

Cálculo de las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento de elipsoides en la aproximación cuasiestática como primera aproximación de eritrocitos

DANA LARISSA LUNA GONZÁLEZ

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades ópticas de las células biológicas como los osteoblastos [1], los linfocitos [2], y los eritrocitos [3], es de importancia para el área médica. A partir de las propiedades ópticas de las células, se obtiene información de su composición y estado morfológico, lo cual tiene potenciales aplicaciones en el diagnóstico y la detección temprana de diversas enfermedades, incluidos cánceres e infecciones virales [2]. En particular, el estudio de los eritrocitos tiene un papel importante en el diagnóstico de la anemia en sus diferentes tipos y el diseño de nuevas terapias ópticas, como el tratamiento de las venas varicosas [3].

Los eritrocitos sanos presentan forma de discoídes cóncavos con longitudes de entre 4 a 9 μm de diámetro. Estos no poseen núcleo, por lo que pueden modelarse como un objeto homogéneo [4]. Debido a su forma, para simplificar el proceso de modelado, se han empleado diferentes opciones como los óvalos de Cassini [4] o funciones en términos de coordenadas esféricas [5]. Sin embargo, una primera aproximación es considerarlos como un elipsoide. El objetivo este trabajo es el de analizar la respuesta óptica de elipsoides de diferentes materiales (oro, plata, aluminio, bismuto y óxido de magnesio) y tamaños dentro de la nanoescala, por medio de las secciones transversales de esparcimiento, absorción y extinción, bajo la aproximación cuasiestática para, posteriormente, orientarlo a eritrocitos. En la [Sección I](#) de este trabajo, se resuelve de forma analítica el problema de esparcimiento de luz por una partícula elipsoidal arbitraria en la aproximación cuasiestática, donde se presentan, además, las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento. En la sección de [Resultados](#), se estudia el esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen, en la aproximación cuasi-estática para partículas elipsoidales oblatas de materiales tanto plasmónicos como dieléctricos. Finalmente, en la sección de [Conclusiones](#), se presenta un resumen de lo estudiado en este trabajo, así como los principales resultados obtenidos.

I. Aproximación cuasiestática en el problema de esparcimiento de luz por partículas elipsoidales

En el caso de un elipsoide de semieje mayor a caracterizado por una función dieléctrica ϵ_p , inmerso en un medio con una función dieléctrica ϵ_m , e iluminado por una onda plana electromagnética con vector de onda \vec{k} , se puede definir el límite cuasiestático cuando el parámetro de tamaño $x = ka$ es mucho menor que la unidad [6]. Esta restricción garantiza que toda la geometría del elipsoide esté sujeta a un campo eléctrico de la misma intensidad y dirección [7]. En esta sección se presenta el caso de una esfera, como caso particular de un elipsoide, en el límite cuasiestático para estudiarlo como un dipolo eléctrico puntual, lo que permite introducir el concepto de polarizabilidad, y más adelante, se desarrolla el dipolo eléctrico para esparcidores arbitrarios en donde se analizan las regiones de campo cercano, intermedia y de radiación.

I.1. Dipolo eléctrico (caso estático)

En electrodinámica clásica, se entiende como *límite cuasiestático* el considerar una partícula de tamaño mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente [7]. Para el caso de una partícula esférica de radio a , se puede emplear la aproximación cuasiestática al resolver la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico ϕ . Si se considera una esfera con permitividad eléctrica ϵ_p , embebida en un medio caracterizado por su función dieléctrica ϵ_m en el cual existe un campo eléctrico externo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$ [Fig. 1a)], al resolver la ecuación de Laplace considerando las condiciones de frontera entre la esfera y el medio, se obtiene que el potencial eléctrico fuera de la esfera es la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual \vec{p} localizado en el origen. El potencial eléctrico correspondiente al campo eléctrico producido por el dipolo eléctrico puntual está dado por [8]

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_m} \left(\frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_m r^2}, \quad (1)$$

donde \vec{p} representa el momento dipolar eléctrico expresado como [6]

$$\vec{p} = \epsilon_m \alpha \vec{E}_0 = 4\pi\epsilon_m a^3 \left(\frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_p + 2\epsilon_m} \right) \vec{E}_0, \quad \text{con } \alpha = 4\pi a^3 \left(\frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_p + 2\epsilon_m} \right),$$

donde α es la polarizabilidad eléctrica, que representa la facilidad con la que se polariza la esfera [8], es decir, el campo eléctrico externo induce un dipolo eléctrico puntual en la esfera, cuyo campo eléctrico asociado fuera de la esfera es

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\nabla \phi_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_m r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta).$$

En consecuencia, el campo eléctrico fuera de la esfera, es decir para $r > a$, está dado por la superposición del campo eléctrico externo y del campo eléctrico producido por el dipolo eléctrico [ver Fig. 1b)].

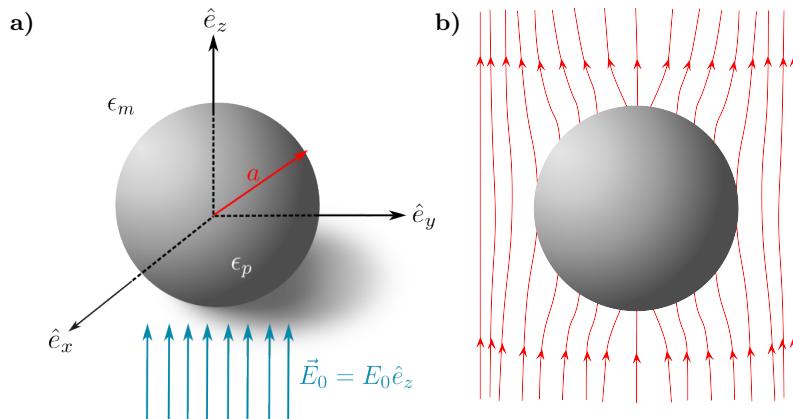


Fig. 1: Problema de una esfera inmersa en un campo eléctrico externo. a) Esfera de radio a caracterizada por la función dieléctrica ϵ_p y embebida en un medio caracterizado por la función dieléctrica ϵ_m , en la cual incide un campo eléctrico externo \vec{E}_0 (flechas azules). b) Campo eléctrico total (flechas rojas) fuera de la esfera generado por la superposición del campo eléctrico externo y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual localizado en el origen.

I.2. Dipolo eléctrico (caso dinámico)

En la sección anterior se abordó una solución que asume que el campo eléctrico externo, y por tanto también el dipolo inducido, son estáticos. Para resolver el caso dinámico en el régimen cuasiestático, se

considera que, al iluminar cargas confinadas en un volumen finito con una onda plana electromagnética, éstas experimentan movimiento al ser sometidas a una fuerza. Esto equivale a realizar un análisis en términos de componentes de Fourier de los potenciales y campos generados por un sistema de cargas y corrientes localizadas en el espacio vacío, con una dependencia armónica $e^{-i\omega t}$, tal que varían en el tiempo y oscilan a la frecuencia ω del campo electromagnético externo aplicado. De esta forma, la densidad de carga volumétrica total $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente volumétrica total $\vec{J}(\vec{r}, t)$ en la posición \vec{r} se expresan como [9]

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (2)$$

considerando que el significado físico lo posee la parte real. Entonces, es posible determinar los campos electromagnéticos generados por las cargas y corrientes mediante el potencial vectorial como [9]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-i\omega t_r}, \quad (3)$$

en donde se emplea la norma de Lorentz [8] y la densidad de corriente se evalúa en el tiempo de retardo $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$.

Las ondas planas son ondas de frecuencia constante ω que se propagan con velocidad c . Su número de onda en el vacío está dado por $k = \omega/c$, y se pueden caracterizar regiones espaciales en función del parámetro adimensional kr . Alternativamente, esta relación puede expresarse en términos de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$. En particular, en la región de campo cercano, donde $r \ll \lambda$ (o $kr \ll 1$), tal que $\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) \rightarrow 1$, se tiene que, al obviar la dependencia temporal, la Ec. (3) se reescribe como [9]

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r',$$

mientras que en la región de campo lejano ($kr \gg 1$), dado que la exponencial oscila rápidamente, es suficiente aproximar

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}', \quad (4)$$

que se obtiene al aplicar la ley de cosenos¹ en el triángulo mostrado en la Fig. 2, donde \hat{e}_r es un vector unitario en la dirección de \vec{r} . Si sólo se consideran los términos que decaen como r^{-1} , el inverso de la distancia en la Ec. (3) puede ser reemplazado por r . Entonces, al obviar nuevamente la dependencia temporal, el potencial vectorial es

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3 r',$$

que se puede reescribir al realizar la expansión en serie de potencias de la exponencial dentro de la integral de volumen, dando como resultado

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{r}') (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')^n d^3 r'.$$

Al considerar únicamente el primer término de la expansión, se concluye que

¹Empleando la ley de cosenos y haciendo una expansión binomial $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} = r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2[(r'/r) \cos \theta]} \simeq r[1 - (\hat{e}_r \cdot \vec{r}'/r) + 1/2(r'/r)^2] \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$.

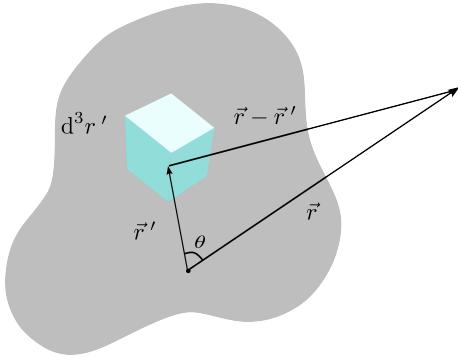


Fig. 2: Esquema de un volumen arbitrario dividido en elementos diferenciales d^3r' , cuya posición \vec{r} se mide desde un origen arbitrario. El vector $\vec{r} - \vec{r}'$ representa su distancia al punto \vec{r}' .

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3r', \quad (5)$$

que al realizar una integración por partes², se obtiene que

$$\int \vec{J}(\vec{r}') d^3r' = - \int \vec{r}' [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] d^3r' = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r', \quad (6)$$

donde se empleó la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -\frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} = i\omega \rho(\vec{r}).$$

Al sustituir la Ec. (6) en la Ec. (5) y considerando que el momento dipolar eléctrico \vec{p} de una distribución de cargas ρ es

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r',$$

se obtiene [9]

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r' = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}. \quad (7)$$

Calculando el campo eléctrico y luego empleando la ley de Faraday-Lenz para calcular el campo \vec{H} , se sigue que [9]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \quad (8)$$

$$\vec{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (9)$$

A partir de las Ecs. (8) y (9) se observa que el campo \vec{H} es transversal al vector radial en el campo lejano, mientras el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a \hat{e}_r .

De forma análoga al desarrollo de la Ec. (7) y empleando la Ley de Faraday-Lenz, en la zona de radiación cuando $kr \gg 1$, se tiene que al iluminar las cargas y corrientes en el sistema con una

²Al considerar $\int_V \vec{r}' [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] d^3r' = \int_{\partial V} \vec{r}' [\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}] \int_V \vec{J}(\vec{r}') d^3r'$ y asumiendo que \vec{J} se desvanece en los límites del volumen V , es decir, en la superficie ∂V .

onda electromagnética de frecuencia angular ω , se induce un dipolo eléctrico \vec{p} que genera campos electromagnéticos \vec{E}_p y \vec{H}_p y que oscilan a la misma frecuencia ω :

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}) e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \vec{H}_p = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}. \quad (10)$$

En el caso particular en que la onda electromagnética incidente esté polarizada en la dirección \hat{e}_x , el momento dipolar inducido es $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$. De modo que al reescribir al vector \hat{e}_x en términos de la base de vectores esféricos como [8]

$$\hat{e}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi, \quad (11)$$

se pueden reescribir a los campos generados por el dipolo inducido mediante el vector de amplitud de esparcimiento

$$\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha [\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x)] = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta + \sin \phi \hat{e}_\phi), \quad (12)$$

como [6]

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E_0 e^{ikz} \quad \text{y} \quad \vec{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_p. \quad (13)$$

II. Secciones transversales

En la sección anterior se consideró al sistema integrado por una partícula y por una distribución de cargas localizadas en un volumen finito, sometidas a un campo eléctrico homogéneo y a uno armónico, respectivamente. En esta sección, se introducen las denominadas secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, las cuales son cantidades macroscópicas medibles que proporcionan información sobre el sistema [6]. Para esto, se considera a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana armónica en el tiempo. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula W_{abs} , se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting³ $\langle \vec{S} \rangle_t$ sobre una superficie cerrada A , que por simplicidad puede considerarse una esfera de radio r mayor al de la partícula [ver Fig. 3], es decir,

$$W_{abs} = - \int_A \langle \vec{S} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA,$$

donde, debido a que $\langle \vec{S} \rangle_t$ y \hat{e}_r están orientados en la misma dirección, el signo negativo convierte a W_{abs} en una cantidad positiva, de lo contrario, significaría que se genera energía dentro de la esfera [6].

Considerando la descomposición del vector de Poynting total en tres términos [6]

$$\langle \vec{S}^i \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*\}, \quad \langle \vec{S}^s \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*\}, \quad \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^*\}, \quad (14)$$

asociados al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente y donde $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real de un número complejo, se tiene que $W_{abs} = W_i - W_s + W_{ext}$,

³El promedio temporal del vector de Poynting es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} \vec{S}(t') dt'$, y para campos electromagnéticos del tipo ondas planas es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/2) \operatorname{Re}[\vec{E} \times (\vec{B}/\mu)^*]$, donde $*$ denota la operación compleja conjugada [6].

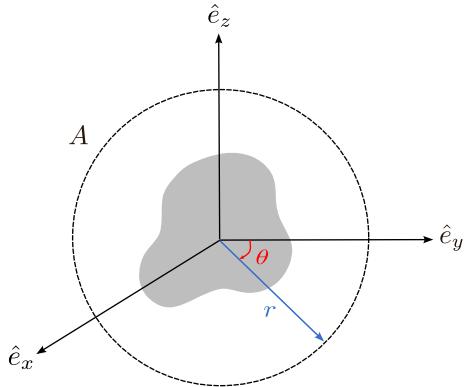


Fig. 3: Esquema de la superficie de integración A como una esfera de radio r centrada en el origen y que contiene a la partícula de interés.

donde [6]

$$W_i = - \int_A \langle \vec{S}^i \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (15)$$

$$W_s = \int_A \langle \vec{S}^s \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (16)$$

$$W_{ext} = - \int_A \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (17)$$

cuyos signos están colocados de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de \hat{e}_r . En particular, para un medio no absorbente, la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, por lo que W_i se anula, entonces

$$W_{ext} = W_{abs} + W_s. \quad (18)$$

Al considerar el campo incidente $\vec{E}_i = E \hat{e}_x$ y a $\vec{H}_i = (1/\mu\omega) \vec{k} \times E \hat{e}_x$ en un medio no absorbente, W_a es independiente del radio r de la superficie de integración, por lo que se puede considerar a r lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como las Ecs. (13), por lo cual, W_{ext} está dado por [6]

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\},$$

donde I_i es la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting, y por consiguiente⁴,

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\}, \quad (19)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec. (19) puede ser reescrita como [6]

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} \quad (20)$$

donde $C_{abs} = W_{abs}/I_i$ y $C_{sca} = W_s/I_i$ corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (13) en la Ec. (16) se obtiene

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (21)$$

⁴Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones [6].

Las Ecs. (19)–(21) son propiedades macroscópicas y medibles, que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula.

Al reescribir el vector de amplitud de esparcimiento [Ec. (12)] en términos de la base vectorial esférica se obtiene [6]

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1), \quad (22)$$

y sustituyendo la Ec. (22) en la Ec. (19), la sección transversal de extinción es

$$C_{ext} = k \operatorname{Re} \left\{ \left(i\alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \right)_{\theta=0} \right\} = k \operatorname{Re} \{-i\alpha\} = k \operatorname{Im}\{\alpha\}.$$

Si el esparcimiento es despreciable con respecto a la absorción, la extinción corresponde a la absorción en mayor medida, tal que [6]

$$C_{abs} = k \operatorname{Im}\{\alpha\}. \quad (23)$$

Además, al sustituir la Ec. (12) en la Ec. (21), se obtiene [6]

$$C_{sca} = \frac{|\alpha|^2 k^2}{6\pi}. \quad (24)$$

III. Elipsoide en la aproximación cuasiestática

Las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento para distribuciones arbitrarias de cargas y corrientes confinadas a distancias cortas respecto al punto de observación fueron estudiadas en la sección anterior. En esta sección se estudia el caso particular del esparcimiento de luz por cargas y corrientes iluminadas por una onda plana electromagnética y confinadas en un elipsoide centrado en el origen, con semiejes a, b, c alineados con los ejes $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ respectivamente, y dimensiones tales que $\lambda \gg a > b > c$ [ver Fig. 4a)], donde λ se relaciona con el vector de onda como $k = 2\pi\sqrt{\epsilon_m}/\lambda$. Al considerar una partícula elipsoidal en la aproximación cuasiestática, es posible calcular una solución analítica, aproximada, al emplear las coordenadas elipsoidales confocales⁵, que describen una familia de superficies confocales como [10]

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1, \quad (25)$$

donde debe determinarse el valor del parámetro u . La Ec. (25) es una ecuación de tercer grado para u , por lo que las soluciones (reales) son un conjunto de tres valores $\{\xi, \eta, \zeta\}$ tales que⁶

$$-\infty < \xi < c^2 < \eta < b^2 < \zeta < a^2, \quad (26)$$

que corresponden a tres formas cuadráticas con focos en común [ver Fig. 4b)]. Las coordenadas elipsoidales confocales se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante el siguiente sistema de

⁵Existen diversas definiciones que pueden revisarse en la Ref. [10], sin embargo, se emplea la proporcionada en la Ref. [11].

⁶La función $f(u) = x^2/(a^2 - u) + y^2/(b^2 - u) + z^2/(c^2 - u) - 1$ resulta ser continuamente diferenciable en el dominio $(-\infty, c^2) \cap (c^2, b^2) \cap (b^2, a^2)$ y estrictamente creciente en cada intervalo que lo compone, de tal forma que, al calcular los límites en cada extremo de los intervalos, se concluye que existe exactamente una raíz en cada intervalo.

ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2+\xi} & \frac{1}{b^2+\xi} & \frac{1}{c^2+\xi} \\ \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{b^2+\eta} & \frac{1}{c^2+\eta} \\ \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{b^2+\zeta} & \frac{1}{c^2+\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución está dada por las expresiones

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad (27)$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}, \quad (28)$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \quad (29)$$

A partir del sistema de ecuaciones dado por las Ecs. (27)–(29), se observa que cuando ξ es constante, se obtiene un elipsoide. De esta forma, la superficie de la partícula a estudiar se tiene cuando $\xi = 0$. Mientras que si η es constante, se obtiene un hiperboloide de una hoja y cuando ζ es constante se tiene un hiperboloide de dos hojas. Cada punto (x, y, z) tiene una correspondencia única con (ξ, η, ζ) , pero la transformación inversa no es biyectiva, ya que cada (ξ, η, ζ) se asocia a ocho puntos simétricos respecto a los ejes (x, y, z) [12].

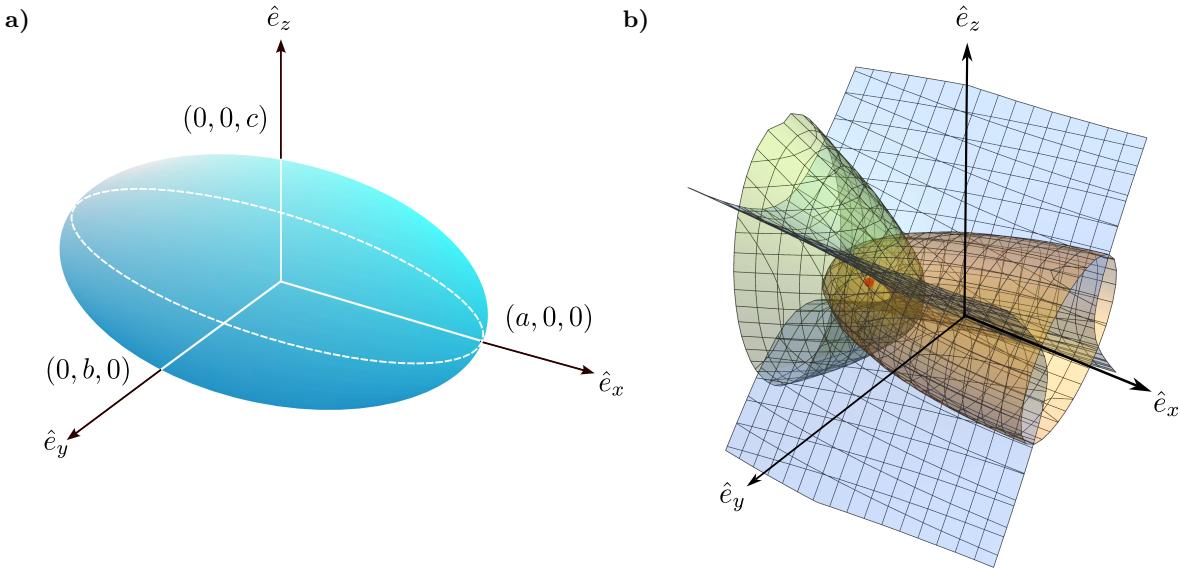


Fig. 4: a) Elipsoide centrado en el origen, con semiejes a, b, c tales que $a > b > c$. b) Superficies confocales. Hiperboloide de una hoja (superficie azul) con $u = 0.8$, hiperboloide de dos hojas (superficie verde) con $u = 0.5$ y elipsoide (superficie naranja) con $u = 0.1$. Todas las superficies poseen semiejes con valores $a = 1, b = 0.8$ y $c = 0.6$. El punto rojo representa uno de los focos en común localizado en $(-0.8, 0, 0)$.

En el problema de esparcimiento de luz en el límite cuasiestático se resuelve el potencial eléctrico, solución a la ecuación de Laplace, que en un sistema coordenado arbitrario se escribe como [11]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (30)$$

donde ϕ es una función escalar, y h_i con $i = 1, 2, 3$ los factores de escala que, para coordenadas elipsoidales se asocian como $1 \rightarrow \xi, 2 \rightarrow \eta$ y $3 \rightarrow \zeta$, y se determinan al hacer un cambio de base de coordenadas cartesianas a elipsoidales. Estos factores de escala están dados por [11]

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}, \quad (31)$$

que para coordenadas elipsoidales, considerando la variación en la dirección x y empleando la Ec. (27), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + \xi} \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}.$$

Empleando las Ecs. (28) y (29) para y y z , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2y} \frac{\partial y^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2z} \frac{\partial z^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}. \end{aligned}$$

De esta forma, el cuadrado del primer factor de escala h_1 es

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z}{(c^2 + \xi)^2} \right], \quad (32)$$

y por economía, se define a la función $g(u) = (u - \xi)(u - \eta)(u - \zeta)$, que permite reescribir la Ec. (25) como

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} = \frac{g(u)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (33)$$

donde $g(u)$ es una función cúbica con tres raíces reales dentro del rango descrito por los límites de cada variable, y al derivarla con respecto de u se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} &= \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\left(\frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \zeta} + \frac{1}{u - \eta} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

con

$$f(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (35)$$

por medio del cual se puede reescribir al primer factor de escala de la Ec. (32) como

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[\frac{(u - \zeta)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \zeta)}{g(u)} - \left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right].$$

Dado que ξ es una raíz de $g(u)$, entonces $g(u) = 0$, por lo que el factor de escala h_1 es

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}. \quad (36)$$

Mediante un proceso análogo, se tiene que [11]

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \quad \text{y} \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}. \quad (37)$$

Sustituyendo las Ecs. (36) y (37) en la Ec. (30), y simplificando se obtiene

$$\nabla^2 \phi = \frac{4}{\Upsilon} \left[(\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \zeta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right],$$

donde a Υ se le conoce como el valor absoluto del determinante funcional [13]

$$\Upsilon = (\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta). \quad (38)$$

Como resultado de lo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales se reescribe como

$$\nabla^2 \phi = (\eta - \zeta)f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi)f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta)f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (39)$$

Una de las formas por la cual se puede resolver la Ec. (39) es mediante el método de reducción de orden, el cual proporciona una solución linealmente independiente a partir de otra conocida con anterioridad [14]. En este contexto, ϕ corresponde a la solución de dicha ecuación que está determinada por la forma del campo incidente y cumple las condiciones de frontera.

El potencial eléctrico, solución a la Ec. (39), hereda la simetría del sistema de interés, el cual consiste en un elipsoide homogéneo iluminado por un campo eléctrico incidente uniforme alineado a lo largo del eje z . Por tanto, a cada punto del espacio descrito por las coordenadas elipsoidales le corresponden ocho puntos en las coordenadas cartesianas. Es decir, las propiedades de simetría del sistema en el potencial eléctrico son:

$$\phi(x, y, z) = \phi(-x, y, z) = \phi(x, -y, z) = \phi(-x, -y, z), \quad (40)$$

$$\phi(x, y, -z) = \phi(-x, y, -z) = \phi(x, -y, -z) = \phi(-x, -y, -z), \quad (41)$$

donde z es positiva. Entonces, sólo se tiene que considerar el potencial en dos octantes: uno con z positivo y otro con z negativo.

Dado que se quiere determinar el potencial eléctrico producido de la interacción entre el campo eléctrico externo y la distribución de cargas y corrientes confinadas en un elipsoide, se propone dividir el problema en dos regiones espaciales: al exterior y al interior del elipsoide, de modo que el potencial total se puede expresar como la contribución del potencial en el exterior del elipsoide ϕ_{ext} y la contribución en el interior de éste ϕ_{int} . Asimismo, se propone descomponer al potencial ϕ_{ext} en una contribución de

la onda plana incidente ϕ_0 y en otra de perturbación ϕ_f , la cual correspondería al campo eléctrico esparcido por la partícula

$$\phi_{ext}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \phi_f(\xi, \eta, \zeta), \quad (42)$$

donde, de acuerdo con la expresión para z en la Ec. (29),

$$\phi_0 = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z = -E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

Para determinar por completo la solución al potencial ϕ [Ec. (39)], se emplea el teorema de unicidad [8] considerando las condiciones de frontera a distancias muy lejanas del elipsoide y en su superficie. Para distancias lo suficientemente lejanas a la partícula, es decir, cuando $\xi \gg a^2$, al factorizar ξ de la Ec. (27), se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} = \xi,$$

donde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

entonces, $\xi \simeq r^2$ en el límite asintótico. Asimismo, en esta aproximación el potencial de perturbación es despreciable, por lo que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_f = 0. \quad (44)$$

Al considerar ϕ_{int} y ϵ_{int} el potencial y la permitividad eléctrica en el interior del elipsoide, y las mismas cantidades ϕ_{ext} y ϵ_{ext} para el exterior de éste, como el potencial es continuo en la superficie del elipsoide y la componente perpendicular a la superficie del elipsoide del campo de desplazamiento eléctrico \vec{D} por ausencia de cargas externas también, se debe cumplir que [8]

$$\phi_{int}|_{\xi=0} = \phi_{ext}|_{\xi=0}, \quad (45a)$$

$$\epsilon_{int} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \epsilon_{ext} \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad (45b)$$

en donde se emplea la relación constitutiva $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y que $E_{int}^\perp = -\partial \phi_{int}/\partial \xi$.

Reescribiendo los potenciales ϕ_{int} y ϕ_0 de la forma

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = F(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (46)$$

donde $F(\xi)$ es una función cuya única variable independiente es ξ , se obtiene que, para que satisfagan la Ec. (39), se tiene que cumplir

$$(\eta - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2} \left[f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \frac{1}{4} F(\xi)(a^2 + b^2 + 2\xi) \right] = 0, \quad (47)$$

lo cual es equivalente a resolver

$$f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) F(\xi) = 0. \quad (48)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, con dos soluciones no triviales linealmente independientes. Una de estas soluciones es [6]

$$F_1(\xi) = (c^2 + \xi)^{1/2}, \quad (49)$$

mientras que la segunda solución se obtiene mediante el método de reducción de orden. Al proponer $F_2(\xi) = v(\xi)F_1(\xi)$ donde $v(\xi)$ se determina al sustituir $F_2(\xi)$ en la Ec. (48), esta última se reduce a una ecuación de primer orden donde v es la función a determinar. Para obtener la ecuación reducida, se calcula la primera y segunda derivada de F_2 respecto a ξ

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(\xi)}{d\xi} &= F_1(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{F_1(\xi)}{d\xi}, \\ \frac{d^2F_2(\xi)}{d\xi^2} &= F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2 \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned}$$

y sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec. (49), al simplificar se obtiene que

$$f^2(\xi)F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dv(\xi)}{d\xi} \left[f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $V(\xi) = dv(\xi)/d\xi$ y reordenando términos resulta que

$$\frac{1}{V(\xi)} \frac{dV(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{f^2(\xi)F_1(\xi)} \left[f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right], \quad (50)$$

donde al realizar la integral indefinida de la Ec. (50) da como resultado

$$\ln[V(q)] = -\ln[F_1^2(q)f(q)],$$

entonces,

$$\frac{dv(q)}{dq} = \frac{1}{F_1^2(q)f(q)}.$$

Como $dv(q)/dq$ es distinto de cero, $v(q)$ es distinto de una constante. Integrando lo anterior se tiene que

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)},$$

por lo tanto,

$$F_2(\xi) = F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}. \quad (51)$$

Al escribir explícitamente el integrando de la Ec. (51) al sustituir la Ec. (49), se obtiene que

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \left[\frac{1}{(a^2 + q)^{1/2}} \right] \left[\frac{dq}{(c^2 + q)^{3/2}(b^2 + q)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} \Big|_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + q}{c^2 + q}} \frac{dq}{(c^2 - b^2)(a^2 + q)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde se realizó una integración por partes. Al reescribir la integral de la Ec. (52) como

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2} dq}{\sqrt{a^2 - c^2}(c^2 - b^2) \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{c^2+q}} (a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}}, \quad (53)$$

y considerando que

$$\frac{d}{dq} \left\{ E \left[\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + q}} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right] \right\} = -\frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}},$$

al sustituir en la Ec. (53) y haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, se obtiene que la segunda solución a la Ec. (48) es

$$F_2(\xi) = \frac{2F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} - \frac{1}{(a^2 - c^2)^{1/2}} E \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 + q} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right\}_{\xi}^{\infty}, \quad (54)$$

donde $E(\phi|m)$ es una integral elíptica de segundo tipo definida como [15]

$$E(x|\kappa) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 t^2}}{1 - t^2} dt, \quad \text{con} \quad 0 \leq \kappa \leq 1, \quad (55)$$

donde el módulo angular es $\beta = \arcsen \kappa$ y κ es la excentricidad. En el primer límite de integración (∞) de $F_2(\xi)$ en la Ec. (54), al evaluar se obtiene que el primer sumando es cero, y para el segundo límite (ξ) debido a las condiciones de frontera, se considera $\xi = 0$, de modo que la función arcoseno es cero. De esta forma, la parte angular de la integral es cero, es decir, $E(0|m) = 0$. En consecuencia, considerando la definición de F_1 en la Ec. (49) se tiene que F_1 y F_2 cumplen

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} F_1(\xi) = c \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_2(\xi) = 0. \quad (56)$$

De este modo, considerando que F_1 no satisface la condición impuesta sobre ϕ_f en la Ec. (44) y que necesariamente el potencial dentro de la partícula debe de ser finito, lo cual F_2 no satisface, los potenciales ϕ_{int} y ϕ_f , propuestos como en la Ec. (46), están dados por

$$\phi_{int} = C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (57)$$

$$\phi_f = C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (58)$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar a partir de las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (45). Empleando la primera condición de contorno [Ec. (45a)]

$$C_1 F_1(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} = E_0 \left[\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi) [(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (59)$$

y al sustituir las Ecs. (49) y (51) en la Ec. (59) se obtiene

$$C_2 \int_0^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (60)$$

Al definir

$$L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)}, \quad (61)$$

entonces, se puede reescribir la Ec. (60) como

$$C_2 L^{(3)} \left(\frac{2}{abc} \right) - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}, \quad (62)$$

y, al usar la segunda condición de contorno [Ec. (45b)], se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{int}C_1}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} &= \frac{\epsilon_{ext}E_0}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \\ &+ \frac{\epsilon_{ext}C_2}{2} \left[\frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} + \\ &+ \epsilon_{ext}C_2[(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral del tercer sumando a la derecha de la igualdad es

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\xi}^a \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)} = - \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)},$$

de tal forma que, al evaluar en $\xi = 0$, se obtiene

$$\epsilon_{ext}C_2 \left(\frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_{int}C_1 = \frac{\epsilon_{ext}E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (63)$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen a partir de resolver el sistema de ecuaciones entre las Ecs. (62) y (63), al multiplicar la Ec. (62) por ϵ_{int} y restarla la Ec. (63). Al simplificar se obtiene que

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{E_0(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left[L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}) + \epsilon_{ext} \right]^{-1},$$

por lo tanto, al sustituir C_2 en la Ec. (62) se obtiene una expresión para C_1

$$C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_{ext}}{L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})} \right]^{-1} - 1 \right\}.$$

De esta forma, ya se puede determinar el potencial dentro de la partícula sustituyendo F_1 y C_1 en la Ec. (57), por lo que

$$\phi_{int} = \frac{1}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}{\epsilon_{ext}}} \phi_0, \quad (64)$$

y al sustituir F_2 y C_2 en la Ec. (58) el potencial de perturbación se reescribe como

$$\phi_f = \frac{abc}{2} \frac{\frac{(\epsilon_{ext} - \epsilon_{int})}{\epsilon_{ext}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}{\epsilon_{ext}}} \phi_0. \quad (65)$$

Aunque inicialmente se había considerado el octante donde x, y, z eran positivas, las ecuaciones anteriormente obtenidas representan el potencial en todos los puntos del espacio, como consecuencia de la simetría de la partícula.

Al considerar distancias r muy alejadas del origen tales que $\xi \simeq r^2 \gg a^2$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{q^{5/2}} = \frac{2}{3} \xi^{-3/2},$$

el potencial ϕ_p se reescribe como

$$\phi_p \sim \left(\frac{E_0 \cos \theta}{r^2} \right) \frac{\left(\frac{abc}{3} \right) \left(\frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{\epsilon_{ext}} \right)}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}{\epsilon_{ext}}}, \quad (66)$$

cuya expresión es equivalente a la de un dipolo puntual dado por

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_{ext}(abc) \frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{3\epsilon_{ext} + 3L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})} \vec{E}_0. \quad (67)$$

Entonces, la polarizabilidad $\alpha^{(3)}$ de un elipsoide en un campo paralelo al eje z es

$$\alpha^{(3)} = V \frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{\epsilon_{ext} + L^{(3)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}, \quad (68)$$

donde $V = 4\pi abc/3$ es el volumen del elipsoide. De manera análoga, las polarizabilidades $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ cuando el campo es aplicado en los ejes x y y son

$$\alpha^{(1)} = 4\pi abc \left[\frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{3\epsilon_{ext} + 3L^{(1)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})} \right] \quad \text{y} \quad \alpha^{(2)} = 4\pi abc \left[\frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{3\epsilon_{ext} + 3L^{(2)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})} \right],$$

donde

$$L^{(1)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)f(q)} \quad \text{y} \quad L^{(2)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(b^2 + q)f(q)}.$$

Se puede concluir en general que la polarizabilidad en una dirección arbitraria j , paralela a algún eje cartesiano es

$$\alpha^{(j)} = V \frac{\epsilon_{int} - \epsilon_{ext}}{\epsilon_m + L^{(j)}(\epsilon_{int} - \epsilon_{ext})}, \quad (69)$$

con $L^{(j)}$ conocido como *factor geométrico*, dado por la integral

$$L^{(j)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a_j^2 + q)f(q)}, \quad (70)$$

donde el superíndice (j) indica la dirección en la que se calcula el factor geométrico y a_j denota al semieje del elipsoide orientado en esa misma dirección. Cabe mencionar que los factores geométricos satisfacen que, por definición, $L^{(1)} \leq L^{(2)} \leq L^{(3)}$, y que sólo dos de los tres son independientes, ya que tienen que cumplir la relación

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = 1, \quad (71)$$

pues

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} \right] \frac{dq}{f(q)},$$

que al simplificar se obtiene

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = -abc \int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq,$$

que puede resolverse de forma analítica mediante el teorema fundamental del cálculo. Este procedimiento deviene en

$$\int_0^\infty \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{f(q)} \right) dq = \frac{1}{f(q)} \Big|_{(abc)^2}^\infty = -\frac{1}{abc},$$

y por consiguiente, se cumple la Ec. (71).

En el caso en el que los semiejes son iguales ($a = b = c$), es decir, en el caso de una esfera se tiene que

$$L_{\text{esfera}} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)^{5/2}} = \frac{1}{3}.$$

Una clase especial de elipsoides son los *esferoides*, los cuales tienen dos ejes de igual longitud, por lo cual, sólo uno de los factores geométricos es independiente. El esferoide prolato [ver Fig. 5a)], para el cual $b = c > a$ y $L_2 = L_3$ es generado por la rotación de una elipse sobre su eje mayor; el esferoide oblato [ver Fig. 5b)], para el cual $b = a > c$ y $L_1 = L_2$ es generado al rotar una elipse sobre su eje menor. Para los esferoides, se tiene una expresión analítica para L_1 en función de la excentricidad e [6]. En el caso de los esferoides prolatos se tiene que

$$L_1 = \frac{1 - e^2}{e^2} \left[-1 + \frac{1}{2e} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) \right] \quad \text{con} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (72)$$

mientras que para los esferoides oblatos se tiene que

$$L_1 = \frac{g(e)}{2e^2} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} g(e) \right] - \frac{g^2(e)}{2}, \quad (73)$$

$$g(e) = \left(\frac{1 - e^2}{e^2} \right)^{1/2}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}. \quad (74)$$

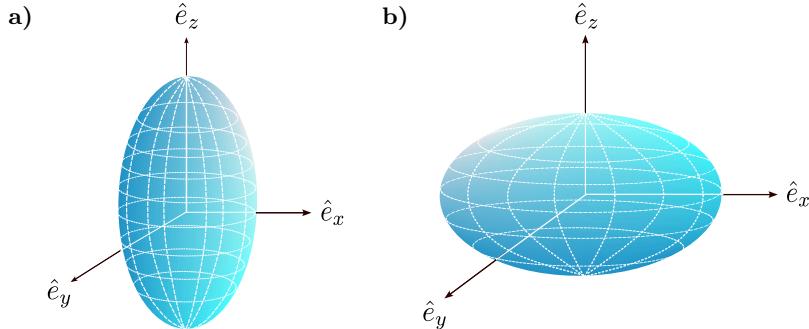


Fig. 5: Clases especiales de elipsoides. **a)** Prolato: el eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje z . **b)** Oblato: el eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje y .

II. RESULTADOS

En esta sección se muestran las secciones transversales de absorción, extinción y esparcimiento para elipsoides oblatos, geometría considerada como una primera aproximación a la forma discoide cóncava de los eritrocitos. Dado el bajo contraste entre los eritrocitos y el medio en el que están inmersos en una muestra real⁷, el esparcimiento de luz es despreciable. Como resultado, el campo que excita a los eritrocitos es, en promedio, igual al campo externo. Además, dado que los eritrocitos están orientados aleatoriamente, se estudia su respuesta óptica promedio considerando que una onda plana ilumina una colección de eritrocitos idénticos y no interactuantes. Por la aleatoriedad de los elipsoides considerados,

⁷La diferencia entre el índice de refracción de los eritrocitos y el plasma sanguíneo oscila entre 0.04 y 0.06 [3].

se emplea la respuesta promedio, que considera la excitación de un elipsoide a los largo de sus tres semiejes. De esta forma, las secciones transversales promedio de absorción y esparcimiento se expresan como [6]

$$\langle C_{abs} \rangle = \frac{k}{3} \text{Im}\{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\},$$

$$\langle C_{sca} \rangle = \frac{k^4}{3(6\pi)} \left(|\alpha^{(1)}|^2 + |\alpha^{(2)}|^2 + |\alpha^{(3)}|^2 \right).$$

Para modelar la respuesta electromagnética del material de los elipsoides, se propone emplear el modelo de Drude. Este modelo describe el comportamiento plasmónico de materiales a energías bajas, es decir, aquella dominada por los electrones en la banda de conducción. Al considerar que una colección de electrones no interactuantes entre sí de un material se encuentran bajo la presencia de un campo eléctrico armónico con una frecuencia ω , la expresión de la función dieléctrica dada por el modelo de Drude es [16]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (75)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma y γ es la constante fenomenológica de amortiguamiento, ambas características de cada material. A pesar de que los eritrocitos no están compuestos por materiales dominados por un comportamiento plasmónico en el espectro visible, se emplea el modelo de Drude debido a su dependencia en la frecuencia, lo que permite, al seleccionar los parámetros ω_p y γ , un control sobre la respuesta óptica del sistema, resultando adecuado para estudiar la respuesta general y familiarizarse con el problema.

Para analizar la respuesta óptica en partículas elipsoidales dentro del régimen cuasiestático al compararlas con la respuesta de una esfera, se emplea inicialmente la función dieléctrica del aluminio dada por el modelo de Drude con los parámetros $\hbar\omega_p = 13.142$ eV y $\hbar\gamma = 0.197$ eV [17]; adicionalmente, el medio donde se encuentra el elipsoide está caracterizado por la función dieléctrica $\epsilon_m = 1.77$, que corresponde al de un medio acuoso⁸. En la Fig. 6a) se muestra $\langle C_{abs} \rangle$ (línea continua verde oscuro) y $\langle C_{sca} \rangle$ (línea continua verde claro) de un elipsoide oblato con semiejes $a = 1.5$ nm, $c = 1$ nm, y $\langle C_{abs} \rangle$ (línea punteada verde oscuro) y $\langle C_{sca} \rangle$ (línea punteada verde claro) de una esfera con radio igual a 1.5 nm. Todas las cantidades se muestran en función de la energía $\hbar\omega$ (eje inferior) y la longitud de onda λ (eje superior) de la onda electromagnética incidente.

A partir de los resultados mostrados en la Fig. 6a), se observa que, en partículas dentro del régimen cuasiestático, la absorción domina sobre el esparcimiento en la contribución a la extinción. La diferencia de magnitudes entre las curvas de absorción y esparcimiento evidencia este comportamiento, ya que la absorción es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor. Como resultado, la curva de extinción es esencialmente la misma que la de absorción. Debido al fuerte contraste entre ambas contribuciones, los análisis posteriores se centran exclusivamente en las secciones transversales de extinción, dado que el esparcimiento es despreciable.

El análisis de las diferencias entre $\langle C_{ext} \rangle$ y las secciones transversales de extinción obtenidas al iluminar la partícula con una onda polarizada en una única dirección, se presenta en la Fig. 6b). En esta figura se muestra $\langle C_{ext} \rangle$ (línea azul), $C_{ext}^{(1)}$ (línea roja) y $C_{ext}^{(3)}$ (línea verde) de un elipsoide y $\langle C_{ext} \rangle$

⁸Que podría considerarse como el plasma sanguíneo [3].

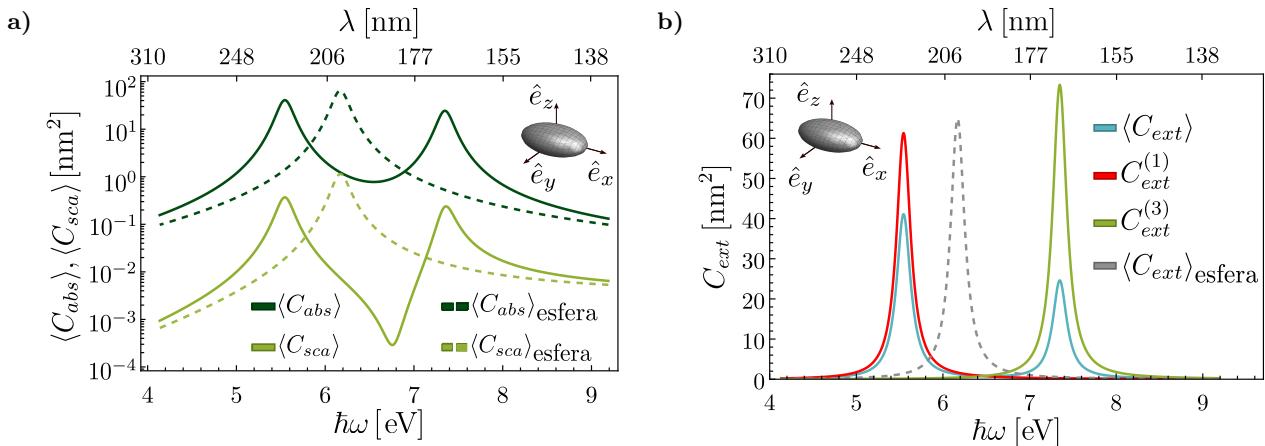


Fig. 6: Secciones transversales en función de la energía $\hbar\omega$ (eje inferior) y de la longitud de onda λ (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de aluminio caracterizada por una función dieléctrica dada por el modelo de Drude ($\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV), con semiejes $a = b = 1.5$ nm, $c = 1$ nm e inmersa en un medio acuoso ($\epsilon_m = 1.77$). **a)** Sección transversal de absorción promedio $\langle C_{abs} \rangle$ del elipsoide (línea continua verde oscuro) y la esfera (línea punteada verde oscuro) y sección transversal de esparcimiento promedio $\langle C_{sca} \rangle$ del elipsoide (línea continua verde claro) y la esfera (línea punteada verde claro) en escala logarítmica. **b)** Sección transversal de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ del elipsoide (línea azul) y de una esfera de radio igual a 1.5 nm (línea gris punteada), sección transversal de extinción al iluminar al elipsoide con una onda polarizada en la dirección \hat{e}_x , $C_{ext}^{(1)}$ (línea roja) y sección transversal de extinción al iluminar al elipsoide con una onda polarizada en la dirección \hat{e}_z $C_{ext}^{(3)}$ (línea verde).

(línea gris punteada) de una esfera con las mismas características que los de la Fig. 6a). Los resultados se muestran en función de $\hbar\omega$ (eje inferior) y de λ (eje superior) de la onda electromagnética incidente. Se observa que debido a la geometría, $\langle C_{ext} \rangle$ del elipsoide presenta dos resonancias plasmónicas: una longitudinal y otra transversal, que corresponden a los máximos de $C_{ext}^{(1)}$ y $C_{ext}^{(3)}$, respectivamente. Dado que el eje longitudinal (eje x) del elipsoide es mayor que el eje transversal (eje z), la excitación de la resonancia longitudinal requiere menor energía, lo que implica una mayor longitud de onda. En contraste, la excitación de la resonancia transversal requiere mayor energía, lo que se traduce en una menor longitud de onda. Por lo tanto, la resonancia localizada más hacia el rojo corresponde a la longitudinal, mientras que la más hacia el azul a la transversal. Como la ubicación espectral de las resonancias no se modifica, las secciones transversales promedio son útiles para representar el efecto de iluminar una partícula elipsoidal con una onda electromagnética polarizada a lo largo de cualquiera de sus tres ejes principales.

En las siguientes secciones, se presentan las secciones transversales de extinción promedio $\langle C_{ext} \rangle$ considerando nanopartículas elipsoidales oblatas cuya función dieléctrica está caracterizada por el modelo de Drude para aluminio [17] y por datos experimentales para plata [18], oro [18], bismuto [19] y óxido de magnesio [20].

Aluminio y plata

En la Fig. 7 se muestra $\langle C_{ext} \rangle$ en función de $\hbar\omega$ (eje inferior) y de λ (eje superior) de la onda electromagnética incidente en nanopartículas elipsoidales oblatas de aluminio (AlNPs) [ver Fig. 7a)] y plata (AgNPs) [ver Fig. 7b)]. La función dieléctrica para el aluminio está dada por el modelo de Drude con parámetros $\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV [17], mientras que para la plata está dada a partir de los datos experimentales reportados por Johnson y Christy [18]. Se realizan los cálculos para partículas

elipsoidales con razón de aspecto AR=2 y con semiejes de tamaño desde 1 nm a 2.5 nm, en pasos de 0.5 nm; cada caso se identifica con el código de color mostrado en la gráfica. Además, se incluyen los resultados para una partícula esférica con radio igual a 2 nm (línea gris punteada). Todas las partículas están inmersas en un medio acuoso con $\epsilon_m = 1.77$. Como parte del análisis, se muestra debajo de las gráficas la función dieléctrica del aluminio [ver Fig. 7a)], obtenida a partir de la Ref. [17], junto con la de la plata [ver Fig. 7b)], en donde los puntos corresponden a datos experimentales obtenidos de la Ref. [18] y las líneas continuas representan la interpolación realizada para dichos datos.

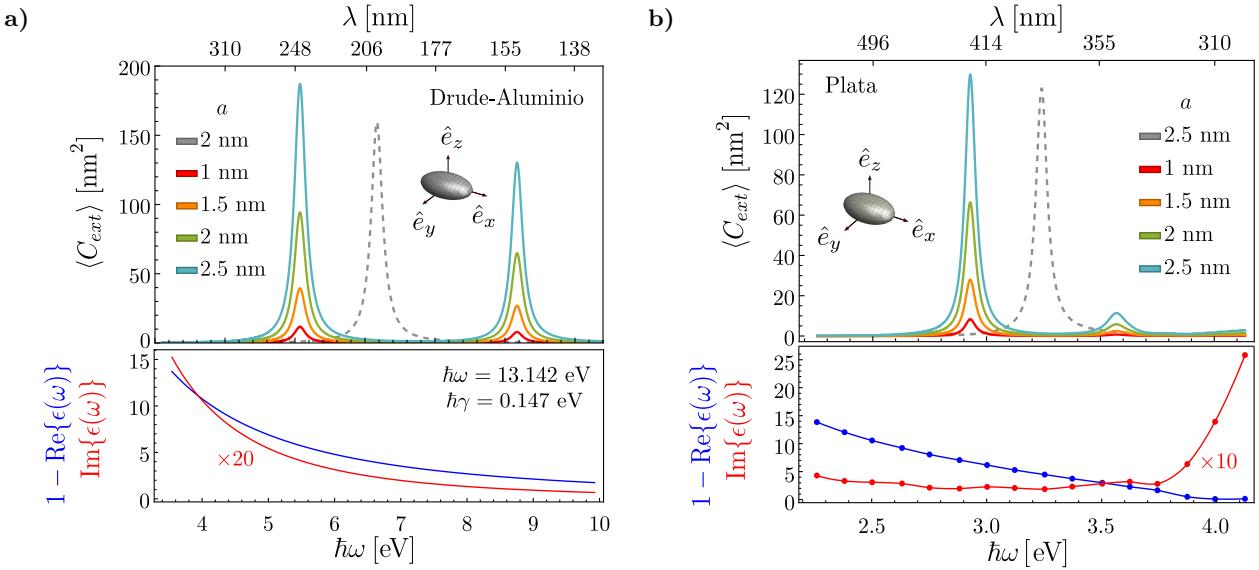


Fig. 7: Secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata inmersa en un medio acuoso ($\epsilon_m = 1.77$). Las partículas poseen AR=2, excepto en el caso de la línea gris punteada en el que AR=1 (partícula esférica). Además, las partículas están caracterizadas por una función dieléctrica dada por **a)** el modelo de Drude para el aluminio con parámetros $\hbar\omega_p = 13.142$ eV y $\hbar\gamma = 0.197$ eV [17] y **b)** datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de la Ref. [18]. Debajo de las gráficas se muestra la función dieléctrica del **a)** aluminio dada por el modelo de Drude obtenida a partir de la Ref. [17] y **b)** plata obtenida a partir de la Ref. [18]; en ambos casos se indica en azul la parte real de la función dieléctrica y en rojo la parte imaginaria. La línea continua que une los datos experimentales en **b)** fue obtenida mediante interpolación.

A partir de los resultados mostrados en la Fig. 7, se observa que al aumentar el tamaño de la partícula mientras se mantiene constante AR, la localización espectral de las resonancias no cambia pero su valor nominal aumenta. Se identifican dos máximos locales en $\langle C_{ext} \rangle$, los cuales corresponden a las frecuencias en las que $C_{ext}^{(1)}$ y $C_{ext}^{(3)}$ se maximizan. En ambos casos se observa que el corrimiento de la resonancia no es simétrico respecto al de la esfera, para $C_{ext}^{(1)}$, las resonancias presentan un corrimiento hacia el rojo de $\Delta\lambda = 44$ nm (1.11 eV) para las AlNPs y $\Delta\lambda = 51$ nm (0.38 eV) para las AgNPs. Para $C_{ext}^{(3)}$, las resonancias presentan un corrimiento hacia el azul de $\Delta\lambda = 55$ nm (2.33 eV) para AlNPs y $\Delta\lambda = 39$ nm (0.36 eV) para las AgNPs. Es decir, este corrimiento depende del material.

El efecto de la variación de la razón de aspecto en la sección transversal de extinción promedio en AlNPs y AgNPs inmersas en un medio acuoso con $\epsilon_m = 1.77$ se muestra en la Fig. 8. En esta figura, las partículas elipsoidales se consideran con AR entre 1.5 a 2.25, con incrementos de 0.25 y con un semieje menor fijo de $c = 1$ nm y también se incluye $\langle C_{ext} \rangle$ para una partícula esférica con radio igual a 1 nm.

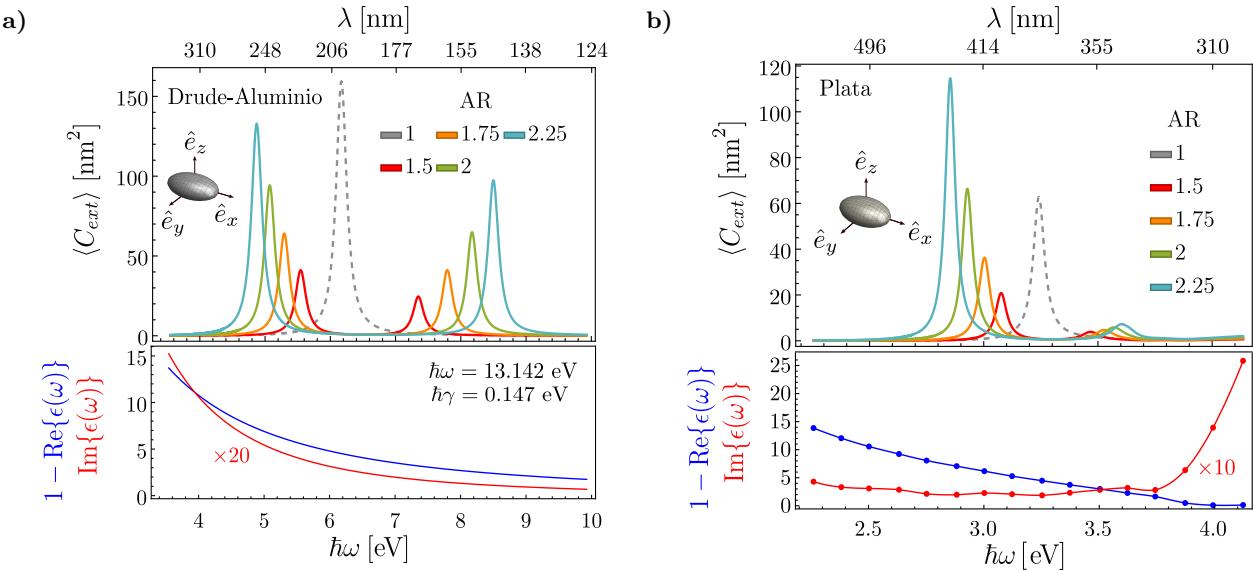


Fig. 8: Secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata inmersa en un medio acuoso ($\epsilon_m = 1.77$). Las partículas poseen un semieje menor de tamaño $c = 1$ nm y presentan diferentes AR cuyo código de color se muestra en la gráfica. Además, las partículas están caracterizadas por una función dieléctrica dada por a) el modelo de Drude para el aluminio ($\hbar\omega_p = 13.142$ eV, $\hbar\gamma = 0.197$ eV) y b) datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de la Ref. [18]. Debajo de las gráficas se muestra la función dieléctrica del a) aluminio dada por el modelo de Drude obtenida a partir de la Ref. [17] y b) plata obtenida a partir de la Ref. [18]; en ambos casos se indica en azul la parte real de la función dieléctrica y en rojo la parte imaginaria. La línea continua que une los datos experimentales en b) fue obtenida mediante interpolación.

En la Fig. 8 se observa que conforme la razón de aspecto se aproxima a la unidad, hay un corrimiento de las frecuencias asociadas a $\langle C_{ext} \rangle$ máximas hacia la frecuencia de resonancia asociada a una partícula esférica. Esta frecuencia de resonancia corresponde a $\lambda = 201$ nm (6.17 eV) para el aluminio y $\lambda = 383$ nm (3.24 eV) para la plata. Además, tanto en el aluminio como en la plata, se observa que al aumentar la razón de aspecto y la longitud del eje mayor, el valor nominal de $\langle C_{ext} \rangle$ también aumenta. Esto se debe a que hay una mayor cantidad de material y por tanto más electrones, por lo que los efectos de absorción aumentan, lo que, en consecuencia, aumenta la extinción. En las AlNPs y AgNPs es posible observar dos resonancias debido a que en el rango de frecuencias estudiado, ambos materiales, el aluminio y la plata, presentan baja absorción.

Oro y bismuto

De forma análoga al análisis en la variación de los parámetros geométricos de las AlNPs y AgNPs, se muestra en la Fig. 9 la respuesta óptica variando estos parámetros (semieje mayor y razón de aspecto) considerando una función dieléctrica donde se observan contribuciones no descritas por el modelo de Drude⁹. En particular, en la Fig. 9a) se grafica $\langle C_{ext} \rangle$ en función de $\hbar\omega$ (eje inferior) y de λ (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblatas de oro (AuNPs) de distintos tamaños que conservan la razón de aspecto de AR=2. En la Fig. 9a) se consideran partículas con razón de aspecto AR= 2 y con semiejes de tamaño desde 1 nm a 2.5 nm, con incrementos de 0.5 nm; cada caso se

⁹Estas contribuciones provienen de electrones ligados [16].

identifica con el código de color mostrado en la gráfica respectiva. También se considera una partícula esférica con radio igual a 2 nm (línea gris punteada), que representa a una partícula esférica. Por otro lado, en la Fig. 9b) se consideraron partículas con razón de aspecto variable AR=1.5 (línea roja), AR=1.75 (línea naranja), AR=2 (línea verde) y AR=2.25 (línea azul) que presentan valores en su semieje menor $c = 1$ nm. Asimismo, se considera una partícula esférica con radio igual a 1 nm (línea gris). Para complementar el análisis, en la Fig. 9c) se muestra la función dieléctrica del oro donde los puntos representan datos experimentales obtenidos de la Ref. [18] y las líneas continuas representan la interpolación empleada para este conjunto de datos.

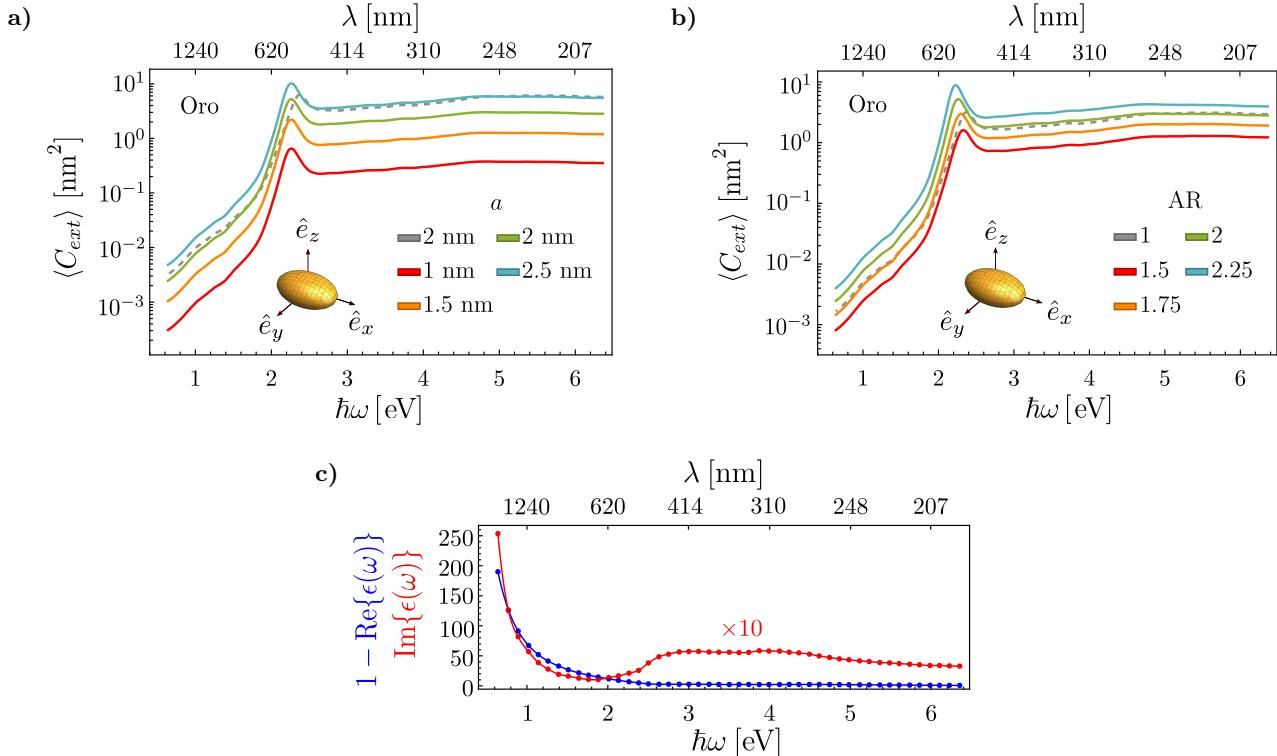


Fig. 9: Secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de oro inmersa en un medio acuoso con $\epsilon_m = 1.77$, y cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales de la Ref. [18]. **a)** AuNPs con AR=2, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde AR=1. **b)** AuNPs con semieje menor $c = 1$ nm y AR entre 1.5 y 2.25, con incrementos de 0.25. **c)** Función dieléctrica del oro obtenida a partir de la Ref. [18] (parte real en azul, parte imaginaria en rojo). La línea continua que une los puntos experimentales fue obtenida mediante una interpolación.

En contraste con el aluminio y la plata, para el oro se observa sólo una excitación en $\lambda = 522$ nm (2.38 eV). Esta excitación presenta un corrimiento hacia el rojo respecto de la de la esfera en $\lambda = 547$ nm (2.27 eV) y se esperaría que existiera otra con un corrimiento hacia el azul es decir, a frecuencias mayores. El hecho de que no se observe una segunda resonancia se atribuye a la fuerte absorción del oro a energías altas, lo que suprime resonancias adicionales. Por otro lado, se observa que para AR=2.25, la resonancia se encuentra en $\lambda = 556$ nm (2.23 eV), mientras que para AR=1.5, el caso calculado más cercano al de una esfera, la resonancia se encuentra en $\lambda = 522$ nm (2.33 eV), es decir, la AR reproduce el caso de una esfera en su respuestapectral cuando tiende a la unidad, resultado que sigue las tendencias observadas en las AlNPs y AgNPs.

En los casos anteriores se analizó el aluminio, modelando la respuesta óptica por el modelo de Drude, así como se analizaron metales nobles como la plata y el oro. Ahora, con el objetivo de aproximarse a las propiedades ópticas de los eritrocitos, en la Fig. 10 se presentan las secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y la longitud de onda (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblatas de bismuto (BiNPs). Este material, al ser un semimetal, exhibe en ciertas regiones espectrales un comportamiento más similar al de los eritrocitos que los materiales previamente estudiados. En la Fig. 10a) se consideraron partículas con AR= 2 y en la Fig. 10b) se consideraron partículas con razón de aspecto variable desde 1.5 hasta 2.25, con incrementos de 0.25. Como complemento, en la Fig. 10c) se muestra la función dieléctrica del bismuto obtenida de datos experimentales reportados por Hagemann et al. [19].

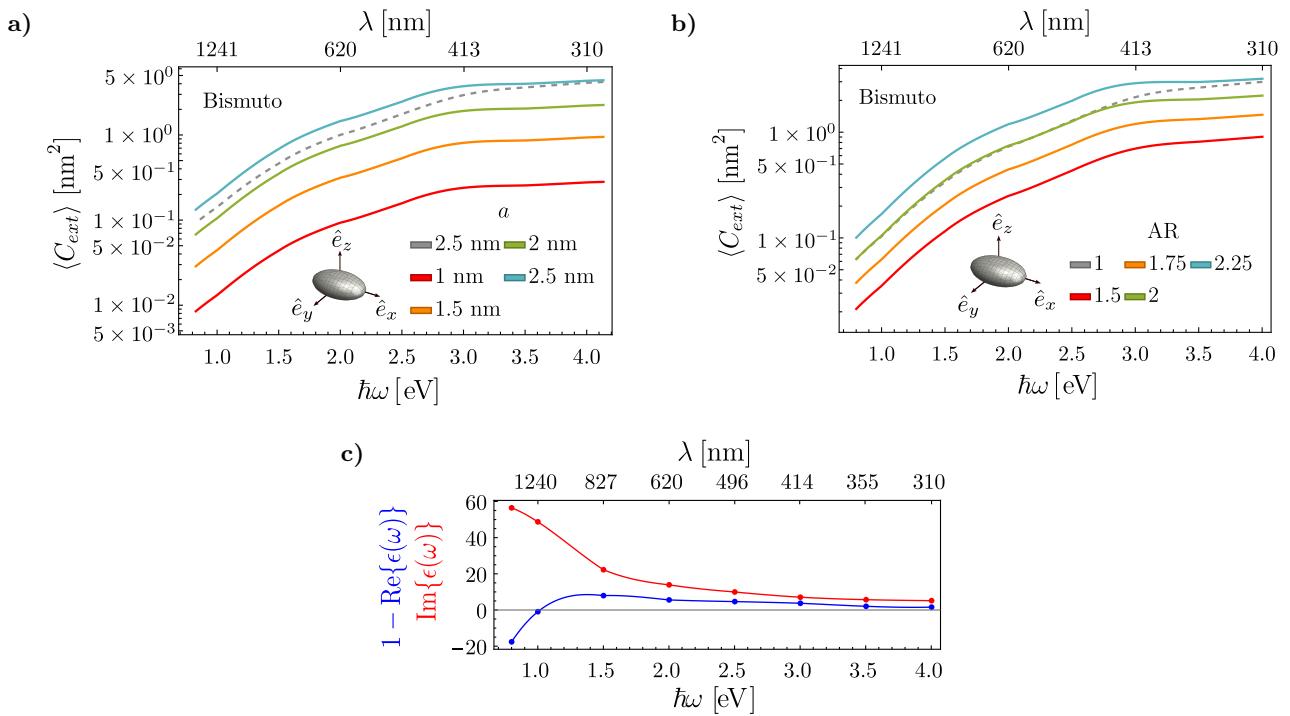


Fig. 10: Secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de bismuto inmersa en un medio acústico con $\epsilon_m = 1.77$, y cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales de la Ref. [19]. **a)** BiNPs con AR=2, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde AR=1. **b)** BiNPs con semieje menor $c = 1$ nm y AR entre 1.5 y 2.25, con incrementos de 0.25. **c)** Función dieléctrica del bismuto obtenida a partir de la Ref. [19] (parte real en azul, parte imaginaria en rojo). La línea continua que une los puntos experimentales fue obtenida mediante una interpolación.

En la Figs. 10a) y 10b) no es posible distinguir las frecuencias de resonancia correspondientes al elipsoide y a la esfera. Sin embargo, se observa que en el caso del bismuto (que es un semimetal), las excitaciones están menos definidas que en el caso de los materiales plasmónicos. Esto es más evidente al comparar la anchura a media altura (FWHM por sus siglas en inglés) pues, en el caso del aluminio $\text{FWHM} = 8.85$ nm (0.18 eV), mientras que en el caso del bismuto se estima que es mayor que la longitud del rango del espectro estudiado, que es igual a 1,200 nm (3.31 eV). La diferencia de los valores del FWHM se explica debido a la fuerte absorción del bismuto en el rango de frecuencias estudiado.

Óxido de magnesio (MgO)

En la Fig. 11 se muestra $\langle C_{ext} \rangle$ en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblatas de un material dieléctrico: el óxido de magnesio (MgONPs). Se emplearon los datos experimentales reportados por Stephens y Malitson [20]. De la misma forma que con los materiales anteriores, en la Fig. 11a) se consideraron partículas con $AR=2$ y con semiejes de tamaño desde 1 nm a 2.5 nm, con incrementos de 0.5 nm, con su respectivo código de color indicado en la gráfica y en la Fig. 11b) se consideraron partículas con AR variable con valores desde 1.5 hasta 2.25, con incrementos de 0.25. Como complemento, en la Fig. 11c) se muestra la función dieléctrica del óxido de magnesio donde los puntos representan datos experimentales obtenidos a partir de la Ref. [20] y las líneas continuas corresponden a la interpolación empleada para dicho conjunto de datos.

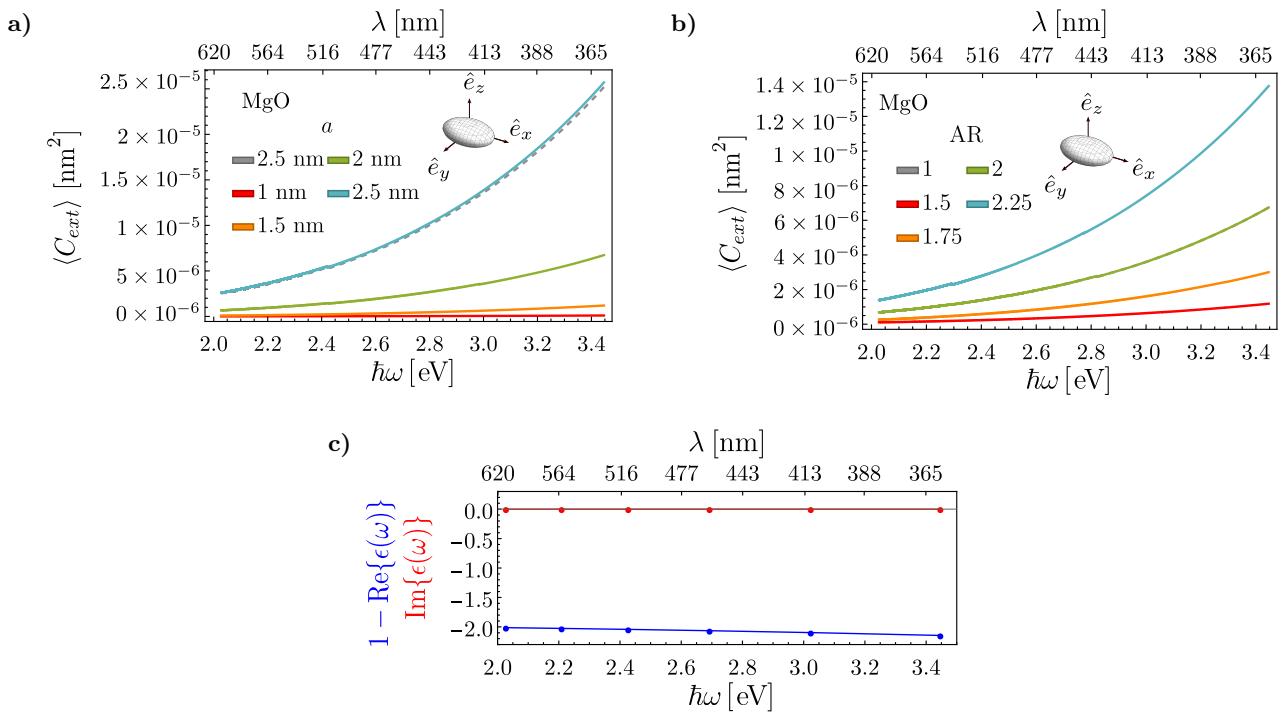


Fig. 11: Secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de óxido de magnesio inmersa en un medio acuoso ($\epsilon_m = 1.77$). **a)** MgONPs con $AR=2$, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde $AR=1$. **b)** MgONPs con semieje menor $c = 1$ nm y AR entre 1.5 y 2.25, con incrementos de 0.25. **c)** Función dieléctrica del óxido de magnesio obtenida a partir de la Ref. [20] (parte real en azul, parte imaginaria en rojo). La línea continua que une los puntos experimentales fue obtenida mediante una interpolación.

En las Figs. 11a) y 11b) se observa que $\langle C_{ext} \rangle$ tiene un comportamiento creciente y no se observan resonancias plasmónicas debido a la naturaleza dieléctrica del óxido de magnesio.

III. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la solución analítica del problema de esparcimiento de luz por partículas elipsoidales arbitrarias en la aproximación cuasiestática, analizando las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento. Además, se estudió el comportamiento del esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen dentro de este mismo régimen, comparando los resultados con la

respuesta de esferas calculadas también en el límite cuasiestático.

Se encontró que, en el régimen cuasiestático, la absorción es la contribución predominante en la extinción para nanopartículas elipsoidales oblatas, debido a que el esparcimiento resulta despreciable. En el rango en el que el modelo de Drude se adapta al comportamiento de los materiales, se identificaron dos resonancias plasmónicas: una longitudinal, desplazada hacia el rojo, y otra transversal, desplazada hacia el azul, en comparación con la frecuencia de resonancia de una nanopartícula esférica. Para materiales más realistas, se determinó que es necesario incluir contribuciones adicionales a las plasmónicas, como las descritas por el modelo de Lorentz.

REFERENCIAS

- [1] A. Antunes, J. H. Pontes, A. F. Monte, A. Barbosa y N. M. Ferreira. Optical properties on bone analysis: an approach to biomaterials. *Proceedings*, **27**(1):36, 2019. DOI: [10.3390/proceedings2019027036](https://doi.org/10.3390/proceedings2019027036) (véase página 1).
- [2] J. Yoon, Y. Jo, M.-h. Kim, K. Kim, S. Lee, S.-J. Kang e Y. Park. Identification of non-activated lymphocytes using three-dimensional refractive index tomography and machine learning. *Scientific Reports*, **7**(1):6654, 2017 (véase página 1).
- [3] N. Bosschaart, G. J. Edelman, M. C. G. Aalders, T. G. Van Leeuwen y D. J. Faber. A literature review and novel theoretical approach on the optical properties of whole blood. *Lasers in Medical Science*, **29**(2):453-479, 2014. DOI: [10.1007/s10103-013-1446-7](https://doi.org/10.1007/s10103-013-1446-7) (véanse páginas 1, 16, 17).
- [4] E. Eremina, J. Hellmers, Y. Eremin y T. Wriedt. Different shape models for erythrocyte: Light scattering analysis based on the discrete sources method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **102**(1), 2006 (véase página 1).
- [5] A. G. Borovoi, E. I. Naats y U. G. Oppel. Scattering of light by a red blood cell. *Journal of biomedical optics*, **3**(3), 1998 (véase página 1).
- [6] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. 2008 (véanse páginas 1, 2, 5-7, 12, 16, 17).
- [7] J. Larsson. Electromagnetics from a quasistatic perspective. *American Journal of Physics*, **75**(3), 2007 (véanse páginas 1, 2).
- [8] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023 (véanse páginas 2, 3, 5, 11).
- [9] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 2021 (véanse páginas 3, 4).
- [10] E. W. Weisstein. Confocal Ellipsoidal Coordinates (véase página 7).
- [11] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. 2011 (véanse páginas 7-10).
- [12] G. Dassios. *Ellipsoidal Harmonics: Theory and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, 2012. DOI: [10.1017/CBO9781139017749](https://doi.org/10.1017/CBO9781139017749) (véase página 8).
- [13] O. D. Kellogg. *Foundations of potential theory*. 2012 (véase página 10).
- [14] M. Braun. *Differential Equations and Their Applications*. New York, NY, 1978. DOI: [10.1007/978-1-4684-0053-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0053-3) (véase página 10).

- [15] M. Abramowitz e I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. 1948 (véase página 13).
- [16] S. A. Maier. Plasmonics: Fundamentals and Applications, 2007 (véanse páginas 17, 20).
- [17] M. I. Marković y A. D. Rakić. Determination of optical properties of aluminium including electron reradiation in the Lorentz-Drude model. *Optics & Laser Technology*, **22**(6), 1990. DOI: [10.1016/0030-3992\(90\)90093-J](https://doi.org/10.1016/0030-3992(90)90093-J) (véanse páginas 17-20).
- [18] P. B. Johnson y R. W. Christy. Optical Constants of the Noble Metals. *Physical Review B*, **6**(12):4370-4379, 1972. DOI: [10.1103/PhysRevB.6.4370](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370) (véanse páginas 18-21).
- [19] H.-J. Hagemann, W. Gudat y C. Kunz. Optical constants from the far infrared to the x-ray region: Mg, Al, Cu, Ag, Au, Bi, C, and Al₂O₃. *JOSA*, **65**(6), 1975 (véanse páginas 18, 22).
- [20] R. E. Stephens e I. H. Malitson. Index of refraction of magnesium oxide. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49**(4), 1952 (véanse páginas 18, 23).