

# Cálculo de las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento de elipsoides en la aproximación cuasiestática como primera aproximación de eritrocitos

DANA LARISSA LUNA GONZÁLEZ

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades ópticas de las células biológicas como los osteoblastos [1], los linfocitos [2], y los eritrocitos [3], es de importancia para el área médica. A partir de las propiedades ópticas de las células, se obtiene información de su composición y estado morfológico, lo cual tiene potenciales aplicaciones en el diagnóstico y la detección temprana de diversas enfermedades, incluidos cánceres e infecciones virales [2]. En particular, el estudio de los eritrocitos tiene un papel importante en el diagnóstico de la anemia en sus diferentes tipos y el diseño de nuevas terapias ópticas, como el tratamiento de las venas varicosas [3].

Los eritrocitos sanos presentan forma de discoídes cóncavos con longitudes de entre 4 a 9 mm de diámetro. Estos no poseen núcleo, por lo que pueden modelarse como un objeto homogéneo [4]. Debido a su forma, para simplificar el proceso de modelado, se han empleado diferentes opciones como los óvalos de Cassini [4] o funciones en términos de coordenadas esféricas [5]. Sin embargo, un modelo simple a estudiar como una primera aproximación es un elipsoide. El objetivo este trabajo es el de analizar la convergencia y propiedades físicas de la respuesta óptica de elipsoides de diferentes materiales (oro, plata, aluminio, bismuto y óxido de magnesio) y tamaños dentro de la nanoscalas, por medio de las secciones transversales de esparcimiento, absorción y extinción, bajo la aproximación cuasi-estática para, posteriormente, orientarlo a eritrocitos. En la [Sección 1](#) de este trabajo, se resuelve de forma analítica el problema de esparcimiento de luz por una partícula elipsoidal arbitraria en la aproximación cuasi-estática, donde se presentan, además, las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento. En la sección de [Resultados](#), se estudia el esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen en la aproximación cuasi-estática para partículas elipsoidales oblatas de materiales tanto plasmónicos como dieléctricos. Finalmente, en la sección de [Conclusiones](#), se presenta un resumen de lo estudiado en este trabajo, así como los principales resultados obtenidos. Además, se discuten las posibles mejoras a explorar para continuar este trabajo, incluyendo la implementación de otros modelos.

## I. Aproximación cuasiestática en el problema de esparcimiento de luz por partículas elipsoidales

En el caso de un elipsoide de semieje mayor  $a$  caracterizado por una función dieléctrica  $\epsilon_p$ , inmerso en un medio con una función dieléctrica  $\epsilon_m$ , e iluminado por una onda plana electromagnética con vector de onda  $\vec{k}$ , se puede definir el límite cuasiestático cuando el parámetro de tamaño  $x = ka$  es mucho menor que la unidad [6]. Esta contricción garantiza que toda la geometría del elipsoide esté sujeta a un campo eléctrico de la misma intensidad y dirección [7]. En esta sección se presenta el caso de una esfera, como caso particular de un elipsoide, en el límite cuasiestático para estudiarlo como un dipolo eléctrico puntual, lo que permite introducir el concepto de polarizabilidad, y más adelante, se

desarrolla el dipolo eléctrico para esparcidores arbitrarios en donde se analizan las regiones de campo cercano, la intermedia y la de radiación.

### I.1. Dipolo eléctrico (caso estático)

En electrodinámica clásica, se entiende como *límite cuasiestático* el considerar una partícula de tamaño mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente [7]. Para el caso de una partícula esférica, se puede emplear la aproximación cuasiestática al resolver la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico  $\phi$ . Si se considera una esfera con permitividad eléctrica  $\epsilon_p$ , embebida en un medio caracterizado por su función dieléctrica  $\epsilon_m$  en el cual existe un campo eléctrico externo  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$  [Fig. 1a)], al resolver la ecuación de Laplace considerando las condiciones de frontera entre la esfera y el medio, se obtiene que el potencial eléctrico fuera de la esfera es la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual  $\phi_p$  localizado en el origen [8]

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_m} \left( \frac{\vec{r} \cdot \hat{e}_z}{r^3} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_m r^2} \quad (1)$$

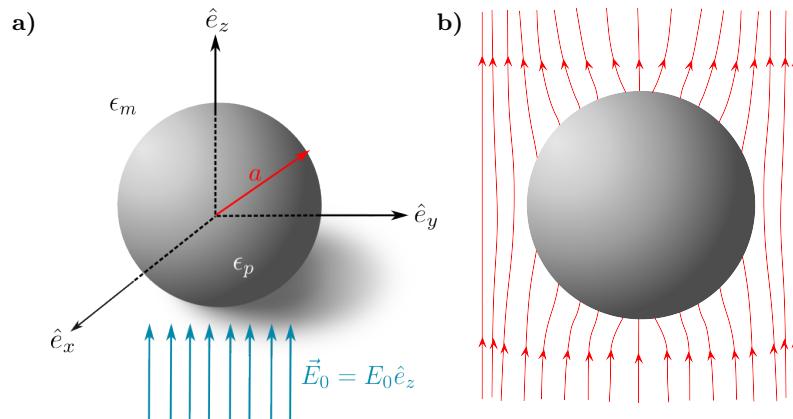
donde  $\vec{p}$  representa el momento dipolar eléctrico dado por [6]

$$\vec{p} = \epsilon_m \alpha \vec{E}_0 = 4\pi\epsilon_m a^3 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_1 + 2\epsilon_m} \right) \vec{E}_0, \quad \text{con } \alpha = 4\pi a^3 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_m}{\epsilon_1 + 2\epsilon_m} \right)$$

donde  $\alpha$  es la polarizabilidad eléctrica, que representa la facilidad con la que se polariza la esfera. Es decir, el campo eléctrico induce un dipolo eléctrico puntual en la esfera, cuyo campo eléctrico asociado fuera de la esfera es

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\nabla \phi_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_m r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta).$$

En consecuencia, el campo eléctrico fuera de la esfera está dado por la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por el dipolo eléctrico [Fig. 1b)].



**Fig. 1:** Problema de una esfera inmersa en un campo eléctrico homogéneo. **a)** Esfera de radio  $a$  caracterizada por su función dieléctrica  $\epsilon_p$  y embebida en un medio caracterizado por su función dieléctrica  $\epsilon_m$  en la cual incide un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}_0$ . **b)** Campo eléctrico fuera de la esfera generado por la superposición del campo eléctrico aplicado y del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico puntual localizado en el origen con momento dipolar  $\vec{p} = \epsilon_m \alpha \vec{E}_0$ .

### I.2. Dipolo eléctrico (caso dinámico)

En la sección anterior se abordó una solución que asume que el campo eléctrico externo, por tanto el dipolo inducido, son estáticos. Para resolver el caso dinámico en el régimen cuasiestático, se considera

que, al iluminar cargas confinadas en un volumen finito con una onda plana electromagnética, estas experimentan movimiento. Esto equivale a realizar un análisis en términos de componentes de Fourier de los potenciales y campos generados por un sistema de cargas y corrientes localizadas en el espacio vacío, con una dependencia armónica  $e^{-i\omega t}$ , tal que varían en el tiempo y oscilan a la frecuencia  $\omega$  del campo electromagnético aplicado. De esta forma, la densidad de carga volumétrica  $\rho(\vec{r}, t)$  y la densidad de corriente volumétrica  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  en la posición  $\vec{r}$  se expresan como [9]

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (2)$$

considerando que el significado físico lo posee la parte real. Mediante lo anterior, es posible determinar los campos electromagnéticos generados por las cargas y corrientes mediante el potencial vectorial como [9]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-i\omega t_r}, \quad (3)$$

en donde se emplea la norma de Lorentz [8] y la densidad de corriente se evalúa en el tiempo de retardo  $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ .

El comportamiento de los campos electromagnéticos se puede estudiar al delimitar diferentes regiones considerando valores extremos de  $k = \omega/c$ . Empleando la definición anterior y obviando la dependencia temporal, la Ec. (3) se reescribe como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (4)$$

En la región de campo cercano, donde  $r \ll \lambda$  (o  $kr \ll 1$ ), tal que  $\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|) \rightarrow 1$ , se tiene [9]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r',$$

mientras que en la región de campo lejano ( $kr \gg 1$ ) dado que la exponencial oscila rápidamente, es suficiente aproximar

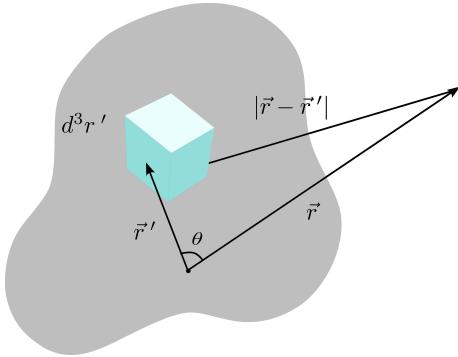
$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}', \quad (5)$$

que se obtiene al aplicar la ley de cosenos<sup>1</sup> en el triángulo mostrado en la Fig. 2, donde  $\hat{e}_r$  un vector unitario en la dirección de  $\vec{r}$ . Si sólo se consideran los términos que decaen como  $r^{-1}$ , el inverso de la distancia en la Ec. (4) puede ser reemplazado por  $r$ . Entonces, el potencial vectorial es

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3 r',$$

que se puede reescribir al realizar la expansión en serie de potencias de la exponencial dentro de la integral de volumen, dando como resultado

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{r}') (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')^n d^3 r'.$$



**Fig. 2:** Vector de posición  $\vec{r}$  del volumen y  $\vec{r}'$ . Se muestra la distancia  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  entre estos últimos.

Al considerar únicamente el primer término de la expansión, se concluye que

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3 r', \quad (6)$$

que al realizar una integración por partes,<sup>2</sup> se obtiene que

$$\int \vec{J} d^3 r' = - \int \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3 r' = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r', \quad (7)$$

donde se empleó la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega \rho(\vec{r}).$$

Al sustituir la Ec. (7) en la Ec. (6) y considerando que el momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  de una distribución de cargas  $\rho$  es

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r',$$

se obtiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}. \quad (8)$$

Al calcular el campo  $\vec{H}$  como función del potencial vectorial, y empleando la ley de Faraday-Lenz para determinar el campo eléctrico, se sigue que [9]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \quad (9)$$

$$\vec{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (10)$$

A partir de las Ecs. (9) y (10) se puede observar que el campo  $\vec{H}$  es transversal al vector radial en el campo lejano, mientras el campo eléctrico tiene componentes paralelas y perpendiculares a  $\hat{e}_r$ .

<sup>1</sup>Empleando la ley de cosenos y haciendo una expansión binomial  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta} = r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2((r'/r) \cos \theta)} \simeq r \left\{ 1 - (\hat{e}_r \cdot \vec{r}'/r) + 1/2(r'/r)^2 \right\} \simeq r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$ .

<sup>2</sup>Al considerar  $\int_V \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{J}) d^3 r' = \int_{\partial V} \vec{r}' (\vec{J} \cdot d\vec{S}) - \int_V \vec{J} d^3 r'$  y asumiendo que  $\vec{J}$  se desvanece en los límites del volumen  $V$ , es decir, en la superficie  $\partial V$ .

De forma análoga al desarrollo de la Ec. (8) y empleando la Ley de Faraday-Lenz, en la zona de radiación cuando  $kr \gg 1$ , se tiene que al excitar a las fuentes en el sistema con una onda electromagnética de frecuencia angular  $\omega$ , se induce un dipolo eléctrico  $\vec{p}$  que genera campos electromagnéticos  $\vec{E}_p$  y  $\vec{H}_p$  y que oscilan a la misma frecuencia  $\omega$

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\epsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}) e^{i\omega t}, \quad \vec{H}_p = \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}. \quad (11)$$

En el caso particular en que la onda electromagnética incidente esté polarizada en la dirección  $\hat{e}_x$ , el momento dipolar inducido es  $\vec{p} = \epsilon_m \alpha E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$ . Al reescribir al vector en la dirección  $\hat{e}_x$  en términos de la base de vectores esféricos como [8]

$$\hat{e}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi, \quad (12)$$

se pueden reescribir a los campos generados por el dipolo inducido mediante el vector de amplitud de esparcimiento

$$\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x)) = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta + \sin \phi \hat{e}_\phi), \quad (13)$$

como

$$\vec{E}_p = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E_0 e^{ikz}, \quad \vec{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_p. \quad (14)$$

## II. Secciones transversales

En las secciones anteriores se consideró al sistema integrado por una partícula y por una distribución de cargas localizadas en un volumen finito, sometidas a un campo eléctrico homogéneo y a uno armónico, respectivamente. En esta sección, se introducen las denominadas secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, las cuales son cantidades macroscópicas medibles que proporcionan información sobre el sistema [6]. Para esto, se considera a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana armónica en el tiempo. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía  $W_{abs}$ , transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula, se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting <sup>3</sup>  $\langle \vec{S} \rangle_t$  sobre una superficie cerrada  $A$ , que por simplicidad puede considerarse una esfera de radio  $r$  mayor al de la partícula (Fig. 3), es decir,

$$W_{abs} = - \int_A \langle \vec{S} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA,$$

donde debido a que  $\langle \vec{S} \rangle_t$  y  $\hat{e}_r$  están orientados en la misma dirección, el signo negativo convierte a  $W_{abs}$  en una cantidad positiva, de lo contrario, significaría que se genera energía dentro de la esfera [6].

En este trabajo, el vector de Poynting total se descompone en tres términos [6]

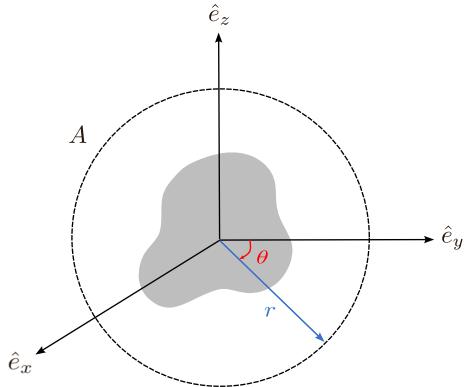
$$\langle \vec{S}^i \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* \}, \quad \langle \vec{S}^s \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E}_s \times \vec{H}_s^* \}, \quad \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^* \}, \quad (15)$$

asociados al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente. De esta forma, se tiene que  $W_{abs} = W_i - W_s + W_{ext}$ , donde [6]

$$W_i = - \int_A \langle \vec{S}^i \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad W_s = \int_A \langle \vec{S}^s \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad W_{ext} = - \int_A \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (16)$$

---

<sup>3</sup>El promedio temporal del vector de Poynting es  $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} \vec{S}(t') dt'$ , y para campos electromagnéticos del tipo ondas planas es  $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/2) \operatorname{Re} [\vec{E} \times (\vec{B}/\mu)^*]$ , donde \* corresponde a la operación complejo conjugado [6].



**Fig. 3:** Esquema de la esfera imaginaria de radio  $r$  y superficie  $A$  centrada en el origen y en la partícula de interés.

cuyos signos están colocados de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de  $\hat{e}_r$ . En particular, para un medio no absorbente, la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, por lo que  $W_i$  se anula, entonces

$$W_{ext} = W_{abs} + W_s. \quad (17)$$

Al considerar el campo incidente  $\vec{E}_i = E\hat{e}_x$  y a  $\vec{H}_i = (1/\mu\omega)\vec{k} \times E\hat{e}_x$  en un medio no absorbente,  $W_a$  es independiente del radio  $r$  de la superficie de integración, por lo que se puede considerar a  $r$  lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como las Ecs. (14), por lo cual,  $W_{ext}$  está dado por [6]

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\},$$

donde  $I_i$  es la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting, y por consiguiente,<sup>4</sup>

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\}, \quad (18)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec. (18) puede ser reescrita como [6]

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} \quad (19)$$

donde  $C_{abs} = W_{abs}/I_i$  y  $C_{sca} = W_s/I_i$  corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (14) en la Ec. (16) se obtiene

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (20)$$

Estas secciones transversales son propiedades macroscópicas y medibles, que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula.

Al reescribir el vector de amplitud de esparcimiento [Ec. (13)] en términos de la base vectorial esférica se obtiene [6]

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1),$$

<sup>4</sup>Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones. [6].

y sustituyéndolo en la Ec. (18), la sección transversal de extinción es

$$C_{ext} = k \operatorname{Re} \left[ \left( i\alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \right)_{\theta=0} \right] = k \operatorname{Re} [-i\alpha] = k \operatorname{Im}[\alpha].$$

Si el esparcimiento es despreciable con respecto a la absorción, la extinción corresponde a la absorción en mayor medida, tal que [6]

$$C_{abs} = k \operatorname{Im}[\alpha]. \quad (21)$$

Además, al sustituir la Ec. (13) en la Ec. (20), se obtiene [6]

$$C_{sca} = \frac{|\alpha|^2 k^2}{6\pi}. \quad (22)$$

### III. Elipsoide en la aproximación cuasiestática

Las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento para distribuciones arbitrarias de cargas y corrientes confinadas a distancias cortas respecto al punto de observación fueron estudiadas en la sección anterior. En esta sección se estudia el caso particular del esparcimiento de luz por cargas y corrientes iluminadas por una onda plana electromagnética y confinadas en un elipsoide centrado en el origen, con semiejes  $a, b, c$  alineados con los ejes  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  respectivamente, y dimensiones tales que  $\lambda \gg a > b > c$ , a distancias alejadas del origen [ver Fig. 4a)], donde  $\lambda$  es la longitud de onda que se relaciona con el vector de onda como  $k = 2\pi\sqrt{\epsilon_m/\lambda}$ . A diferencia de la sección anterior, no se cuenta con simetría esférica, sin embargo es posible calcular una solución analítica, aproximada, al emplear las coordenadas elipsoidales confocales.<sup>5</sup> Estas describen la superficie del elipsoide como [10]

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1, \quad (23)$$

donde debe determinarse el valor del parámetro  $u$ . La Ec. (23) es una ecuación de tercer grado para  $u$ , por lo que las soluciones (reales) son un conjunto de tres valores  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  tales que<sup>6</sup>

$$-\infty < \xi < c^2 < \eta < b^2 < \zeta < a^2 \quad (24)$$

que corresponden a tres formas cuádricas con focos en común [ver Fig. 4b)]. Estas se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante el siguiente sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2+\xi} & \frac{1}{b^2+\xi} & \frac{1}{c^2+\xi} \\ \frac{1}{a^2+\eta} & \frac{1}{b^2+\eta} & \frac{1}{c^2+\eta} \\ \frac{1}{a^2+\zeta} & \frac{1}{b^2+\zeta} & \frac{1}{c^2+\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución está dada por las expresiones

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad (25)$$

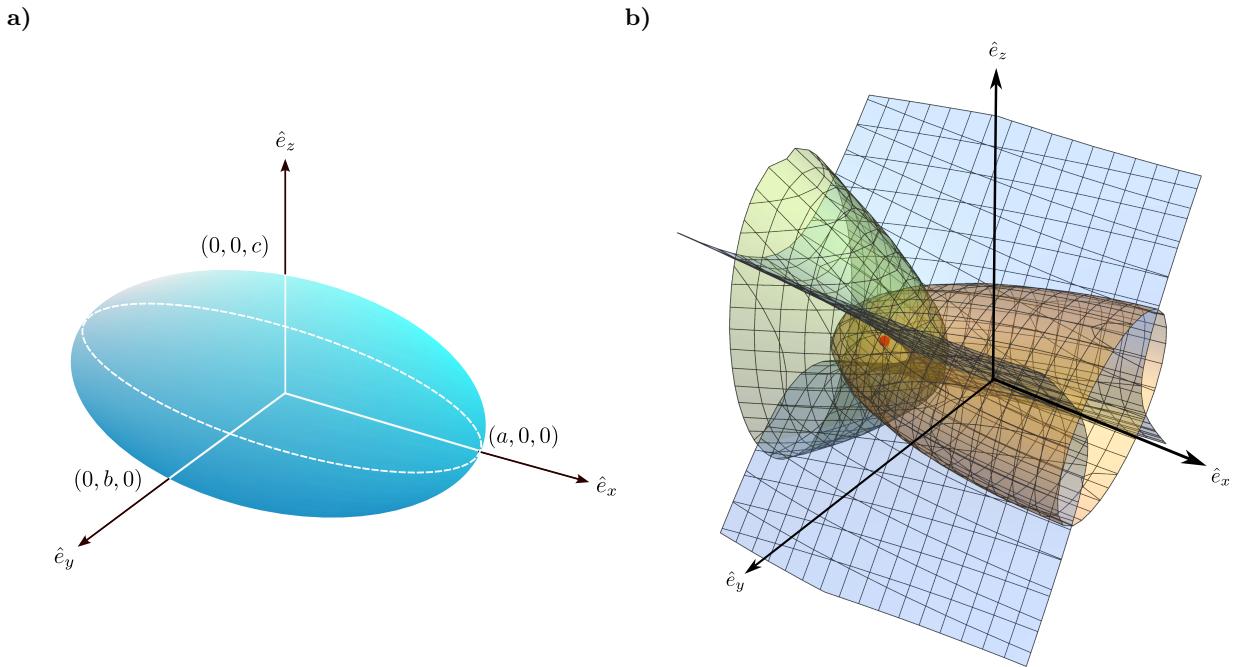
$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}, \quad (26)$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \quad (27)$$

<sup>5</sup>Existen diversas definiciones que pueden revisarse en [10], sin embargo, se emplea la proporcionada en [11].

<sup>6</sup>La función  $f(u) = x^2/(a^2 - u) + y^2/(b^2 - u) + z^2/(c^2 - u) - 1$  resulta ser continuamente diferenciable en el dominio  $(-\infty, c^2) \cap (c^2, b^2) \cap (b^2, a^2)$  y estrictamente creciente en cada intervalo que lo compone, de tal forma que, al calcular los límites en cada extremo de los intervalos, se concluye que existe exactamente una raíz en cada intervalo.

A partir del sistema de ecuaciones anterior, se puede observar que cuando  $\xi$  es constante, se obtiene un elipsoide. De esta forma, la superficie de la partícula a estudiar se tiene cuando  $\xi = 0$ . Mientras que si  $\eta$  es constante, se obtiene un hiperboloide de una hoja y cuando  $\zeta$  es constante se tiene un hiperboloide de dos hojas. Cada punto  $(x, y, z)$  tiene una correspondencia única con  $(\xi, \eta, \zeta)$ , pero la transformación inversa no es biyectiva, ya que cada  $(\xi, \eta, \zeta)$  se asocia a ocho puntos simétricos respecto a los ejes  $(x, y, z)$ . [12]



**Fig. 4:** Sistema a estudiar. **a)** Elipsoide centrado en el origen, con semiejes  $a, b, c$  tales que  $a > b > c$ . **b)** Superficies confocales. Hiperboloide de una hoja (superficie azul) con  $u = 0.8$ , hiperboloide de dos hojas (superficie verde) con  $u = 0.5$  y elipsoide (superficie naranja) con  $u = 0.1$ . Todas las superficies poseen semiejes con valores  $a = 1, b = 0.8$  y  $c = 0.6$ . El punto rojo representa uno de los focos en común localizado en  $(-0.8, 0, 0)$ .

En el problema de esparcimiento de luz sin retardo (o límite cuasiestático) se resuelve la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico. En un sistema coordenado general, esta ecuación se escribe en términos de coordenadas generalizadas [11]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right], \quad (28)$$

donde  $\phi$  es una función escalar, y  $h_i$  con  $i = 1, 2, 3$  los factores de escala que, para coordenadas elipsoidales se asocian como  $1 \rightarrow \xi, 2 \rightarrow \eta$  y  $3 \rightarrow \zeta$ , y se determinan al hacer un cambio de base de coordenadas cartesianas a elipsoidales. Estos factores de escala están dados por [11]

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (29)$$

Que para coordenadas elipsoidales, considerando la variación en la dirección  $x$ , empleando la Ec. (25),

se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + \xi} \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{2x} \frac{\partial x^2}{\partial \xi},\end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{x}{(a^2 + \xi)}.$$

Empleando las Ecs. (26) y (27) para  $y$  y  $z$ , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2y} \frac{\partial y^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{y}{(b^2 + \xi)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2z} \frac{\partial z^2}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{z}{(c^2 + \xi)}.\end{aligned}$$

De esta forma, el cuadrado del primer factor de escala  $h_1$  es

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z}{(c^2 + \xi)^2} \right]; \quad (30)$$

y por economía, se define a la función  $g(u) = (u - \xi)(u - \eta)(u - \zeta)$ , que permite reescribir la Ec. (23) como

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} = \frac{g(u)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (31)$$

donde  $g(u)$  es una función cúbica con tres raíces reales dentro del rango descrito por las limitaciones de cada variable, y al derivarla con respecto de  $u$  se obtiene

$$\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} = \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[ \frac{1}{u - \xi} + \frac{1}{u - \zeta} + \frac{1}{u - \eta} - \left( \frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right], \quad (32)$$

con

$$f(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad (33)$$

por medio del cual se puede reescribir al primer factor de escala de la Ec. (34) como

$$h_1^2 = \frac{1}{4} \frac{g(u)}{[f(u)]^2} \left[ \frac{(u - \zeta)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \eta) + (u - \xi)(u - \zeta)}{g(u)} - \left( \frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u} \right) \right].$$

Dado que  $\xi$  es una raíz de  $g(u)$ , entonces,  $g(u) = 0$ , por lo que el factor de escala  $h_1$  es

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2f(\xi)}. \quad (34)$$

Mediante un proceso semejante, se tiene que [11]

$$h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2f(\eta)} \quad \text{y} \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2f(\zeta)}. \quad (35)$$

Sustituyendo las Ecs. (34) y (35) en la Ec. (28) y simplificando,

$$\nabla^2 \phi = \frac{4}{\Upsilon} \left[ (\eta - \zeta) f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \zeta) f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right],$$

donde a  $\Upsilon$  se le conoce como el valor absoluto del determinante funcional [13]

$$\Upsilon = (\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta). \quad (36)$$

Como resultado de lo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales se reescribe como

$$\nabla^2 \phi = (\eta - \zeta) f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) f(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( f(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) + (\xi - \zeta) f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( f(\zeta) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (37)$$

Una de las formas por la cual se puede resolver la ecuación anterior es mediante el método de reducción de orden, el cual proporciona una solución linealmente independiente a partir de otra conocida con anterioridad [14]. En este contexto,  $\phi$  corresponde a la solución de dicha ecuación que está determinada por la forma del campo incidente y cumple las condiciones de frontera.

El potencial eléctrico solución a la Ec. (37) hereda la simetría del sistema de interés, el cual consiste en un elipsoide homogéneo iluminado por un campo eléctrico incidente uniforme alineado a lo largo del eje  $\hat{e}_z$ . Por tanto, a cada punto del espacio descrito por las coordenadas elipsoidales le corresponden ocho puntos en las coordenadas cartesianas. Es decir, las propiedades de simetría del sistema en el potencial eléctrico son:

$$\phi(x, y, z) = \phi(-x, y, z) = \phi(x, -y, z) = \phi(-x, -y, z), \quad (38)$$

$$\phi(x, y, -z) = \phi(-x, y, -z) = \phi(x, -y, -z) = \phi(-x, -y, -z), \quad (39)$$

donde  $z$  es positiva. Entonces, solo se tiene que considerar el potencial en dos octantes: uno con  $z$  positivo y otro con  $z$  negativo.

Dado que se quiere determinar el potencial eléctrico producido de la interacción entre el campo eléctrico externo y la distribución de cargas y corrientes confinadas en un elipsoide, se propone dividir el problema en dos regiones espaciales: al exterior y al interior del elipsoide, de modo que el potencial total se puede expresar como la contribución del potencial en el exterior del elipsoide  $\phi_{ext}$  y la contribución en el interior de este  $\phi_{int}$ . Asimismo, se propone descomponer al potencial  $\phi_{ext}$  en una contribución de la onda plana incidente  $\phi_0$  y en otra de perturbación  $\phi_p$ , la cual correspondería al campo eléctrico esparcido por la partícula

$$\phi_{ext}(\xi, \eta, \zeta) = \phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \phi_p(\xi, \eta, \zeta), \quad (40)$$

donde, de acuerdo con la expresión para  $z$  en la Ec. (27),

$$\phi_0 = -E_0 r \cos \theta = -E_0 z = -E_0 \left[ \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}. \quad (41)$$

Al considerar las condiciones de frontera en el sistema en dos límites: a distancias muy lejanas del elipsoide y en la interfaz entre el medio y el elipsoide, debido al teorema de unicidad [8], el problema queda totalmente determinado. Para distancias lo suficientemente lejanas a la partícula, es decir, cuando  $\xi \gg a^2$ , al factorizar  $\xi$  de la Ec. (25), se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} = \xi,$$

donde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{a^2/\xi + 1} + \frac{y^2}{b^2/\xi + 1} + \frac{z^2}{c^2/\xi + 1} \right) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

entonces,  $\xi \simeq r^2$  en el límite asintótico. Asimismo, en esta aproximación el potencial de perturbación es despreciable, por lo que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi_p = 0. \quad (42)$$

Al considerar  $\phi_{int}$  y  $\epsilon_p$  el potencial y la permitividad eléctrica en el interior del elipsoide y las mismas cantidades  $\phi_{ext}$  y  $\epsilon_m$  para el exterior de este, como el potencial es continuo en la superficie del elipsoide y la componente perpendicular a la superficie del elipsoide del campo de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  por ausencia de cargas externas también [8]

$$\phi_{int}|_{\xi=0} = \phi_{ext}|_{\xi=0}, \quad (43a)$$

$$\epsilon_p \frac{\partial \phi_{int}}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \epsilon_m \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \xi}|_{\xi=0}, \quad (43b)$$

en donde se emplea la relación constitutiva  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  y que  $E_{int}^\perp = -\partial \phi_{int}/\partial \xi$ .

Reescribiendo los potenciales  $\phi_{int}$  y  $\phi_0$  de la forma

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = F(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (44)$$

se obtiene que, para que satisfagan la Ec. (37), se tiene que cumplir

$$(\eta - \zeta)[(c^2 + \zeta)(c^2 + \eta)]^{1/2} \left[ f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \frac{1}{4} F(\xi)(a^2 + b^2 + 2\xi) \right] = 0, \quad (45)$$

lo cual es equivalente a resolver

$$f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left( f(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) - \left( \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) F(\xi) = 0. \quad (46)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, con dos soluciones no triviales linealmente independientes. Una de estas soluciones es

$$F_1(\xi) = (c^2 + \xi)^{1/2}, \quad (47)$$

y la segunda solución se obtiene mediante el método de reducción de orden. Como  $F_1(\xi)$  es solución de la Ec. (37), se propone una segunda solución dada por  $F_2(\xi) = v(\xi)F_1(\xi)$  donde  $v(\xi)$  se determina al sustituir dicha solución en la ecuación diferencial dada, reduciéndola a una ecuación de primer orden donde la variable dependiente será  $v$ . Derivando la ecuación anterior respecto a  $\xi$

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(\xi)}{d\xi} &= F_1(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{F_1(\xi)}{d\xi}, \\ \frac{d^2F_2(\xi)}{d\xi^2} &= F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + 2 \frac{dv(\xi)}{d\xi} \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} + v(\xi) \frac{d^2F_1(\xi)}{d\xi^2}, \end{aligned}$$

y sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec. (47) y simplificando, se obtiene

$$f^2(\xi)F_1(\xi) \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dv(\xi)}{d\xi} \left[ f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right] = 0.$$

Haciendo el cambio de variable  $V(\xi) = dv(\xi)/d\xi$  y reordenando términos resulta en

$$\frac{1}{V(\xi)} \frac{dV(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{f^2(\xi)F_1(\xi)} \left[ f(\xi)F_1(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} + 2f^2(\xi) \frac{dF_1(\xi)}{d\xi} \right],$$

donde la integral indefinida de la ecuación anterior da como resultado

$$\ln[V(q)] = -\ln[F_1^2(q)f(q)],$$

entonces,

$$\frac{dv(q)}{dq} = \frac{1}{F_1^2(q)f(q)}.$$

Como  $dv(q)/dq$  es distinto de cero,  $v(q)$  es distinto de una constante. Integrando lo anterior se tiene que

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)},$$

por lo tanto,

$$F_2(\xi) = F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}. \quad (48)$$

Al escribir explícitamente el integrando, usando las Ecs. (47) y (48), y haciendo una integración por partes con  $u = 1/(a^2 + q)^{1/2}$  y  $dv = 1/[(c^2 + q)^{3/2}(b^2 + q)^{1/2}]$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)[(a^2 + q)(b^2 + q)(c^2 + q)]^{1/2}} \\ &= \frac{F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left[ \frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} \Big|_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + q}{c^2 + q}} \frac{dq}{(c^2 - b^2)(a^2 + q)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Reescribiendo la segunda integral

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2} dq}{\sqrt{a^2 - c^2} (c^2 - b^2) \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}} \sqrt{\frac{b^2+q}{c^2+q}} (a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}}, \quad (50)$$

y considerando que

$$\frac{d}{dq} \left( E \left( \arcsen \left( \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + q}} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right) = -\frac{\sqrt{\frac{b^2+q}{a^2+q}} \sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 + q)^{3/2} \sqrt{\frac{c^2+q}{a^2+q}}}$$

al sustituir en la Ec. (50) y haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, se obtiene que la segunda solución a la Ec. (46) es

$$F_2(\xi) = \frac{2F_1(\xi)}{c^2 - b^2} \left\{ \left[ \frac{b^2 + q}{(a^2 + q)(c^2 + q)} \right]^{1/2} - \frac{1}{(a^2 - c^2)^{1/2}} E \left( \arcsen \left( \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 + q} \right) \middle| \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right) \right\} \Big|_{\xi}^{\infty}, \quad (51)$$

donde  $E(\phi|m)$  es una integral elíptica de segundo tipo definida como [15]

$$E(x|\kappa) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 t^2}}{1 - t^2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (52)$$

donde el módulo angular es  $\beta = \arcsen \kappa$  y  $\kappa$  es la excentricidad. En el primer límite de integración ( $\infty$ ) de  $F_2(\xi)$  al evaluar se obtiene que el primer sumando es cero, y en el segundo límite la función arcoseno es cero. De esta forma, la parte angular de la integral es cero, es decir,  $E(0|m) = 0$ . En consecuencia, considerando la definición de  $F_1$  en la Ec. (47) se tiene que  $F_1$  y  $F_2$  cumplen

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} F_1(\xi) = c \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_2(\xi) = 0. \quad (53)$$

De esta forma, considerando que  $F_1$  no satisface la condición impuesta sobre  $\phi_p$  en la Ec. (42) y que necesariamente el potencial dentro de la partícula debe de ser finito, lo cual  $F_2$  no satisface, los potenciales  $\phi_{int}$  y  $\phi_p$ , propuestos como en la Ec. (44), están dados por

$$\phi_{int} = C_1 F_1(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (54)$$

$$\phi_p = C_2 F_2(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2}, \quad (55)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes a determinar a partir de las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (43). Empleando la primera condición de contorno [Ec. (43a)]

$$C_1 F_1(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} = E_0 \left[ \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + C_2 F_2(\xi)[(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2},$$

y al sustituir las Ecs. (47) y (48) en la ecuación anterior se obtiene

$$C_2 \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (56)$$

Al definir

$$L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)}, \quad (57)$$

entonces, se puede reescribir la Ec. (56) como

$$C_2 L^{(3)} \left( \frac{2}{abc} \right) - C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}, \quad (58)$$

y, al usar la segunda condición de contorno [Ec. (43b)], se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_p C_1}{2} \left[ \frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} &= \frac{\epsilon_m E_0}{2} \left[ \frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2} + \frac{\epsilon_m C_2}{2} \left[ \frac{(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 + \xi)} \right]^{1/2} \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \\ &\quad + \epsilon_m C_2 [(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)]^{1/2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral del tercer sumando es

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = \frac{d}{d\xi} \left[ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_\xi^a \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} \right] = - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)} = - \frac{1}{(c^2 + \xi)f(\xi)};$$

de tal forma que, al evaluar en  $\xi = 0$ , se obtiene

$$\epsilon_m C_2 \left( \frac{2}{abc} \right) (L^{(3)} - 1) - \epsilon_p C_1 = \frac{\epsilon_m E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}}. \quad (59)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen a partir de resolver el sistema de ecuaciones entre las Ecs. (58) y (59), al multiplicar la Ec. (58) por  $\epsilon_p$  y restarla la Ec. (59), al simplificar se obtiene que

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{E_0(\epsilon_p - \epsilon_m)}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left[ L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m) + \epsilon_m \right]^{-1},$$

por lo tanto, al sustituir  $C_2$  en la Ec. (58) se obtiene una expresión para  $C_1$

$$C_1 = \frac{E_0}{[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)]^{1/2}} \left\{ \left[ 1 + \frac{\epsilon_m}{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \right]^{-1} - 1 \right\}.$$

De esta forma, ya se puede determinar el potencial dentro de la partícula sustituyendo  $F_1$  y  $C_1$  en la Ec. (54), por lo que

$$\phi_{int} = \frac{1}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0, \quad (60)$$

$$\phi_p = \frac{abc}{2} \frac{\frac{(\epsilon_m - \epsilon_p)}{\epsilon_m} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)}}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}} \phi_0. \quad (61)$$

A pesar de que inicialmente se había considerado el octante donde  $x, y, z$  eran positivas, las ecuaciones anteriormente obtenidas representan el potencial en todos los puntos del espacio, como consecuencia de la simetría de la partícula.

Al considerar distancias  $r$  muy alejadas del origen tales que  $\xi \simeq r^2 \gg a^2$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{F_1^2(q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{(c^2 + q)f(q)} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dq}{q^{5/2}} = \frac{2}{3} \xi^{-3/2},$$

y entonces el potencial  $\phi_p$  está dado por

$$\phi_p \sim \left( \frac{E_0 \cos \theta}{r^2} \right) \frac{\left( \frac{abc}{3} \right) \left( \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m} \right)}{1 + \frac{L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}{\epsilon_m}}, \quad (r \gg a) \quad (62)$$

cuya expresión es equivalente a la de un dipolo puntual dado por

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_m abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \vec{E}_0. \quad (63)$$

Entonces, la polarizabilidad  $\alpha^{(3)}$  de un elipsoide en un campo paralelo al eje  $z$  es

$$\alpha^{(3)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(3)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad (64)$$

donde  $V = 4\pi abc/3$  es el volumen del elipsoide. De manera análoga, las polarizabilidades  $\alpha^{(1)}$  y  $\alpha^{(2)}$  cuando el campo es aplicado en los ejes  $\hat{e}_x$  y  $\hat{e}_y$  son

$$\alpha^{(1)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(1)}(\epsilon_p - \epsilon_m)}, \quad \alpha^{(2)} = 4\pi abc \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{3\epsilon_m + 3L^{(2)}(\epsilon_p - \epsilon_m)},$$

donde

$$L^{(1)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)f(q)}, \quad \text{y} \quad L^{(2)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(b^2 + q)f(q)}.$$

Se puede concluir en general que la polarizabilidad en una dirección arbitraria  $j$ , paralela a algún eje cartesiano es

$$\alpha^{(j)} = V \frac{\epsilon_p - \epsilon_m}{\epsilon_m + L^{(j)}(\epsilon_p - \epsilon_m)} \quad (65)$$

con  $L^{(j)}$  conocido como *factor geométrico*, dado por la integral

$$L^{(j)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a_j^2 + q)f(q)} \quad (66)$$

donde el superíndice  $(j)$  indica la dirección en la que se calcula el factor de geométrico y  $a_j$  denota al semieje del elipsoide orientado en esa misma dirección. Cabe mencionar que los factores geométricos satisfacen que, por definición,  $L^{(1)} \leq L^{(2)} \leq L^{(3)}$ , y que sólo dos de los tres son independientes, ya que tienen que cumplir la relación

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = 1, \quad (67)$$

pues,

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(a^2 + q)} + \frac{1}{(b^2 + q)} + \frac{1}{(c^2 + q)} \right] \frac{dq}{f(q)},$$

que al simplificar se obtiene

$$L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} = -abc \int_0^\infty \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{f(q)} \right) dq,$$

que puede resolverse de forma analítica mediante el teorema fundamental del cálculo. Este procedimiento deviene en

$$\int_0^\infty \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{f(q)} \right) dq = \frac{1}{f(q)} \Big|_{(abc)^2}^\infty = -\frac{1}{abc},$$

y por consiguiente, se cumple la Ec. (67).

En el caso en el que los semiejes son iguales ( $a = b = c$ ), es decir, en el caso de una esfera se tiene que

$$L_{\text{esfera}} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a^2 + q)^{5/2}} = \frac{1}{3}.$$

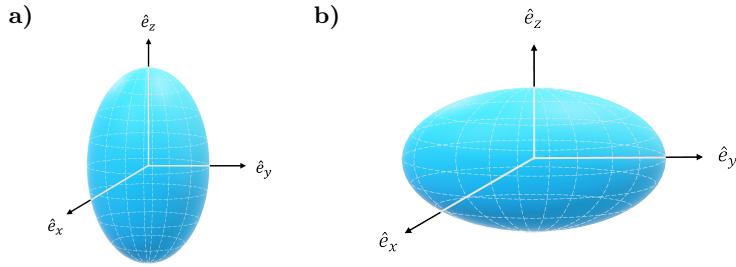
Una clase especial de elipsoides son los *esferoides*, los cuales tienen dos ejes de igual longitud, por lo cual, solo uno de los factores geométricos es independiente. El esferoide prolato [Fig. 5a)], para el cual  $b = c > a$  y  $L_2 = L_3$  es generado por la rotación de una elipse sobre su eje mayor; el esferoide oblat [Fig. 5b)], para el cual  $b = a > c$  y  $L_1 = L_2$  es generado al rotar una elipse sobre su eje menor. Para los esferoides, se tiene una expresión analítica para  $L_1$  como función de la excentricidad  $e$  [6]. En el caso de los esferoides prolatos es

$$L_1 = \frac{1 - e^2}{e^2} \left( -1 + \frac{1}{2e} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \right) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (68)$$

mientras que para los esferoides oblatos es

$$L_1 = \frac{g(e)}{2e^2} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} g(e) \right) - \frac{g^2(e)}{2}, \quad (69)$$

$$g(e) = \left( \frac{1 - e^2}{e^2} \right)^{1/2}, \quad e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}. \quad (70)$$



**Fig. 5:** Clases especiales de elipsoides. **a)** Prolato. El eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje  $\hat{e}_z$ . **b)** Oblato. El eje mayor del elipsoide está orientado en la dirección del eje  $\hat{e}_y$ .

## II. RESULTADOS

En esta sección se muestran las secciones transversales para elipsoides oblados, empleados como una primera aproximación a la forma discoide cóncava de los eritrocitos. Dado que los eritrocitos en una muestra real no interactúan fuertemente entre ellos<sup>7</sup> y que se encuentran orientados de forma aleatoria, se estudia la respuesta óptica promedio de una sola partícula, al considerar que una onda plana ilumina a una colección de eritrocitos idénticos no interactuantes. Por la aleatoriedad de los elipsoides considerados, se emplea la respuesta promedio, que considera la excitación de un elipsoide a lo largo de sus tres semiejes. De esta forma, las secciones transversales promedio de absorción y esparcimiento se expresan como [6]:

$$\langle C_{abs} \rangle = \frac{k}{3} \text{Im}\{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\},$$

$$\langle C_{sca} \rangle = \frac{k^4}{3(6\pi)} (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)})^2.$$

Para modelar la respuesta electromagnética del material de los elipsoides, se propone emplear el modelo de Drude. Este modelo describe el comportamiento plasmónico de materiales a energías bajas, es decir, aquella dominada por los electrones en la banda de conducción. Al considerar que una colección de electrones no interactuantes entre sí de un material se encuentran bajo la presencia de un campo eléctrico armónico con una frecuencia  $\omega$ , la expresión de la función dieléctrica dada por el modelo de Drude es [16]

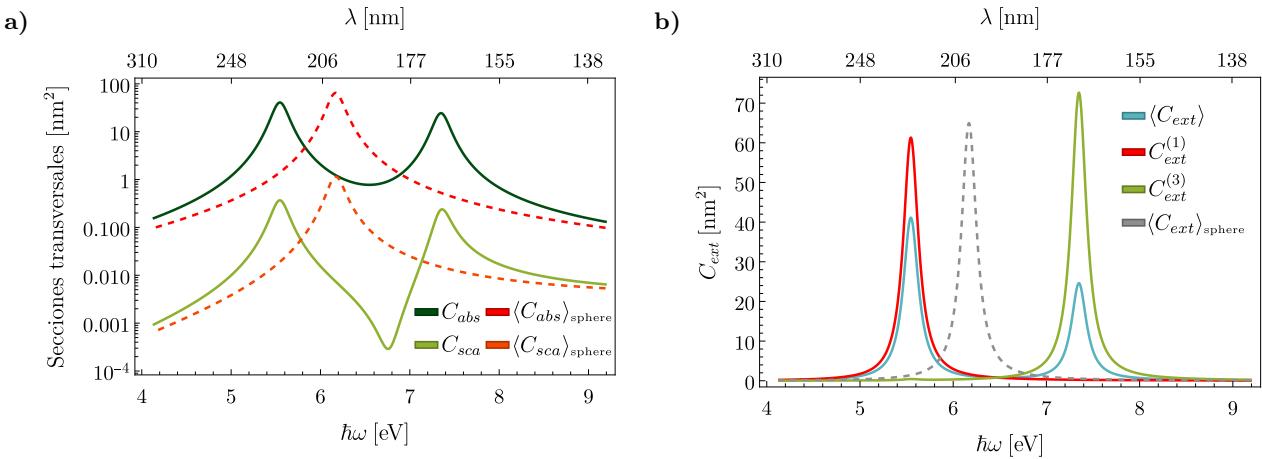
$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (71)$$

donde  $\omega_p$  es la frecuencia de plasma y  $\gamma$  es la constante fenomenológica de amortiguamiento, ambas características de cada material. A pesar de que los eritrocitos no están compuestos por materiales dominados por un comportamiento plasmónico en el espectro visible, se emplea el modelo de Drude debido a su dependencia en la frecuencia, lo que permite, al seleccionar los parámetros  $\omega_p$  y  $\gamma$ , un control sobre la respuesta óptica del sistema, resultando adecuado para estudiar la respuesta general y familiarizarse con el problema.

Para analizar la respuesta óptica en partículas elipsoidales dentro del régimen cuasiestático al compararlas con la respuesta de una esfera, se emplea inicialmente la función dieléctrica del aluminio dada por el modelo de Drude con los parámetros  $\hbar\omega_p = 13.142$  eV y  $\hbar\gamma = 0.197$  eV [17]; adicionalmente

<sup>7</sup>El contraste en el índice de refracción entre los eritrocitos y el plasma sanguíneo es relativamente bajo (0.04 - 0.06) [3].

el medio donde se encuentra el elipsoide está caracterizado por una función dieléctrica  $\epsilon_m = 1.77$ , que corresponde al de un medio acuoso.<sup>8</sup> En la Fig. 6a) se muestran las  $\langle C_{abs} \rangle$  (línea verde oscuro) y  $\langle C_{sca} \rangle$  (línea verde claro) de un elipse con semiejes  $a = 1.5$  nm,  $c = 1$  nm y las  $\langle C_{abs} \rangle$  (línea roja punteada) y  $\langle C_{sca} \rangle$  (línea naranja punteada) de una esfera con  $c = 1.5$  nm. Todas las cantidades se muestran como función de la energía  $\hbar\omega$  (eje inferior) y la longitud de onda  $\lambda$  (eje superior) de la onda electromagnética incidente.



**Fig. 6:** Secciones transversales como función de la energía  $\hbar\omega$  (eje inferior) y de la longitud de onda  $\lambda$  (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de aluminio caracterizada por su función dieléctrica dada por el modelo de Drude ( $\hbar\omega_p = 13.142$  eV,  $\hbar\gamma = 0.197$  eV), con semiejes  $a = b = 1.5$  nm,  $c = 1$  nm e inmersa en un medio acuoso ( $\epsilon_m = 1.77$ ). **a)** Sección transversal de absorción promedio  $\langle C_{ext} \rangle$  del elipsoide (línea verde oscuro) y la esfera (línea roja punteada) y sección transversal de esparcimiento promedio  $\langle C_{abs} \rangle$  del elipsoide (línea verde claro) y la esfera (línea naranja punteada) en escala logarítmica. **b)** Sección transversal de extinción promedio  $\langle C_{ext} \rangle$  (línea azul), sección transversal de extinción al iluminar a la partícula con una onda polarizada en la dirección  $\hat{e}_x$ ,  $C_{ext}^{(1)}$  (línea roja) y sección transversal de extinción al iluminar la partícula con una onda polarizada en la dirección  $\hat{e}_z$   $C_{ext}^{(3)}$  (línea verde).

A partir de los resultados mostrados en la Fig. 6a), se observa que, en partículas dentro del régimen cuasiestático, la absorción domina sobre el esparcimiento en la contribución a la extinción. Esto se evidencia en la diferencia de magnitudes las curvas de absorción y esparcimiento de la esfera y la elipse, donde la absorción es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor que el esparcimiento, por lo que la curva de extinción esencialmente la misma que la de absorción. Debido a esta marcada diferencia, los análisis posteriores se enfocan exclusivamente en las secciones transversales de extinción, ya que la contribución del esparcimiento es despreciable.

El análisis de las diferencias entre la  $\langle C_{ext} \rangle$  y las secciones transversales de extinción obtenidas al iluminar la partícula con una onda polarizada en una única dirección, se presenta en la Fig. 6b). En esta figura se muestra la  $\langle C_{ext} \rangle$  (línea azul),  $C_{ext}^{(1)}$  (línea roja) y  $C_{ext}^{(3)}$  (línea verde) de un elipsoide y la  $\langle C_{ext} \rangle$  (línea gris punteada) de una esfera. Las cantidades se muestran en función de  $\hbar\omega$  (eje inferior) y de  $\lambda$  (eje superior) de la onda electromagnética incidente. Estos cálculos corresponden a un sistema con las mismas características que el de la Fig. 6a). Se observa que debido a la geometría, la  $\langle C_{ext} \rangle$  del elipsoide presenta dos máximos, los cuales coinciden con las frecuencias de los máximos de  $C_{ext}^{(1)}$  y  $C_{ext}^{(3)}$  que se encuentran hacia el rojo y al azul, respectivamente, de la frecuencia de resonancia correspondiente a una partícula esférica. Esto muestra que las secciones transversales promedio son

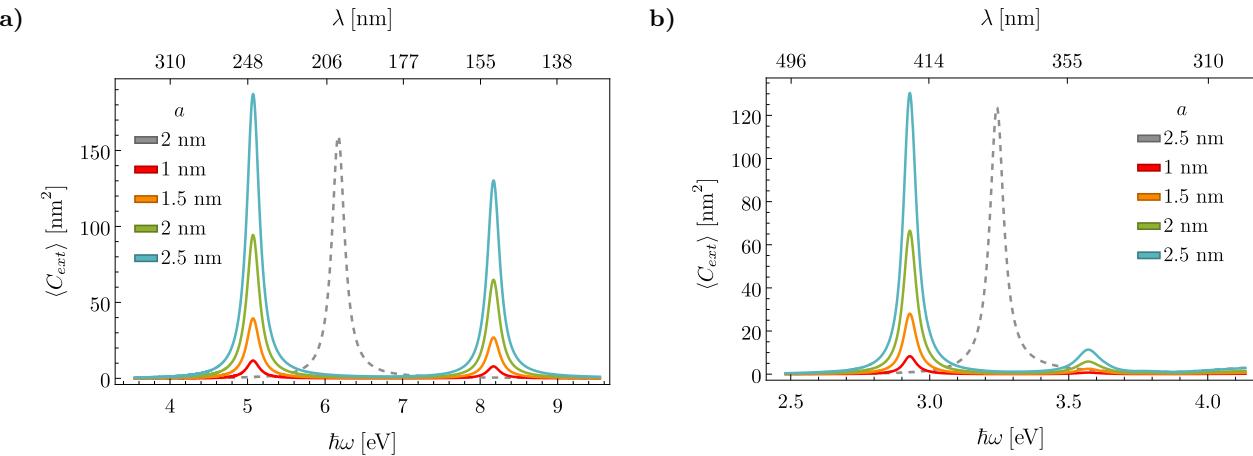
<sup>8</sup>Que podría considerarse como el plasma sanguíneo. [3]

útiles para representar el efecto de iluminar una partícula elipsoidal con una onda electromagnética polarizada en la dirección de cualquiera de sus tres ejes principales, ya que lo que cambia es el valor nominal de los máximos en la sección transversal promedio, más no la localización espectral de estos.

Las siguientes figuras presentan los cálculos de las secciones transversales de extinción promedio ( $\langle C_{ext} \rangle$ ) considerando nanopartículas elipsoidales oblatas cuya función dieléctrica está caracterizada por el modelo de Drude para aluminio [17] y por datos experimentales para plata [18], oro [18], bismuto [19] y óxido de magnesio [20].

### Aluminio y plata

En la Fig. 7 se muestran las  $\langle C_{ext} \rangle$  en función de  $\hbar\omega$  (eje inferior) y de  $\lambda$  (eje superior) de la onda electromagnética incidente en nanopartículas elipsoidales oblatas de aluminio (AlNPs) [Fig. 7a)] y plata (AgNPs) [Fig. 7b)]. La función dieléctrica para el aluminio está dada por el modelo de Drude con parámetros  $\hbar\omega_p = 13.142$  eV,  $\hbar\gamma = 0.197$  eV, mientras que para la plata está dada a partir de los datos experimentales reportados pr Johnson y Christy [18]. Se realizan los cálculos para partículas elipsoidales con razón de aspecto AR=2 y con semiejes de tamaños desde 1 nm a 2.5 nm, en pasos de 0.5 nm; cada caso se identifica con el código de color mostrado en la gráfica. Además, se incluyen los cálculos para una partícula esférica con  $a = 2$  nm (línea gris punteada) y con razón de aspecto AR= 1. Todas las partículas están inmersas en un medio acuoso con  $\epsilon_m = 1.77$ .

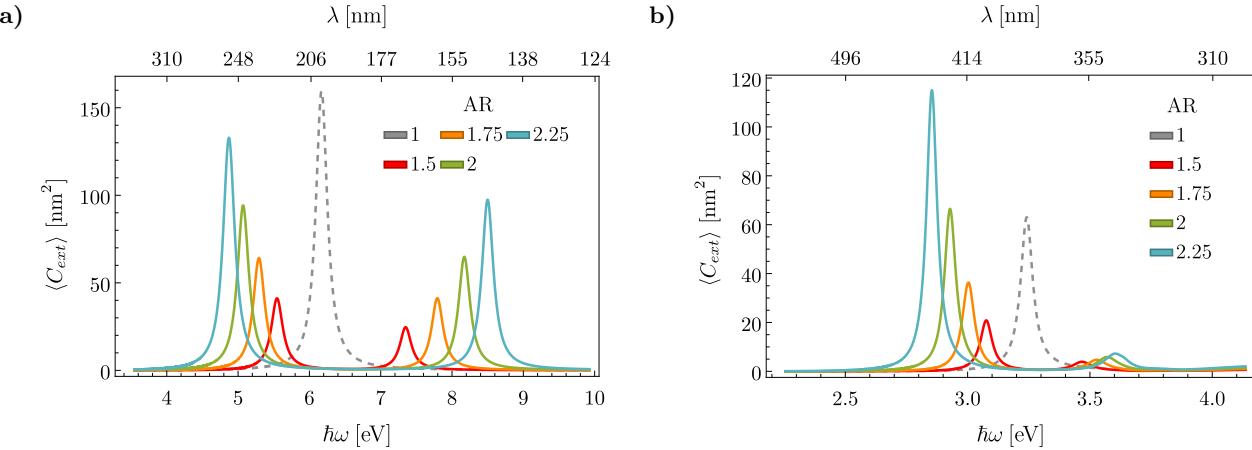


**Fig. 7:** Secciones transversales de extinción promedio como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata inmersa en un medio acuoso ( $\epsilon_m = 1.77$ ). Las partículas poseen AR=2, excepto en el caso de la línea gris punteada en el que AR=1 (partícula esférica). Además, están caracterizadas por su función dieléctrica dada por **a**) el modelo de Drude para el aluminio con parámetros  $\hbar\omega_p = 13.142$  eV y  $\hbar\gamma = 0.197$  eV) y **b**) datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de [18].

A partir de los resultados de la Fig. 7, se observa que al aumentar el tamaño de la partícula mientras se mantiene constante AR, la localización espectral de las resonancias no cambia pero su valor nominal aumenta. Se identifican dos máximos locales en  $\langle C_{ext} \rangle$ , los cuales corresponden a las frecuencias en las que  $C_{ext}^{(1)}$  y  $C_{ext}^{(3)}$  se maximizan. En ambos casos se observa que el corrimiento de la resonancia no es simétrico respecto al de la esfera, para  $C_{ext}^{(1)}$ , las resonancias presentan un corrimiento hacia el rojo de  $\Delta\lambda = 44$  nm (1.11 eV) para las AlNPs y  $\Delta\lambda = 51$  nm (0.38 eV) para las AgNPs. Para  $C_{ext}^{(3)}$ , las resonancias presentan un corrimiento hacia el azul de  $\Delta\lambda = 55$  nm (2.33

eV) para AlNPs y  $\Delta\lambda = 39$  nm (0.36 eV) para las AgNPs. Es decir, este corrimiento depende del material.

El efecto de la variación de la razón de aspecto en la sección transversal de extinción promedio en AlNPs y AgNPs inmersas en un medio acuoso con  $\epsilon_m = 1.77$  se muestra en la Fig. 8. En esta figura, las partículas elipsoidales se consideran con AR entre 1.5 a 2.25, con incrementos 0.25 y con un semieje menor fijo de  $c = 1$  nm y también se incluye  $\langle C_{ext} \rangle$  para una partícula esférica con  $c = 1$  nm y con razón de aspecto AR=1.



**Fig. 8:** Secciones transversales de extinción promedio como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) de la onda electromagnética incidente para una partícula elipsoidal oblata inmersa en un medio acuoso ( $\epsilon_m = 1.77$ ). Las partículas poseen un semieje menor de tamaño  $c = 1$  nm y presentan diferentes AR cuyo código de color se observa en la gráfica. Además, están inmersas en un medio acuoso ( $\epsilon_m = 1.77$ ) y están caracterizadas por su función dieléctrica dada por **a)** el modelo de Drude para el aluminio ( $\hbar\omega_p = 13.142$  eV,  $\hbar\gamma = 0.197$  eV) y **b)** datos experimentales correspondientes a la plata obtenidos de [18].

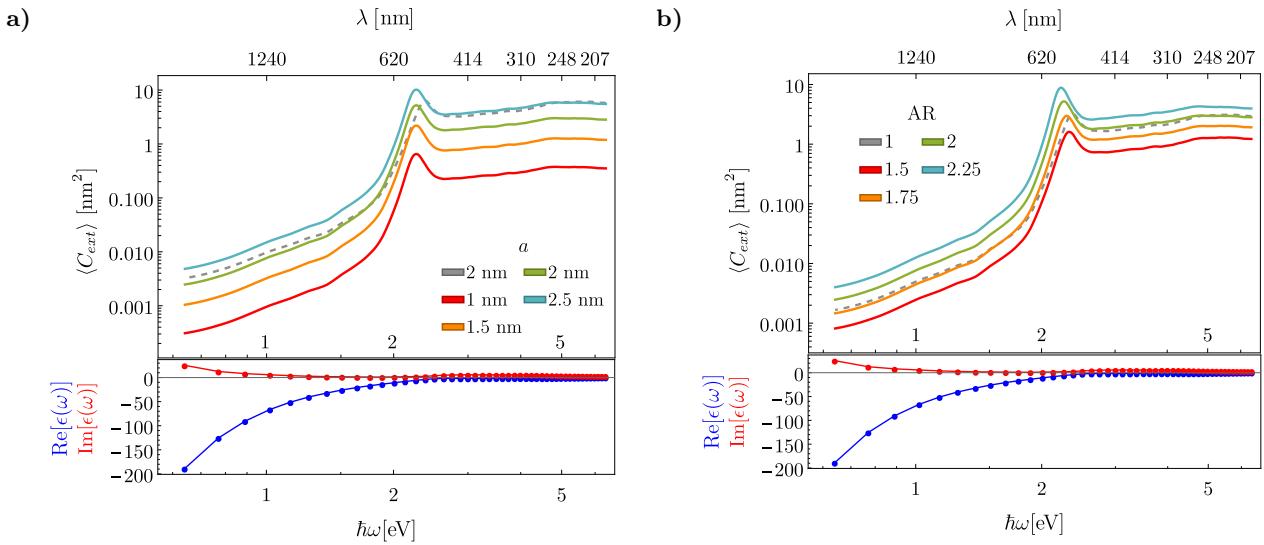
En las Figs. 8a) y 8b) se observa que conforme la relación de aspecto se aproxima a la unidad, hay un corrimiento de las frecuencias asociadas a las  $\langle C_{ext} \rangle$  máximas hacia la frecuencia de resonancia asociada a una partícula esférica. Esta frecuencia de resonancia corresponde a  $\lambda = 201$  nm (6.17 eV) para el aluminio y  $\lambda = 383$  nm (3.24 eV) para la plata. Además, tanto en el aluminio como en la plata, se observa que al aumentar la relación de aspecto y la longitud del eje mayor, el valor nominal de  $\langle C_{ext} \rangle$  también aumenta. Esto se debe a que hay una mayor cantidad de material y por tanto más electrones, por lo que los efectos de absorción y esparcimiento aumentan, lo que, en consecuencia, aumenta la extinción.

## Oro y bismuto

De forma análoga al análisis en la variación de los parámetros geométricos de las AlNPs y AgNPs, se muestra en la Fig. 9 la respuesta óptica variando estos parámetros (semieje mayor y razón de aspecto) considerando ahora una función dieléctrica de materiales reales donde se observan contribuciones no descritas por el modelo de Drude.<sup>9</sup> En particular, en la Fig. 9a) se grafica  $\langle C_{ext} \rangle$  como función de  $\hbar\omega$  (eje inferior) y de  $\lambda$  (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblates de oro (AuNPs) de distintos tamaños que conservan la razón de aspecto de AR=2. Para complementar el análisis, se muestra debajo de esta gráfica la función dieléctrica del oro donde los puntos representan datos experimentales [18] y las líneas continuas corresponden a la interpolación empleada para este conjunto de datos. En la Fig. 9a) se

<sup>9</sup>Estas contribuciones provienen de electrones ligados [16].

consideran partículas con relación de aspecto AR= 2 con radios desde 1 nm a 2.5 nm, con incrementos de 0.5 nm; cada caso se identifica con el código de color mostrado en la gráfica respectiva. También se considera una partícula con relación de aspecto AR= 1 y semiejes  $a = 2$  nm (línea gris punteada), que representa a una partícula esférica. Por otro lado, en la Fig. 9b) se consideraron partículas con relación de aspecto variable AR=1.5 (línea roja), AR=1.75 (línea naranja), AR=2 (línea verde) y AR=2.25 (línea azul) que presentan valores en su semieje menor  $c = 1$  nm. Asimismo, se considera una partícula esférica con semieje mejor  $c = 1$  nm y con relación de aspecto AR= 1 (línea gris).



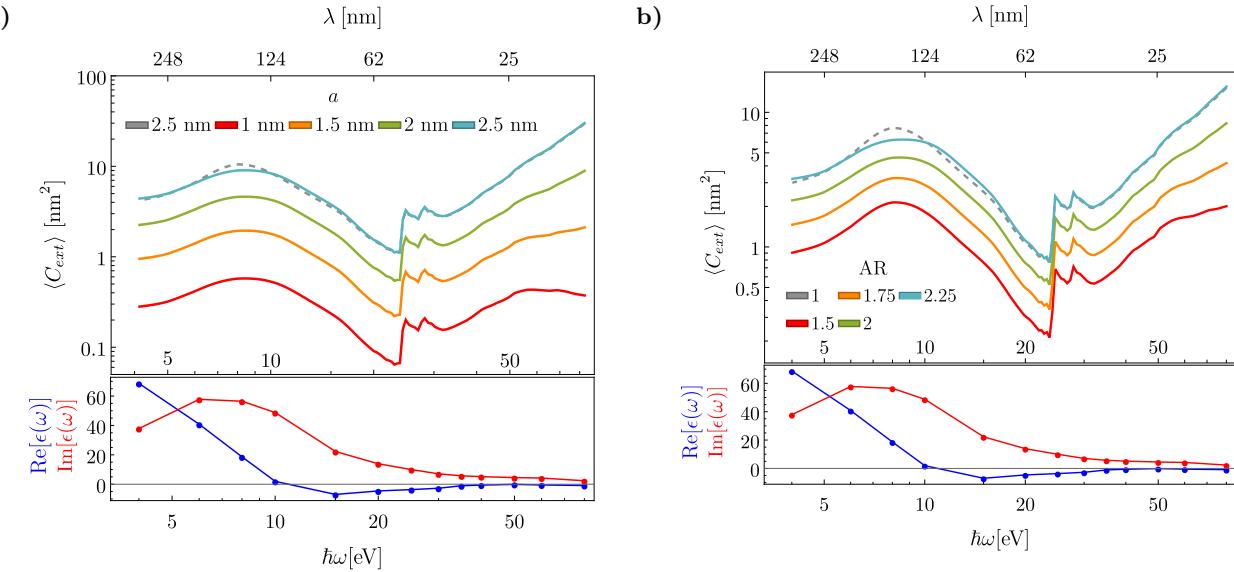
**Fig. 9:** Secciones transversales de extinción promedio como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de oro inmersa en un medio acuoso con  $\epsilon_m = 1.77$ , y cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales de [18]. Debajo de las gráficas se muestra la función dieléctrica del oro obtenida a partir de [18] (parte real en azul, parte imaginaria en rojo). La línea recta que une los puntos experimentales fue obtenida mediante una interpolación. a) AuNPs con AR=2, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde AR=1. b) AuNPs con semieje menor  $c = 1$  nm.

En contraste con el aluminio y la plata, para el oro se observa solo una excitación plasmónica en  $\lambda = 522$  nm (2.38 eV). Esta excitación presenta un corrimiento hacia el rojo de la de la esfera en  $\lambda = 547$  nm (2.27 eV) y se esperaría que existiera otra con un corrimiento hacia el azul, más no hay una excitación a frecuencias mayores como sí se observó en el análisis de la Fig. 7. Esto se atribuye a la fuerte absorción del oro a energías altas, lo que suprime resonancias atribuidas a contribuciones no descritas por el modelo de Drude en los datos experimentales.<sup>10</sup> Por otro lado, se observa que para AR=2.25, la excitación se encuentra en  $\lambda = 556$  nm (2.23 eV), mientras que para AR=1.5, el caso calculado más cercano al de una esfera, la excitación se encuentra en  $\lambda = 522$  nm (2.33 eV), es decir, la AR reproduce el caso de una esfera en su respuestapectral cuando tiende a la unidad, resultado que sigue las tendencias observadas en las AlNPs y AgNPs.

En los casos anteriores se analizó el aluminio, cuya respuesta óptica es bien descrita por el modelo de Drude, así como metales nobles como la plata y el oro. Ahora, con el objetivo de aproximarse a las propiedades ópticas de los eritrocitos, en la Fig. 10 se presentan las secciones transversales de extinción promedio en función de la energía (eje inferior) y la longitud de onda (eje superior) para nanopartículas elipsoidales oblatas de bismuto (BiNPs). Este material, al ser un semimetal, exhibe

<sup>10</sup>En particular de contribuciones dieléctricas descritas por el modelo de Lorentz [16].

en ciertas regiones espectrales un comportamiento más similar al de los eritrocitos que los materiales previamente estudiados. Como complemento, debajo de las gráficas se muestra la función dieléctrica del bismuto obtenida de datos experimentales reportados por Hagemann et al. [19]. En la Fig. 10a) se consideraron partículas con AR= 2 y en la Fig. 10b) se consideraron partículas con relación de aspecto variable desde 1.5 hasta 2.25, con incrementos de 0.25.



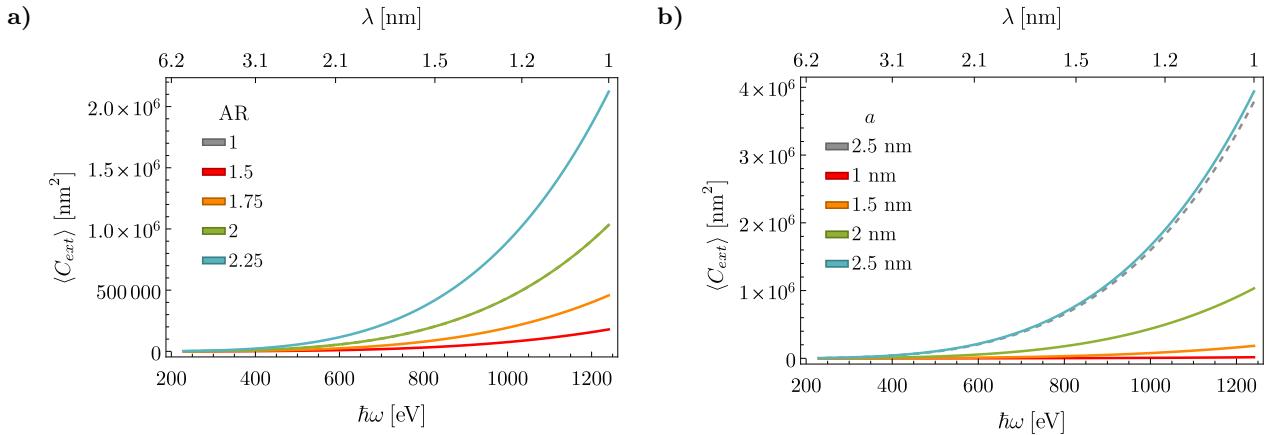
**Fig. 10:** Secciones transversales de extinción promedio como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de bismuto inmersa en un medio acuoso con  $\epsilon_m = 1.77$ , y cuyo índice de refracción complejo fue obtenido a partir de datos experimentales de [19]. Debajo de las gráficas se muestra la función dieléctrica del oro obtenida a partir de [18] (parte real en azul, parte imaginaria en rojo). La línea recta que une los puntos experimentales fue obtenida mediante una interpolación. **a)** BiNPs con AR=2, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde AR=1. **b)** BiNPs con semieje menor  $c = 1$  nm.

En ambas figuras se observan frecuencias de resonancia alrededor de  $\lambda = 147$  nm (8.44 eV), que se encuentran hacia el azul de la frecuencia de resonancia en  $\lambda = 154$  nm (8.03 eV) correspondiente a una nanopartícula esférica y de manera similar al caso del oro, se esperaría que existiera otra resonancia hacia el rojo de la de la esfera. También se observa un aumento de la  $\langle C_{ext} \rangle$  a partir de  $\lambda = 50$  nm que se atribuye a contribuciones no descritas por el modelo de Drude en los datos experimentales. Como en los casos anteriores, se observa que al aproximar AR a la unidad, se recupera la frecuencia de resonancia correspondiente a una nanopartícula esférica. Además, las excitaciones plasmónicas están menos definidas que en el caso de los materiales plasmónicos. Esto es más evidente al comparar la Anchura a media altura (FWHM por sus siglas en inglés) pues, en el caso del bismuto se observa un FWHM = 8.85 nm (0.18 eV), mientras que en el aluminio FWHM = 68.54 nm (3.64 eV). Esto se explica debido a la fuerte absorción del bismuto en el rango de frecuencias estudiado.

## Óxido de magnesio

Finalmente, las  $\langle C_{ext} \rangle$  para un material dieléctrico: el óxido de magnesio (MgO) se muestran en la Fig. 11, en las que se emplearon los datos experimentales reportados por Stephens y Malitson [20]. En esta gráfica se realiza la variación de la AR y el semieje mayor en nanopartículas elipsoidales oblatas de óxido de magnesio (MgONPs). Las  $\langle C_{ext} \rangle$  se grafican en función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior). De la misma forma que con los materiales anteriores, se consideraron

partículas con relación de aspecto AR= 2 con radios desde 1 nm a 2.5 nm, con incrementos de 0.5 nm, con su respectivo código de color indicado en la gráfica [Fig. 11b)] y en la Fig. 11a) se consideraron partículas con AR variable.



**Fig. 11:** Secciones transversales de extinción promedio como función de la energía (eje inferior) y de la longitud de onda (eje superior) para una partícula elipsoidal oblata de óxido de magnesio inmersa en un medio acuoso ( $\epsilon_m = 1.77$ ). **a)** MgONPs con AR=2, excepto en el caso de una esfera (línea gris punteada) donde AR=1. **b)** MgONPs con semieje menor  $c = 1$  nm.

En ambos casos se observa que la  $\langle C_{ext} \rangle$  tiene un comportamiento creciente y no se observan resonancias plasmónicas debido a la naturaleza dieléctrica del óxido de magnesio. Esto también se atribuye a que en el rango de energías analizado existen procesos de absorción no descritos por el modelo de Drude.

### III. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la solución analítica del problema de esparcimiento de luz por partículas elipsoidales arbitrarias en la aproximación cuasiestática, analizando las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento. Además, se estudió el comportamiento del esparcimiento de luz por un elipsoide centrado en el origen dentro de este mismo régimen, comparando los resultados con la respuesta de esferas calculadas también en el límite cuasiestático.

Se encontró que, en el régimen cuasiestático, la absorción es la contribución predominante en la extinción para nanopartículas elipsoidales oblates de aluminio, mientras que el esparcimiento resulta despreciable. En el rango en el que el modelo de Drude se adapta al comportamiento de los materiales, se identificaron dos resonancias plasmónicas desplazadas hacia el rojo y el azul respecto a la frecuencia de resonancia observada en una nanopartícula esférica. Para materiales más realistas, se determinó que es necesario incluir contribuciones adicionales a las plasmónicas, como las descritas por el modelo de Lorentz.

### REFERENCIAS

- [1] A. Antunes, J. H. Pontes, A. F. Monte, A. Barbosa y N. M. Ferreira. Optical properties on bone analysis: an approach to biomaterials. En *Proceedings*, volumen 27, página 36. MDPI, 2019. Issue: 1.

- [2] J. Yoon, Y. Jo, M.-h. Kim, K. Kim, S. Lee, S.-J. Kang e Y. Park. Identification of non-activated lymphocytes using three-dimensional refractive index tomography and machine learning. *Scientific reports*, **7**(1):6654, 2017. Publisher: Nature Publishing Group UK London.
- [3] N. Bosschaart, G. J. Edelman, M. C. G. Aalders, T. G. Van Leeuwen y D. J. Faber. A literature review and novel theoretical approach on the optical properties of whole blood. en. *Lasers in Medical Science*, **29**(2):453-479, 2014. DOI: [10.1007/s10103-013-1446-7](https://doi.org/10.1007/s10103-013-1446-7).
- [4] E. Eremina, J. Hellmers, Y. Eremin y T. Wriedt. Different shape models for erythrocyte: Light scattering analysis based on the discrete sources method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **102**(1), 2006. Publisher: Elsevier.
- [5] A. G. Borovoi, E. I. Naats y U. G. Oppel. Scattering of light by a red blood cell. *Journal of biomedical optics*, **3**(3), 1998. Publisher: SPIE.
- [6] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [7] J. Larsson. Electromagnetics from a quasistatic perspective. *American Journal of Physics*, **75**(3), 2007. Publisher: American Association of Physics Teachers.
- [8] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [9] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.
- [10] E. W. Weisstein. Confocal Ellipsoidal Coordinates. en, Text. Publisher: Wolfram Research, Inc.
- [11] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [12] G. Dassios. *Ellipsoidal Harmonics: Theory and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. DOI: [10.1017/CBO9781139017749](https://doi.org/10.1017/CBO9781139017749).
- [13] O. D. Kellogg. *Foundations of potential theory*, volumen 31. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] M. Braun. *Differential Equations and Their Applications*. en. Springer US, New York, NY, 1978. DOI: [10.1007/978-1-4684-0053-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0053-3).
- [15] M. Abramowitz e I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volumen 55. US Government printing office, 1948.
- [16] S. A. Maier. Plasmonics: Fundamentals and Applications, 2007.
- [17] M. I. Marković y A. D. Rakić. Determination of optical properties of aluminium including electron reradiation in the Lorentz-Drude model. *Optics & Laser Technology*, **22**(6), 1990. DOI: [10.1016/0030-3992\(90\)90093-J](https://doi.org/10.1016/0030-3992(90)90093-J).
- [18] P. B. Johnson y R. W. Christy. Optical Constants of the Noble Metals. en. *Physical Review B*, **6**(12):4370-4379, 1972. DOI: [10.1103/PhysRevB.6.4370](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370).
- [19] H.-J. Hagemann, W. Gudat y C. Kunz. Optical constants from the far infrared to the x-ray region: Mg, Al, Cu, Ag, Au, Bi, C, and Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. *JOSA*, **65**(6), 1975. Publisher: Optica Publishing Group.
- [20] R. E. Stephens e I. H. Malitson. Index of refraction of magnesium oxide. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49**(4), 1952. Publisher: National Institute of Standards and Technology (NIST).