



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPIEDADES ÓPTICAS  
DE ERITROCITOS SANOS Y ENFERMOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**FÍSICA BIOMÉDICA**

PRESENTA:

**Dana Larissa Luna González**

DIRECTOR DE TESIS:

Director

Place, 2025





1. Datos del alumno

Luna

González

Dana Larissa

776 101 4262

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física Biomédica

421122680

2. Datos del tutor

Dr

Secretary (thesis director)

Last name

Last name

3. Datos del sinodal 1

Dr

President

Last name

Last name

4. Datos del sinodal 2

Dr

Vocal

Last name

Last name

5. Datos del sinodal 3

Dr

substitute 1

Last name

Last name

6. Datos del sinodal 4

Dr

Substitute 2

Last name

Last name

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo numérico de propiedades ópticas de eritrocitos sanos y enfermos

pages

2025







# Agradecimientos

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.





# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Dana Larissa Luna González. Place, 2025

*„Wo es viel Licht ist, ist auch viel Schatten.“  
“Donde hay mucha luz, la sombra es profunda.”*

*Götz von Berlichingen, primer acto.*

*J. W. von Goethe*





## Resumen/Abstract

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Índice general

Acknowledgements	iii
Resumen	ix
Introducción	1
<b>1. Esparcimiento de luz por partículas</b>	<b>3</b>
1.1. Fundamentos . . . . .	3
1.2. Secciones transversales . . . . .	6
1.3. Relaciones de Kramers-Kronig . . . . .	9
<b>2. Eritrocitos y sus patologías</b>	<b>11</b>
2.1. What I got . . . . .	11
<b>3. Método de elemento finito</b>	<b>13</b>
3.1. Convergencia . . . . .	13
<b>Resultados</b>	<b>17</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>19</b>
<b>A. What I couldn't get into the main part</b>	<b>21</b>

# Introducción

---

It is recommended to fill in this part of the document with the following information:

- Your field: Context about the field your are working
- Motivation: Background about your thesis work and why did you choose this project and why is it important.
- Objectives: What question are you answering with your work.
- Methology: What are your secondary goals so you achieve your objective. Also, how are you answering yout question: which method or model.
- Structure: How is this thesis divides and what is the content of each chapter.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper,

felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



# Esparcimiento de luz por partículas

En este capítulo

## 1.1. Fundamentos

Todos los fenómenos electromagnéticos tienen su origen en una única interacción fundamental: la fuerza de Lorentz [1]. Esta fuerza describe cómo actúa un campo electromagnético sobre una partícula cargada en movimiento. Si una partícula de carga  $q$  se desplaza con velocidad  $\mathbf{v}$  en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$ , la fuerza que experimenta está dada por [1]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

La fuerza de Lorentz junto con las ecuaciones de Maxwell, describen a la electrodinámica clásica, que se centra en el origen y el comportamiento de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  [1]. En unidades del Sistema Internacional, dichas ecuaciones se expresan en forma diferencial como: [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{tot}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.2d)$$

donde  $\rho_{\text{tot}}$  representa a la densidad de carga volumétrica y  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  a la densidad de corriente volumétrica;  $\epsilon_0$  a la permitividad eléctrica en el vacío y  $\mu_0$  a la permeabilidad magnética en el vacío.

## 1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

En ausencia de fuentes externas ( $\rho_{\text{tot}} = 0$ ,  $\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$ ), los campos electromagnéticos pueden desacoplarse y satisfacer la ecuación de onda de Helmholtz al aplicar la transformada de Fourier temporal<sup>1</sup> [4]. Una de las soluciones de esta ecuación son las ondas planas, que representan la propagación de una onda monocromática en una dirección definida

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.3a) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.3b)$$

donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  corresponden a las amplitudes de los campos,  $\omega$  la frecuencia angular de la onda y  $\mathbf{k}$  el vector de onda. Para que se satisfagan las Ecs. (1.3), se tiene que cumplir la relación de dispersión dada por el número de onda  $k = \sqrt{\mu\epsilon} \omega$ , donde  $\epsilon$  y  $\mu$  corresponden a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio y son en general, funciones complejas dependientes de  $\omega$  [4]. La relación de dispersión se puede reescribir en términos del índice de refracción del material dado por [4]

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon\mu(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (1.4)$$

con lo que se obtiene,

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}, \quad (1.5)$$

donde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  es la velocidad de la luz en el vacío.

~~Al analizar la energía total almacenada en los campos electromagnéticos y el trabajo que estos realizan sobre una distribución de cargas y corrientes, se establece el teorema del trabajo y la energía. A partir de este teorema, se introduce el concepto de energía transportada por los campos por unidad de tiempo y por unidad de área, el cual está representado por el vector de Poynting,  $\mathbf{S}$ , dado por [2]~~

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (1.6)$$

Las Ecs. (1.2) determinan los campos que surgen a partir de corrientes y cargas presentes en la materia. No obstante, dichas ecuaciones no explican el origen de las corrientes y cargas [5]. Por ello, es necesario complementar las Ecs. (1.2) con ecuaciones llamadas relaciones constitutivas, que describen cómo responde la materia ante la acción de los campos. Para un medio lineal, homogéneo e isotrópico, las relaciones constitutivas están dadas por [5]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.7b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.7c)$$

<sup>1</sup>Sea  $F(t)$  una función real dependiente del tiempo, la transformada de Fourier  $\mathcal{F}(\omega)$  de  $F(t)$  se define como  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt$ . Mientras que la transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1}(t)$  es  $1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$  [3]



## 1.1 Fundamentos

donde  $\mathbf{D}$  corresponde al vector de desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{H}$  al campo H,  $\mathbf{J}$  a la densidad volumétrica de corriente y  $\sigma$  corresponde a la conductividad eléctrica.

Dadas las relaciones anteriores, la parte temporal puede ser construida empleando la transformada de Fourier temporal. La transformada de Fourier temporal para  $\mathbf{D}$  está dada por [4]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt', \quad (1.8)$$

mientras que la transformada de Fourier inversa está dada por

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.9)$$

Al sustituir la Ec. (1.7a) en la Ec. (1.9), se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.10)$$

y al sustituir la transformada de Fourier de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , se tiene que

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (1.11)$$

Considerando que los órdenes de integración se pueden intercambiar, dado que la integración se realiza en el mismo intervalo  $(-\infty, \infty)$ , la Ec. (1.11) se reescribe como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt'. \quad (1.12)$$

Al realizar el cambio de variable  $\tau = t - t'$  y emplear la función constante [3]

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} = \delta(\tau), \quad (1.13)$$

donde  $\delta(\tau)$  es la función delta de Dirac, que cumple con [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0), \quad (1.14)$$

se reescribe al campo eléctrico como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau. \quad (1.15)$$

Al sumar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$  y multiplicar por  $\varepsilon_0/\varepsilon_0$  a la Ec. (1.11), simplificando se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right], \quad (1.16)$$

donde  $G(\tau)$  es la transformada de Fourier de ~~la susceptibilidad eléctrica~~  $\chi_e = \varepsilon(\omega)/\varepsilon_0 - 1$  [4]

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 \right] e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (1.17)$$

con  $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$  la permitividad eléctrica relativa. Al aplicar la transformada de Fourier a la Ec. (1.17), se obtiene una expresión para la permitividad eléctrica relativa

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.18)$$

Las Ecs. (1.16) y (1.17) muestran que el campo de desplazamiento eléctrico al tiempo  $t$  depende del campo eléctrico en todos los demás tiempos  $t'$ . A esta característica, se le conoce como la no localidad temporal entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  [4]. Además, a partir de la Ec. (1.17), se observa que si  $\varepsilon(\omega)$  es independiente de  $\omega$ ,  $G(\tau) = \delta(\tau)$ , por lo que se obtiene una respuesta instantánea, mientras que si sí depende de  $\omega$ ,  $G(\tau)$  es distinta de cero para todos los valores de  $\tau$  distintos de cero.

De modo que las Ecs. (1.16) y (1.18) sean causales, es necesario imponer condiciones que garanticen que la Ec. (1.17) se anule para  $\tau < 0$ , lo que se traduce en que al tiempo  $t$ , únicamente valores del campo eléctrico previos a ese tiempo determinan el vector de desplazamiento eléctrico [4]. De esta forma, las Ecs. (1.18) se reescriben como

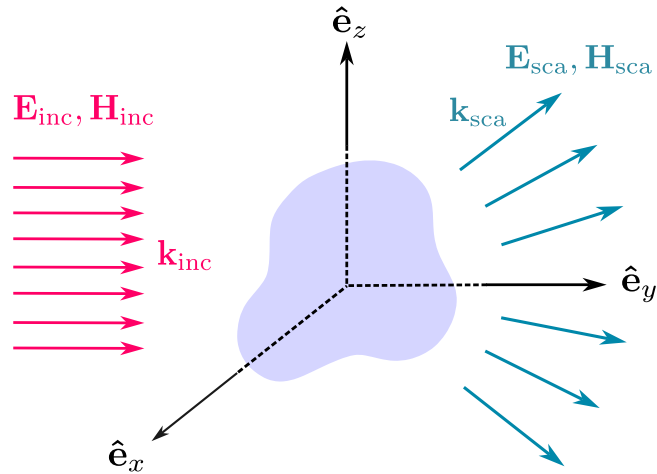
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right],$$

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

## 1.2. Secciones transversales

La interacción luz-materia puede describirse clásicamente mediante dos procesos fundamentales: la absorción y el esparcimiento, cuyo efecto conjunto se denomina extinción del campo incidente. Experimentalmente, estos fenómenos se evidencian al comparar la potencia detectada con y sin la presencia de una partícula iluminada por un campo electromagnético incidente ( $\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}$ ) [ver Fig. 1.1] [6]. Para cuantificar este efecto de manera macroscópica, en esta sección se introducen las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, las cuales son cantidades macroscópicas medibles que proporcionan información sobre el sistema [6]. Para esto, se considera a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana armónica en el tiempo [6]. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula  $W_{\text{abs}}$ , se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting<sup>2</sup>  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$  sobre una superficie cerrada  $A$  que, por simplicidad, puede considerarse una esfera de radio  $r$  mayor al de la partícula [ver Fig. 1.2], es decir,

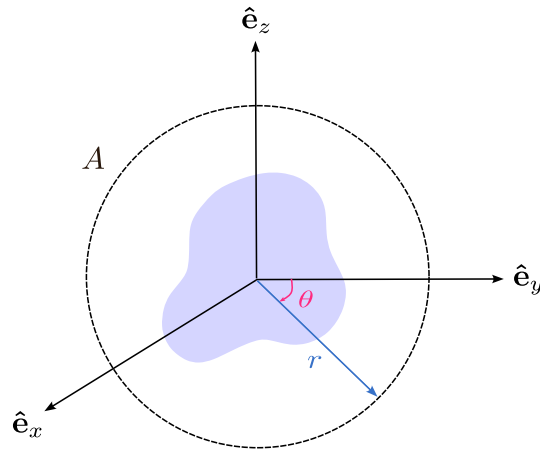
<sup>2</sup>El promedio temporal del vector de Poynting es  $\langle \mathbf{S} \rangle_t = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} \mathbf{S}(t') dt'$ , y para campos electromagnéticos del tipo ondas planas es  $\langle \mathbf{S} \rangle_t = (1/2) \text{Re}[\mathbf{E} \times (\mathbf{B}/\mu)^*]$ , donde  $*$  denota la operación complejo conjugado [6].



**Fig. 1.1:** Diagrama del problema de espacimient. El campo electomagnético  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$  incide sobre una partícula arbitraria, produciendo el campo electomagnético espacido  $(\mathbf{E}_{\text{sca}}, \mathbf{H}_{\text{sca}})$ .

$$W_{\text{abs}} = - \int_A \langle \mathbf{S} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.19)$$

donde, debido a que  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$  y  $\hat{\mathbf{e}}_r$  están orientados en la misma direccón, el signo negativo convierte a  $W_{\text{abs}}$  en una cantidad positiva, de lo contrario, significaría que se genera energía dentro de la esfera [6].



**Fig. 1.2:** Esquema de la superficie de integración  $A$  como una esfera de radio  $r$  centrada en el origen y que contiene a la partícula de interés.

Considerando la descomposición del vector de Poynting total en tres términos [6]

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{S} \end{array} \right.$$

$$\langle \mathbf{S}^{\text{inc}} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.20a)$$

$$\langle \mathbf{S}^{\text{sca}} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^*\}, \quad (1.20b)$$

$$\langle \mathbf{S}^{\text{ext}} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^* + \mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.20c)$$

asociados al campo **incidente**, al **campo esparcido** y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente y donde  $\text{Re}\{\cdot\}$  denota la parte real de un número complejo, se tiene que  $W_{\text{abs}} = W_{\text{inc}} - W_{\text{sca}} + W_{\text{ext}}$ , donde [6]

$$W_{\text{inc}} = - \int_A \langle \mathbf{S}^{\text{inc}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.21)$$

$$W_{\text{sca}} = \int_A \langle \mathbf{S}^{\text{sca}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.22)$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_A \langle \mathbf{S}^{\text{ext}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.23)$$

cuyos signos están colocados de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de  $\hat{\mathbf{e}}_r$ . En particular, para un medio no absorbente, la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, por lo que  $W_{\text{inc}}$  se anula, entonces

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{abs}} + W_{\text{sca}}. \quad (1.24)$$

Al considerar el campo incidente  $\mathbf{E}_{\text{inc}} = E \hat{\mathbf{e}}_x$  y a  $\mathbf{H}_{\text{inc}} = (1/\mu\omega) \mathbf{k} \times E \hat{\mathbf{e}}_x$  en un medio no absorbente,  $W_{\text{abs}}$  es independiente del radio  $r$  de la superficie de integración, por lo que se puede considerar a  $r$  lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como los generados por un dipolo inducido ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\mathbf{H}_p$ ) al iluminar un sistema de cargas y corrientes con un onda electromagnética de frecuencia angular  $\omega$  [6]

$$\mathbf{E}_p = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \mathbf{X} E_0 e^{ikz} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_p, \quad (1.25)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el vector de amplitud de esparcimiento dado por

$$\mathbf{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha [\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_x)] = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \quad (1.26)$$

por lo cual,  $W_{\text{ext}}$  está dado por [6]

$$W_{\text{ext}} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\}$$

y además,  $I_{\text{inc}}$  es la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector

de Poynting, y por consiguiente<sup>3</sup>,

$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\}, \quad (1.27)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec. (1.24) puede ser reescrita como [6]

$$C_{\text{ext}} = C_{\text{abs}} + C_{\text{sca}}, \quad (1.28)$$

donde  $C_{\text{abs}} = W_{\text{abs}}/I_{\text{inc}}$  y  $C_{\text{sca}} = W_{\text{sca}}/I_{\text{inc}}$  corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (1.25) en la Ec. (1.22) se obtiene

$$C_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (1.29)$$

Las Ecs. (1.27)–(1.29) son propiedades macroscópicas y medibles que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula.

### 1.3. Relaciones de Kramers-Kronig

El estudio experimental de las propiedades ópticas lineales no siempre permite obtener todas las propiedades ópticas de una muestra. Afortunadamente, el principio de causalidad en la respuesta óptica de cualquier material permite extraer información a partir de los datos experimentales medidos. En el caso de un sistema de esparcimiento, el principio de causalidad impone que ninguna onda esparcida puede existir antes de que la onda incidente haya alcanzado alguna parte de la partícula esparcidora, cuyo tamaño se supone finito.

Las relaciones K-K describen una conexión entre las partes reales e imaginarias de funciones ópticas lineales complejas que describen fenómenos de interacción luz-materia, como la susceptibilidad, la función dieléctrica, el índice de refracción y la reflectividad. Las partes reales e imaginarias no son totalmente independientes, sino que están conectadas por una forma especial de transformadas de Hilbert, denominadas relaciones K-K. Además, al aplicar las relaciones K-K, es posible realizar la llamada inversión de datos ópticos, es decir, adquirir conocimiento sobre los fenómenos dispersivos mediante mediciones de los fenómenos absorptivos en todo el espectro (por ejemplo, con espectroscopia de transmisión) o viceversa.

En la espectroscopia óptica lineal, el análisis K-K tiene dos funciones típicas, según si la medición se basa en la transmisión o la reflexión de la luz. En el primer caso, se suele medir la parte imaginaria y la parte real se obtiene mediante una relación K-K, mientras que en el segundo, se mide la intensidad y se calcula la fase mediante la relación K-K adecuada. Sin

---

<sup>3</sup>Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones [6].

embargo, al utilizar un elipsómetro, es posible obtener información experimental a partir de la función compleja obtenida mediante la medición. En tal caso, las relaciones K-K pueden utilizarse para comprobar la autoconsistencia de las partes reales e imaginarias medidas de los datos.

Las relaciones de Kramers-Kronig, se obtienen a partir de la Ec. ([1.16](#))



# Eritrocitos y sus patologías

---

## 2.1. What I got

Los eritrocitos son



# Método de elemento finito

---

It is recommended to write a summary about the contents of this chapter as an introduction to them.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 3.1. Convergencia

If you want to frame some equations because you consider them important, use the **tcolorbox** command. Also, you may use the **subequations** command sometimes. For example with the Maxwell's equations [griffiths2013electrodynamics]:

and if you want them to appear in the analytical index just use the **index** command `\index{ }`.

If you want to show two equations in only one row, use the macros `\eqhalf`, for example [hecht1998optics] , for the Fourier transform <sup>1</sup> or the Helmholtz equation for **E** y

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{F}[f(\mathbf{r}, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dt$ , con **k** una función de  $\omega$ . La transformada de Fourier inversa es entonces  $\mathcal{F}^{-1}[f(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega$ .

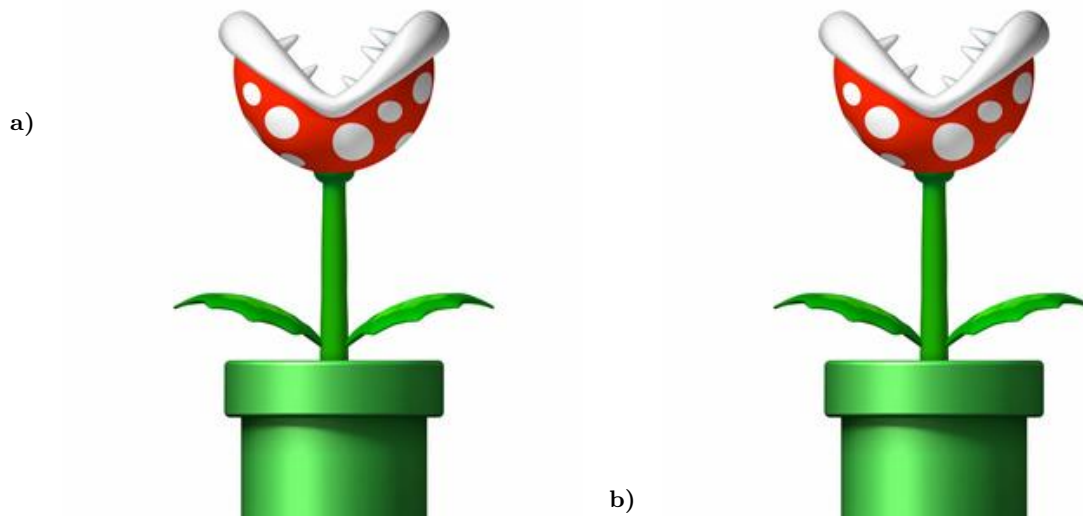
#### B [griffiths2013electrodynamics]

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### Índice de refracción

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (3.1)$$

For the figures, you can use this format:



**Fig. 3.1:** The explanation of your figures. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum

turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



# Resultados

---

Make a short summary of the content of the thesis [**reyes2018analytical**, **pena-gomar2006coherent**, **barrera1991optical**, **garcia2012multiple**] and then your conclusions. Also explain your future steps on this project

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.





# Conclusiones

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



## What I couldn't get into the main part

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## Bibliografía

---

- [1] A. Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013. (Visitado 14-08-2025) (citado en la pág. [3](#)).
- [2] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. [3](#), [4](#)).
- [3] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. [4](#), [5](#)).
- [4] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. [4-6](#)).
- [5] L. Novotny y B. Hecht. *Principles of nano-optics*. Cambridge university press, 2012. (Visitado 14-08-2025) (citado en la pág. [4](#)).
- [6] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008 (citado en las págs. [6-9](#)).