



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPIEDADES ÓPTICAS
DE ERITROCITOS SANOS Y ENFERMOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
FÍSICA BIOMÉDICA

PRESENTA:

Dana Larissa Luna González

DIRECTOR DE TESIS:

Director

Place, 2025



1. Datos del alumno

Luna

González

Dana Larissa

776 101 4262

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física Biomédica

421122680

2. Datos del tutor

Dr

Secretary (thesis director)

Last name

Last name

3. Datos del sinodal 1

Dr

President

Last name

Last name

4. Datos del sinodal 2

Dr

Vocal

Last name

Last name

5. Datos del sinodal 3

Dr

substitute 1

Last name

Last name

6. Datos del sinodal 4

Dr

Substitute 2

Last name

Last name

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo numérico de propiedades ópticas de eritrocitos sanos y enfermos

pages

2025

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Dana Larissa Luna González. Place, 2025

„*Wo es viel Licht ist, ist auch viel Schatten.*“
“*Donde hay mucha luz, la sombra es profunda.*”

Götz von Berlichingen, primer acto.

J. W. von Goethe

Resumen/Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Índice general

Resumen	vii
Introducción	1
1. Esparcimiento de luz por partículas	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Esparcimiento por una partícula aislada	6
1.3. Secciones transversales	6
1.4. Relaciones de Kramers-Kronig	8
2. Eritrocitos y sus patologías	9
2.1. What I got	9
3. Método de elemento finito	11
3.1. Convergencia	11
Resultados	15
Conclusiones	17
A. What I couldn't get into the main part	19

Introducción

It is recommended to fill in this part of the document with the following information:

- Your field: Context about the field your are working
- Motivation: Background about your thesis work and why did you choose this project and why is it important.
- Objectives: What question are you answering with your work.
- Methology: What are your secondary goals so you achieve your objective. Also, how are you answering yout question: which method or model.
- Structure: How is this thesis divides and what is the content of each chapter.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper,

felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Esparcimiento de luz por partículas

It is recommended to write a summary about the contents of this chapter as an introduction to them.

1.1. Fundamentos

La electrodinámica clásica es descrita mediante la fuerza de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell [1]. En el sistema internacional de unidades, las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial están dadas por [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.1d)$$

donde \mathbf{E} representa al campo eléctrico y \mathbf{B} al campo magnético; ρ_{tot} representa a la densidad de carga volumétrica y \mathbf{J}_{tot} a la densidad de corriente volumétrica; ϵ_0 a la permitividad eléctrica en el vacío y μ_0 a la permeabilidad magnética en el vacío. Las ecuaciones de Maxwell pueden desacoplarse para obtener ecuaciones de segundo orden separadas para \mathbf{E} y \mathbf{B} . En particular, al considerar un medio sin fuentes, es decir, $\rho_{tot} = 0$ y $\mathbf{J}_{tot} = 0$, y emplear la transformada de Fourier, se obtiene que los campos electromagnéticos satisfacen la ecuación de onda vectorial [2]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (1.2b)$$

Una de las posibles soluciones son las ondas planas expresadas como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.3b)$$

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 corresponden a las amplitudes de los campos, ω la frecuencia angular de la onda y \mathbf{k} el vector de onda. Para que se satisfagan las Ecs. (1.3), se tiene que cumplir la relación de dispersión dada por $k = \sqrt{\mu\epsilon} \omega$, donde ϵ y μ corresponden a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio [2]. La relación de dispersión se puede reescribir en términos del índice de refracción del material dado por

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\epsilon(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}}, \quad (1.4)$$

con lo que se obtiene,

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega c}{n(\omega)}}, \quad (1.5)$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Al analizar la energía total almacenada en los campos electromagnéticos y el trabajo que estos realizan sobre una distribución de cargas y corrientes, se establece el teorema del trabajo y la energía. A partir de este teorema, se introduce el concepto de energía transportada por los campos por unidad de tiempo y por unidad de área, el cual está representado por el vector de Poynting, \mathbf{S} , dado por [1]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (1.6)$$

Las Ecs. (3.1) determinan los campos que surgen a partir de corrientes y cargas presentes en la materia. No obstante, dichas ecuaciones no explican el origen de estas corrientes y cargas. Por ello, es necesario complementarlas con ecuaciones llamadas *relaciones constitutivas*, que describen cómo responde la materia ante la acción de los campos. Para un medio lineal, homogéneo e isótropo, las relaciones constitutivas están dadas por [3]

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.7b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.7c)$$

A partir de la forma integral de las ecuaciones de Maxwell, se deducen las condiciones de frontera sobre los campos electromagnéticos al atravesar una interfaz entre dos medios distintos. Cada uno de los medios está caracterizado por una función dieléctrica y una permeabilidad

magnética (ϵ_1, μ_1 para el medio 1 y ϵ_2, μ_2 para el medio 2). Para deducirlas, se considera un prisma de altura δ y área transversal A [Fig. 1.1a], y un circuito rectangular de altura δ y longitud l [Fig. 1.1b]. Bajo las suposiciones de medios lineales, homogéneos e isotropos, y en ausencia de fuentes externas ($\sigma_{\text{ext}} = 0$, $\mathbf{K}_{\text{ext}} = 0$), al emplear de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral y las Ecs. (1.7), se obtienen a las siguientes condiciones de frontera:

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0, \quad (1.8a) \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0, \quad (1.8b)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0, \quad (1.8c) \quad \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} = 0, \quad (1.8d)$$

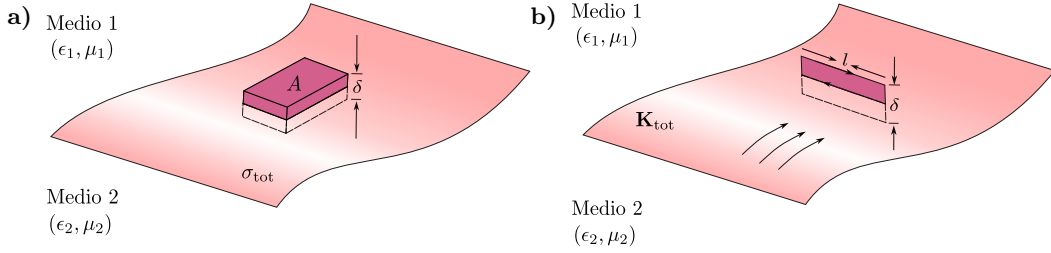


Fig. 1.1: Esquema de una interfaz que separa dos medios distintos. El medio 1 se encuentra caracterizado por una función dieléctrica ϵ_1 y una permeabilidad magnética μ_1 , mientras que el medio 2 se encuentra caracterizado por una función dieléctrica ϵ_2 y una permeabilidad magnética μ_2 . **a)** Interfaz con una densidad superficial de carga ρ_{tot} que es atravesada por un prisma rectangular de altura δ y área A . **b)** Interfaz con una densidad de corriente superficial \mathbf{K}_{tot} . La densidad de corriente atraviesa una superficie rectangular de altura δ y longitud l .

La función dieléctrica y el índice de refracción del medio son en general, funciones complejas de la frecuencia de la forma [4]

$$n(\omega) = \eta + i\kappa, \quad (1.9a)$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1 + i\epsilon_2, \quad (1.9b)$$

que se pueden determinar experimentalmente a través de mediciones de reflectancia y de la relación entre ambas dada por $n = \sqrt{\epsilon}$, de donde se obtiene [4]

$$\epsilon_1 = \eta^2 - \kappa^2, \quad (1.10)$$

$$\epsilon_2 = 2\eta\kappa, \quad (1.11)$$

$$\eta^2 = \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}, \quad (1.12)$$

$$\kappa = \frac{\epsilon_2}{2\eta}, \quad (1.13)$$

donde κ es llamado el coeficiente de extinción y determina la absorción óptica de las ondas electromagnéticas propagándose a través del medio [4].

1.2. Esparcimiento por una partícula aislada

1.3. Secciones transversales

En la sección anterior se consideró al sistema integrado por una partícula y por una distribución de cargas localizadas en un volumen finito, sometidas a un campo eléctrico homogéneo y a uno armónico, respectivamente. En esta sección, se introducen las denominadas secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, las cuales son cantidades macroscópicas medibles que proporcionan información sobre el sistema [5]. Para esto, se considera a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana armónica en el tiempo. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula W_{abs} , se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting¹ $\langle \vec{S} \rangle_t$ sobre una superficie cerrada A , que por simplicidad puede considerarse una esfera de radio r mayor al de la partícula [ver Fig. 1.2], es decir,

$$W_{abs} = - \int_A \langle \vec{S} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA,$$

donde, debido a que $\langle \vec{S} \rangle_t$ y \hat{e}_r están orientados en la misma dirección, el signo negativo convierte a W_{abs} en una cantidad positiva, de lo contrario, significaría que se genera energía dentro de la esfera [5].

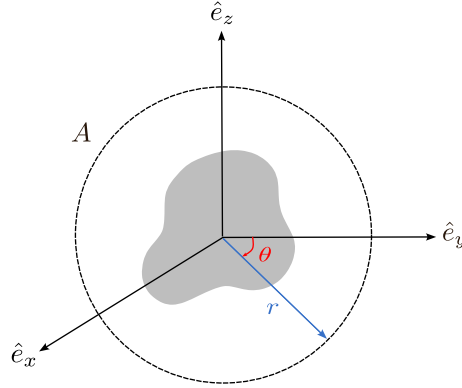


Fig. 1.2: Esquema de la superficie de integración A como una esfera de radio r centrada en el origen y que contiene a la partícula de interés.

Considerando la descomposición del vector de Poynting total en tres términos [5]

$$\langle \vec{S}^i \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*\}, \quad \langle \vec{S}^s \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*\}, \quad \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^*\}, \quad (1.14)$$

asociados al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente y donde $\text{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real de un número complejo, se tiene que

¹El promedio temporal del vector de Poynting es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} \vec{S}(t') dt'$, y para campos electromagnéticos del tipo ondas planas es $\langle \vec{S} \rangle_t = (1/2) \text{Re}[\vec{E} \times (\vec{B}/\mu)^*]$, donde $*$ denota la operación complejo conjugado [5].

$W_{abs} = W_i - W_s + W_{ext}$, donde [5]

$$W_i = - \int_A \langle \vec{S}^i \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (1.15)$$

$$W_s = \int_A \langle \vec{S}^s \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (1.16)$$

$$W_{ext} = - \int_A \langle \vec{S}^{ext} \rangle_t \cdot \hat{e}_r \, dA, \quad (1.17)$$

cuyos signos están colocados de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de \hat{e}_r . En particular, para un medio no absorbente, la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, por lo que W_i se anula, entonces

$$W_{ext} = W_{abs} + W_s. \quad (1.18)$$

Al considerar el campo incidente $\vec{E}_i = E \hat{e}_x$ y $\vec{H}_i = (1/\mu\omega) \vec{k} \times E \hat{e}_x$ en un medio no absorbente, W_a es independiente del radio r de la superficie de integración, por lo que se puede considerar a r lo suficientemente grande para estar en la región de campo lejano donde los campos se comportan como las Ecs. (??), por lo cual, W_{ext} está dado por [5]

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\},$$

donde I_i es la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting, y por consiguiente²,

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0}\}, \quad (1.19)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. La Ec. (1.19) puede ser reescrita como [5]

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} \quad (1.20)$$

donde $C_{abs} = W_{abs}/I_i$ y $C_{sca} = W_s/I_i$ corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Al sustituir las Ecs. (??) en la Ec. (1.16) se obtiene

$$C_{sca} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (1.21)$$

Las Ecs. (1.19)–(1.21) son propiedades macroscópicas y medibles, que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula.

Al reescribir el vector de amplitud de esparcimiento [Ec. (??)] en términos de la base

²Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones [5].

vectorial esférica se obtiene [5]

$$\vec{X} \cdot \hat{e}_x = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1), \quad (1.22)$$

y sustituyendo la Ec. (1.22) en la Ec. (1.19), la sección transversal de extinción es

$$C_{ext} = k \operatorname{Re} \left\{ \left(i\alpha (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \right)_{\theta=0} \right\} = k \operatorname{Re} \{-i\alpha\} = k \operatorname{Im}\{\alpha\}.$$

Si el esparcimiento es despreciable con respecto a la absorción, la extinción corresponde a la absorción en mayor medida, tal que [5]

$$C_{abs} = k \operatorname{Im}[\alpha]. \quad (1.23)$$

Además, al sustituir la Ec. (??) en la Ec. (1.21), se obtiene [5]

$$C_{sca} = \frac{|\alpha|^2 k^2}{6\pi}. \quad (1.24)$$

1.4. Relaciones de Kramers-Kronig

El estudio experimental de las propiedades ópticas lineales no siempre permite obtener todas las propiedades ópticas de una muestra. Afortunadamente, el principio de causalidad en la respuesta óptica de cualquier material permite extraer información a partir de los datos experimentales medidos. En el caso de un sistema de esparcimiento, el principio de causalidad impone que ninguna onda esparcida puede existir antes de que la onda incidente haya alcanzado alguna parte de la partícula esparcidora, cuyo tamaño se supone finito.

Las relaciones K-K describen una conexión entre las partes reales e imaginarias de funciones ópticas lineales complejas que describen fenómenos de interacción luz-materia, como la susceptibilidad, la función dieléctrica, el índice de refracción y la reflectividad. Las partes reales e imaginarias no son totalmente independientes, sino que están conectadas por una forma especial de transformadas de Hilbert, denominadas relaciones K-K. Además, al aplicar las relaciones K-K, es posible realizar la llamada inversión de datos ópticos, es decir, adquirir conocimiento sobre los fenómenos dispersivos mediante mediciones de los fenómenos absorptivos en todo el espectro (por ejemplo, con espectroscopia de transmisión) o viceversa.

En la espectroscopia óptica lineal, el análisis K-K tiene dos funciones típicas, según si la medición se basa en la transmisión o la reflexión de la luz. En el primer caso, se suele medir la parte imaginaria y la parte real se obtiene mediante una relación K-K, mientras que en el segundo, se mide la intensidad y se calcula la fase mediante la relación K-K adecuada. Sin embargo, al utilizar un elipsómetro, es posible obtener información experimental a partir de la función compleja obtenida mediante la medición. En tal caso, las relaciones K-K pueden utilizarse para comprobar la autoconsistencia de las partes reales e imaginarias medidas de los datos.

Eritrocitos y sus patologías

2.1. What I got

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem.

Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Método de elemento finito

It is recommended to write a summary about the contents of this chapter as an introduction to them.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

3.1. Convergencia

If you want to frame some equations because you consider them important, use the **tcolorbox** command. Also, you may use the **subequations** command sometimes. For example with the Maxwell's equations [griffiths2013electrodynamics]:

3. MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

Ecuaciones de Maxwell en el sistema internacional de unidades

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (3.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (3.1d)$$

and if you want them to appear in the analytical index just use the **index** command `\index{ }`.

If you want to show two equations in only one row, use the macros `\eqhalf`, for example `[hecht1998optics]`, for the Fourier transform ¹ or the Helholtz equation for \mathbf{E} y \mathbf{B} `[griffiths2013electrodynamics]`

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Índice de refracción

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (3.2)$$

For the figures, you can use this format:

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede.

¹ $\mathcal{F}[f(\mathbf{r}, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dt$, con \mathbf{k} una función de ω . La transformada de Fourier inversa es entonces $\mathcal{F}^{-1}[f(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega$.

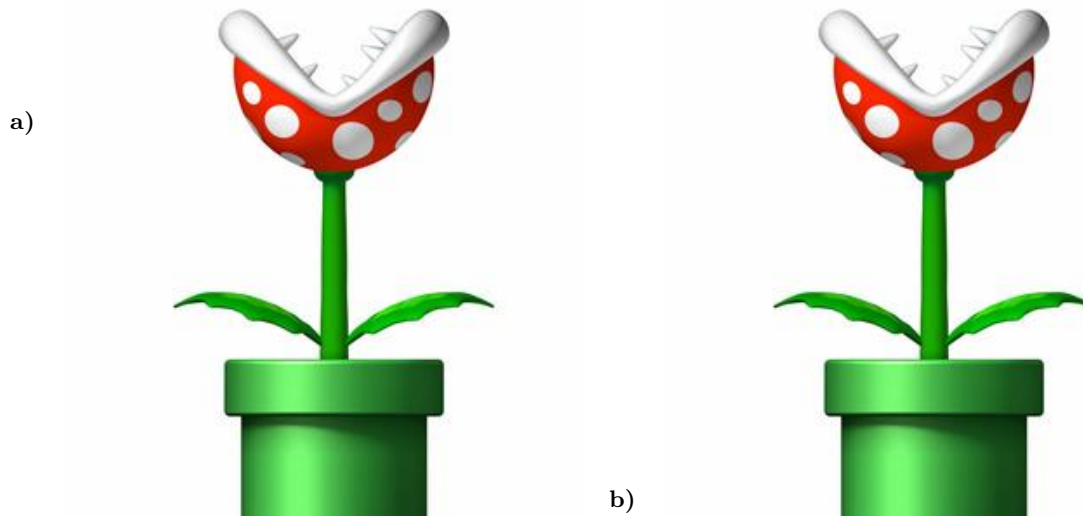


Fig. 3.1: The explanation of your figures. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

3. MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Resultados

Make a short summary of the content of the thesis [**reyes2018analytical**, **pena-gomar2006coherent**, **barrera1991optical**, **garcia2012multiple**] and then your conclusions. Also explain your future steps on this project

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Conclusiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

What I couldn't get into the main part

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Bibliografía

- [1] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023. (Visitado 16-06-2025) (citado en las págs. [3](#), [4](#)).
- [2] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021. (Visitado 17-06-2025) (citado en las págs. [3](#), [4](#)).
- [3] L. Novotny y B. Hecht. *Principles of nano-optics*. Cambridge university press, 2012 (citado en la pág. [4](#)).
- [4] S. A. Maier. *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. en. Springer US, New York, NY, 2007. DOI: [10.1007/0-387-37825-1](#). (Visitado 16-06-2025) (citado en la pág. [5](#)).
- [5] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008 (citado en las págs. [6-8](#)).