

Cálculo de las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento de elipsoides en la aproximación cuasiestática como primera aproximación de eritrocitos

DANA LARISSA LUNA GONZÁLEZ

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades ópticas de las células biológicas como los osteoblastos [1], los linfocitos [2], y los eritrocitos [3], es de gran importancia para el área médica. A partir de las propiedades ópticas de las células, se obtiene información de su composición y estado morfológico, lo cual tiene potenciales aplicaciones en el diagnóstico y la detección temprana de diversas enfermedades, incluidos cánceres e infecciones virales [2]. En particular, el estudio de los eritrocitos tiene un papel importante en el diagnóstico de la anemia en sus diferentes tipos y el diseño de nuevas terapias ópticas, como el tratamiento de las venas varicosas [3].

Los eritrocitos sanos presentan forma de discoides cóncavos con longitudes de entre 4 a 9 mm de diámetro. Estos no poseen núcleo, por lo que pueden modelarse como un objeto homogéneo [4]. Debido a su forma, para simplificar el proceso de modelado, se han empleado diferentes opciones como los óvalos de Cassini [4] o funciones en términos de coordenadas esféricas [5]. Sin embargo, el modelo más simple a estudiar como una primera aproximación es un elipsoide. El objetivo este trabajo es el de analizar la convergencia y propiedades físicas de la respuesta óptica de elipsoides de diferentes materiales (oro, plata, aluminio, bismuto y óxido de magnesio) y tamaños dentro de la nanoescala, por medio de las secciones transversales de esparcimiento, absorción y extinción, bajo la aproximación cuasi-estática para, posteriormente, orientarlo a eritrocitos. En la primera sección de este trabajo, se resuelve de forma analítica el problema de esparcimiento de luz por una partícula elipsoidal arbitraria en la aproximación cuasiestática, donde se presentan, además, la secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento. Finalmente, se estudia el esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen en la aproximación cuasi-estática. En la segunda sección, se exponen los resultados obtenidos de las secciones transversales de extinción para partículas elipsoidales oblitas de materiales tanto plasmónicos como dieléctricos. En la última sección, denominada Resultados, se discute la implementación del método desarrollado para el caso de los eritrocitos.

I. Aproximación cuasiestática en el problema de esparcimiento de luz por partículas elipsoidales

En el caso de un elipsoide de semieje mayor a caracterizado por una función dieléctrica ϵ_p , inmerso en un medio caracterizado por una función dieléctrica ϵ_m e iluminado por una onda plana electromagnética con vector de onda \vec{k} , se puede definir el límite cuasiestático cuando el parámetro de tamaño $x = ka$ es mucho menor que la unidad [6]. Esta contricción garantiza que toda la geometría del elipsoide esté sujeta a un campo eléctrico de la misma intensidad y dirección [7]. En esta sección se presenta el caso de una esfera en el límite cuasiestático para estudiarlo como un dipolo eléctrico puntual, lo que permite introducir el concepto de polarizabilidad, y más adelante, se desarrolla el dipolo eléctrico para esparcidores arbitrarios en donde se analizan las regiones de campo cercano, la intermedia y la de radiación.

I.1. Dipolo eléctrico (caso estático)

En electrodinámica clásica, se entiende como *límite cuasiestático* el considerar una partícula de tamaño mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente [8]. Para el caso de una partícula esférica, se puede emplear la aproximación cuasiestática al resolver la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico ϕ . Si se considera una esfera con permitividad eléctrica ϵ_p , embebida en un medio caracterizado por su función dieléctrica ϵ_m en el cual existe un campo eléctrico externo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$ (Fig. 1a), al resolver la ecuación de Laplace considerando las

condiciones de frontera entre la esfera y el medio, se obtiene que el potencial eléctrico fuera de la esfera es la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual ϕ_p localizado en el origen [9]

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_m r^2} \quad (1)$$

donde \vec{p} representa el momento dipolar eléctrico dado por [6]

$$\vec{p} = \epsilon_m \alpha \vec{E}_0 = 4\pi\epsilon_m a^3 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_1 + 2\epsilon_m} \right) \vec{E}_0, \quad \text{con } \alpha = 4\pi a^3 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_1 + 2\epsilon_m} \right)$$

donde α es la polarizabilidad eléctrica, que representa la facilidad con la que se polariza la esfera. Es decir, el campo eléctrico induce un dipolo eléctrico en la esfera, cuyo campo eléctrico asociado es

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\nabla \phi_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_m r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta).$$

En consecuencia, el campo eléctrico fuera de la esfera está dado por la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por el dipolo eléctrico (Fig. 1b).

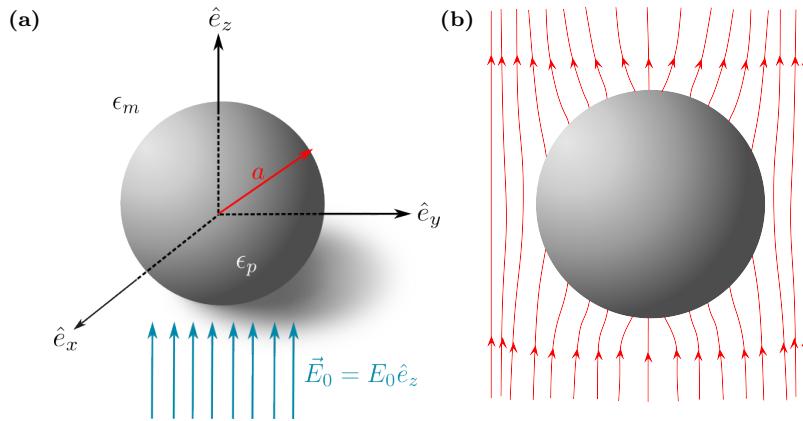


Fig. 1: Problema de una esfera inmersa en un campo eléctrico homogéneo. **a)** Esfera de radio a caracterizada por su función dieléctrica ϵ_p y embebida en un medio caracterizado por su función dieléctrica ϵ_m en la cual incide un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 . **b)** Campo eléctrico fuera de la esfera generado por la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual localizado en el origen con momento dipolar $\vec{p} = \epsilon_m \alpha \vec{E}_0$.

I.2. Dipolo eléctrico (caso dinámico)

En la sección anterior se abordó una solución que asume que el campo eléctrico externo, por tanto el dipolo inducido, son estáticos. Para resolver el caso dinámico en el régimen cuasiestático, se considera que, al iluminar cargas confinadas en un volumen finito con una onda plana electromagnética, estas experimentan movimiento. Esto equivale a realizar un análisis en términos de componentes de Fourier de los potenciales y campos generados por un sistema de cargas y corrientes localizadas en el espacio vacío, con una dependencia armónica $e^{-i\omega t}$, tal que varían en el tiempo y oscilan a la frecuencia ω del campo electromagnético aplicado. De esta forma, la densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente volumétrica $\vec{J}(\vec{r}, t)$ en la posición \vec{r} se expresan como [10]

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2)$$

considerando que el significado físico lo posee la parte real. Mediante lo anterior, es posible determinar los campos electromagnéticos generados por las cargas y corrientes mediante el potencial vectorial como [10]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(d^3 r' \frac{\vec{J}(r')}{|r - r'|} \right) e^{-i\omega t_r}, \quad (3)$$

en donde se emplea la norma de Lorentz [9] y la densidad de corriente se evalúa en el tiempo de retardo $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$.

El comportamiento de los campos electromagnéticos se puede estudiar al delimitar diferentes regiones considerando valores extremos de $k = \omega/c$. Empleando la definición anterior y obviando la dependencia temporal, la Ec. (3) se reescribe como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 r'. \quad (4)$$

En la región de campo cercano, donde $r \ll \lambda$ (o $kr \ll 1$), tal que $\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|) \rightarrow 1$, se tiene [10]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 r',$$

mientras que en la región de campo lejano ($kr \gg 1$) dado que la exponencial oscila rápidamente, es suficiente aproximar

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}', \quad (5)$$

que se obtiene al aplicar la ley de cosenos a la Fig. 2, donde \hat{e}_r un vector unitario en la dirección de \vec{r} . ¹ Si sólo se consideran los términos que decaen como r^{-1} , el inverso de la distancia en la Ec. (4) puede ser reemplazado por r . Entonces, el potencial vectorial es

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3 r',$$

que se puede reescribir al realizar la expansión en serie de potencias de la exponencial dentro de la integral de volumen, dando como resultado

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{r}') (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')^n d^3 r'.$$

Al considerar únicamente el primer término de la expansión, se concluye que

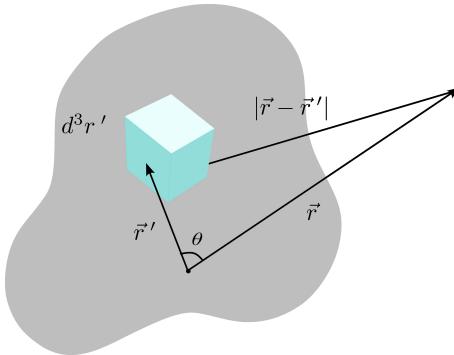


Fig. 2: Vector de posición \vec{r} del volumen y \vec{r}' . Se muestra la distancia $|\vec{r}-\vec{r}'|$ entre estos últimos.

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3 r', \quad (6)$$

que al realizar una integración por partes, ² se obtiene que

$$\int \vec{J} d^3 r' = - \int \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3 r' = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r', \quad (7)$$

¹Empleando la ley de cosenos y haciendo una expansión binomial $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta} = r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2((r'/r) \cos \theta)} \simeq r \left\{ 1 - (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')/r + 1/2(r'/r)^2 \right\} \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$.

²Al considerar $\int_V \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3 r' = \int_{\partial V} \vec{r}' (\vec{J} \cdot d\vec{S}) - \int_V \vec{J} d^3 r'$ y asumiendo que \vec{J} se desvanece en los límites del volumen V , es decir, en la superficie ∂V .

donde se empleó la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega\rho(\vec{r}).$$

Al sustituir la Ec. (7) en la Ec. (6) y considerando que el momento dipolar eléctrico \vec{p} de una distribución de cargas ρ es

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r',$$

se obtiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}. \quad (8)$$

Al calcular el campo \vec{H} como función del potencial vectorial, y empleando la ley de Faraday-Lenz para determinar el campo eléctrico, se sigue que [10]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \quad (9)$$

$$\vec{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (10)$$

A partir de las Ecs. (9) y (10) se puede observar que el campo \vec{H} es transversal al vector radial en el campo lejano, mientras el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a \hat{e}_r .

De forma análoga al desarrollo de la Ec. (8) y empleando la Ley de Faraday-Lenz, en la zona de radiación cuando $kr \gg 1$, se tiene que al excitar a las fuentes en el sistema mediante una onda electromagnética de frecuencia angular ω , lo que sería equivalente a iluminar al sistema con una onda plana armónica en el tiempo, se induce un dipolo eléctrico \vec{p} que genera campos electromagnéticos \vec{E}_p y \vec{H}_p y que oscilan a la misma frecuencia ω

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}) e^{i\omega t}, \quad \vec{H}_p = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}. \quad (11)$$

En el caso particular en que la onda electromagnética incidente esté polarizada en la dirección \hat{e}_x , el momento dipolar inducido es $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$. Al reescribir al vector en la dirección \hat{e}_x en términos de la base de vectores esféricos como [9]

$$\hat{e}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi, \quad (12)$$

se pueden reescribir a los campos generados por el dipolo inducido mediante el vector de amplitud de esparcimiento

$$\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x)) = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta + \sin \phi \hat{e}_\phi), \quad (13)$$

como

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E_0 e^{ikz}, \quad \vec{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_p. \quad (14)$$

II. Secciones transversales

En las secciones anteriores se consideró al sistema integrado por una partícula y por una distribución de cargas localizadas en un volumen finito, sometidas a un campo eléctrico homogéneo y a uno armónico, respectivamente. En esta sección, se introducen las denominadas secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, las cuales son cantidades macroscópicas medibles que proporcionan información sobre el sistema [6]. Para esto, se considera a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana armónica en el tiempo. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía W_{abs} , transportada por los campos electromagnéticos y que es

absorbida por la partícula, se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting ³ $\langle \vec{S} \rangle_t$ sobre una superficie cerrada A , que por simplicidad puede considerarse una esfera de radio r mayor al de la partícula (Fig. 3), es decir,

$$W_{abs} = - \int_A \langle \vec{S} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA,$$

donde debido a que $\langle \vec{S} \rangle_t$ y \hat{e}_r están orientados en la misma dirección, el signo negativo convierte a W_{abs} en una

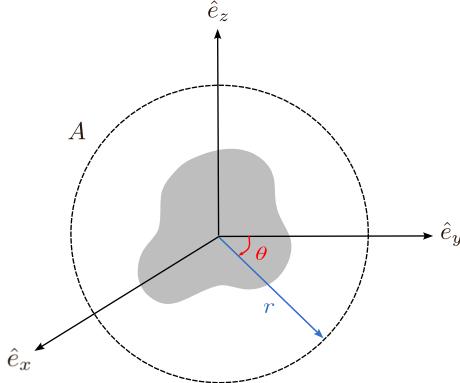


Fig. 3: Esquema de la esfera imaginaria de radio r y superficie A centrada en el origen y en la partícula de interés.

cantidad positiva, de lo contrario, significaría que se genera energía dentro de la esfera [6].

En este trabajo, el vector de Poynting total se descompone en tres términos [6]

$$\langle \vec{S}^i \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*\}, \quad \langle \vec{S}^s \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*\}, \quad \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_i^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^*\}, \quad (15)$$

asociados al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente, se tiene que $W_{abs} = W_i - W_s + W_{ext}$, donde [6]

$$W_i = - \int_A \langle \vec{S}^i \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad W_s = \int_A \langle \vec{S}^s \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad W_{ext} = - \int_A \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (16)$$

cuyos signos están colocados de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de \hat{e}_r .

Para un medio no absorbente, la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, por lo que W_i se anula, entonces

$$W_{ext} = W_{abs} + W_s. \quad (17)$$

Al considerar el campo incidente $\vec{E}_i = E \hat{e}_x$ y a $\vec{H}_i = (1/\mu\omega) \vec{k} \times E \hat{e}_x$ en un medio no absorbente, W_a es independiente del radio r de la superficie de integración, por lo que se puede considerar a r lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como las Ecs. (14), por lo cual, W_{ext} está dado por [6]

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\},$$

donde I_i es la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting, y por consiguiente,⁴

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\}, \quad (18)$$

³El promedio temporal del vector de Poynting es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} \vec{S}(t') dt'$, y para campos electromagnéticos del tipo ondas planas es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/2) \operatorname{Re}[\vec{E} \times (\vec{B}/\mu)^*]$, donde * corresponde a la operación complejo conjugado [6].

⁴Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones. [6].

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec. (18) puede ser reescrita como [6]

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} \quad (19)$$

donde $C_{abs} = W_{abs}/I_i$ y $C_{sca} = W_s/I_i$ corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (14) en la Ec. (16) se obtiene

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (20)$$

Estas secciones transversales son propiedades macroscópicas y medibles, que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula.

Al reescribir el vector de amplitud de esparcimiento [Ec. (13)] en términos de la base vectorial esférica se obtiene [6]

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1),$$

y sustituyéndolo en la Ec. (18), la sección transversal de extinción es

$$C_{ext} = k \operatorname{Re} [(i\alpha(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1))_{\theta=0}] = k \operatorname{Re} [-i\alpha] = k \operatorname{Im}[\alpha].$$

Si el esparcimiento es despreciable con respecto a la absorción, la extinción corresponde a la absorción en mayor medida, tal que [6]

$$C_{abs} = k \operatorname{Im}[\alpha]. \quad (21)$$

Además, al sustituir la Ec. (13) en la Ec. (20), se obtiene [6]

$$C_{sca} = \frac{|\alpha|^2 k^2}{6\pi}. \quad (22)$$

III. Elipsoide en la aproximación cuasiestática

Las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento para distribuciones arbitrarias de cargas y corrientes confinadas a distancias cortas respecto al punto de observación fueron estudiadas en la sección anterior. En esta sección se estudia el caso particular del esparcimiento de luz por cargas y corrientes iluminadas por una onda plana electromagnética y confinadas en un elipsoide centrado en el origen, con semiejes a, b, c alineados con los ejes $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ respectivamente, y dimensiones tales que $\lambda \gg a > b > c$, a distancias alejadas del origen (ver Fig. 4a), donde λ es la longitud de onda que se relaciona con el vector de onda como $k = 2\pi\sqrt{\epsilon_m}/\lambda$. A diferencia de la sección anterior, no se cuenta con simetría esférica, sin embargo es posible calcular una solución analítica, aproximada, al emplear las coordenadas elipsoidales confocales.⁵ Estas describen la superficie del elipsoide como [11]

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1, \quad (23)$$

donde debe determinarse el valor del parámetro u . La Ec. (23) es una ecuación de tercer grado para u , por lo que las soluciones (reales) son un conjunto de tres valores $\{\xi, \eta, \zeta\}$ tales que⁶

$$-\infty < \xi < c^2 < \eta < b^2 < \zeta < a^2 \quad (24)$$

que corresponden a tres formas cuádricas con focos en común (ver Fig. 4b). Estas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante el siguiente sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

⁵Existen diversas definiciones que pueden revisarse en [11], sin embargo, se emplea la proporcionada en [12].

⁶La función $f(u) = x^2/(a^2 - u) + y^2/(b^2 - u) + z^2/(c^2 - u) - 1$ resulta ser continuamente diferenciable en el dominio $(-\infty, c^2) \cap (c^2, b^2) \cap (b^2, a^2)$ y estrictamente creciente en cada intervalo que lo compone, de tal forma que, al calcular los límites en cada extremo de los intervalos, se concluye que existe exactamente una raíz en cada intervalo.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2+\xi} & \frac{1}{b^2+\xi} & \frac{1}{c^2+\xi} \\ \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{a^2+\eta} \\ \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{a^2+\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución está dada por las expresiones

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad (25)$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}, \quad (26)$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \quad (27)$$

A partir del sistema de ecuaciones anterior, se puede observar que cuando ξ es constante, se obtiene un elipsoide. De esta forma, la superficie de la partícula a estudiar se tiene cuando $\xi = 0$. Mientras que si η es constante, se obtiene un hiperboloide de una hoja y cuando ζ es constante se tiene un hiperboloide de dos hojas. Cada punto (x, y, z) tiene una correspondencia única con (ξ, η, ζ) , pero la transformación inversa no es biyectiva, ya que cada (ξ, η, ζ) se asocia a ocho puntos simétricos respecto a los ejes (x, y, z) . [13]

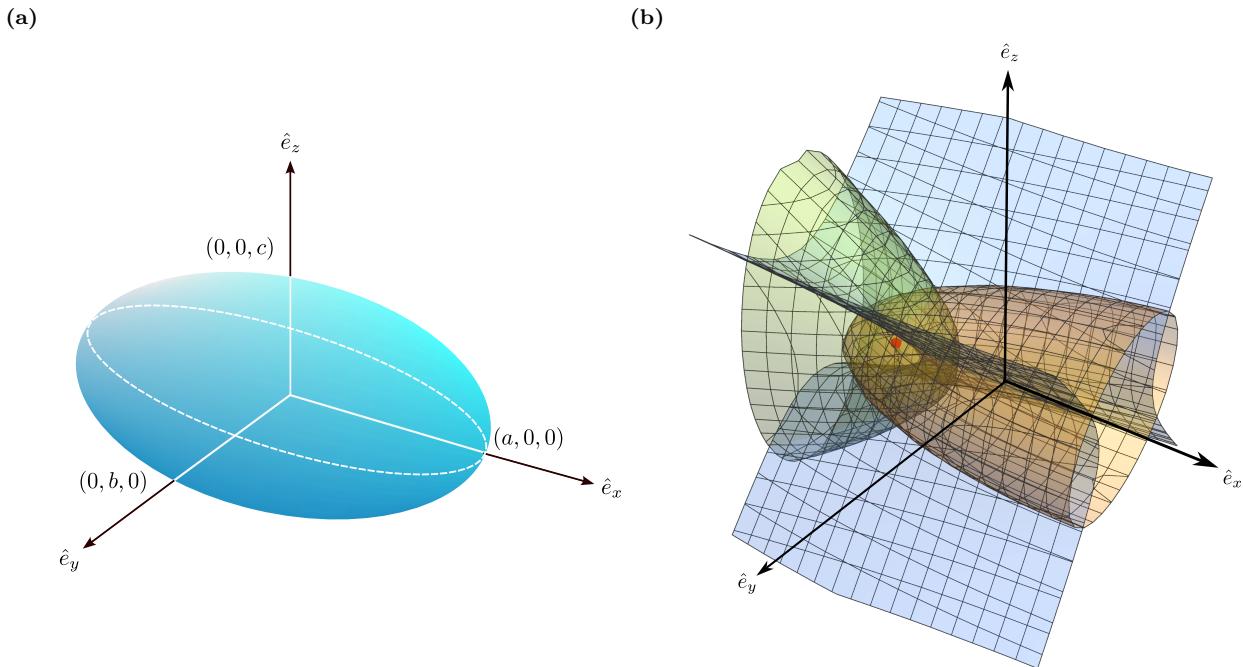


Fig. 4: Sistema a estudiar. **a)** Elipsoide centrado en el origen, con semiejes a, b, c tales que $a > b > c$. **b)** Superficies confocales. Hiperboloide de una hoja (superficie azul) con $u = 0.8$, hiperboloide de dos hojas (superficie verde) con $u = 0.5$ y elipsoide (superficie naranja) con $u = 0.1$. Todas las superficies poseen semiejes con valores $a = 1, b = 0.8$ y $c = 0.6$. El punto rojo representa uno de los focos en común localizado en $(-0.8, 0, 0)$.

En el problema de esparcimiento de luz sin retardo (o límite cuasiestático) se resuelve la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico. En un sistema coordenado general, esta ecuación se escribe en términos de coordenadas generalizadas [12]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (28)$$

donde ϕ es una función escalar, y h_i con $i = 1, 2, 3$ los factores de escala que, para coordenadas elipsoidales se asocian como $1 \rightarrow \xi, 2 \rightarrow \eta$ y $3 \rightarrow \zeta$, y se determinan al hacer un cambio de base de coordenadas cartesianas a elipsoidales. Estos factores de escala están dados por [12]

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (29)$$

Que para coordenadas elipsoidales, considerando la variación en la dirección x , empleando la Ec. (25), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + \xi} \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}.$$

Empleando las Ecs. (26) y (27) para y y z , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2y} \frac{\partial y^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2z} \frac{\partial z^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}. \end{aligned}$$

De esta forma, el cuadrado del primer factor de escala h_1 es

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \xi)^2} \right]; \quad (30)$$

y por economía, se define a la función $g(u) = (u - \xi)(u - \eta)(u - \zeta)$, que permite reescribir la Ec. (23) como

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} = \frac{g(u)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (31)$$

donde $g(u)$ es una función cúbica con tres raíces reales dentro del rango descrito por las limitaciones de cada variable, y al derivarla con respecto de u se obtiene

$$\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} = \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \zeta} + \frac{1}{u - \eta} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right], \quad (32)$$

con

$$f(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (33)$$

por medio del cual se puede reescribir al primer factor de escala de la Ec. (34) como

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{(u - \zeta)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \zeta)}{g(u)} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right].$$

Dado que ξ es una raíz de $g(u)$, entonces, $g(u) = 0$, por lo que el factor de escala h_1 es

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}. \quad (34)$$

Mediante un proceso semejante, se tiene que [12]

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \quad \text{y} \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}. \quad (35)$$

Sustituyendo las Ecs. (34) y (35) en la Ec. (28) y simplificando,

$$\nabla^2 \phi = \frac{4}{\Upsilon} \left[(\eta - \zeta) f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \zeta) f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right],$$

donde a Υ se le conoce como el valor absoluto del determinante funcional [15]

$$\Upsilon = (\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta). \quad (36)$$

Como resultado de lo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales se reescribe como

$$\nabla^2 \phi = (\eta - \zeta) f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (37)$$

Una de las formas por la cual se puede resolver la ecuación anterior es mediante el método de reducción de orden, el cual proporciona una solución linealmente independiente a partir de otra conocida con anterioridad [16]. En este contexto, ϕ corresponde a la solución de dicha ecuación que está determinada por la forma del campo incidente y cumple las condiciones de frontera.

El potencial eléctrico solución a la Ec. (37) hereda la simetría del sistema de interés, el cual consiste en un elipsoide homogéneo iluminado por un campo eléctrico incidente uniforme alineado a lo largo del eje \hat{e}_z . Por tanto, a cada punto del espacio descrito por las coordenadas elipsoidales le corresponden ocho puntos en las coordenadas cartesianas. Es decir, las propiedades de simetría del sistema en el potencial eléctrico son:

$$\phi(x, y, z) = \phi(-x, y, z) = \phi(x, -y, z) = \phi(-x, -y, z), \quad (38)$$

$$\phi(x, y, -z) = \phi(-x, y, -z) = \phi(x, -y, -z) = \phi(-x, -y, -z), \quad (39)$$

donde z es positiva. Entonces, solo se tiene que considerar el potencial en dos octantes: uno con z positivo y otro con z negativo.

Dado que se quiere determinar el potencial eléctrico producido de la interacción entre el campo eléctrico externo y la distribución de cargas y corrientes confinadas en un elipsoide, se propone dividir el problema en dos regiones espaciales: al exterior y al interior de la elipse, de modo que el potencial total se puede expresar como la contribución del potencial en el exterior del elipsoide ϕ_{ext} y la contribución en el interior de este ϕ_{int} .

Asimismo, se propone descomponer al potencial ϕ_{ext} en una contribución de la onda plana incidente ϕ_0 y en otra de perturbación ϕ_p , la cual correspondería al campo eléctrico esparcido por la partícula

$$\phi_{ext}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \phi_p(\xi, \eta, \zeta), \quad (40)$$

donde, de acuerdo con la expresión para z en la Ec. (27),

$$\phi_0 = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z = -E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}. \quad (41)$$

Al considerar las condiciones de frontera en el sistema en dos límites: a distancias muy lejanas del elipsoide y en la interfaz entre el medio y el elipsoide, debido al teorema de unicidad [9], el problema queda totalmente determinado. Para distancias lo suficientemente lejanas a la partícula, es decir, cuando $\xi \gg a^2$, al factorizar ξ de la Ec. (25), se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} = \xi,$$

donde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

entonces, $\xi \simeq r^2$ en el límite asintótico. Asimismo, en esta aproximación el potencial de perturbación es despreciable, por lo que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_p = 0. \quad (42)$$

Al considerar ϕ_{int} y ϵ_p el potencial y la permitividad eléctrica en el interior del elipsoide y las mismas cantidades ϕ_{ext} y ϵ_m para el exterior de este, como el potencial es continuo en la superficie del elipsoide y la componente perpendicular a la superficie del elipsoide del campo de desplazamiento eléctrico \vec{D} por ausencia de cargas externas también [9]

$$\phi_{int}|_{\xi=0} = \phi_{ext}|_{\xi=0}, \quad (43a)$$

$$\epsilon_p \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \epsilon_m \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \xi}|_{\xi=0}, \quad (43b)$$

en donde se emplea la relación constitutiva $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y que $E_{int}^\perp = -\partial \phi_{int}/\partial \xi$.

Reescribiendo los potenciales ϕ_{int} y ϕ_0 de la forma

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = F(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (44)$$

se obtiene que, para que satisfagan la Ec. (37), se tiene que cumplir

$$(\eta - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2} \left[f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \frac{1}{4} F(\xi)(a^2 + b^2 + 2\xi) \right] = 0, \quad (45)$$

lo cual es equivalente a resolver

$$f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) F(\xi) = 0. \quad (46)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, con dos soluciones no triviales linealmente independientes. Una de estas soluciones es

$$F_1(\xi) = (c^2 + \xi)^{1/2}, \quad (47)$$

y la segunda solución se obtiene mediante el método de reducción de orden. Como $F_1(\xi)$ es solución de la Ec. (37), se propone una segunda solución dada por $F_2(\xi) = v(\xi)F_1(\xi)$ donde $v(\xi)$ se determina al sustituir dicha solución en la ecuación diferencial dada, reduciéndola a una ecuación de primer orden donde la variable dependiente será v . Derivando la ecuación anterior respecto a ξ

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(\xi)}{d\xi} &= F_1(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{F_1(\xi)}{d\xi}, \\ \frac{d^2F_2(\xi)}{d\xi^2} &= F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2 \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned}$$

y sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec. (47) y simplificando, se obtiene

$$f^2(\xi)F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dv(\xi)}{d\xi} \left[f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $V(\xi) = dv(\xi)/d\xi$ y reordenando términos resulta en

$$\frac{1}{V(\xi)} \frac{dV(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{f^2(\xi)F_1(\xi)} \left[f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right],$$

donde la integral indefinida de la ecuación anterior da como resultado

$$\ln[V(q)] = -\ln[F_1^2(q)f(q)],$$

entonces,

$$\frac{dv(q)}{dq} = \frac{1}{F_1^2(q)f(q)}.$$

Como $dv(q)/dq$ es distinto de cero, $v(q)$ es distinto de una constante. Integrando lo anterior se tiene que

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)},$$

por lo tanto,

$$F_2(\xi) = F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}. \quad (48)$$

Al escribir explícitamente el integrando, usando las Ecs. (47) y (48), y haciendo una integración por partes con $u = 1/(a^2 + q)^{1/2}$ y $dv = 1/[(c^2 + q)^{3/2}(b^2 + q)^{1/2}]$ se obtiene

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)[(a^2 + q)(b^2 + q)(c^2 + q)]^{1/2}} \\ &= \frac{F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} \Big|_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + q}{c^2 + q}} \frac{dq}{(c^2 - b^2)(a^2 + q)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Reescribiendo la segunda integral

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2} dq}{\sqrt{a^2 - c^2}(c^2 - b^2) \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{c^2+q}} (a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}}, \quad (50)$$

y considerando que

$$\frac{d}{dq} \left(E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + q}} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right) = -\frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}}$$

al sustituir en la Ec. (50) y haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, se obtiene que la segunda solución a la Ec. (46) es

$$F_2(\xi) = \frac{2F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} - \frac{1}{(a^2 - c^2)^{1/2}} E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 + q} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right\} \Big|_{\xi}^{\infty}, \quad (51)$$

donde $E(\phi|m)$ es una integral elíptica de segundo tipo definida como [17]

$$E(x|\kappa) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 t^2}}{1 - t^2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (52)$$

donde el módulo angular es $\beta = \arcsen \kappa$ y κ es la excentricidad. En el primer límite de integración (∞) de $F_2(\xi)$ al evaluar se obtiene que el primer sumando es cero, y en el segundo límite la función arcoseno es cero. De esta forma, la parte angular de la integral es cero, es decir, $E(0|m) = 0$. En consecuencia, considerando la definición de F_1 en la Ec. (47) se tiene que F_1 y F_2 cumplen

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} F_1(\xi) = c \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_2(\xi) = 0. \quad (53)$$

De esta forma, considerando que F_1 no satisface la condición impuesta sobre ϕ_p en la Ec. (42) y que necesariamente el potencial dentro de la partícula debe de ser finito, lo cual F_2 no satisface, los potenciales ϕ_{int} y ϕ_p , propuestos como en la Ec. (44), están dados por

$$\phi_{int} = C_1 F_1(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (54)$$

$$\phi_p = C_2 F_2(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (55)$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar a partir de las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (43). Empleando la primera condición de contorno [Ec. (43a)]

$$C_1 F_1(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} = E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2},$$

y al sustituir las Ecs. (47) y (48) en la ecuación anterior se obtiene

$$C_2 \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (56)$$

Al definir

$$L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)}, \quad (57)$$

entonces, se puede reescribir la Ec. (56) como

$$C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}, \quad (58)$$

y, al usar la segunda condición de contorno [Ec. (43b)], se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_p C_1}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} &= \frac{\epsilon_m E_0}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \frac{\epsilon_m C_2}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \\ &+ \epsilon_m C_2 [(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral del tercer sumando es

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_\xi^a \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)} = - \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)};$$

de tal forma que, al evaluar en $\xi = 0$, se obtiene

$$\epsilon_m C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_p C_1 = \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (59)$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen a partir de resolver el sistema de ecuaciones entre las Ecs. (58) y (59), al multiplicar la Ec. (58) por ϵ_p y restarla la Ec. (59), al simplificar se obtiene que

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{E_0(\epsilon_p - \epsilon_m)}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left[L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m) + \epsilon_m \right]^{-1},$$

por lo tanto, al sustituir C_2 en la Ec. (58) se obtiene una expresión para C_1

$$C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\}.$$

De esta forma, ya se puede determinar el potencial dentro de la partícula sustituyendo F_1 y C_1 en la Ec. (54), por lo que

$$\phi_{int} = \frac{1}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0, \quad (60)$$

$$\phi_p = \frac{abc}{2} \frac{\frac{(\epsilon_m - \epsilon_p)}{\epsilon_m} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0. \quad (61)$$

A pesar de que inicialmente se había considerado el octante donde x, y, z eran positivas, las ecuaciones anteriormente obtenidas representan el potencial en todos los puntos del espacio, como consecuencia de la simetría de la partícula.

Al considerar distancias r muy alejadas del origen tales que $\xi \simeq r^2 \gg a^2$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{q^{5/2}} = \frac{2}{3} \xi^{-3/2},$$

y entonces el potencial ϕ_p está dado por

$$\phi_p \sim \left(\frac{E_0 \cos \theta}{r^2} \right) \frac{\left(\frac{abc}{3} \right) \left(\frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m} \right)}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}}, \quad (r \gg a) \quad (62)$$

cuya expresión es equivalente a la de un dipolo puntual dado por

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_m abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \vec{E}_0. \quad (63)$$

Entonces, la polarizabilidad $\alpha^{(3)}$ de un elipsoide en un campo paralelo al eje z es

$$\alpha^{(3)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad (64)$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide. De manera análoga, las polarizabilidades $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ cuando el campo es aplicado en los ejes \hat{e}_x y \hat{e}_y son

$$\alpha^{(1)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(1)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad \alpha^{(2)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(2)}(\epsilon_p - \epsilon_m)},$$

donde

$$L^{(1)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(a^2 + q)f(q)}, \quad y \quad L^{(2)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(b^2 + q)f(q)}.$$

Se puede concluir en general que la polarizabilidad en una dirección arbitraria j , paralela a algún eje cartesiano es

$$\alpha^{(j)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(j)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \quad (65)$$

con $L^{(j)}$ conocido como *factor geométrico*, dado por la integral

$$L^{(j)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(a_j^2 + q)f(q)} \quad (66)$$

donde el superíndice (j) indica la dirección en la que se calcula el factor de geométrico y a_j denota al semieje del elipsoide orientado en esa misma dirección. Cabe mencionar que los factores geométricos satisfacen que, por definición, $L^{(1)} \leq L^{(2)} \leq L^{(3)}$, y que sólo dos de los tres son independientes, ya que tienen que cumplir la relación

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = 1, \quad (67)$$

pues,

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} \right] \frac{dq}{f(q)},$$

que al simplificar se obtiene

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = -abc \int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq,$$

que puede resolverse de forma analítica mediante el teorema fundamental del cálculo. Este procedimiento deviene en

$$\int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq = \frac{1}{f(q)} \Big|_{(abc)^2}^\infty = -\frac{1}{abc},$$

y por consiguiente, se cumple la Ec. (67).

En el caso en el que los semiejes son iguales ($a = b = c$), es decir, en el caso de una esfera se tiene que

$$L_{\text{esfera}} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)^{5/2}} = \frac{1}{3}.$$

Una clase especial de elipsoides son los *esferoides*, los cuales tienen dos ejes de igual longitud, por lo cual, solo uno de los factores geométricos es independiente. El esferoide prolato (Fig. 5a), para el cual $b = c > a$ y $L_2 = L_3$ es generado por la rotación de una elipse sobre su eje mayor; el esferoide oblato (Fig. 5b), para el cual $b = a > c$ y $L_1 = L_2$ es generado al rotar una elipse sobre su eje menor. Para los esferoides, se tiene una expresión analítica para L_1 como función de la excentricidad e [6], en el caso de los esferoides prolatos es

$$L_1 = \frac{1 - e^2}{e^2} \left(-1 + \frac{1}{2e} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) \right) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (68)$$

mientras que para los esferoides oblatos es

$$L_1 = \frac{g(e)}{2e^2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} g(e) \right) - \frac{g^2(e)}{2}, \quad (69)$$

$$g(e) = \left(\frac{1 - e^2}{e^2} \right)^{1/2}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}. \quad (70)$$

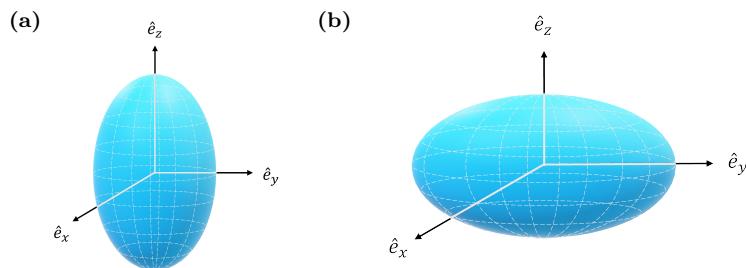


Fig. 5: Clases especiales de elipsoides. **a)** Prolato. El eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje \hat{e}_z . **b)** Oblato. El eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje \hat{e}_y .

II. RESULTADOS

En esta sección se muestran las secciones transversales para elipsoides oblatos, empleados como una primera aproximación a la forma discoide cóncava de los eritrocitos. Dado que los eritrocitos en una muestra real no interactúan fuertemente entre ellos ⁷ y que se encuentran orientados de forma aleatoria, es posible estudiar su

⁷poner pie de página mencionando que son medio transparentes o que hacen poco contaste con el agua

respuesta óptica considerando una sola partícula y definir una respuesta promedio en términos de las secciones transversales promedio $\langle C_{ext} \rangle$, $\langle C_{abs} \rangle$ y $\langle C_{sca} \rangle$. Con estas cantidades, se considera que una onda plana puede excitar de forma eficiente el sistema en sus tres ejes de forma homogénea.⁸ Estas están dadas por [6]:

$$\langle C_{abs} \rangle = \frac{k}{3} \text{Im}\{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\},$$

$$\langle C_{sca} \rangle = \frac{k^4}{3(6\pi)} \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\right)^2.$$

Para caracterizar la respuesta dieléctrica del material, se emplea la función dieléctrica $\epsilon(\omega)$, la cual puede determinarse experimentalmente a partir del índice de refracción complejo de un medio, $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$. La relación entre la función dieléctrica y el índice de refracción está dada por las expresiones [18]

$$\text{Re}[\epsilon(\omega)] = n^2 - \kappa^2, \quad (71)$$

$$\text{Im}[\epsilon(\omega)] = 2n\kappa, \quad (72)$$

donde κ es el coeficiente de extinción, el cual describe la absorción de las ondas electromagnéticas al propagarse en el medio [18].

Debido a su dependencia exclusiva de la frecuencia, es conveniente expresar a la función dieléctrica mediante el modelo de Drude, pues ofrece un mayor control sobre la respuesta óptica del sistema, resultando adecuado para estudiar la respuesta general y familiarizarse con el sistema. El modelo de Drude es particularmente útil para describir el comportamiento plasmónico de materiales a frecuencias bajas y en los que la respuesta óptica está dominada por electrones libres, como en los metales, donde los electrones en la banda de conducción responden colectivamente a un campo electromagnético aplicado. Mediante este modelo, se expresa a la función dieléctrica como [18]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (73)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma del material y γ es la constante fenomenológica de amortiguamiento.

Para analizar las contribuciones de las secciones transversales en partículas elipsoidales oblatas dentro del régimen cuasiestático, en la Fig. 6a se muestran las $\langle C_{ext} \rangle$ (línea azul), $\langle C_{sca} \rangle$ (línea verde) y $\langle C_{abs} \rangle$ (línea roja). Estas cantidades se grafican en escala logarítmica en función de λ (eje superior) y $\hbar\omega$ (eje inferior) de la onda electromagnética incidente. Las partículas elipsoidales oblatas son modeladas con una función dieléctrica dada por el modelo Drude, cuyos parámetros son $\hbar\omega_p = 13.142$ eV y $\hbar\gamma = 0.197$ eV. Sus semiejes están dados por $a = 1.5$ nm, $c = 1$ nm y se encuentra inmersa en una matriz con índice de refracción $n_m = 1.33$.

A partir de los resultados mostrados en la Fig. 6a, se observa que, en partículas dentro del régimen cuasiestático, la absorción domina sobre el esparcimiento en la contribución a la extinción. Esto se evidencia en la diferencia de magnitudes entre ambas curvas, donde la absorción es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor que el esparcimiento y la curva de extinción esencialmente la misma que la de absorción. Debido a esta marcada diferencia, los análisis posteriores se enfocan exclusivamente en las secciones transversales de extinción, ya que el impacto del esparcimiento es despreciable.

El análisis de las diferencias entre la $\langle C_{ext} \rangle$ y aquellas obtenidas al iluminar la partícula con una onda polarizada en una única dirección se presenta en la Fig. 6b. En esta figura se muestran las $\langle C_{ext} \rangle$ (línea azul), $C_{ext}^{(1)}$ y $C_{ext}^{(3)}$ (línea verde). Estos cálculos corresponden a un sistema con las mismas características que el de la Fig. 6a.

En la Fig. 6b se observa que debido a la geometría de la partícula, que es un elipsoide oblat, la $\langle C_{ext} \rangle$ presenta dos máximos, los cuales coinciden con las frecuencias de los máximos de $C_{ext}^{(1)}$ y $C_{ext}^{(3)}$. Esto muestra que

⁸Considerando que las partículas no sean ópticamente activas.

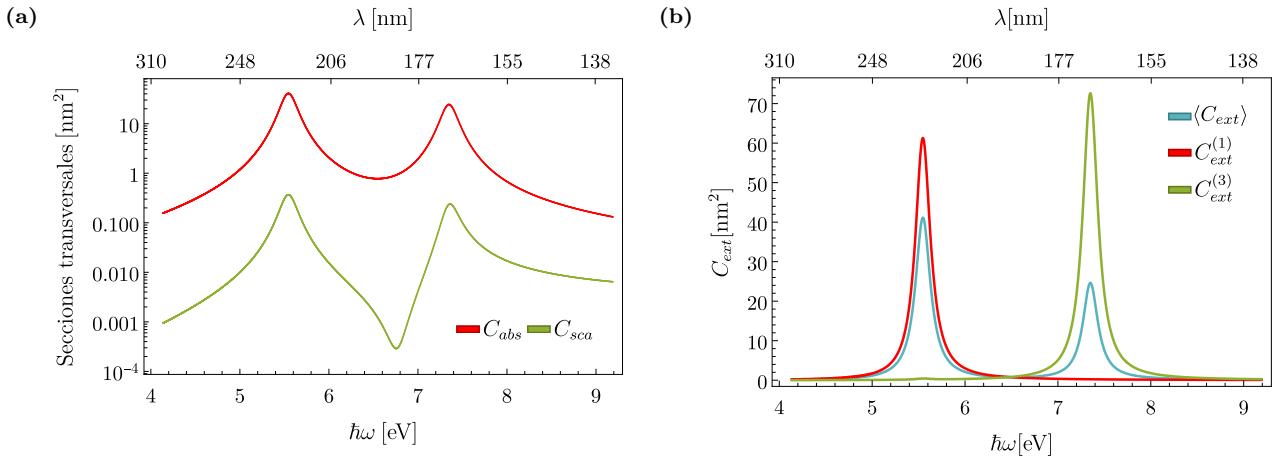


Fig. 6: Secciones transversales como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para una partícula elipsoidal oblonga de aluminio caracterizada por su función dieléctrica dada por el modelo de Drude ($\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV), con semiejes $a = b = 1.5$ nm, $c = 1$ nm e inmersa en un medio acuoso ($n_m = 1.33$). **a)** Sección transversal de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ (línea azul), sección transversal de absorción promedio $\langle C_{abs} \rangle$ (línea roja) y sección transversal de esparcimiento promedio $\langle C_{sca} \rangle$ (línea verde) en escala logarítmica. **b)** Sección transversal de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ (línea azul), sección transversal de extinción al iluminar a la partícula con una onda polarizada en la dirección \hat{e}_x , $C_{ext}^{(1)}$ (línea roja) y sección transversal de extinción al iluminar la partícula con una onda polarizada en la dirección \hat{e}_z $C_{ext}^{(3)}$ (línea verde).

las secciones transversales promedio son útiles para representar el efecto de iluminar una partícula elipsoidal con una onda electromagnética polarizada en la dirección de cualquiera de sus tres ejes principales, ya que lo que cambia es la amplitud de los máximos en la sección transversal promedio más no la localización espectral de estos.

Las siguientes figuras presentan los cálculos de las secciones transversales de extinción promedio (C_{ext}) considerando nanopartículas elipsoidales oblongas cuya función dieléctrica está caracterizada por el modelo de Drude para aluminio [19] y por datos experimentales para plata [20], oro [20], bismuto [21] y óxido de magnesio [22].

Aluminio y plata

En la Fig. 7 se muestran las $\langle C_{ext} \rangle$ en función de $\hbar\omega$ (eje inferior) y de λ (eje superior) de la onda electromagnética incidente en nanopartículas elipsoidales oblongas de aluminio (AlNPs) (Fig. 7a) y plata (AgNPs) (Fig. 7b). La función dieléctrica para las AgNPs está dada por el modelo de Drude con parámetros $\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV, mientras que para las AlNPs está dada por datos experimentales obtenidos de [20]. Se realizan los cálculos para partículas elipsoidales con razón de aspecto AR=2 y con semiejes de tamaños desde 1 nm a 2.5 nm, en pasos de 0.5 nm; cada caso se identifica con el código de color mostrado en la gráfica. Asimismo, se realizan los cálculos para una partícula esférica con a_2 nm (línea gris punteada) con relación de aspecto AR= 1. Todas las partículas se consideran inmersas en un medio acuoso con $n_m = 1.33$.

A partir de los resultados de la Fig. 7, se observa que al aumentar el tamaño de la partícula mientras se mantiene constante AR, la localización espectral de las resonancias no cambia pero que su valor nominal aumenta. Se identifican dos máximos locales en $\langle C_{ext} \rangle$, los cuales corresponden a las frecuencias en las que $C_{ext}^{(1)}$ y $C_{ext}^{(3)}$ se maximizan. Para $C_{ext}^{(1)}$, las resonancias se encuentran en $\lambda = 254$ nm para el aluminio y $\lambda = 434$ nm para la plata. Para $C_{ext}^{(3)}$, las resonancias ocurren en $\lambda = 146$ nm para aluminio y $\lambda = 344$ nm para la plata.

El efecto de la variación de la relación de aspecto en la sección transversal de extinción promedio en partículas de aluminio y plata inmersas en un medio acuoso ($n_m = 1.33$) se muestra en la Fig. 8. Se muestra la $\langle C_{ext} \rangle$ en función de $\hbar\omega$ y de λ de la onda electromagnética incidente en AgNPs (Fig. 8a) y AlNPs (Fig. 8b). Las funciones

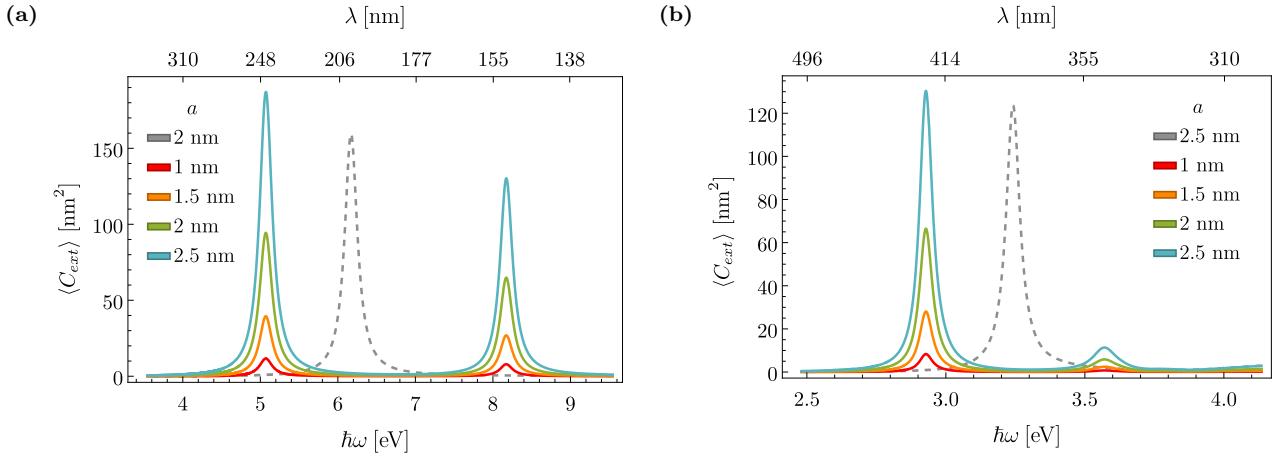


Fig. 7: Secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata con razón de aspecto $AR = a/c = 2$ constante, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde $AR = 1$. Las partículas poseen semiejes de tamaños $a = 2.5$ nm, $c = 1.25$ nm (línea azul), $a = 2$ nm, $c = 1$ nm (línea verde), $a = 1.5$ nm, $c = 0.75$ nm (línea naranja), $a = 1$ nm, $c = 0.5$ nm (línea roja) y $a = b = c = 2$ nm (línea gris punteada). Las partículas se encuentran inmersas en un medio acuoso ($n_m = 1.33$) y están caracterizadas por su función dieléctrica dada por **a**) el modelo de Drude para el aluminio con parámetros $\hbar\omega_p = 13.142$ eV y $\hbar\gamma = 0.197$ eV y **b**) datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de [20].

dieléctricas utilizadas para las partículas de aluminio y las de plata son las mismas que en la Fig. 7. Se grafica para partículas elipsoidales con razones de aspecto desde 1.5 a 2.25, en pasos de 0.25 y con $c = 1$ nm. Asimismo, se realizan los cálculos para una partícula esférica con $c = 1$ nm y con razón de aspecto $AR = 1$.

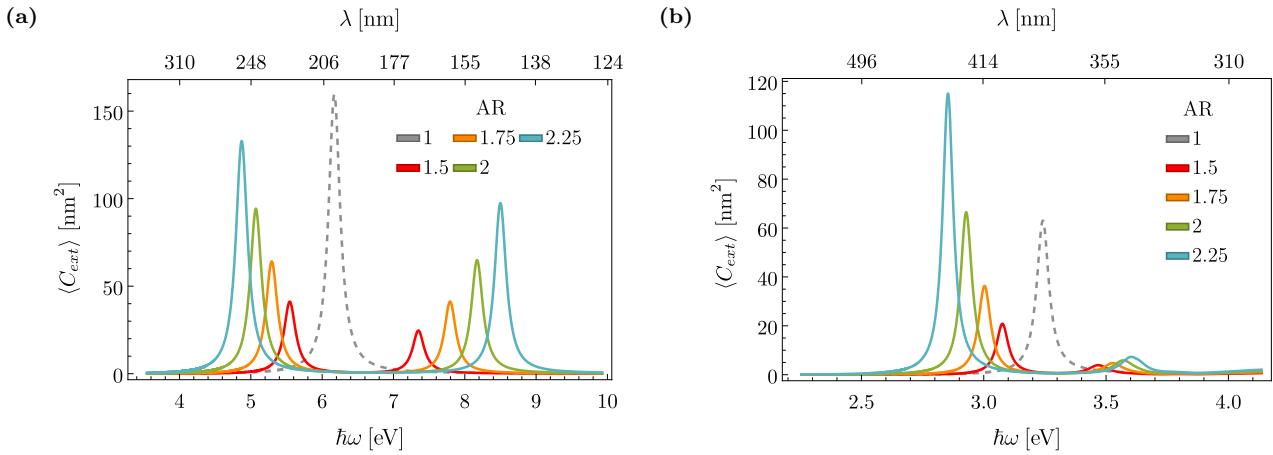


Fig. 8: Secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata y una esférica. Las partículas elipsoidales poseen un semieje menor de tamaño $c = 1$ nm y presentan razones de aspecto de $AR=1.5$ (línea roja), $AR=1.75$ (línea naranja), $AR=2$ (línea verde), $AR=2.25$ (línea azul), mientras que la esférica tiene una razón de aspecto $AR=1$ (línea gris punteada). Las partículas están inmersas en un medio acuoso ($n_m = 1.33$) y están caracterizadas por su función dieléctrica dada por **a**) el modelo de Drude para el aluminio ($\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV) y **b**) datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de [20].

En las Figs. 8a y 8b se observa que conforme la relación de aspecto se approxima a la unidad, hay un corrimiento de las frecuencias asociadas a las $\langle C_{ext} \rangle$ máximas hacia la frecuencia de resonancia asociada a una partícula esférica. Esta frecuencia de resonancia corresponde a $\lambda = 201$ nm para el aluminio y $\lambda = 383$ nm para la plata. Además, tanto en el aluminio como en la plata, se observa que al aumentar la relación de aspecto y la longitud del eje mayor, la amplitud de $\langle C_{ext} \rangle$ también aumenta. Esto se debe a que una mayor sección transversal efectiva de interacción con la onda electromagnética incrementa la probabilidad de esparcimiento y absorción de luz, lo

que, en consecuencia, aumenta la extinción.

Oro y bismuto

De forma análoga a el análisis en la variación parámetros geométricos de las NPs ripplesoidales modeladas por Drude, se muestra en la Fig. 9 la respuesta óptica variando estos parámetros (semieje mayor y razón de aspecto) considerando ahora una función dieléctrica de un material real. En particular, en Fig. 10a) se grafica C_{ext} como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblatas de oro (AuNPs) de distintos tamaños que conservan la razón de aspecto de $AR=2$; para complementar el análisis, se muestra debajo de esta gráfica la función dieléctrica del oro con los datos obtenidos de [20]. En la Fig. 9a) se consideran partículas con relación de aspecto $AR=2$ con radios desde 1 nm a 2.5 nm, en pasos de 0.5 nm; cada caso se identifica con el código de color misterioso en la gráfica respectiva. También se considera una partícula con relación de aspecto $AR=1$ y semiejes $a = b = c = 2$ nm (línea gris), que representa a una partícula esférica. Por otro lado, en la Fig. 9b) se consideraron partículas con relación de aspecto variable $AR=1.5$ (línea roja), $AR=1.75$ (línea naranja), $AR=2$ (línea verde) y $AR=2.25$ (línea azul) que presentan valores en su semieje menor $c = 1$ nm. Asimismo, se considera una partícula esférica con semieje mejor $c = 1$ nm y con relación de aspecto $AR=1$ (línea gris).

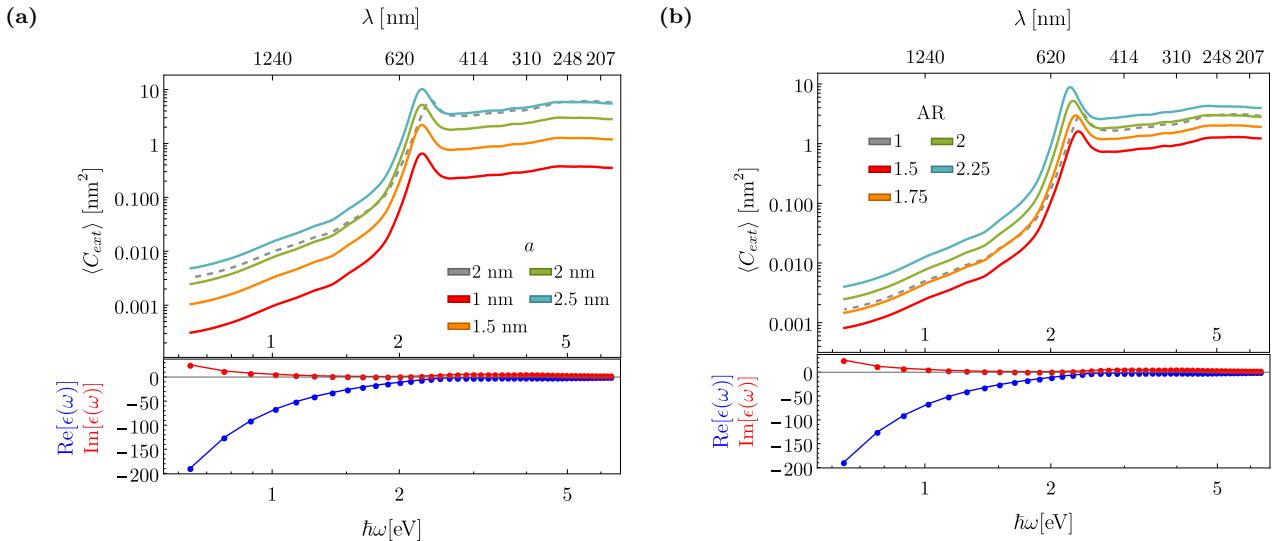


Fig. 9: Secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para una partícula elipsoidal oblonga de oro, cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales e inmersa en agua ($n_m = 1.33$) y curvas de comparación del índice de refracción (parte real en azul, parte imaginaria en rojo) como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para el oro. **a)** Razón de aspecto $AR = 2$ constante, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde $AR = 1$. **b)** Semieje menor $c = 1$ nm constante.

En contraste con el aluminio y la plata, en la Fig. 9 se observa solo una frecuencia de resonancia en $\lambda = 547$ nm, que se atribuye a la fuerte absorción del oro en el espectro visible, lo que suprime resonancias adicionales. El aumento de la sección transversal de extinción se debe a que para energías mayores a 1.76 eV, los electrones ligados empiezan a contribuir significativamente por medio de transiciones interbanda. Se observa que conforme la relación de aspecto se approxima a la unidad, hay un corrimiento de las frecuencias asociadas a las $\langle C_{ext} \rangle$ máximas hacia una frecuencia de resonancia (557 nm) asociada a una esfera de oro inmersa en agua.

En la Fig. 10 se observan las secciones transversales de extinción promedio para partículas de bismuto, así como la parte imaginaria y real de su índice de refracción. En la Fig. 10a) se consideraron partículas con relación de aspecto $AR=2$ y en la Fig. 10b) se consideraron partículas con relación de aspecto variable. En ambas figuras es posible observar una frecuencia de resonancia de alrededor de los 154 nm.

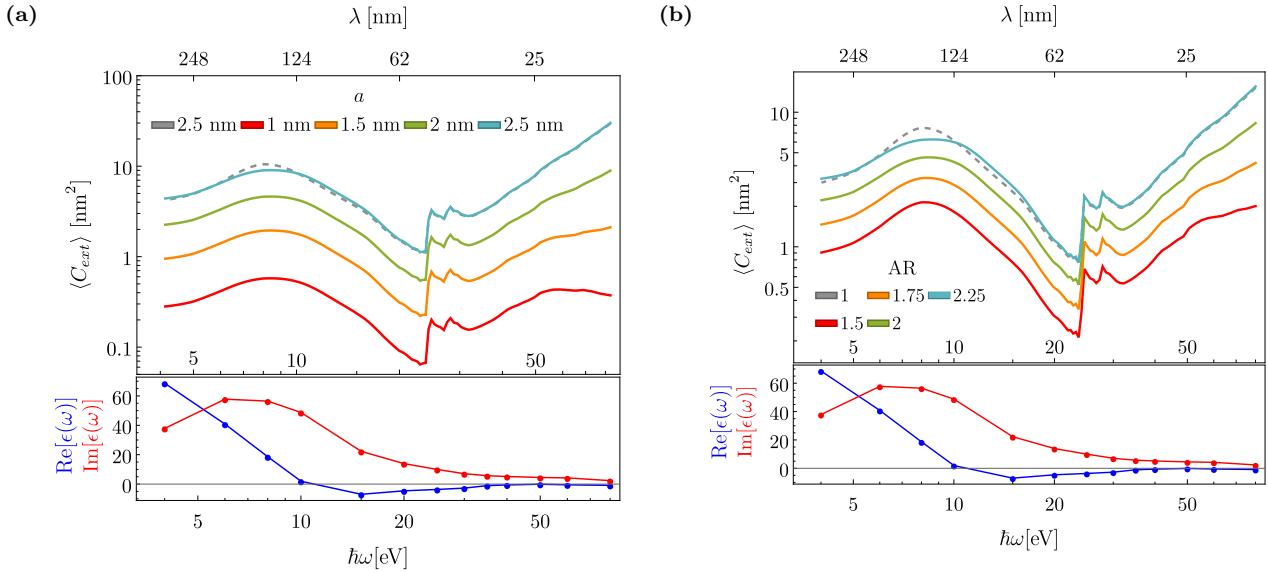


Fig. 10: Secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para una partícula elipsoidal oblata de bismuto, cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales e inmersa en agua ($n_m = 1.33$) y curvas de comparación de la función dieléctrica (parte real en azul, parte imaginaria en rojo) como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para el bismuto. **a)** Razón de aspecto $AR = 2$ constante, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde $AR = 1$. **b)** Semieje menor $c = 1$ nm constante.

Óxido de magnesio

En la Fig. 11 se observan las secciones transversales de extinción promedio para partículas de bismuto, así como la parte imaginaria y real de su índice de refracción. En la Fig. 11b se consideraron partículas con relación de aspecto $AR=2$ y en la Fig. 11a se consideraron partículas con relación de aspecto variable. En ambos casos se observa que la $\langle C_{ext} \rangle$ tiene un comportamiento creciente pues, dado que en el espectro de las ondas de radio, la contribución de la absorción es nula y la única contribución es la del esparcimiento, que aumenta al disminuir la longitud de onda.

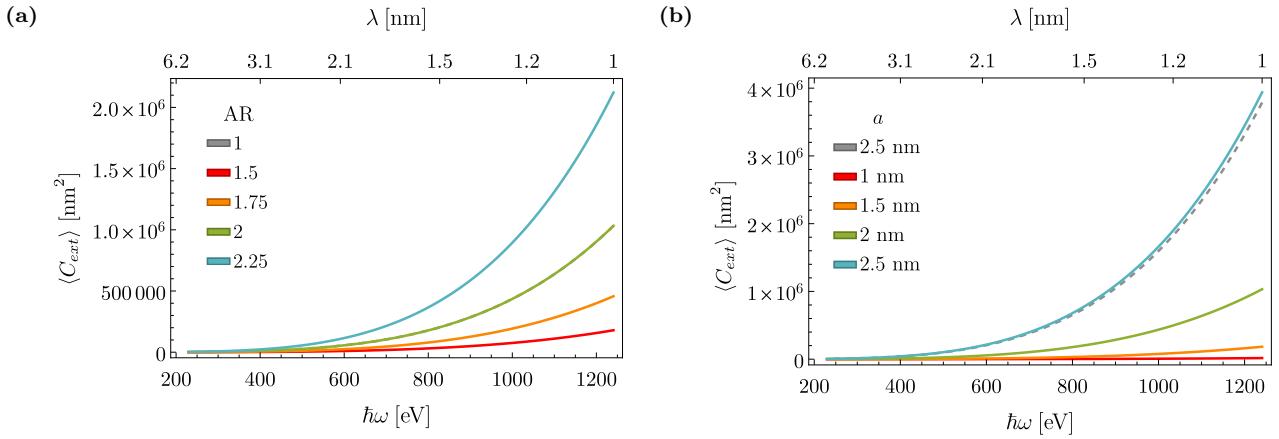


Fig. 11: Secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para una partícula elipsoidal oblata de óxido de magnesio, cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales e inmersa en agua ($n_m = 1.33$) y curvas de comparación de la función dieléctrica (parte real en azul, parte imaginaria en rojo) como función de la energía $\hbar\omega$ y de la longitud de onda λ para el bismuto. **a)** Razón de aspecto $AR = 2$ constante, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde $AR = 1$. **b)** Semieje menor $c = 1$ nm constante.

Tiene transiciones interbanda a energías muy bajas (0.15 - 0.2 eV, en el infrarrojo medio). Se comporta

como un semimetal, con una densidad de estados electrónica muy baja en el nivel de Fermi. En el visible y el infrarrojo cercano, su respuesta óptica es más compleja y no sigue el modelo simple de plasma.

III. CONCLUSIONES

- Se logró caracterizar la respuesta óptica de elipsoides de diferentes materiales y tamaños dentro de la nanoescala en términos de las secciones transversales de absorción, esparcimiento y extinción, bajo la aproximación cuasiestática, para partículas elipsoidales oblatas de aluminio, plata, oro, bismuto y óxido de magnesio.
- Se encontró que para partículas cuyo diámetro es menor a 5 nm, la contribución predominante en la extinción es la absorción, mientras que el esparcimiento es despreciable.
- En los materiales que presentan un comportamiento que se ajusta con el modelo de Drude, es posible observar las dos resonancias plasmónicas correspondientes a iluminar la partícula en las direcciones \hat{e}_x y \hat{e}_z .
- En las partículas semimetálicas, como el oro y el bismuto se observan distintas resonancias, no necesariamente plasmónicas, asociadas a transiciones interbanda o intrabanda y estrechamente relacionadas con sus funciones dieléctricas.
- Para las partículas de óxido de magnesio, se observó que la sección transversal de extinción es creciente, comportamiento debido a su naturaleza dieléctrica.

REFERENCIAS

- [1] A. Antunes, J. H. Pontes, A. F. Monte, A. Barbosa, and N. M. Ferreira, “Optical properties on bone analysis: an approach to biomaterials,” in *Proceedings*, vol. 27, p. 36, MDPI, 2019. Issue: 1.
- [2] J. Yoon, Y. Jo, M.-h. Kim, K. Kim, S. Lee, S.-J. Kang, and Y. Park, “Identification of non-activated lymphocytes using three-dimensional refractive index tomography and machine learning,” *Scientific reports*, vol. 7, no. 1, p. 6654, 2017. Publisher: Nature Publishing Group UK London.
- [3] N. Bosschaart, G. J. Edelman, M. C. G. Aalders, T. G. Van Leeuwen, and D. J. Faber, “A literature review and novel theoretical approach on the optical properties of whole blood,” *Lasers in Medical Science*, vol. 29, pp. 453–479, Mar. 2014.
- [4] E. Eremina, J. Hellmers, Y. Eremin, and T. Wriedt, “Different shape models for erythrocyte: Light scattering analysis based on the discrete sources method,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 102, no. 1, pp. 3–10, 2006. Publisher: Elsevier.
- [5] A. G. Borovoi, E. I. Naats, and U. G. Oppel, “Scattering of light by a red blood cell,” *Journal of biomedical optics*, vol. 3, no. 3, pp. 364–372, 1998. Publisher: SPIE.
- [6] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [7] C. M. G. Rosas, *Respuesta electromagnética de nanopartículas magnético/metálicas tipo core-shell*. PhD Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [8] J. Larsson, “Electromagnetics from a quasistatic perspective,” *American Journal of Physics*, vol. 75, no. 3, pp. 230–239, 2007. Publisher: American Association of Physics Teachers.
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [10] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.
- [11] E. W. Weisstein, “Confocal Ellipsoidal Coordinates.” Publisher: Wolfram Research, Inc.

- [12] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [13] G. Dassios, *Ellipsoidal Harmonics: Theory and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [14] T. Soler and J.-Y. Han, “On transformations of ellipsoidal (triaxial) orthogonal curvilinear coordinates,” *Survey Review*, vol. 56, pp. 265–283, May 2024. Publisher: Taylor & Francis _eprint: <https://doi.org/10.1080/00396265.2023.2229590>.
- [15] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, vol. 31. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*. New York, NY: Springer US, 1978.
- [17] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. US Government printing office, 1948.
- [18] S. A. Maier, “Plasmonics: Fundamentals and Applications,” 2007.
- [19] A. D. Rakić, “Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum,” *Applied optics*, vol. 34, no. 22, pp. 4755–4767, 1995. Publisher: Optica Publishing Group.
- [20] P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical Constants of the Noble Metals,” *Physical Review B*, vol. 6, pp. 4370–4379, Dec. 1972.
- [21] H.-J. Hagemann, W. Gudat, and C. Kunz, “Optical constants from the far infrared to the x-ray region: Mg, Al, Cu, Ag, Au, Bi, C, and Al₂O₃,” *JOSA*, vol. 65, no. 6, pp. 742–744, 1975. Publisher: Optica Publishing Group.
- [22] R. E. Stephens and I. H. Malitson, “Index of refraction of magnesium oxide,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, no. 4, pp. 249–252, 1952. Publisher: National Institute of Standards and Technology (NIST).