



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO NUMÉRICO DE PROPIEDADES ÓPTICAS  
DE ERITROCITOS SANOS Y ENFERMOS

T E S I S  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**FÍSICA BIOMÉDICA**

PRESENTA:

**Dana Larissa Luna González**

DIRECTOR DE TESIS:

Director

Place, 2025





1. Datos del alumno

Luna  
González  
Dana Larissa  
776 101 4262  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física Biomédica  
421122680

2. Datos del tutor

Dr  
Secretary (thesis director)  
Last name  
Last name

3. Datos del sinodal 1

Dr  
President  
Last name  
Last name

4. Datos del sinodal 2

Dr  
Vocal  
Last name  
Last name

5. Datos del sinodal 3

Dr  
substitute 1  
Last name  
Last name

6. Datos del sinodal 4

Dr  
Substitute 2  
Last name  
Last name

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo numérico de propiedades ópticas de eritrocitos sanos y enfermos  
pages  
2025







## Agradecimientos

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Dana Larissa Luna González. Place, 2025

*„Wo es viel Licht ist, ist auch viel Schatten.“*  
*“Donde hay mucha luz, la sombra es profunda.”*

*Götz von Berlichingen, primer acto.*

*J. W. von Goethe*





## Resumen/Abstract

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Índice general

<b>Acknowledgements</b>	<b>iii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Esparcimiento de luz por partículas</b>	<b>3</b>
1.1. Fundamentos . . . . .	3
1.2. Secciones transversales . . . . .	6
1.3. Relaciones de Kramers-Kronig . . . . .	9
1.4. Relaciones Kramers-Kronig sustractivas . . . . .	12
<b>2. Eritrocitos y sus patologías</b>	<b>15</b>
2.1. Morfología y características . . . . .	15
2.2. Enfermedades y deformaciones de eritrocitos . . . . .	16
2.3. Propiedades ópticas . . . . .	16
<b>3. Método de elemento finito</b>	<b>17</b>
3.1. Convergencia . . . . .	17
<b>Resultados</b>	<b>21</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>A. What I couldn't get into the main part</b>	<b>25</b>

# Introducción

---

It is recommended to fill in this part of the document with the following information:

- Your field: Context about the field your are working
- Motivation: Backgroung about your thesis work and why did you choose this project and why is it important.
- Objectives: What question are you answering with your work.
- Methodology: What are your secondary goals so you achieve your objective. Also, how are you answering yout question: which method or model.
- Structure: How is this thesis divides and what is the content of each chapter.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper,

## ÍNDICE GENERAL

---

felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

---

## Capítulo 1

# Esparcimiento de luz por partículas

---

En este capítulo se estudia la interacción electromagnética entre la luz y la materia mediante una formulación basada en la función dieléctrica dependiente de la frecuencia. En la primera parte se presentan las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas para sistemas lineales, homogéneos e isótropos. A partir de estas ecuaciones, se analiza la solución particular correspondiente a ondas planas y se describe el flujo de energía transportado por una onda electromagnética mediante el vector de Poynting y su promedio temporal. En la segunda parte, se estudian las secciones transversales de absorción, esparcimiento y extinción, que permiten cuantificar la interacción entre una onda incidente y una partícula y se presenta su derivación a partir del vector de Poynting [1]. En la tercera parte se estudian las relaciones de Kramers–Kronig aplicadas a la función dieléctrica. Estas relaciones permiten vincular las partes real e imaginaria de cualquier función óptica lineal compleja, siempre que dicha función sea causal y analítica en el semiplano superior complejo [2]. Finalmente, se discuten las limitaciones de aplicar las relaciones de Kramers–Kronig a datos experimentales con un rango finito de frecuencias y se presenta la derivación de las relaciones de Kramers–Kronig sustractivas.

### 1.1. Fundamentos

Las ecuaciones de Maxwell, junto con la fuerza de Lorentz<sup>1</sup>, describen a la electrodinámica clásica, que se centra en el origen y comportamiento de los campos electromagnéticos [3]. En unidades del Sistema Internacional, las ecuaciones de Maxwell se expresan en forma diferencial como [4]

---

<sup>1</sup>La fuerza de Lorentz es la fuerza que experimenta una partícula de carga  $q$  que se desplaza con velocidad  $\mathbf{v}$  en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y un campo magnético  $\mathbf{B}$ . En unidades del Sistema Internacional está dada por  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  [3].

## 1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

---

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss eléctrica}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss magnética}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday-Lenz}) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{tot}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.1d)$$

donde se obvian las dependencias espaciales y temporales y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  es el campo magnético;  $\rho_{\text{tot}}$  es la densidad de carga volumétrica total,  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  la densidad de corriente volumétrica total;  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío y  $\mu_0$  la permeabilidad magnética en el vacío.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en términos del vector de desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  y el campo H  $\mathbf{H}$ , dados por [4]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la polarización y  $\mathbf{M}$  es la magnetización, que corresponden al momento dipolar eléctrico y magnético, respectivamente, por unidad de volumen. La relación lineal más general entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  está dada por [5]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int \int \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (1.4)$$

donde  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  es un tensor de rango dos y representa una función de respuesta<sup>2</sup> del material en el espacio y el tiempo [5].

La Ec. (1.4) muestra que el campo de desplazamiento eléctrico al tiempo  $t$  depende del campo eléctrico en todos los demás tiempos  $t'$ . Adicionalmente, el campo de desplazamiento eléctrico en un punto  $\mathbf{r}$  depende de los valores del campo eléctrico en puntos vecinos  $\mathbf{r}'$  [5]. A estas características, se les conoce como la no localidad temporal y espacial, respectivamente, entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  [5].

En un medio isótropo y homogéneo,  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  se reduce a una función escalar  $\epsilon$  [5]; en este caso, tanto  $\epsilon$  como  $\mathbf{E}$  son independientes de la posición y dependen únicamente de la diferencia temporal, es decir [5]

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t - t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (1.5)$$

---

<sup>2</sup>Las funciones de respuesta proporcionan información sobre el efecto de las interacciones electromagnéticas con el medio y sobre la estructura y propiedades del propio medio [6].

## 1.1 Fundamentos

---

de modo que la Ec. (1.5) es una convolución<sup>3</sup> en el tiempo. Al aplicar la transformada de Fourier y emplear el teorema de la convolución<sup>4</sup>, se obtiene [1]

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (1.6)$$

y de manera análoga,

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega). \quad (1.7)$$

Así, en el espacio de frecuencias la respuesta del medio queda completamente caracterizada por una función dieléctrica y una permeabilidad magnética dependiente de la frecuencia.

Adicionalmente, en un medio lineal, homogéneo e isótropo, el vector  $\mathbf{P}$  es paralelo a  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  es paralelo a  $\mathbf{M}$ , con coeficientes de proporcionalidad  $\varepsilon_0\chi(\omega)$  y  $\chi_m(\omega)$ , respectivamente, es decir [4]

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m(\omega)\mathbf{H}, \quad (1.9)$$

donde  $\chi$  y  $\chi_m$  son cantidades adimensionales. Al sustituir la Ec. (1.8) en la Ec. (1.2) y al comparar con la Ec. (1.6) se obtiene que

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \chi(\omega)], \quad (1.10)$$

y análogamente,

$$\mu(\omega) = \mu_0[1 + \chi_m(\omega)]. \quad (1.11)$$

En ausencia de fuentes externas ( $\rho_{\text{tot}} = 0, \mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$ ) y en un medio lineal, homogéneo e isótropo, las Ecs. (1.1) pueden desacoplarse y, al aplicar la transformada de Fourier, se obtienen las ecuaciones de Helmholtz para  $\mathbf{E}$  y para  $\mathbf{B}$  [5]

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2\mathbf{B} + k^2\mathbf{B} = 0, \quad (1.12)$$

con  $k$  el número de onda. Una solución a la ecuación de Helmholtz son las ondas planas, en las que los campos están descritos por superficies de fase constante [4]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  corresponden a las amplitudes de los campos,  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda y  $\mathbf{k}$  el vector de onda. Para que las Ecs. (1.13) satisfagan las Ecs. (1.12), se impone la relación de dispersión de una onda plana dada por  $k = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega$ , donde  $\varepsilon$  y  $\mu$  corresponden a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio [5]. La relación de dispersión se puede reescribir en términos del índice de refracción del material dado por [5]

---

<sup>3</sup>La convolución de dos funciones  $f(t), g(t)$  está dada por  $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')g(t') dt'$  [7].

<sup>4</sup>El teorema de la convolución es  $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ , donde  $\mathcal{F}$  es la transformada de Fourier de una función. En esta tesis se considera la convención de la transformada de Fourier como [7]

$$f(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad \text{y} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

donde la dependencia indica si se trata de la transformada de Fourier directa (dependencia en la frecuencia) o inversa (dependencia en el tiempo).

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad (1.14)$$

con lo que se obtiene

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}, \quad (1.15)$$

donde  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  es la velocidad de la luz en el vacío.

El flujo de energía que transporta una onda electromagnética en la dirección de propagación se describe mediante el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  [4]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (1.16)$$

El vector de Poynting tiene unidades de energía por unidad de área y por unidad de tiempo. Para una onda armónica,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  oscilan en el tiempo, de modo que  $\mathbf{S}$  también varía en el tiempo, por lo que se emplea el vector de Poynting promedio<sup>5</sup> [1]

$$\langle \mathbf{S} \rangle_t = (1/2)\text{Re}\{\mathbf{E} \times (\mathbf{B}^*/\mu_0)\}, \quad (1.17)$$

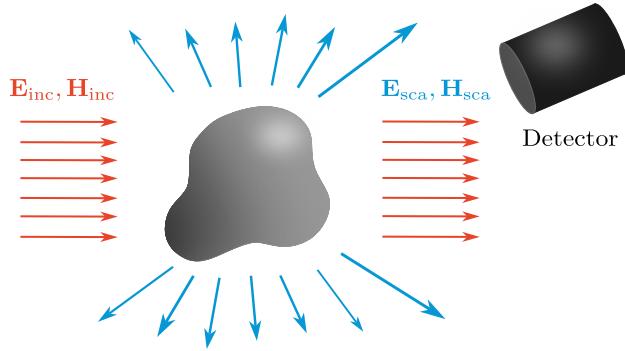
donde  $\text{Re}\{\cdot\}$  denota la parte real de un número complejo y  $*$  la operación complejo conjugado.

## 1.2. Secciones transversales

La interacción luz–materia puede describirse clásicamente mediante dos procesos fundamentales: la absorción y el esparcimiento, cuyo efecto conjunto se denomina extinción [1]. Experimentalmente, estos fenómenos se evidencian al comparar la potencia medida por un detector con y sin la presencia de una partícula iluminada por un campo electromagnético incidente ( $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{inc}}$ ), la cual genera un campo electromagnético esparcido ( $\mathbf{E}_{\text{sca}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{sca}}$ ) como se ejemplifica en la Fig. 1.1 [1]. Para cuantificar este efecto de manera macroscópica, en esta sección se introducen las secciones transversales de extinción, absorción y esparcimiento, al considerar a la partícula embebida en un medio no absorbente e iluminada por una onda plana [1]. Teniendo en cuenta lo anterior, la energía transportada por los campos electromagnéticos y que es absorbida por la partícula  $W_{\text{abs}}$ , se calcula al integrar el promedio temporal del vector de Poynting  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$  sobre una superficie cerrada  $A$ , lo suficientemente grande para encontrarse en el campo lejano y que, por simplificación, se considera una esfera de radio  $r$  que encierra a la partícula, como se muestra en la Fig. 1.2, es decir,

---

<sup>5</sup>text



**Fig. 1.1:** Diagrama del problema de esparcimiento. El campo electromagnético ( $\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}}$ ) incide sobre una partícula arbitraria, produciendo el campo electromagnético esparcido ( $\mathbf{E}_{\text{sca}}, \mathbf{H}_{\text{sca}}$ ).

$$W_{\text{abs}} = - \int_A \langle \mathbf{S} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.18)$$

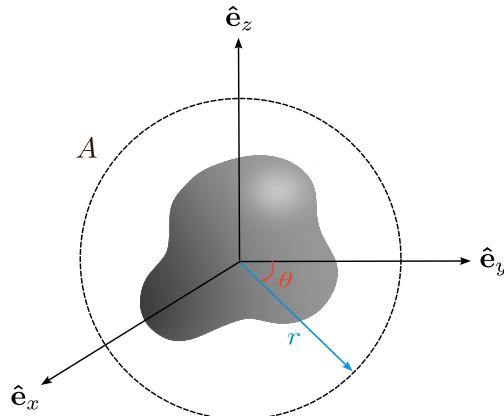
donde  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$  y  $\hat{\mathbf{e}}_r$  son paralelos y el signo negativo garantiza que  $W_{\text{abs}}$  sea una cantidad positiva definida, asumiendo que únicamente hay procesos de absorción y no de emisión [1]. Al descomponer el vector de Poynting total en tres contribuciones [1]

$$\langle \mathbf{S}_{\text{inc}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.19a)$$

$$\langle \mathbf{S}_{\text{sca}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^*\}, \quad (1.19b)$$

$$\langle \mathbf{S}_{\text{ext}} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{sca}}^* + \mathbf{E}_{\text{sca}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*\}, \quad (1.19c)$$

donde los subíndices inc, sca y ext se refieren al campo incidente, al campo esparcido y a la interacción entre los dos anteriores, respectivamente, se obtiene al integrar que  $W_{\text{abs}} = W_{\text{inc}} - W_{\text{sca}} + W_{\text{ext}}$ ,



**Fig. 1.2:** Esquema de la superficie de integración  $A$  como una esfera de radio  $r$  centrada en el origen y que encierra a una partícula.

## 1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

---

donde [1]

$$W_{\text{inc}} = - \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{inc}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.20\text{a})$$

$$W_{\text{sca}} = \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{sca}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA, \quad (1.20\text{b})$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_A \langle \mathbf{S}_{\text{ext}} \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \, dA. \quad (1.20\text{c})$$

Los signos de las Ecs. (1.20) se eligen de forma que sean cantidades positivas considerando las direcciones de los vectores de Poynting y de  $\hat{\mathbf{e}}_r$ . Como la energía que cruza la esfera es la misma que la entra,  $W_{\text{inc}}$  se anula, entonces

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{abs}} + W_{\text{sca}}. \quad (1.21)$$

Dado que  $W_{\text{abs}}$  es independiente de  $r$ , cuyo valor determina que la contribución dominante del campo esparcido sea la dipolar, una partícula iluminada por un campo incidente  $\mathbf{E}_{\text{inc}} = E \hat{\mathbf{e}}_x$ , con  $\mathbf{H}_{\text{inc}} = (1/\mu\omega) \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}$ , puede describirse mediante un momento dipolar inducido  $\mathbf{p}$  caracterizado por una polarizabilidad  $\alpha$ . Por lo tanto, el campo esparcido se describe como una onda plana de frecuencia angular  $\omega$  dada por [1]

$$\mathbf{E}_p = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \mathbf{X} E_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_p = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_p, \quad (1.22)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el vector de amplitud de esparcimiento<sup>6</sup>

$$\mathbf{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha [\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_x)] = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha (-\cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi). \quad (1.23)$$

Entonces,  $W_{\text{ext}}$  es [1]

$$W_{\text{ext}} = I_{\text{inc}} \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\},$$

con  $I_{\text{inc}}$  la irradiancia de la onda incidente, que corresponde a la magnitud del vector de Poynting del campo incidente, y por consiguiente<sup>7</sup>,

$$C_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\}, \quad (1.24)$$

que es la sección transversal de extinción y que posee dimensiones de área. Al sustituir las Ecs. (1.22) en la Ec. (1.20b) se obtiene

$$C_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi. \quad (1.25)$$

---

<sup>6</sup>Donde se reescribió a  $\hat{\mathbf{e}}_x$  en términos de la base de vectores esféricos como  $\hat{\mathbf{e}}_x = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$

<sup>7</sup>Debido al teorema óptico, la extinción sólo depende de la amplitud de esparcimiento en la dirección de propagación y es el efecto combinado de la absorción en la partícula y el esparcimiento por la partícula en todas las direcciones [1].

### 1.3 Relaciones de Kramers-Kronig

---

Finalmente, la Ec. (1.21) puede ser reescrita como [1]

$$C_{\text{ext}} = C_{\text{abs}} + C_{\text{sca}}, \quad (1.26)$$

donde  $C_{\text{abs}} = W_{\text{abs}}/I_{\text{inc}}$  y  $C_{\text{sca}} = W_{\text{sca}}/I_{\text{inc}}$  corresponden a las secciones transversales de absorción y esparcimiento, respectivamente. Las Ecs. (1.24)–(1.26) son propiedades macroscópicas y medibles que proveen información sobre la energía absorbida y esparcida por una partícula [1].

### 1.3. Relaciones de Kramers-Kronig

Si bien el estudio del esparcimiento y la absorción de partículas suele realizarse a través de las secciones transversales, las propiedades ópticas dependen del material, el cual puede caracterizarse mediante su función dieléctrica. Estas propiedades se determinan experimentalmente mediante distintas técnicas espectroscópicas, como la espectroscopía de transmisión, basada en la ley de Beer–Lambert, en la cual las características del material se analizan a partir de la altura, el ancho y la posición de los picos espectrales [2]. Sin embargo, esta técnica solo proporciona información de la parte imaginaria de la función dieléctrica [2]. Aunque existen técnicas avanzadas de caracterización óptica, como la espectroscopía elipsométrica, que permite obtener información sobre las partes real e imaginaria de la función dieléctrica mediante medidas de reflectancia y fase, su implementación experimental y el análisis de datos suele ser complejo [8]. Una alternativa de abordar esta limitación es mediante el principio de causalidad, que permite obtener información complementaria a partir de los datos experimentales [2]. A partir del principio de causalidad y de la analiticidad de una función óptica lineal compleja como: la susceptibilidad, la función dieléctrica, el índice de refracción o la reflectividad, se deducen las relaciones de Kramers–Kronig (KK), las cuales describen la conexión entre las partes real e imaginaria de dicha función [2]. En esta sección se considera un material homogéneo e isotropo caracterizado por una función óptica lineal compleja, en este caso, la función dieléctrica, definida en un espacio de frecuencias complejo.

Las transformadas de Fourier temporales directa e inversa de  $\mathbf{D}$  se definen como [5]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt', \quad \text{y} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.27)$$

respectivamente. Al sustituir la Ec. (1.6) en la transformada de Fourier inversa de las Ecs. (1.27), se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.28)$$

y al expresar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  mediante su transformada de Fourier, la Ec. (1.28) se reescribe como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt', \quad (1.30)$$

## 1. ESPARCIMIENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

---

donde además se consideró que los órdenes de integración se pueden intercambiar dado que la integración se realiza en el mismo intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

Al reescribir el campo eléctrico como<sup>8</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau, \quad (1.32)$$

sumar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t') - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$  y multiplicar por  $\varepsilon_0/\varepsilon_0$  a la Ec. (1.30), simplificando se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right], \quad (1.33)$$

donde  $G(\tau)$  es [5]

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 \right] e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (1.34)$$

con  $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$  la permitividad eléctrica relativa. Al aplicar la transformada de Fourier a la Ec. (1.34), se obtiene una expresión para la permitividad eléctrica relativa

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.35)$$

Las Ecs. (1.33) y (1.34) muestran que el campo de desplazamiento eléctrico al tiempo  $t$  depende del campo eléctrico en todos los demás tiempos  $t'$ . A esta característica, se le conoce como la no localidad temporal entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  [5].

De modo que las Ecs. (1.33) y (1.35) sean causales, es necesario imponer condiciones que garanticen que la Ec. (1.34) se anule para  $\tau < 0$ , lo que se traduce en que al tiempo  $t$ , únicamente valores del campo eléctrico previos a ese tiempo determinan el vector de desplazamiento eléctrico [5]. De esta forma, las Ecs. (1.33) y (1.35) se reescriben como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right], \quad (1.36a)$$

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 = \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.36b)$$

Dado que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  son funciones reales,  $G(\tau)$  también lo es. Si se considera a la Ec. (1.36b) como una representación de  $\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0$  en el plano complejo, entonces la Ec. (1.36b) es analítica en el semiplano superior complejo siempre que  $G(\tau)$  sea finita para toda  $\tau$  [5]. Para que dicha analiticidad se extienda hasta el eje real, es necesario imponer la condición  $G(\tau) \rightarrow 0$  cuando

---

<sup>8</sup>Donde se realiza el cambio de variable  $\tau = t - t'$  y se emplea la función constante [7]

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = \delta(\tau), \quad (1.31)$$

con  $\delta(\tau)$  la función delta de Dirac, que cumple con  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0)$  [7].

$\tau \rightarrow \infty$  [5]<sup>9</sup>. Como  $\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1$  es una función analítica en el semiplano superior complejo incluyendo el eje real, la función  $[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]/(\omega' - \omega)$  también lo es, salvo por la singularidad en  $\omega' = \omega$ . De acuerdo con el teorema integral de Cauchy<sup>10</sup>, para un contorno cerrado  $C$  que no encierre  $\omega_0$  se cumple [7]

$$\oint_C \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' = 0. \quad (1.37)$$

Para determinar el contorno apropiado de modo que se pueda emplear la Ec. (1.37), se considera a  $\omega$  un punto sobre el eje real y a  $C$  la unión de cuatro curvas con representaciones paramétricas como se muestra en la Fig. 1.3 y que están dadas por [1]

$$\begin{aligned} C_1 : \omega' &= \Omega, & -A \leq \Omega &\leq \omega - a, \\ C_2 : \omega' &= \omega - ae^{-i\Omega}, & 0 \leq \Omega &\leq \pi, \\ C_3 : \omega' &= \Omega, & \omega + a \leq \Omega &\leq A, \\ C_4 : \omega' &= Ae^{i\Omega}, & 0 \leq \Omega &\leq \pi. \end{aligned}$$

Así, la Ec. (1.37) se reescribe como

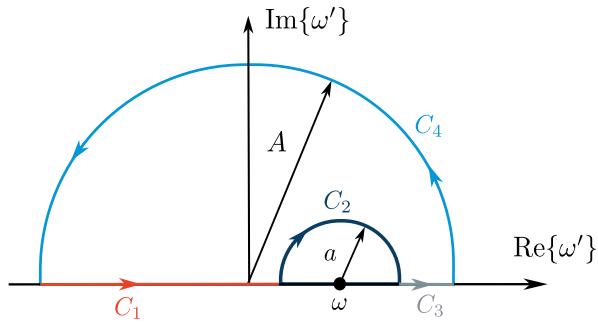


Fig. 1.3: Contorno de integración  $C$  conformado por cuatro curvas.

$$\begin{aligned} \int_A^{\omega-a} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^A \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \\ + \int_0^\pi \frac{iA e^{i\Omega} [\varepsilon(A e^{i\Omega})/\varepsilon_0 - 1]}{A e^{i\Omega} - \omega} d\Omega - \int_0^\pi i [\varepsilon(\omega - ae^{-i\Omega})/\varepsilon_0 - 1] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes la Ec. (1.36b), se obtiene

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{iG(0)}{\omega} - \frac{G'(0)}{\omega^2} + \frac{iG''(0)}{\omega^3} + \dots,$$

donde se empleó que  $G(\tau) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . Además, dado que  $G(\tau)$  es causal,  $G(0) = 0$ ; por lo que el primer término se anula al igual que los términos que decaen más rápido que  $1/\omega^2$  a frecuencias altas. Con ello, por el lema de Jordan<sup>11</sup>, la integral sobre el segmento  $C_4$  es 0 [1]. Por otro lado, al considerar el límite de  $a \rightarrow 0$ , la integral sobre  $C_2$  es  $i\pi[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]$  [5]. Finalmente,

<sup>9</sup>Esto se cumple para dieléctricos; en conductores, en cambio, se tiene que  $G(\tau) \rightarrow \sigma/\varepsilon_0$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  [5].

<sup>10</sup>El teorema integral de Cauchy establece que si una función  $f(z)$  es analítica dentro y sobre un contorno cerrado  $C$ , entonces  $\oint_C f(z)/(z - z_0) dz = 0$  [7].

<sup>11</sup>El lema de Jordan establece que

las integrales sobre los segmentos  $C_1$  y  $C_3$  equivalen a

$$\int_A^{\omega-a} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^A \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\Omega)/\varepsilon_0 - 1]}{\Omega - \omega} d\Omega \quad (1.38)$$

donde P.V. denota el valor principal de la integral [7]. Por lo tanto, se obtiene

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' = i\pi[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]. \quad (1.39)$$

Al separar la Ec. (1.39) en parte real e imaginaria, se obtienen las relaciones de Kramers-Kronig

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.40)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.41)$$

Dada la Ec. (1.36b), se deduce que  $\varepsilon(-\omega)/\varepsilon_0 = \varepsilon^*(\omega^*)/\varepsilon_0$ . Esta propiedad de simetría permite reescribir las Ecs. (1.40) y (1.41) en frecuencias positivas como

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.42a)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = -\frac{2\omega}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (1.42b)$$

## 1.4. Relaciones Kramers-Kronig sustractivas

A pesar de que las relaciones de Kramers-Kronig se han aplicado ampliamente en el análisis de datos experimentales [9], su implementación práctica enfrenta dos limitaciones fundamentales: los errores experimentales y el intervalo finito de frecuencias en el que suelen obtenerse los datos [9]. De hecho, cuando las relaciones de KK se evalúan sobre un rango espectral limitado, el error en la reconstrucción de la parte real o imaginaria de la función óptica tiende a incrementarse monótonamente con la frecuencia [10]. Para mitigar este problema, Bachrach y Brown [11] propusieron las relaciones de Kramers-Kronig sustractivas (SSKK), las cuales incorporan un punto de anclaje experimental es decir, el valor conocido de la función óptica en una frecuencia particular, con el fin de mejorar significativamente la precisión del análisis vía KK [2]. En esta sección se desarrollan las relaciones SSKK para la función dieléctrica considerando un punto de referencia en una frecuencia  $\omega_1$ , cuyo valor experimental se asume conocido y se puede escribir como

$$\frac{\varepsilon'(\omega_1)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{\omega' - \omega_1} d\omega', \quad (1.43)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega_1)}{\varepsilon_0} = -\frac{2\omega_1}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega_1} d\omega'. \quad (1.44)$$

Al restar las Ecs. (1.43) y (1.44) de las relaciones de KK correspondientes para una  $\omega$  arbitraria y simplificando, se obtienen las relaciones de Kramers–Kronig sustractivas [2]

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon'(\omega_1)}{\varepsilon_0} + \frac{2(\omega^2 - \omega_1^2)}{\pi} \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')/\varepsilon_0}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)} d\omega', \quad (1.45)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon''(\omega_1)}{\varepsilon_0} - \frac{2(\omega - \omega_1)}{\pi} \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{[\omega'^2 + \omega \omega_1][\varepsilon'(\omega') - 1]/\varepsilon_0}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)} d\omega'. \quad (1.46)$$



---

## Capítulo 2

# Eritrocitos y sus patologías

---

En este capítulo

### 2.1. Morfología y características

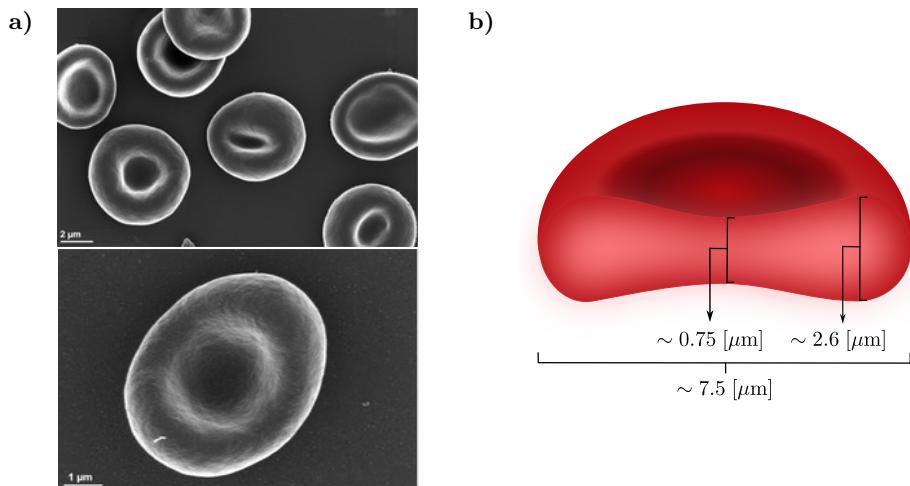
La sangre humana normal está compuesta principalmente por eritrocitos (glóbulos rojos, o RBCs por sus siglas en inglés), leucocitos, plaquetas y plasma sanguíneo [12]. Este último contiene agua, electrolitos, proteínas plasmáticas, carbohidratos, lípidos y diversas vesículas extracelulares [12]. Entre todos los componentes de la sangre, los eritrocitos presentan la mayor absorción óptica en el rango de 250 nm a 1100 nm, superando por dos o tres órdenes de magnitud la contribución de los otros [13]. Por ello, constituyen el elemento dominante en las propiedades ópticas de la sangre y el principal objeto de estudio en esta sección.

Los eritrocitos son células terminalmente diferenciadas<sup>1</sup> que carecen de núcleo y están formadas casi en su totalidad por hemoglobina, la proteína responsable de sus características de absorción [13]. La hemoglobina exhibe firmas espectrales bien definidas que dependen de su estado químico: oxihemoglobina ( $\text{HbO}_2$ ), desoxihemoglobina (Hb), carboxihemoglobina, metahemoglobina, hemoglobina fetal, entre otros derivados [13]. La función fisiológica principal de los eritrocitos es transportar oxígeno a través de la hemoglobina que llevan en su interior [15].

En cuanto a su morfología, los eritrocitos poseen una membrana sostenida por un citoesqueleto altamente flexible que les confiere su forma característica [15]. Presentan un contorno ovalado y un diámetro promedio de aproximadamente  $7.5 \mu\text{m}$ . Su geometría incluye una depresión central que reduce el espesor en la región media, dando lugar a un disco bicónvexo con un grosor de alrededor de  $2.6 \mu\text{m}$  en los bordes y aproximadamente  $0.75 \mu\text{m}$  en el centro [15], como se muestra en las Figs. 2.1. Esta estructura no solo es esencial para su función fisiológica, al proporcionar una gran relación superficie-volumen y facilitar el intercambio de gases [15], sino que también influye directamente en su comportamiento óptico y en la manera en que esparcen la luz [13].

---

<sup>1</sup>Una célula terminalmente diferenciada se define como aquella que, al adquirir funciones especializadas, pierde su capacidad de proliferar de manera irreversible. Por ejemplo, los eritrocitos y queratinocitos de los mamíferos, sufren una detención irreversible de su crecimiento al perder su núcleo durante la diferenciación terminal [14].



**Fig. 2.1:** Estructura de un eritrocito sano. **a)** Micrografías electrónicas de barrido (SEM por sus siglas en inglés) de eritrocitos de pacientes sanos. La micrografía superior muestra eritrocitos de forma bicóncava normal con interacción limitada, mientras que la inferior muestra un eritrocito sano con una membrana ligeramente granular; imágenes extraídas y adaptadas de [16]. **b)** Diagrama de un corte longitudinal de un eritrocito que muestra las dimensiones de la célula.

### 2.2. Enfermedades y deformaciones de eritrocitos

los eritrocitos

### 2.3. Propiedades ópticas

---

## Capítulo 3

---

# Método de elemento finito

---

It is recommended to write a summary about the contents of this chapter as an introduction to them.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.1. Convergencia

If you want to frame some equations because you consider them important, use the **tcolorbox** command. Also, you may use the **subequations** command sometimes. Fot example with the Maxwell's equations [**griffiths2013electrodynamics**]:

and if you want them to appear in the analytical index just use the **index** command `\index{}`.

If you want to show two equations in only one row, use the macros **\eqhalf**, for example [**hecht1998optics**] , for the Fourier transform <sup>1</sup> or the Helholtz equation for **E** y

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{F}[f(\mathbf{r}, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dt$ , con  $\mathbf{k}$  una función de  $\omega$ . La transformada de Fourier inversa es entonces  $\mathcal{F}^{-1}[f(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\omega$ .

### 3. MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

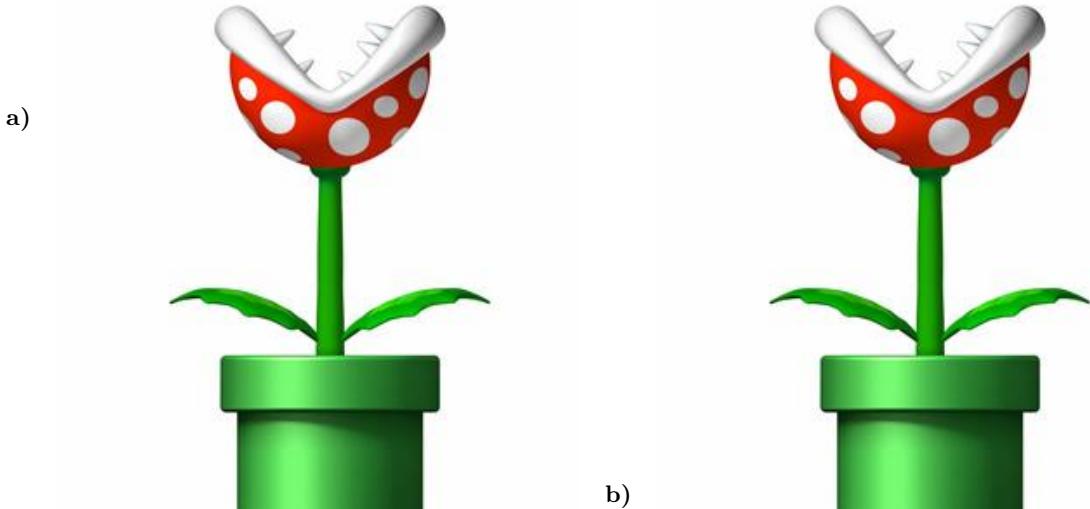
#### B [griffiths2013electrodynamics]

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Índice de refracción

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\epsilon(\omega)}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (3.1)$$

For the figures, you can use this format:



**Fig. 3.1:** The explanation of your figures. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdierit mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.1 Convergencia

---

turpis accumsan semper.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



# Resultados

---

Make a short summary of the content of the thesis [**reyes2018analytical**, **pena-gomar2006coherent**, **barrera1991optical**, **garcia2012multiple**] and then your conclusions. Also explain your future steps on this project

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



# Conclusiones

---

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.



---

## Apéndice A

---

# What I couldn't get into the main part

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien.

## A. WHAT I COULDN'T GET INTO THE MAIN PART

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## Bibliografía

---

- [1] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008 (citado en las págs. 3, 5-9, 11).
- [2] Kramers-Kronig Relations and Sum Rules in Linear Optics. En *Kramers-Kronig Relations in Optical Materials Research*. Volumen 110, páginas 27-48. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. DOI: [10.1007/3-540-27316-6\\_4](https://doi.org/10.1007/3-540-27316-6_4). Series Title: Springer Series in Optical Sciences (citado en las págs. 3, 9, 12, 13).
- [3] A. Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013. (Visitado 14-08-2025) (citado en la pág. 3).
- [4] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023 (citado en las págs. 3-6).
- [5] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. 4, 5, 9-11).
- [6] General Properties of Electromagnetic Response Functions. En *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*. Volumen 24, páginas 41-85. Elsevier, 1989. DOI: [10.1016/B978-0-444-87366-8.50008-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-87366-8.50008-4). ISSN: 0167-7837 (citado en la pág. 4).
- [7] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011. (Visitado 14-08-2025) (citado en las págs. 5, 10-12).
- [8] H. Fujiwara. *Spectroscopic ellipsometry: principles and applications*. John Wiley & Sons, 2007. (Visitado 13-11-2025) (citado en la pág. 9).
- [9] S. Nakov, E. Sobakinskaya y F. Müh. A unified framework for the numerical evaluation of the Q-subtractive Kramers-Kronig relations and application to the reconstruction of optical constants of quartz. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, **288**:122157, 2023. DOI: [10.1016/j.saa.2022.122157](https://doi.org/10.1016/j.saa.2022.122157) (citado en la pág. 12).
- [10] G. W. Milton, D. J. Eyre y J. V. Mantese. Finite Frequency Range Kramers-Kronig Relations: Bounds on the Dispersion. *Physical Review Letters*, **79**(16):3062-3065, 1997. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.3062](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.3062) (citado en la pág. 12).
- [11] R. Z. Bachrach y F. C. Brown. Exciton-Optical Properties of TlBr and TlCl. *Physical Review B*, **1**(2):818-831, 1970. DOI: [10.1103/PhysRevB.1.818](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.818). (Visitado 15-11-2025) (citado en la pág. 12).
- [12] A. L. Mescher. Junqueira's basic histology: text and atlas, 2024. Publisher: McGraw Hill (citado en la pág. 15).
- [13] N. Bosschaart, G. J. Edelman, M. C. G. Aalders, T. G. Van Leeuwen y D. J. Faber. A literature review and novel theoretical approach on the optical properties of whole blood.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Lasers in Medical Science*, **29**(2):453-479, 2014. DOI: [10.1007/s10103-013-1446-7](https://doi.org/10.1007/s10103-013-1446-7) (citado en la pág. 15).
- [14] A. Sacco, D. Pajalunga, L. Latella, F. Siepi, A. Rufini y M. Crescenzi. Cell cycle reactivation in skeletal muscle and other terminally differentiated cells. *Reactivation of the cell cycle in terminally differentiated cells*. New York: Kluwer Academic:45-61, 2002. (Visitado 24-11-2025) (citado en la pág. 15).
- [15] G. K. Pal. *Textbook of Medical Physiology 4th Edition-E-Book*. Elsevier Health Sciences, 2021 (citado en la pág. 15).
- [16] S. Alummoottil, M. J. van Rooy, J. Bester, C. Grobbelaar y A. Phulukdaree. Scanning electron and atomic force microscopic analysis of erythrocytes in a cohort of atopic asthma patients—a pilot study. *Hemato*, **4**(1):90-99, 2023. Publisher: MDPI (citado en la pág. 16).