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{\xi} + 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

entonces, $\xi \simeq r^2$ en el límite asintótico. Asimismo, en esta aproximación el potencial de perturbación es despreciable, por lo que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_p = 0. \quad (59)$$

Sean ϕ_{int} y ϵ_p el potencial y la permitividad eléctrica en el interior del elipsoide y las mismas cantidades ϕ_{ext} y ϵ_m para el exterior de este, como el potencial es continuo y la componente tangencial del campo eléctrico por ausencia de cargas externas también

$$\phi_{int}|_{\xi=0} = \phi_{ext}|_{\xi=0}, \quad (60a)$$

$$\epsilon_p \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \epsilon_m \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}. \quad (60b)$$

Reescribiendo al potencial en la Ec.(56) de la forma

$$\phi_0(\xi, \eta, \zeta) = F(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (61)$$

⁹Debido a la discontinuidad del campo eléctrico en $z = 0$ y a que en este regimen el medio material es el mismo, la derivada del potencial con respecto a la componente normal al plano del vector de desplazamiento es continua.

tiene que satisfacer la Ec. (53). Analizando cada componente por separado

$$(\eta - \zeta)f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f(\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) = (\eta - \zeta)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}\left[f(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(f(\xi)\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right)\right], \quad (62)$$

y,

$$\begin{aligned} (\zeta - \xi)f(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(f(\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) &= (\zeta - \xi)F(\xi)(c^2 + \zeta)^{1/2}\left[f(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(f(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}(c^2 + \eta)^{1/2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}(\zeta - \xi)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2}(a^2 + b^2 + 2\eta)F(\xi). \end{aligned} \quad (63)$$

Análogamente,

$$(\xi - \eta)f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(f(\zeta)\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right) = \frac{1}{4}(\xi - \eta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2}(a^2 + b^2 + 2\zeta)F(\xi). \quad (64)$$

Sumando las Ecs. (62), (63) y (64)

$$(\eta - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2}\left[f(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(f(\xi)\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right) - \frac{1}{4}F(\xi)(a^2 + b^2 + 2\xi)\right] = 0, \quad (65)$$

por lo que resolver la Ec. (53) es equivalente a que

$$f(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(f(\xi)\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right) - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2}\right)F(\xi) = 0. \quad (66)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, por lo que existen dos soluciones no triviales linealmente independientes. Una de estas soluciones es

$$F_1(\xi) = (c^2 + \xi)^{1/2}, \quad (67)$$

y la segunda solución se obtiene mediante el método de reducción de orden. Como $F_1(\xi)$ es solución de la Ec. (67), se propone una segunda solución dada por $F_2(\xi) = v(\xi)F_1(\xi)$ donde $v(\xi)$ se determina al sustituir dicha solución en la ecuación diferencial dada, reduciéndola a una ecuación de primer orden donde la variable dependiente será v . Derivando la ecuación anterior respecto a ξ

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(\xi)}{d\xi} &= F_1(\xi)\frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi}, \\ \frac{d^2F_2(\xi)}{d\xi^2} &= F_1(\xi)\frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2\frac{dv(\xi)}{d\xi}\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi)\frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned}$$

y sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec. (67), se obtiene

$$\begin{aligned} f^2(\xi)\left(F_1(\xi)\frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2\frac{dv(\xi)}{d\xi}\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi)\frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}\right) + \left(F_1(\xi)\frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi}\right)f(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} - \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2}\right)v(\xi)F_1(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

de donde tres términos se eliminan, pues

$$v(\xi)\frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}f^2(\xi) = -\frac{1}{4}v(\xi)[(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)^{-1/2}]$$

$$\begin{aligned} v(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi}f(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{4}v(\xi)(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)^{-1/2} + \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2}\right)v(\xi)F_1(\xi) \\ &\quad - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2}\right)v(\xi)F_1(\xi), \end{aligned}$$

es así como

$$f^2(\xi)F_1(\xi)\frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dv(\xi)}{d\xi} \left[f(\xi)F_1(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $V(\xi) = dv(\xi)/d\xi$, se tiene que

$$f^2(\xi)F_1(\xi)\frac{dV(\xi)}{d\xi^2} + V(\xi) \left[f(\xi)F_1(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0,$$

$$\frac{1}{V(\xi)} \frac{dV(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{f^2(\xi)F_1(\xi)} \left[f(\xi)F_1(\xi)\frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi)\frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right].$$

La integral indefinida de las ecuación anterior da como resultado

$$\begin{aligned} \ln[V(q)] &= \int \frac{1}{V(\xi)} dV(\xi) = - \left[\int \frac{df(\xi)}{f(\xi)} + 2 \int \frac{dF_1(\xi)}{F_1(\xi)} \right] \\ &= -\{ \ln[f(q)] + \ln[F_1^2(q)] \} = -\ln[F_1^2(q)f(q)], \end{aligned} \quad (69)$$

entonces,

$$\frac{dv(q)}{dq} = \frac{1}{F_1^2(q)f(q)}, \quad (70)$$

donde $dv(q)/dq$ es distinto de cero, por lo que $v(q)$ es constante. Integrando lo anterior se tiene que

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}, \quad (71)$$

por lo tanto,

$$F_2(\xi) = F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}. \quad (72)$$

Al escribir explícitamente el integrando, usando las Ecs. (67) y (72), y haciendo una integración por partes con $u = 1/(a^2 + q)^{1/2}$ y $dv = 1/[(c^2 + q)^{3/2}(b^2 + q)^{1/2}]$ se obtiene

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)[(a^2 + q)(b^2 + q)(c^2 + q)]^{1/2}} \\ &= \frac{F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} \Big|_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + q}{c^2 + q}} \frac{dq}{(c^2 - b^2)(a^2 + q)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (73)$$

Reescribiendo la segunda integral

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{b^2 + q}{a^2 + q}} \sqrt{\frac{b^2 + q}{a^2 + q}} \sqrt{a^2 - c^2} dq}{\sqrt{a^2 - c^2}(c^2 - b^2) \sqrt{\frac{c^2 + q}{a^2 + q}} \sqrt{\frac{b^2 + q}{c^2 + q}} (a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2 + q}{a^2 + q}}} \quad (74)$$

y considerando que

$$\frac{d}{dq} \left(E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + q}} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right) = -\frac{\sqrt{\frac{b^2 + q}{a^2 + q}} \sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2 + q}{a^2 + q}}}$$

sustituyendo en la Ec. (74) y haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, se obtiene que

$$F_2(\xi) = \frac{2F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} - \frac{1}{(a^2 - c^2)^{1/2}} E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 + q} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right\} \Big|_{\xi}^{\infty}, \quad (75)$$

donde $E(\phi|m)$ es una integral elíptica de segundo tipo definida como [9]

$$E(x|k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{1-t^2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (76)$$

donde el módulo angular es $\alpha = \arcsin k$ y k es la excentricidad. En el primer límite de integración (∞) de $F_2(\xi)$ al evaluar se obtiene que el primer sumando es cero, y en el segundo la función arcoseno es cero. De esta forma, la parte angular de la integral es cero, es decir, $E(0|m) = 0$. En consecuencia, considerando la definición de F_1 en la Ec.(67) se tiene que F_1 y F_2 cumplen

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} F_1(\xi) = c \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_2(\xi) = 0. \quad (77)$$

De esta forma, considerando que F_1 no satisface la condición impuesta sobre ϕ_p en la Ec. (59) y que necesariamente el potencial dentro de la partícula debe de ser finito y F_2 no satisface este requisito, los potenciales ϕ_{int} y ϕ_p , propuestos como en la Ec.(61), están dados por

$$\phi_{int} = C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (78)$$

$$\phi_p = C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (79)$$

donde C_1 y C_2 son constantes determinadas a partir de las condiciones de frontera dadas por las Ecs.(60). Usando la primera condición de contorno de la Ec.(60a), se tiene que,

$$C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} = E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \quad (80)$$

entonces,

$$\begin{aligned} C_1 F_1(\xi) &= E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi) \\ \Rightarrow \frac{C_2 F_2(\xi) - C_1 F_1(\xi)}{(c^2 + \xi)^{1/2}} &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \\ \Rightarrow \frac{C_2 F_1(\xi) \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 F_1(\xi)}{(c^2 + \xi)^{1/2}} &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \\ \Rightarrow C_2 \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 &= \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (81)$$

Si definimos

$$L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)}, \quad (82)$$

entonces,

$$C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \quad (83)$$

Usando la segunda condición de contorno de la Ec.(60b), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_p C_1}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} &= \frac{\epsilon_m E_0}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \frac{\epsilon_m C_2}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \\ &+ \epsilon_m C_2 [(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral del tercer sumando es

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_\xi^a \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)} = - \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)}.$$

Al evaluar en $\xi = 0$ se tiene que

$$\frac{\epsilon_p C_1}{2} = \epsilon_m E_0 \left[\frac{1}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1),$$

por tanto,

$$\epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_p C_1 = \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (84)$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones entre las Ecs. (83) y (84), por lo cual, al multiplicar la Ec. (83) por ϵ_p y restándole la Ec. (84)

$$\epsilon_p C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 \epsilon_1 - \epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_p C_1 = \epsilon_p \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} - \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}},$$

simplificando se obtiene que

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{E_0(\epsilon_p - \epsilon_m)}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left[L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m) + \epsilon_m \right]^{-1}, \quad (85)$$

por lo tanto, al sustituir C_2 en la Ec. (83) se tiene que:

$$C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\}. \quad (86)$$

De esta forma, ya se puede determinar el potencial dentro de la partícula sustituyendo F_1 y C_1 en la Ec. (78), por lo que

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\} \\ &= \phi_0 \left[\frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m) + \epsilon_m} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0 \end{aligned} \quad (87)$$

y,

$$\phi_p = \frac{abc}{2} \frac{\frac{(\epsilon_m - \epsilon_p)}{\epsilon_m} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0. \quad (88)$$

A pesar de que inicialmente se había considerado el octante donde x, y, z eran positivas, las ecuaciones anteriormente obtenidas nos dan el potencial en todos los puntos del espacio, como consecuencia de la simetría de la partícula.

Si consideramos distancias r muy alejadas del origen tales que $\xi \simeq r^2 \gg a^2$ se tiene que

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{q^{5/2}} = \frac{2}{3} \xi^{-3/2},$$

y entonces el potencial ϕ_p está dado por

$$\phi_p \sim \frac{E_0 \cos \theta}{r^2} \frac{\frac{abc}{3} \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}}, \quad (r \gg a) \quad (89)$$

cuya expresión es equivalente a la de un dipolo puntual dado por

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_m abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \vec{E}_0. \quad (90)$$

Entonces, la polarizabilidad α_3 de un elipsoide en un campo paralelo a uno de sus ejes principales es

$$\alpha^{(3)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad (91)$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide. De manera análoga, las polarizabilidades $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ cuando el campo es aplicado en los ejes x y y son

$$\alpha^{(1)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(1)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad \alpha^{(2)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(2)}(\epsilon_p - \epsilon_m)},$$

donde

$$L^{(1)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)f(q)}, \quad y \quad L^{(2)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(b^2 + q)f(q)}.$$

Se puede concluir en general que la polarizabilidad en una dirección arbitraria j , paralela a algún eje cartesiano es

$$\alpha^{(j)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(j)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \quad (92)$$

donde a $L^{(j)}$ se le conoce como *factor geométrico*, dado por la integral

$$L^{(j)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a_j^2 + q)f(q)} \quad (93)$$

donde el superíndice (j) de L indica la dirección en la que se calcula el factor de geométrico y a_j denota al semieje del elipsoide orientado en esa misma dirección.

Cabe mencionar que los factores geométricos satisfacen que $L^{(1)} \leq L^{(2)} \leq L^{(3)}$ ¹⁰ y que solo dos de los tres son independientes, ya que tienen que cumplir la relación

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = 1, \quad (94)$$

pues,

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} \right] \frac{dq}{f(q)},$$

y como

$$\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} = -2f(q) \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right),$$

entonces,

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = -abc \int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq,$$

donde usando el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq = \frac{1}{f(q)} \Big|_{(abc)^2}^\infty = -\frac{1}{abc},$$

y por consiguiente, se cumple la Ec.(94).

En el caso en el que los semiejes son iguales ($a = b = c$), es decir, en el caso de una esfera se tiene que

$$L_{\text{esfera}} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)^{5/2}} = \frac{1}{3}.$$

Una clase especial de elipsoides son los *esferoides*, los cuales tienen dos ejes de igual longitud, por lo cual, solo uno de los factores geométricos es independiente. El esferoide prolato [Fig. 5a], para el cual $b = c > a$ y $L_2 = L_3$ es generado por la rotación de una elipse sobre su eje mayor; el esferoide oblato [Fig. 5b], para el cual $b = a > c$ y $L_1 = L_2$ es generado al rotar una elipse sobre su eje menor. Para los esferoides, se tiene una expresión analítica para L_1 como función de la excentricidad e [3]

¹⁰Debido a la simetría del elipsoide.

- Esferoide prolato:

$$L_1 = \frac{1-e^2}{e^2} \left(-1 + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (95)$$

- Esferoide oblato:

$$L_1 = \frac{g(e)}{2e^2} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} g(e) \right] - \frac{g^2(e)}{2}, \quad (96)$$

$$g(e) = \left(\frac{1-e^2}{e^2} \right)^{1/2}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad (97)$$

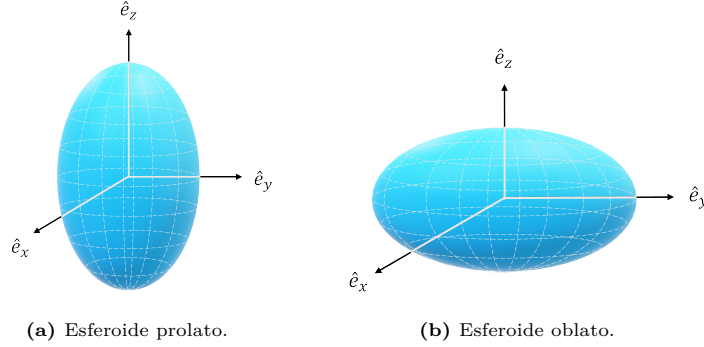


Figura 5: Clases especiales de elipsoides. El eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje a) \hat{e}_z y b) \hat{e}_y .

Los factores geométricos L_j están relacionados con los *factores de depolarización* \bar{L}_j mediante la expresión [3]

$$\bar{L}_j = \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_p - \epsilon_0} \frac{L_j}{\epsilon_m} \quad (98)$$

y se definen como

$$E_{px} = E_{0x} - \bar{L}_1 P_{px}, \quad E_{py} = E_{0y} - \bar{L}_2 P_{py}, \quad E_{pz} = E_{0z} - \bar{L}_3 P_{pz}$$

donde \vec{E}_1 y \vec{P}_1 son el campo eléctrico y la polarización inducida en la partícula al aplicar el campo \vec{E}_0 . A partir de la Ec. (98) se puede observar que los factores de depolarización dependen de la composición de la partícula, lo cual no se cumple cuando el medio en el que está embebida la partícula es el vacío, en ese caso $\bar{L}_j = L_j/\epsilon_0$.

II. RESULTADOS

Dado que en los sistemas biológicos las partículas se encuentran aleatoriamente orientadas, es de gran utilidad considerar las secciones transversales promedio $\langle C_{abs} \rangle$ y $\langle C_{sca} \rangle$, que son independientes de la polarización de la luz incidente¹¹, éstas están dadas por [3]

$$\begin{aligned} \langle C_{abs} \rangle &= \frac{k}{3} \text{Im} \{ \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} \}, \\ \langle C_{abs} \rangle &= \frac{k^4}{3(6\pi)} \text{Im} \{ \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} \}. \end{aligned}$$

¹¹Considerando que las partículas no sean ópticamente activas.

III. APÉNDICE A

REFERENCIAS

- [1] Larsson, J., *Electromagnetics from a quasistatic perspective*. American Journal of Physics, **75**(3), 230–239 (2007). DOI:10.1119/1.2397095
- [2] García, C. M. (2019). *Respuesta electromagnética de nanopartículas magnético/metálicas tipo core-shell*. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [3] Bohren, C.F. y Huffman D.R. (1998). *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons.
- [4] Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics*. 4.^a ed. Pearson.
- [5] Jackson, J.D. (1999). *Classical Electrodynamics*. 3.^a ed. John Wiley & Sons.
- [6] Weisstein, E. W. Confocal Ellipsoidal Coordinates. Recuperado el 27 de marzo de 2024, de MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html>
- [7] Arfken, G.B., Weber, H.J y Harris F.E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. 7.^a ed. Elsevier.
- [8] Kellogg, O. D. (1954). *Foundations of Potential Theory*. Springer.
- [9] Abramowitz, M. I., Stegun A. (1974). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc.