



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPIEDADES ÓPTICAS
DE ERITROCITOS SANOS Y ENFERMOS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
FÍSICA BIOMÉDICA

PRESENTA:

Dana Larissa Luna González

DIRECTOR DE TESIS:

Director

Place, 2025



1. Datos del alumno

Luna
González
Dana Larissa
776 101 4262
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física Biomédica
421122680

2. Datos del tutor

Dr
Secretary (thesis director)
Last name
Last name

3. Datos del sinodal 1

Dr
President
Last name
Last name

4. Datos del sinodal 2

Dr
Vocal
Last name
Last name

5. Datos del sinodal 3

Dr
substitute 1
Last name
Last name

6. Datos del sinodal 4

Dr
Substitute 2
Last name
Last name

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo numérico de propiedades ópticas de eritrocitos sanos y enfermos
pages
2025

Agradecimientos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Dana Larissa Luna González. Place, 2025

„Wo es viel Licht ist, ist auch viel Schatten.“
“Donde hay mucha luz, la sombra es profunda.”

Götz von Berlichingen, primer acto.

J. W. von Goethe

Resumen/Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Índice general

Acknowledgements	iii
Resumen	ix
Introducción	1
1. Esparcimiento de luz por partículas	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Secciones transversales	6
1.3. Relaciones de Kramers-Kronig	9
1.4. Relaciones Kramers-Kronig sustractivas	12
2. Eritrocitos y sus patologías	15
2.1. What I got	15
3. Método de elemento finito	17
3.1. Convergencia	17
Resultados	21
Conclusiones	23
A. What I couldn't get into the main part	25

Introducción

It is recommended to fill in this part of the document with the following information:

- Your field: Context about the field your are working
- Motivation: Backgroung about your thesis work and why did you choose this project and why is it important.
- Objectives: What question are you answering with your work.
- Methodology: What are your secondary goals so you achieve your objective. Also, how are you answering yout question: which method or model.
- Structure: How is this thesis divides and what is the content of each chapter.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper,

ÍNDICE GENERAL

felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Capítulo 1

Esparcimiento de luz por partículas

En este capítulo se estudia la interacción electromagnética entre la luz y la materia mediante una formulación basada en la función dieléctrica dependiente de la frecuencia. En la primera parte se presentan las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas para sistemas lineales, homogéneos e isótropos. A partir de estas ecuaciones, se analiza la solución particular correspondiente a ondas planas y se describe el flujo de energía transportado por una onda electromagnética mediante el vector de Poynting y su promedio temporal. En la segunda parte, se estudian las secciones transversales de absorción, esparcimiento y extinción, que permiten cuantificar la interacción entre una onda incidente y una partícula y se presenta su derivación a partir del vector de Poynting [6]. En la tercera parte se estudian las relaciones de Kramers–Kronig aplicadas a la función dieléctrica. Estas relaciones permiten vincular las partes real e imaginaria de cualquier función óptica lineal compleja, siempre que dicha función sea causal y analítica en el semiplano superior complejo [7]. Finalmente, se discuten las limitaciones de aplicar las relaciones de Kramers–Kronig a datos experimentales con un rango finito de frecuencias y se presenta la derivación de las relaciones de Kramers–Kronig sustractivas.

1.1. Fundamentos

Las ecuaciones de Maxwell, junto con la fuerza de Lorentz¹, describen a la electrodinámica clásica, que se centra en el origen y comportamiento de los campos electromagnéticos [1]. En unidades del Sistema Internacional, las ecuaciones de Maxwell se expresan en forma diferencial como [2]

¹La fuerza de Lorentz es la fuerza que experimenta una partícula de carga q que se desplaza con velocidad \mathbf{v} en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} . En unidades del Sistema Internacional está dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ [1].

1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{tot}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.1d)$$

donde se obvian las dependencias espaciales y temporales y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ es el campo magnético; ρ_{tot} es la **densidad de carga volumétrica** total, \mathbf{J}_{tot} la densidad de corriente volumétrica total; ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío y μ_0 la permeabilidad magnética en el vacío.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en términos del vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo H \mathbf{H} , dados por [2]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

donde \mathbf{P} es la polarización y \mathbf{M} es la magnetización, que corresponden al momento dipolar eléctrico y magnético, respectivamente, por unidad de volumen. La relación lineal más general entre \mathbf{E} y \mathbf{D} está dada por [3]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int \int^t \mathbf{E}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (1.4)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ es un tensor de rango dos y representa una función de respuesta² del material en el espacio y el tiempo [3].

La Ec. (1.4) muestra que el campo de desplazamiento eléctrico al tiempo t depende del campo eléctrico en todos los demás tiempos t' . Adicionalmente, el campo de desplazamiento eléctrico en un punto \mathbf{r} depende de los valores del campo eléctrico en puntos vecinos \mathbf{r}' [3]. A estas características, se les conoce como la no localidad temporal y espacial, respectivamente, entre \mathbf{D} y \mathbf{E} [3].

En un medio isótropo y homogéneo, $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ se reduce a una función escalar ϵ [3]; en este caso, tanto ϵ como \mathbf{E} son independientes de la posición y dependen únicamente de la diferencia temporal, es decir [3]

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t - t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (1.5)$$

²Las funciones de respuesta proporcionan información sobre el efecto de las interacciones electromagnéticas con el medio y sobre la estructura y propiedades del propio medio [4].

1.1 Fundamentos

de modo que la Ec. (1.5) es una convolución³ en el tiempo. Al aplicar la transformada de Fourier y emplear el teorema de la convolución⁴, se obtiene [6]

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (1.6)$$

y de manera análoga,

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega). \quad (1.7)$$

Así, en el espacio de frecuencias la respuesta del medio queda completamente caracterizada por una función dieléctrica y una permeabilidad magnética dependiente de la frecuencia.

Adicionalmente, en un medio lineal, homogéneo e isótropo, el vector \mathbf{P} es paralelo a \mathbf{E} y \mathbf{H} es paralelo a \mathbf{M} , con coeficientes de proporcionalidad $\varepsilon_0\chi(\omega)$ y $\chi_m(\omega)$, respectivamente, es decir [2]

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m(\omega)\mathbf{H}, \quad (1.9)$$

donde χ y χ_m son cantidades adimensionales. Al sustituir la Ec. (1.8) en la Ec. (1.2) y al comparar con la Ec. (1.6) se obtiene que

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \chi(\omega)], \quad (1.10)$$

y análogamente,

$$\mu(\omega) = \mu_0[1 + \chi_m(\omega)]. \quad (1.11)$$

En ausencia de fuentes externas ($\rho_{\text{tot}} = 0, \mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$) y en un medio lineal, homogéneo e isótropo, las Ecs. (1.1) pueden desacoplarse y, al aplicar la transformada de Fourier, se obtienen las ecuaciones de Helmholtz para \mathbf{E} y para \mathbf{B} [3]

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2\mathbf{B} + k^2\mathbf{B} = 0, \quad (1.12)$$

con k el número de onda. Una solución a la ecuación de Helmholtz son las ondas planas, en las que los campos están descritos por superficies de fase constante [2]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (1.13)$$

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 corresponden a las amplitudes de los campos, ω es la frecuencia angular de la onda y \mathbf{k} el vector de onda. Para que las Ecs. (1.13) satisfagan las Ecs. (1.12), se impone la relación de dispersión de una onda plana dada por $k = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega$, donde ε y μ corresponden a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio [3]. La relación de dispersión se puede reescribir en términos del índice de refracción del material dado por [3]

³La convolución de dos funciones $f(t), g(t)$ está dada por $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')g(t') dt'$ [5].

⁴El teorema de la convolución es $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$, donde \mathcal{F} es la transformada de Fourier de una función. En esta tesis se considera la convención de la transformada de Fourier como [5]

$$f(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad \text{y} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

donde la dependencia indica si se trata de la transformada de Fourier directa (dependencia en la frecuencia) o inversa (dependencia en el tiempo).

1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad (1.14)$$

con lo que se obtiene

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}, \quad (1.15)$$

donde $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

El flujo de energía que transporta una onda electromagnética en la dirección de propagación se describe mediante el vector de Poynting \mathbf{S} [2]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (1.16)$$

El vector de Poynting tiene unidades de energía por unidad de área y por unidad de tiempo. Para una onda armónica, \mathbf{E} y \mathbf{B} oscilan en el tiempo, de modo que \mathbf{S} también varía en el tiempo, por lo que se emplea el vector de Poynting promedio⁵ [6]

$$\langle \mathbf{S} \rangle_t = (1/2)\text{Re}\{\mathbf{E} \times (\mathbf{B}^*/\mu_0)\}, \quad (1.17)$$

donde $\text{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real de un número complejo y $*$ la operación complejo conjugado.

1.2. Secciones transversales

La interacción luz–materia puede describirse clásicamente mediante dos procesos fundamentales: la absorción y el esparcimiento, cuyo efecto conjunto se denomina extinción [6]. Experimentalmente, estos fenómenos se evidencian al comparar la potencia medida por un detector con y sin la presencia de una partícula iluminada por un campo electromagnético incidente (\mathbf{E}_{inc} , \mathbf{H}_{inc}), la cual genera un campo electromagnético esparcido (\mathbf{E}_{sca} , \mathbf{H}_{sca}) como se exemplifica en la Fig. 1.1 [6]. Para cuantificar este efecto de manera macroscópica, en esta sección se introducen las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, al considerar a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana [6]. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula W_{abs} , se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting $\langle \mathbf{S} \rangle_t$ sobre una superficie cerrada A , lo suficientemente grande para encontrarse en el campo lejano y que, por simplicidad, se considera una esfera de radio r que encierra a la partícula, como se muestra en la Fig. 1.2, es decir,

⁵text

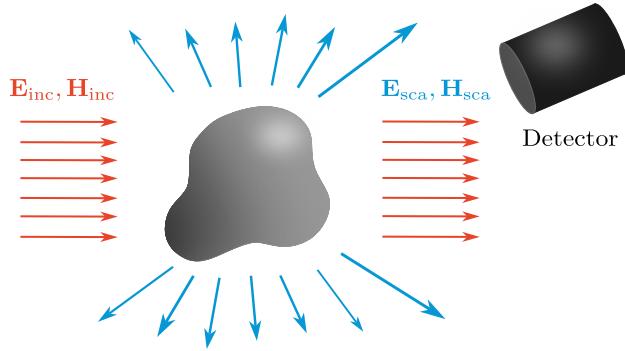


Fig. 1.1: Diagrama del problema de esparcimiento. El campo electromagnético ($\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}$) incide sobre una partícula arbitraria, produciendo el campo electromagnético esparcido ($\mathbf{E}_{\text{sca}}, \mathbf{H}_{\text{sca}}$).

$$W_{\text{abs}} = - \int_A \langle \mathbf{S} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.18)$$

donde $\langle \mathbf{S} \rangle_t$ y $\hat{\mathbf{e}}_r$ son paralelos y el signo negativo garantiza que W_{abs} sea una cantidad positiva definida, asumiendo que únicamente hay procesos de absorción y no de emisión [6]. Al descomponer

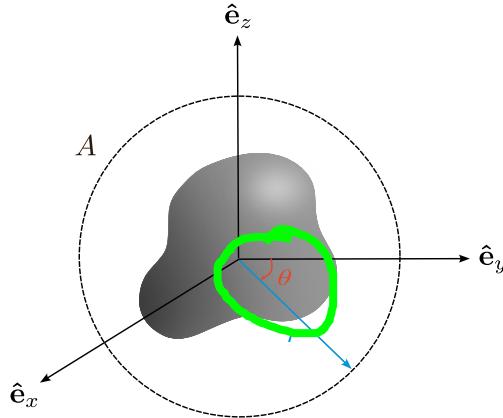


Fig. 1.2: Esquema de la superficie de integración A como una esfera de radio r centrada en el origen y que encierra a una partícula.

el vector de Poynting total en tres contribuciones [6]

$$\langle \mathbf{S}_{\text{inc}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.19a)$$

$$\langle \mathbf{S}_{\text{sca}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^*\}, \quad (1.19b)$$

$$\langle \mathbf{S}_{\text{ext}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^* + \mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.19c)$$

donde los subíndices **inc**, **sca** y **ext** se refieren al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente, se obtiene al integrar que $W_{\text{abs}} = W_{\text{inc}} - W_{\text{sca}} + W_{\text{ext}}$,

1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

donde [6]

$$W_{\text{inc}} = - \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{inc}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.20\text{a})$$

$$W_{\text{sca}} = \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{sca}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.20\text{b})$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{ext}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA. \quad (1.20\text{c})$$

Los signos de las Ecs. (1.20) se eligen de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de $\hat{\mathbf{e}}_r$. Como la energía que cruza la esfera es la misma que la que entra, W_{inc} se anula, entonces

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{abs}} + W_{\text{sca}}. \quad (1.21)$$

Dado que W_{abs} es independiente de r , cuyo valor determina que la contribución dominante del campo esparcido sea la dipolar, una partícula iluminada por un campo incidente $\mathbf{E}_{\text{inc}} = E \hat{\mathbf{e}}_x$, con $\mathbf{H}_{\text{inc}} = (1/\mu\omega) \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}$, puede describirse mediante un momento dipolar inducido \mathbf{p} caracterizado por una polarizabilidad α . Por lo tanto, el campo esparcido se describe como una onda plana de frecuencia angular ω dada por [6]

$$\mathbf{E}_p = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \mathbf{X} E_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_p, \quad (1.22)$$

donde \mathbf{X} es el vector de amplitud de esparcimiento⁶

$$\mathbf{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha [\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_x)] = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi). \quad (1.23)$$

Entonces, W_{ext} es [6]

$$W_{\text{ext}} = I_{\text{inc}} \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\},$$

con I_{inc} la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting del campo incidente, y por consiguiente⁷,

$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\}, \quad (1.24)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. Al sustituir las Ecs. (1.22) en la Ec. (1.20b) se obtiene

$$C_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi. \quad (1.25)$$

⁶Donde se reescribió a $\hat{\mathbf{e}}_x$ en términos de la base de vectores esféricos como $\hat{\mathbf{e}}_x = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$

⁷Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones [6].

1.3 Relaciones de Kramers-Kronig

Finalmente, la Ec. (1.21) puede ser reescrita como [6]

$$C_{\text{ext}} = C_{\text{abs}} + C_{\text{sca}}, \quad (1.26)$$

donde $C_{\text{abs}} = W_{\text{abs}}/I_{\text{inc}}$ y $C_{\text{sca}} = W_{\text{sca}}/I_{\text{inc}}$ corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Las Ecs. (1.24)–(1.26) son propiedades macroscópicas y medibles que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula [6].

1.3. Relaciones de Kramers-Kronig

Si bien el estudio del esparcimiento y la absorción de partículas suele realizarse a través de las secciones transversales, las propiedades ópticas dependen del material, el cual puede caracterizarse mediante su función dieléctrica. Estas propiedades se determinan experimentalmente mediante distintas técnicas espectroscópicas, como la espectroscopía de transmisión, basada en la ley de Beer-Lambert, en la cual las características del material se analizan a partir de la altura, el ancho y la posición de los picos espectrales [7]. Sin embargo, esta técnica solo proporciona información de la parte imaginaria de la función dieléctrica [7]. Aunque existen técnicas avanzadas de caracterización óptica, como la espectroscopía ellipsométrica, que permite obtener información sobre las partes real e imaginaria de la función dieléctrica mediante medidas de reflectancia y fase, su implementación experimental y el análisis de datos suele ser complejo [8]. Una alternativa de abordar esta limitación es mediante el principio de causalidad, que permite obtener información complementaria a partir de los datos experimentales [7]. A partir del principio de causalidad y de la analiticidad de una función óptica lineal compleja como la susceptibilidad, la función dieléctrica, el índice de refracción o la reflectividad, se deducen las relaciones de Kramers-Kronig (KK), las cuales describen la conexión entre las partes real e imaginaria de dicha función [7]. En esta sección se considera un material homogéneo e isótropo caracterizado por una función óptica lineal compleja, en este caso, la función dieléctrica, definida en un espacio de frecuencias complejo.

Las transformadas de Fourier temporales directa e inversa de \mathbf{D} se definen como [3]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt', \quad \text{y} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.27)$$

respectivamente. Al sustituir la Ec. (1.6) en la transformada de Fourier inversa de las Ecs. (1.27), se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.28)$$

y al expresar $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ mediante su transformada de Fourier, la Ec. (1.28) se reescribe como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt', \quad (1.30)$$

1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

donde además se consideró que los órdenes de integración se pueden intercambiar dado que la integración se realiza en el mismo intervalo $(-\infty, \infty)$.

Al reescribir el campo eléctrico como⁸

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau, \quad (1.32)$$

sumar $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t') - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$ y multiplicar por $\varepsilon_0/\varepsilon_0$ a la Ec. (1.30), simplificando se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right], \quad (1.33)$$

donde $G(\tau)$ es [3]

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 \right] e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (1.34)$$

con $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$ la permitividad eléctrica relativa. Al aplicar la transformada de Fourier a la Ec. (1.34), se obtiene una expresión para la permitividad eléctrica relativa

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.35)$$

Las Ecs. (1.33) y (1.34) muestran que el campo de desplazamiento eléctrico al tiempo t depende del campo eléctrico en todos los demás tiempos t' . A esta característica, se le conoce como la no localidad temporal entre \mathbf{D} y \mathbf{E} [3].

De modo que las Ecs. (1.33) y (1.35) sean causales, es necesario imponer condiciones que garanticen que la Ec. (1.34) se anule para $\tau < 0$, lo que se traduce en que al tiempo t , únicamente valores del campo eléctrico previos a ese tiempo determinan el vector de desplazamiento eléctrico [3]. De esta forma, las Ecs. (1.33) y (1.35) se reescriben como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right], \quad (1.36a)$$

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 = \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.36b)$$

 Dado que \mathbf{E} y \mathbf{D} son funciones reales, $G(\tau)$ también lo es. Si se considera a la Ec. (1.36b) como una representación de $\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0$ en el plano complejo, entonces la Ec. (1.36b) es analítica en el semiplano superior complejo siempre que $G(\tau)$ sea finita para toda τ [3]. Para que dicha analiticidad se extienda hasta el eje real, es necesario imponer la condición $G(\tau) \rightarrow 0$ cuando

⁸Donde se realiza el cambio de variable $\tau = t - t'$ y se emplea la función constante [5]

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = \delta(\tau), \quad (1.31)$$

con $\delta(\tau)$ la función delta de Dirac, que cumple con $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0)$ [5].

$\tau \rightarrow \infty$ [3]⁹. Como $\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1$ es una función analítica en el semiplano superior complejo incluyendo el eje real, la función $[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]/(\omega' - \omega)$ también lo es, salvo por la singularidad en $\omega' = \omega$. De acuerdo con el teorema integral de Cauchy¹⁰, para un contorno cerrado C que no encierre ω_0 se cumple [5]

$$\oint_C \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' = 0. \quad (1.37)$$

Para determinar el contorno apropiado de modo que se pueda emplear la Ec. (1.37), se considera a ω un punto sobre el eje real y a C la unión de cuatro curvas con representaciones paramétricas como se muestra en la Fig. 1.3 y que están dadas por [6]

$$\begin{aligned} C_1 : \omega' &= \Omega, & -A \leq \Omega &\leq \omega - a, \\ C_2 : \omega' &= \omega - ae^{-i\Omega}, & 0 \leq \Omega &\leq \pi, \\ C_3 : \omega' &= \Omega, & \omega + a \leq \Omega &\leq A, \\ C_4 : \omega' &= Ae^{i\Omega}, & 0 \leq \Omega &\leq \pi. \end{aligned}$$

Así, la Ec. (1.37) se reescribe como

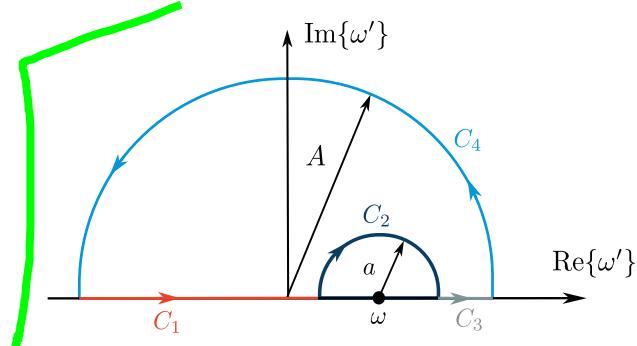


Fig. 1.3: Contorno de integración C conformado por cuatro curvas.

$$\begin{aligned} \int_A^{\omega-a} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^A \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \\ + \int_0^\pi \frac{iA e^{i\Omega} [\varepsilon(A e^{i\Omega})/\varepsilon_0 - 1]}{A e^{i\Omega} - \omega} d\Omega - \int_0^\pi i [\varepsilon(\omega - ae^{-i\Omega})/\varepsilon_0 - 1] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes la Ec. (1.36b), se obtiene

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{iG(0)}{\omega} - \frac{G'(0)}{\omega^2} + \frac{iG''(0)}{\omega^3} + \dots,$$

donde se empleó que $G(\tau) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow \infty$. Además, dado que $G(\tau)$ es causal, $G(0) = 0$; por lo que el primer término se anula al igual que los términos que decaen más rápido que $1/\omega^2$ a frecuencias altas. Con ello, por el lema de Jordan¹¹, la integral sobre el segmento C_4 es 0 [6]. Por otro lado, al considerar el límite de $a \rightarrow 0$, la integral sobre C_2 es $i\pi[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]$ [3]. Finalmente,

⁹Esto se cumple para dieléctricos; en conductores, en cambio, se tiene que $G(\tau) \rightarrow \sigma/\varepsilon_0$ cuando $\tau \rightarrow \infty$ [3].

¹⁰El teorema integral de Cauchy establece que si una función $f(z)$ es analítica dentro y sobre un contorno cerrado C , entonces $\oint_C f(z)/(z - z_0) dz = 0$ [5].

¹¹El lema de Jordan establece que

1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

las integrales sobre los segmentos C_1 y C_3 equivalen a

$$\int_A^{\omega-a} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^A \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega \quad (1.38)$$

donde P.V. denota el valor principal de la integral [5]. Por lo tanto, se obtiene

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' = i\pi[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]. \quad (1.39)$$

Al separar la Ec. (1.39) en parte real e imaginaria, se obtienen las relaciones de Kramers-Kronig

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.40)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.41)$$

Dada la Ec. (1.36b), se deduce que $\varepsilon(-\omega)/\varepsilon_0 = \varepsilon^*(\omega^*)/\varepsilon_0$. Esta propiedad de simetría permite reescribir las Ecs. (1.40) y (1.41) en frecuencias positivas como

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.42a)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = -\frac{2\omega}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (1.42b)$$



1.4. Relaciones Kramers-Kronig sustractivas

A pesar de que las relaciones de Kramers-Kronig se han aplicado ampliamente en el análisis de datos experimentales [9], su implementación práctica enfrenta dos limitaciones fundamentales: los errores experimentales y el intervalo finito de frecuencias en el que suelen obtenerse los datos [9]. De hecho, cuando las relaciones de KK se evalúan sobre un rango espectral limitado, el error en la reconstrucción de la parte real o imaginaria de la función óptica tiende a incrementarse monótonamente con la frecuencia [10]. Para mitigar este problema, Bachrach y Brown [11] propusieron las relaciones de Kramers-Kronig sustractivas (SSKK), las cuales incorporan un punto de anclaje experimental es decir, el valor conocido de la función óptica en una frecuencia particular, con el fin de mejorar significativamente la precisión del análisis vía KK [7]. En esta sección se desarrollan las relaciones SSKK para la función dieléctrica considerando un punto de referencia en una frecuencia ω_1 , cuyo valor experimental se asume conocido y se puede escribir como

$$\frac{\varepsilon'(\omega_1)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{\omega' - \omega_1} d\omega', \quad (1.43)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega_1)}{\varepsilon_0} = -\frac{2\omega_1}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega_1} d\omega'. \quad (1.44)$$

Al restar las Ecs. (1.43) y (1.44) de las relaciones de KK correspondientes para una ω arbitraria y simplificando, se obtienen las relaciones de Kramers-Kronig sustractivas [7]

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon'(\omega_1)}{\varepsilon_0} + \frac{2(\omega^2 - \omega_1^2)}{\pi} \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)} d\omega', \quad (1.45)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon''(\omega_1)}{\varepsilon_0} - \frac{2(\omega - \omega_1)}{\pi} \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{[\omega'^2 + \omega \omega_1][\varepsilon'(\omega') - 1]/\varepsilon_0}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)} d\omega'. \quad (1.46)$$

Capítulo 2

Eritrocitos y sus patologías

2.1. What I got

Los eritrocitos son

Capítulo 3

Método de elemento finito

It is recommended to write a summary about the contents of this chapter as an introduction to them.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

3.1. Convergencia

If you want to frame some equations because you consider them important, use the **tcolorbox** command. Also, you may use the **subequations** command sometimes. Fot example with the Maxwell's equations [**griffiths2013electrodynamics**]:

and if you want them to appear in the analytical index just use the **index** command `\index{}`.

If you want to show two equations in only one row, use the macros **\eqhalf**, for example [**hecht1998optics**] , for the Fourier transform ¹ or the Helholtz equation for **E** y

¹ $\mathcal{F}[f(\mathbf{r}, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dt$, con \mathbf{k} una función de ω . La transformada de Fourier inversa es entonces $\mathcal{F}^{-1}[f(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega$.

3. MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

B [griffiths2013electrodynamics]

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Índice de refracción

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\epsilon(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (3.1)$$

For the figures, you can use this format:

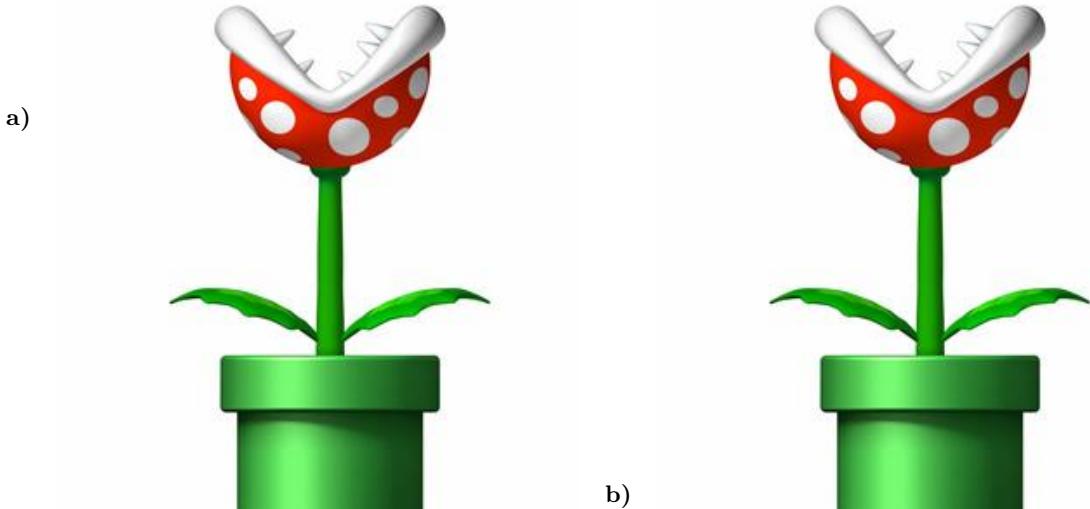


Fig. 3.1: The explanation of your figures. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

3.1 Convergencia

turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Resultados

Make a short summary of the content of the thesis [**reyes2018analytical**, **pena-gomar2006coherent**, **barrera1991optical**, **garcia2012multiple**] and then your conclusions. Also explain your future steps on this project

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Conclusiones

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

 Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Apéndice A

What I couldn't get into the main part

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien.

A. WHAT I COULDN'T GET INTO THE MAIN PART

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Bibliografía

- 
- [1] A. Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013. (Visitado 14-08-2025) (citado en la pág. 3).
 - [2] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. 3-6).
 - [3] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. 4, 5, 9-11).
 - [4] General Properties of Electromagnetic Response Functions. En *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*. Volumen 24, páginas 41-85. Elsevier, 1989. DOI: [10.1016/B978-0-444-87366-8.50008-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-87366-8.50008-4). ISSN: 0167-7837 (citado en la pág. 4).
 - [5] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. 5, 10-12).
 - [6] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008 (citado en las págs. 3, 5-9, 11).
 - [7] Kramers-Kronig Relations and Sum Rules in Linear Optics. en. En *Kramers-Kronig Relations in Optical Materials Research*. Volumen 110, páginas 27-48. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. DOI: [10.1007/3-540-27316-6_4](https://doi.org/10.1007/3-540-27316-6_4). Series Title: Springer Series in Optical Sciences (citado en las págs. 3, 9, 12, 13).
 - [8] H. Fujiwara. *Spectroscopic ellipsometry: principles and applications*. John Wiley & Sons, 2007. (Visitado 13-11-2025) (citado en la pág. 9).
 - [9] S. Nakov, E. Sobakinskaya y F. Müh. A unified framework for the numerical evaluation of the $Q<\mathit{mi}\> Q</\mathit{mi}>$ -subtractive Kramers-Kronig relations and application to the reconstruction of optical constants of quartz. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, **288**:122157, 2023. DOI: [10.1016/j.saa.2022.122157](https://doi.org/10.1016/j.saa.2022.122157). (Visitado 14-11-2025) (citado en la pág. 12).
 - [10] G. W. Milton, D. J. Eyre y J. V. Mantese. Finite Frequency Range Kramers-Kronig Relations: Bounds on the Dispersion. en. *Physical Review Letters*, **79**(16):3062-3065, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.3062](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.3062). (Visitado 14-11-2025) (citado en la pág. 12).
 - [11] R. Z. Bachrach y F. C. Brown. Exciton-Optical Properties of TlBr and TlCl. en. *Physical Review B*, **1**(2):818-831, 1970. DOI: [10.1103/PhysRevB.1.818](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.818). (Visitado 15-11-2025) (citado en la pág. 12).