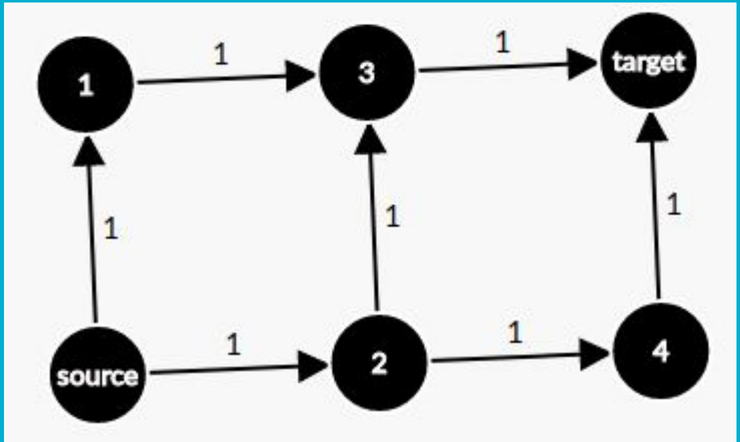
Fluxo máximo com Dinic (Dinic's algorithm)

Alfredo Lima

Fluxo máximo

Dado um grafo conectado. Onde cada aresta tem uma capacidade e temos pelo menos dois vértices (source e target).

O fluxo máximo é o maior fluxo que conseguimos distribuir no grafo com entrada e saída determinada, sem que seja ultrapassada a capacidade de cada aresta.



Um fluxo máximo deste exemplo é 2.

source → 1 → 3 → target

source → 2 → 4 → target

Algoritmo de Dinic

É um algoritmo simples, basta utilizar os dois algoritmos de busca simples em um grafo (BFS e DFS) com pequenas modificações.

Passos:

1. Crie um grafo residual do grafo original.
2. Construa uma árvore de nível com a raiz sendo o ***source*** no grafo residual.
    - 2.1. Se a árvore não possuir o ***target*** : fim do algoritmo.
    - 2.2. Envie a maior quantidade de fluxo do ***source*** indo do nível **i** para o nível **i+1** da árvore até chegar no ***target***, bloqueando os demais fluxos.
    - 2.3. Modifique o grafo residual de acordo com fluxo encontrado.
    - 2.4. Repita o passo **2**.

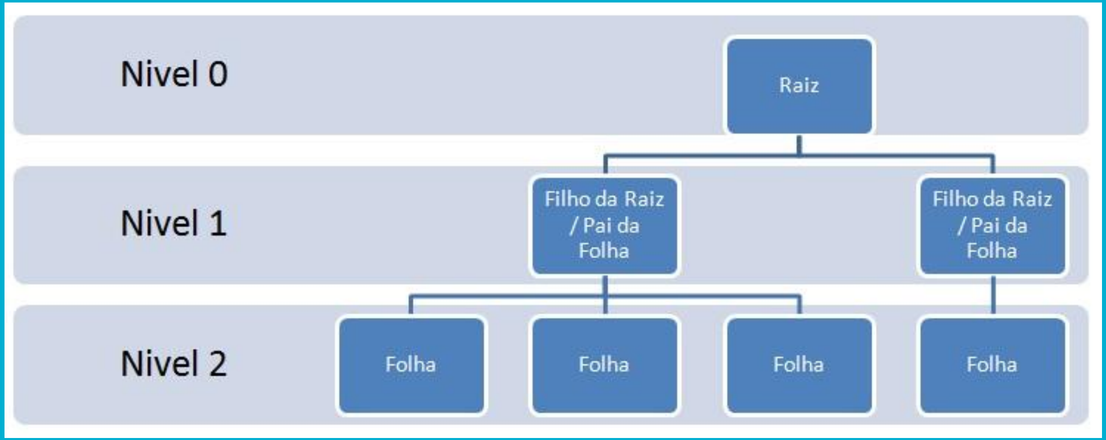
Surgiram perguntas?

1. Como construir uma árvore de nível?
2. Como distribuir o fluxo?
3. Complexidade?
4. Grafo residual e porquê utilizá-lo?
5. Implementação?
6. Modelagem

Como construir a árvore de nível?

O nível de um vértice é a menor distância (passos) até a raiz.

1. Como encontrar essa distância? Busca em largura (BFS).



Como distribuir o fluxo?

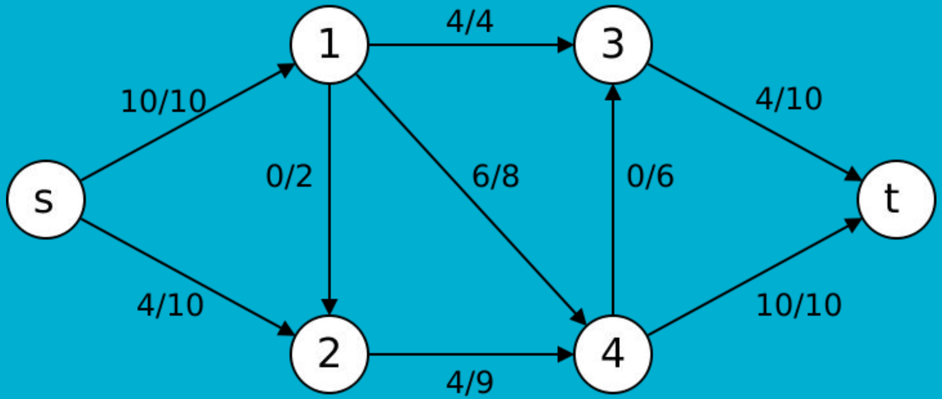
Escolha caminhos do ***source*** até o ***target***, o qual é possível de enviar fluxo, sendo chamado cada caminho: caminho de aumento.

1. Como encontrar um caminho aumento? busca em profundidade (DFS).
2. O fluxo no caminho é igual a capacidade da menor aresta do caminho.

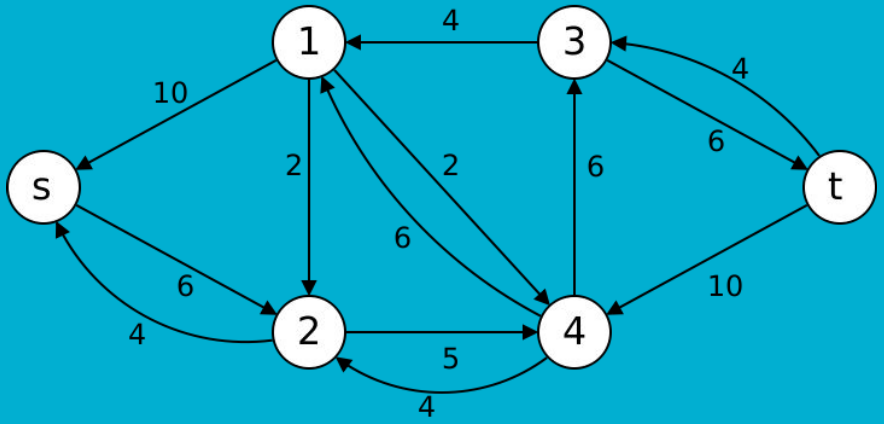
Grafo residual

Um grafo residual Gf é um grafo que indica como podemos modificar o fluxo nas arestas de G depois de já aplicado o fluxo f .

Grafo G

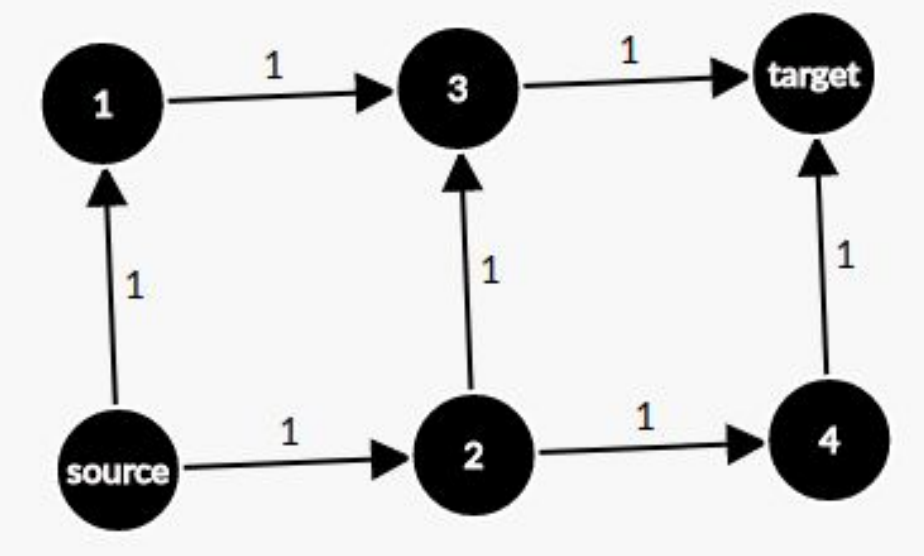


Grafo Gf

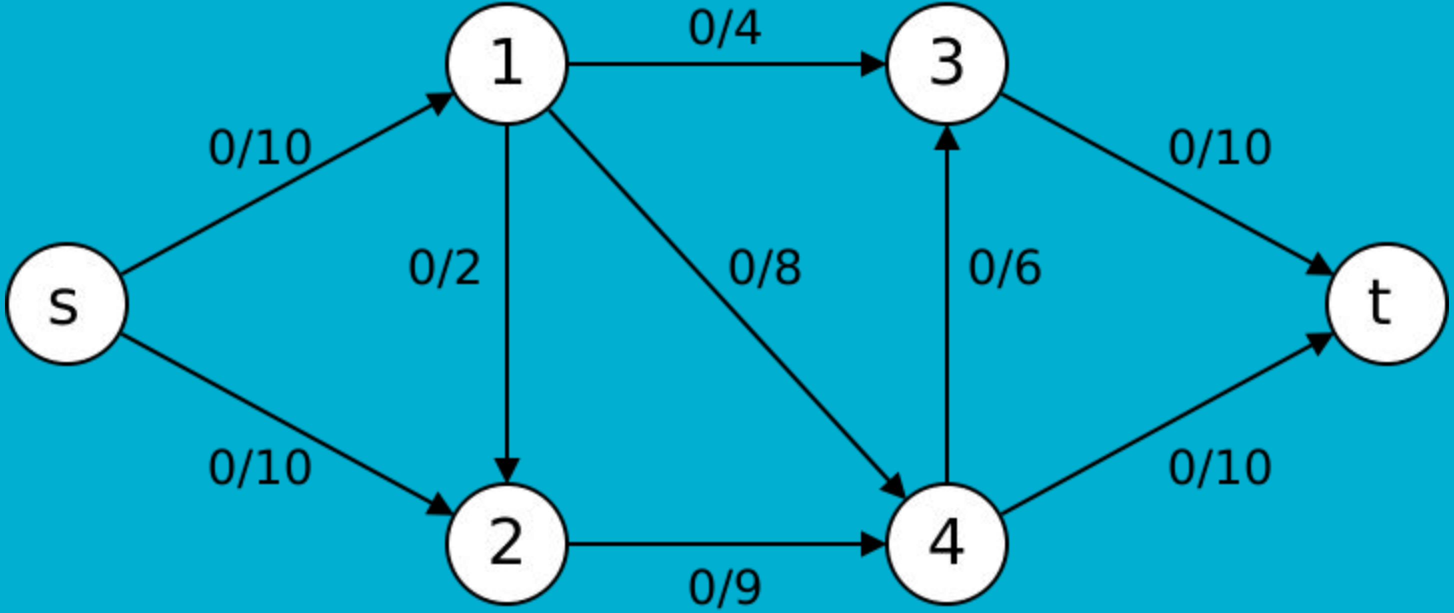


Porquê temos que utilizar um grafo residual?

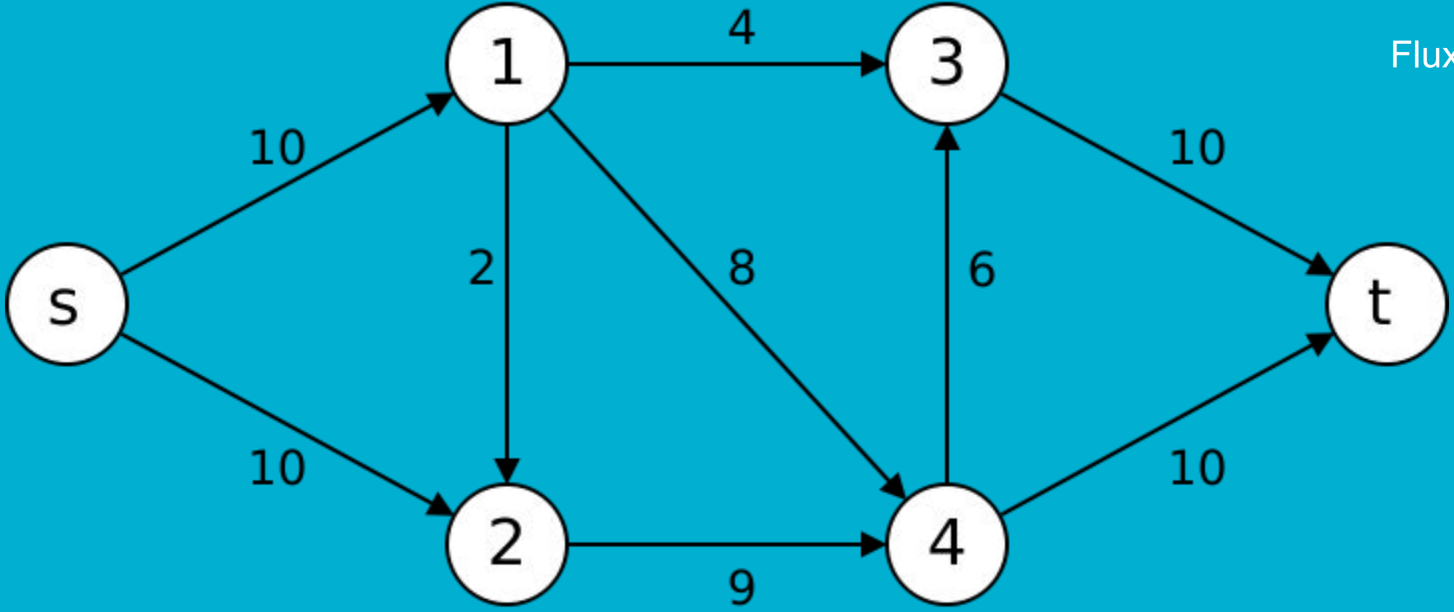
Já sabemos que o fluxo máximo nesse grafo é 2, mas se pegarmos primeiramente o caminho de aumento ***source***→2→3→***target***, então:



Qual é o fluxo máximo?



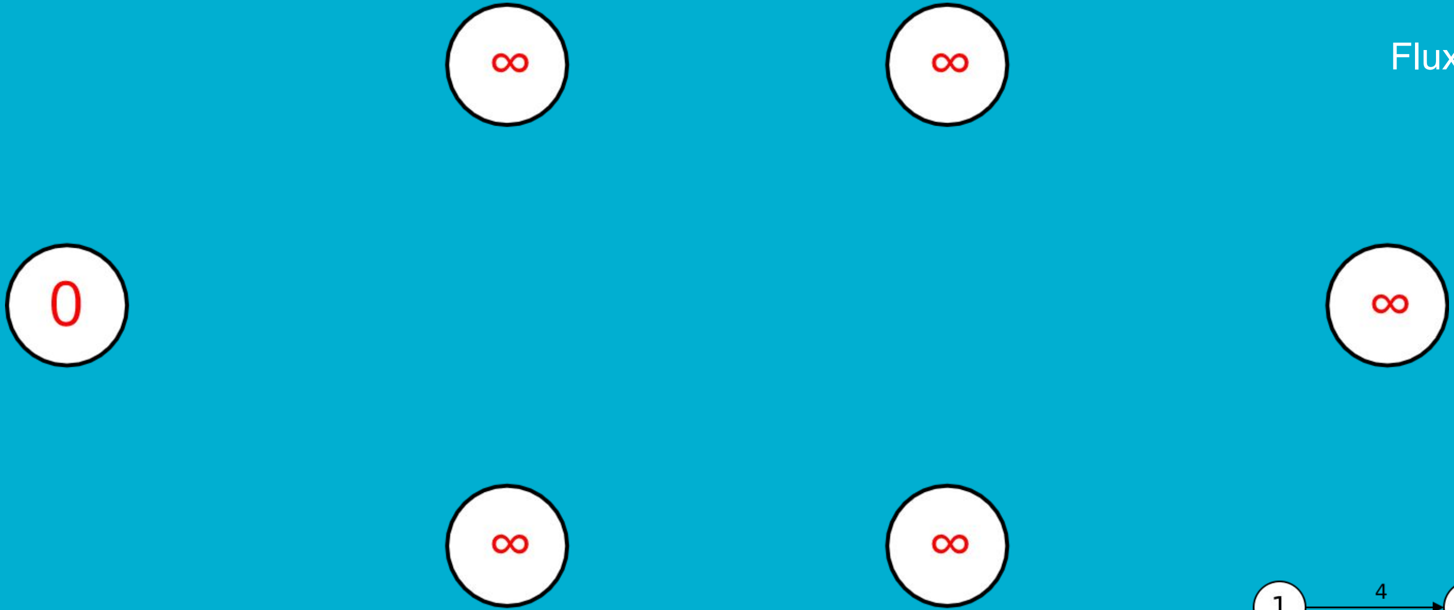
Crie o grafo residual

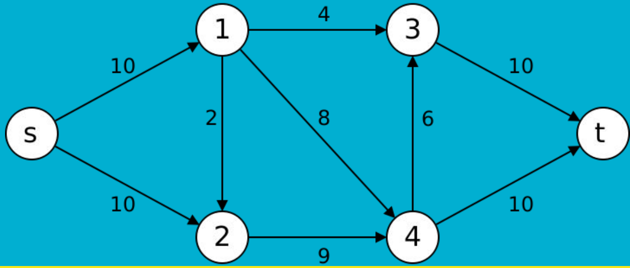


Fluxo máximo: 0

Crie a árvore

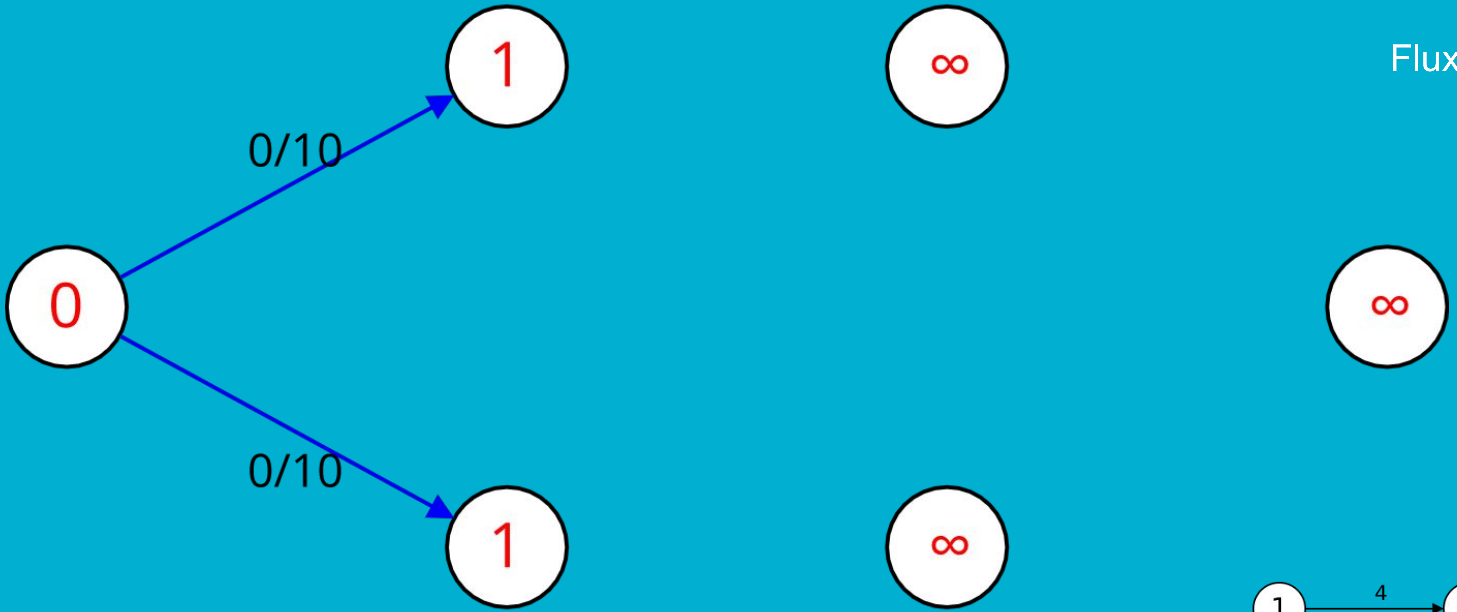
Fluxo máximo: 0

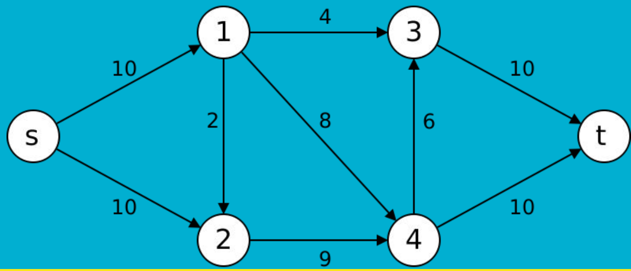




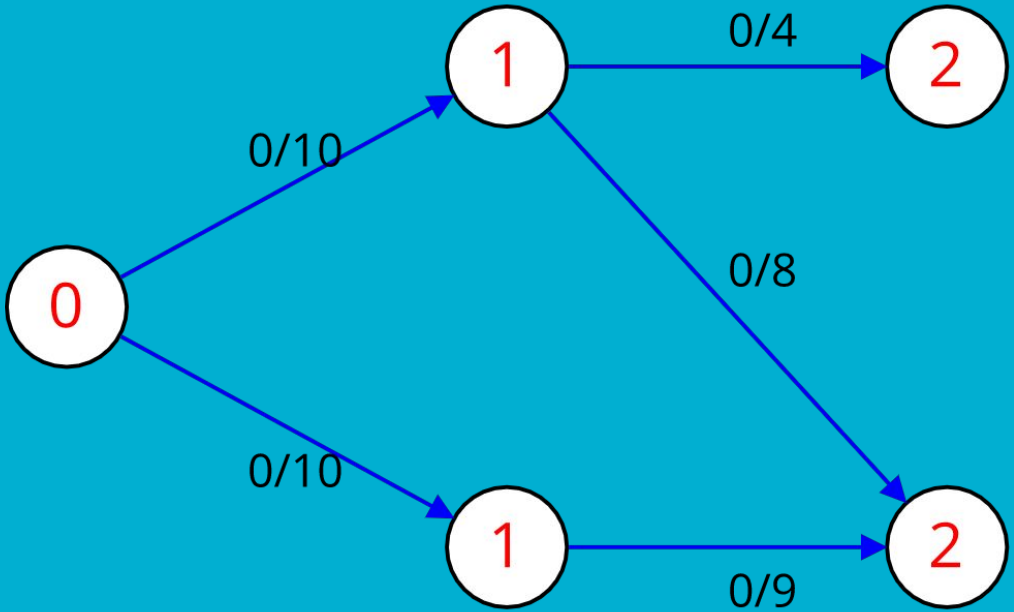
Criando a árvore

Fluxo máximo: 0

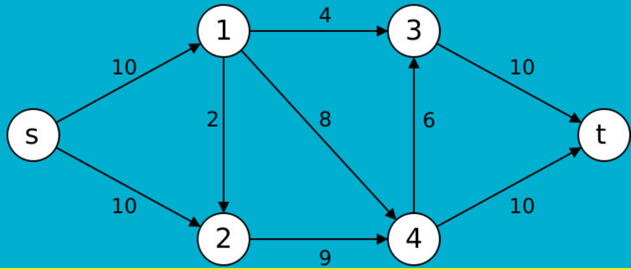




Criando a árvore

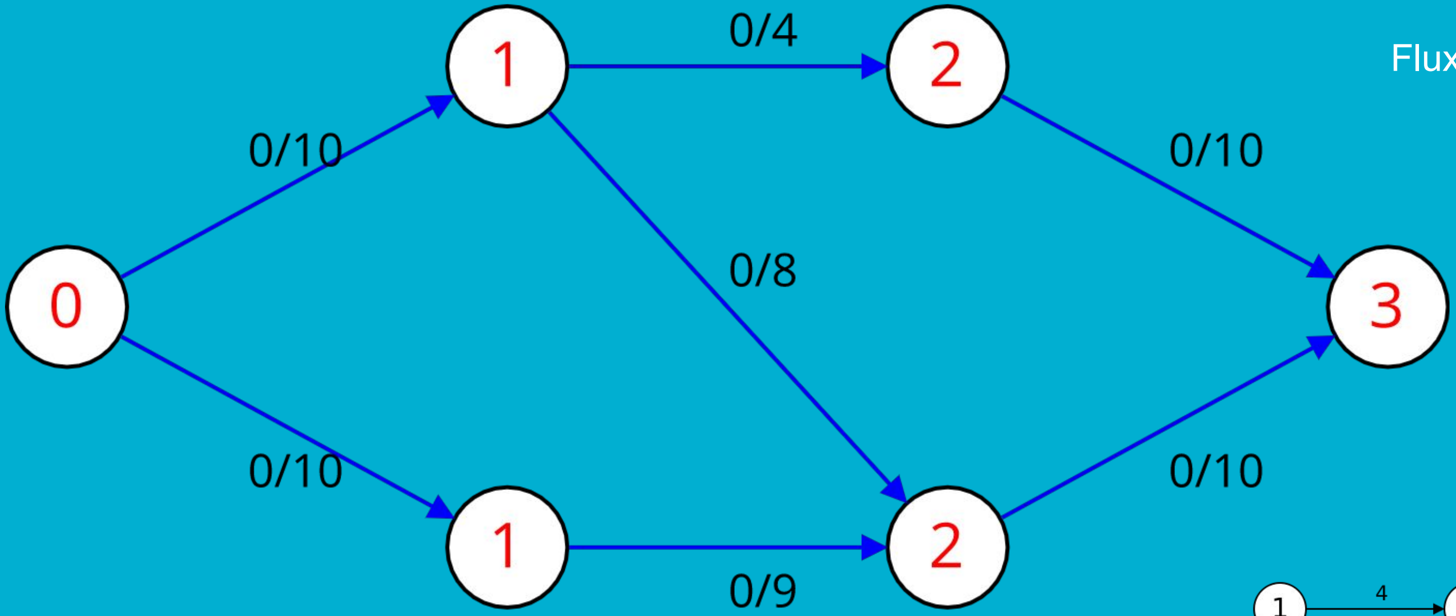


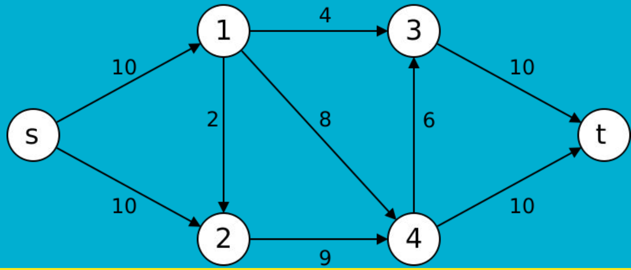
Fluxo máximo: 0



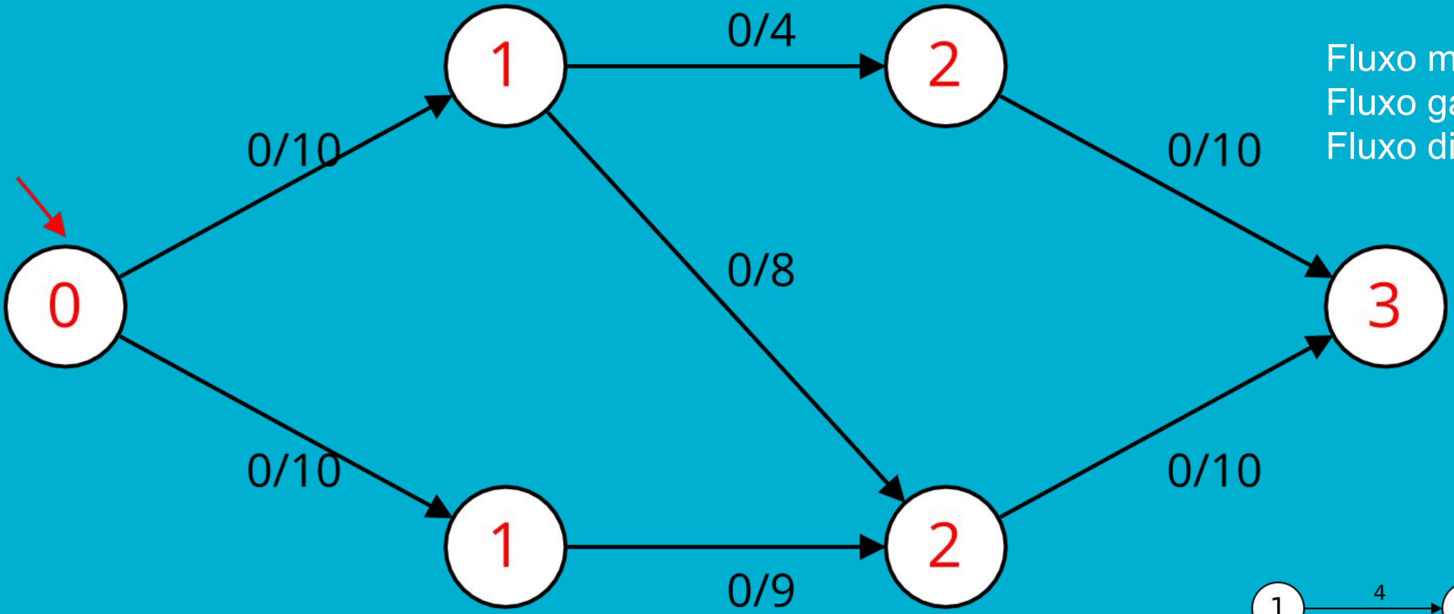
Criando a árvore

Fluxo máximo: 0

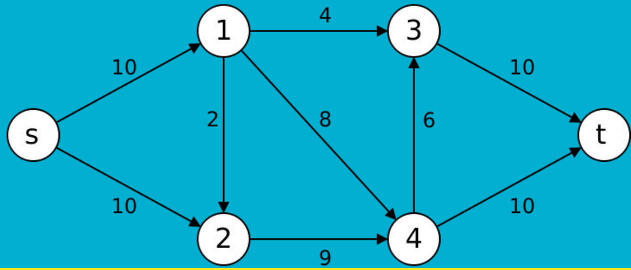




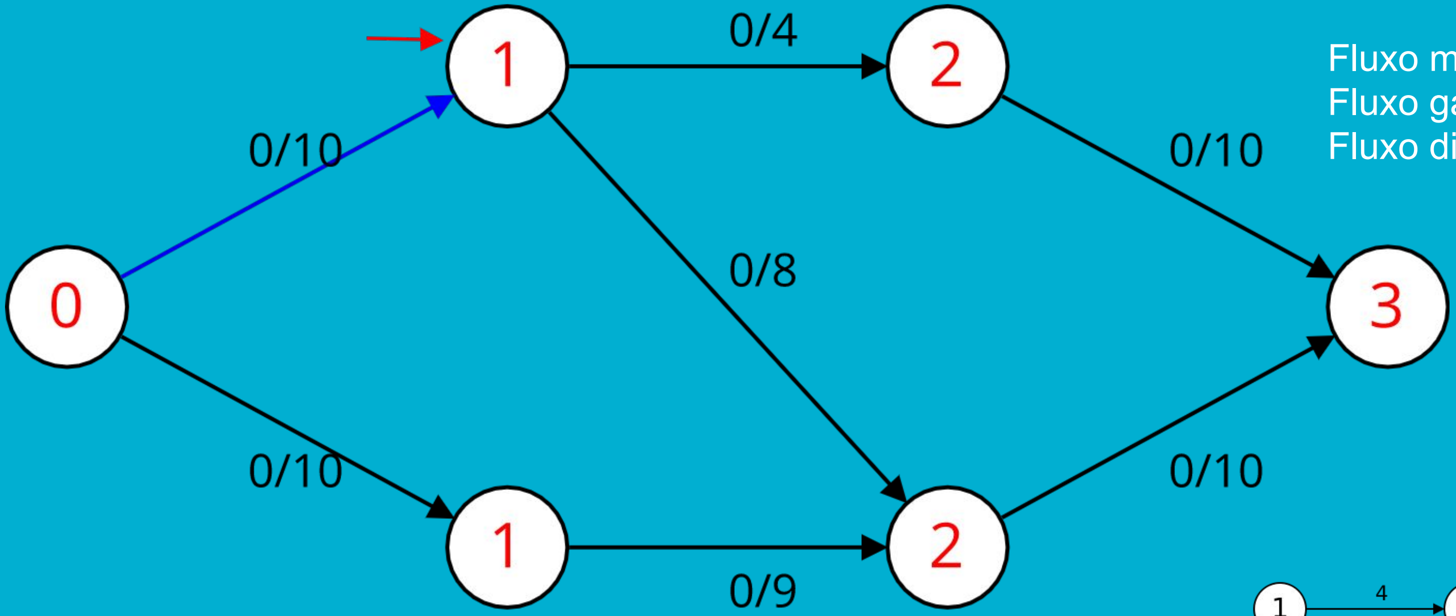
Distribua o fluxo



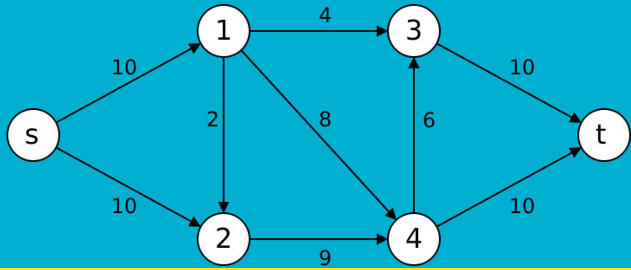
Fluxo máximo: 0
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: ∞



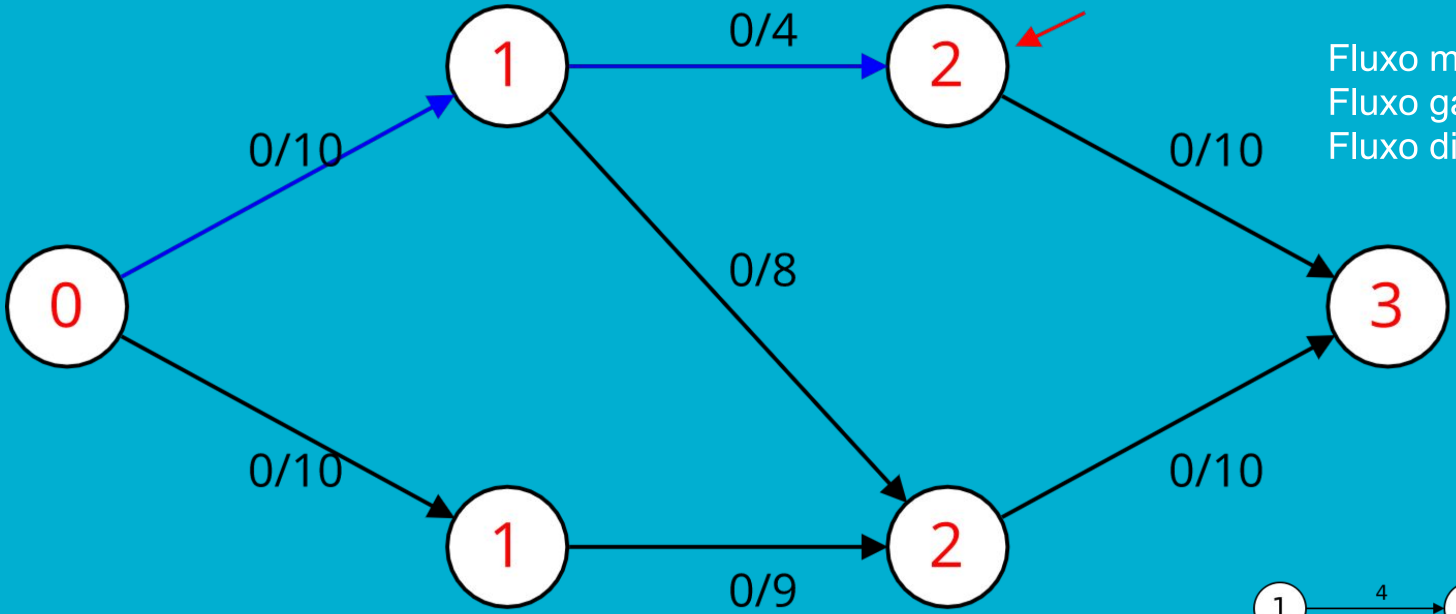
Distribuição do fluxo



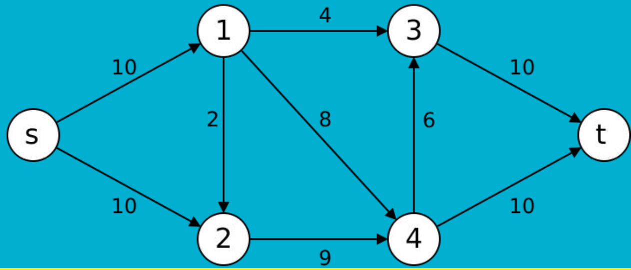
Fluxo máximo: 0
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 10



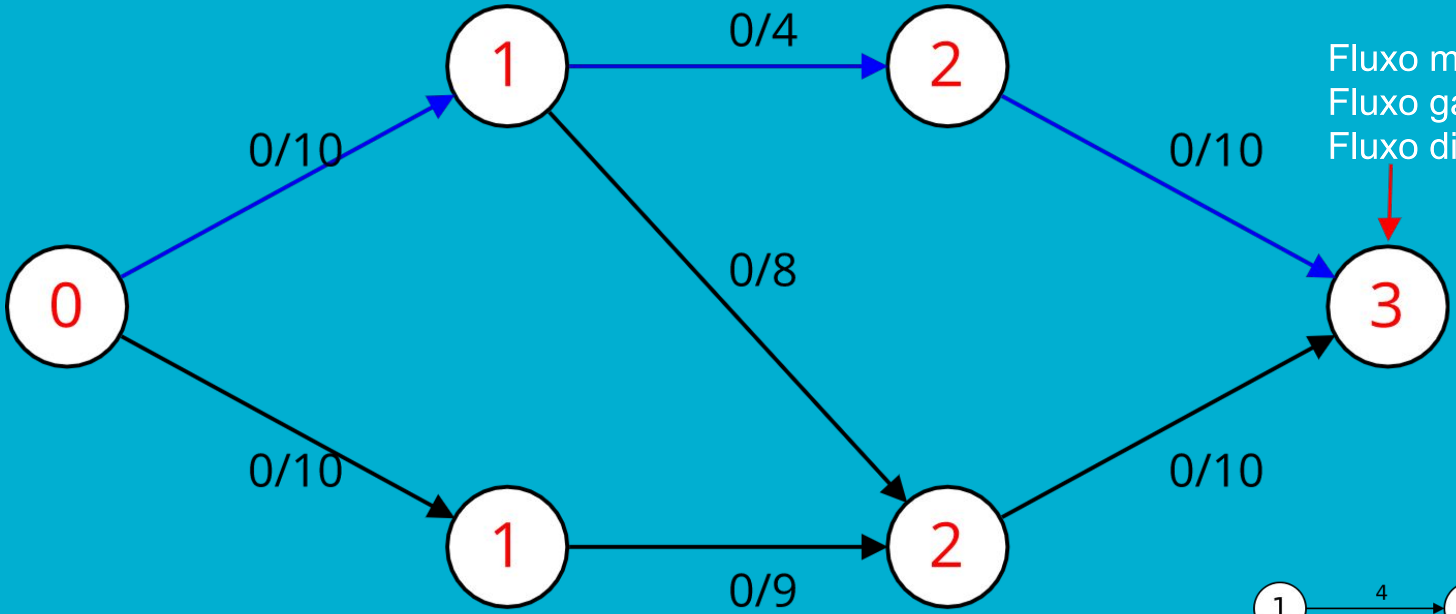
Distribuição do fluxo



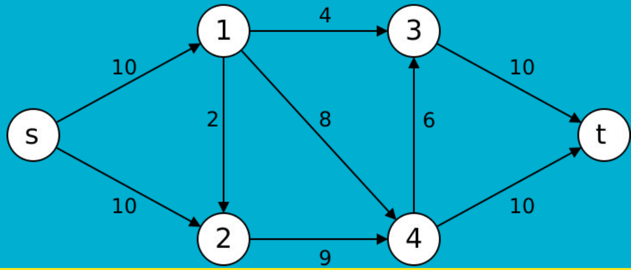
Fluxo máximo: 0
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 4



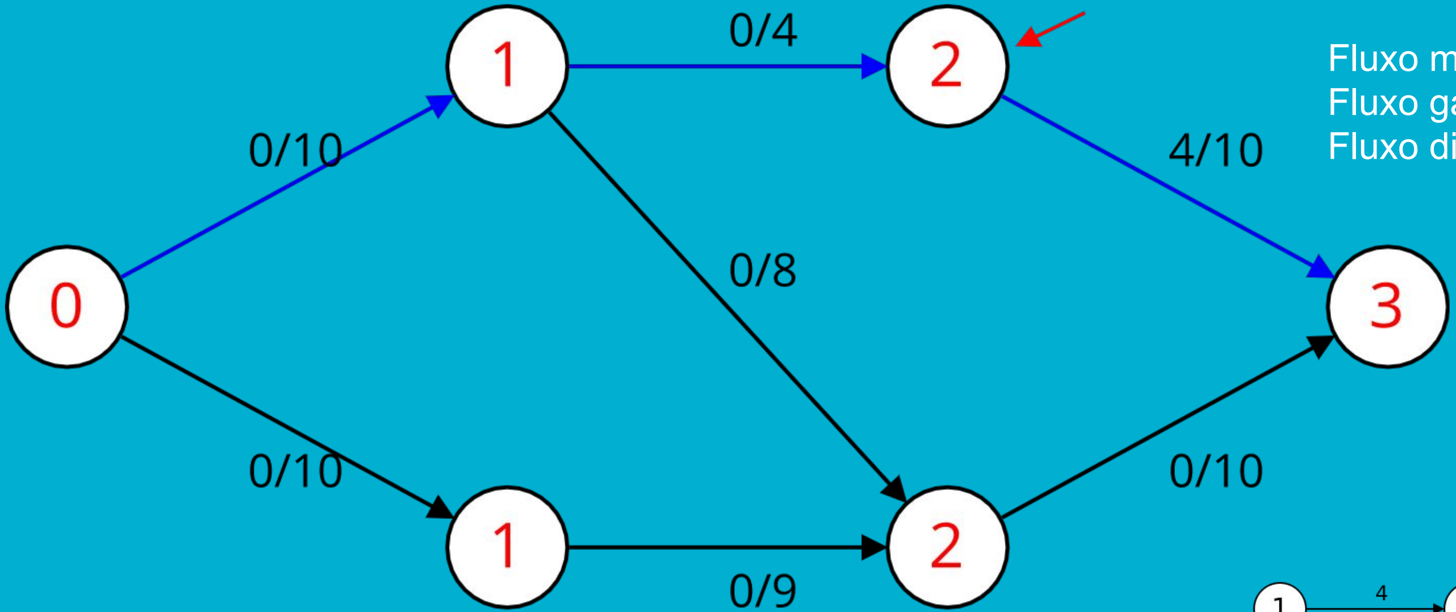
Distribuição do fluxo



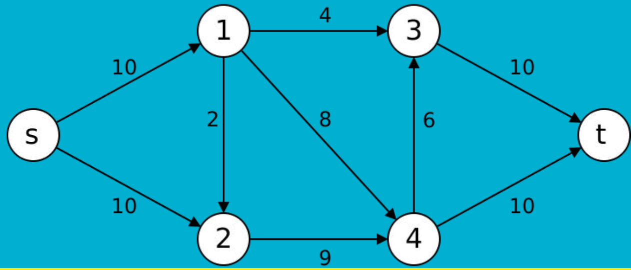
Fluxo máximo: 0
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 4



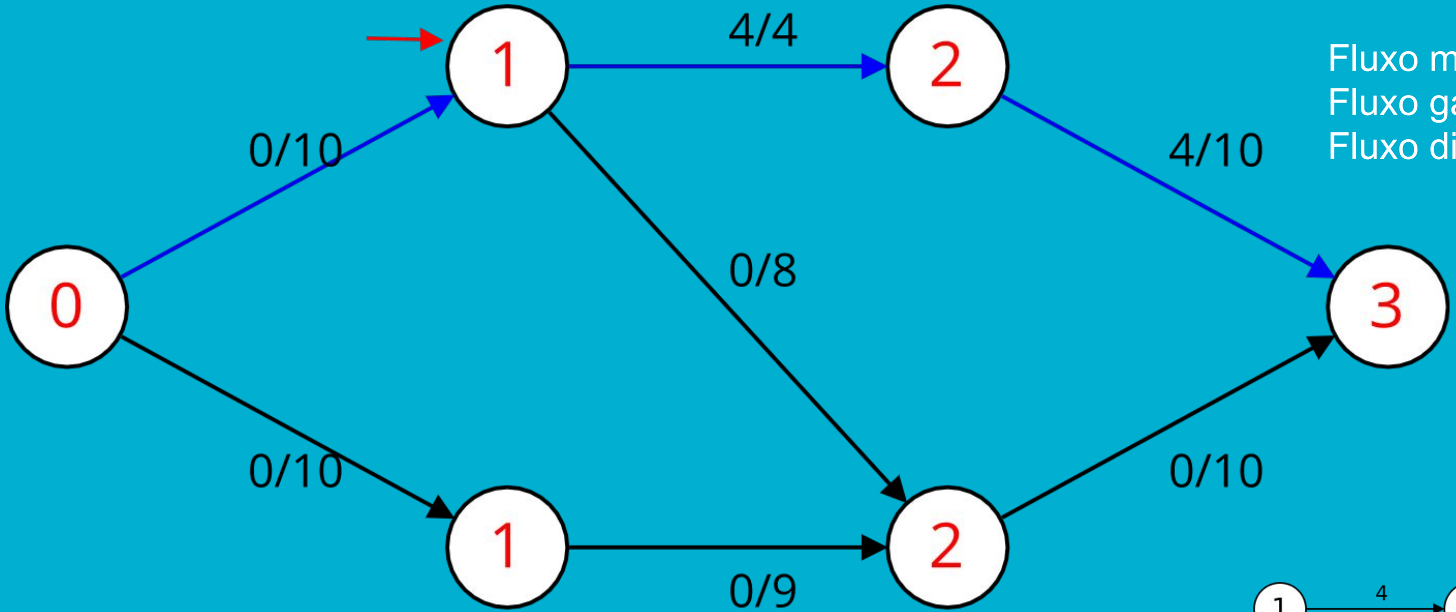
Distribuição do fluxo



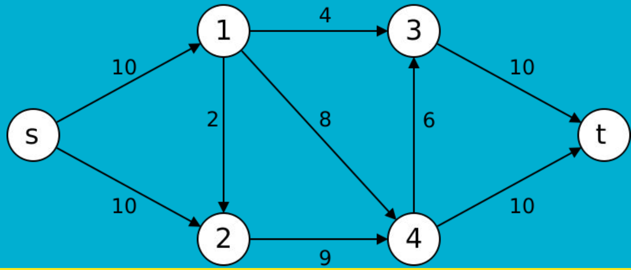
Fluxo máximo: 4
Fluxo gasto: 4
Fluxo disponível: 4



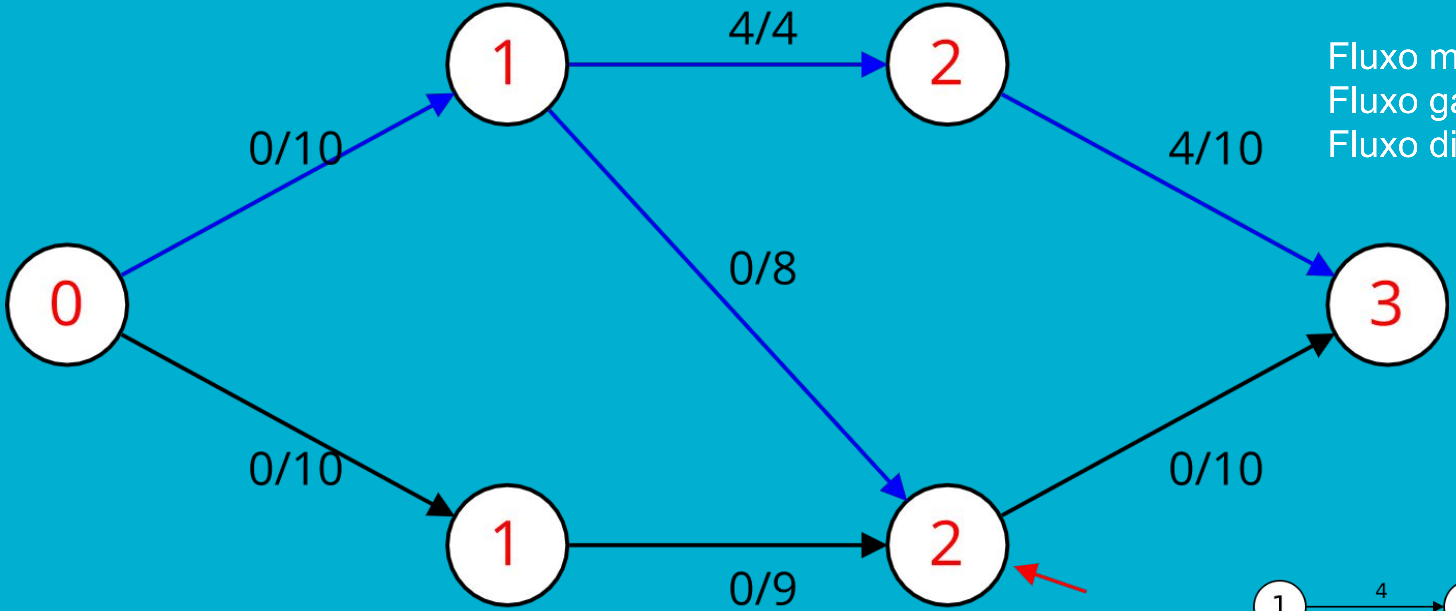
Distribuição do fluxo



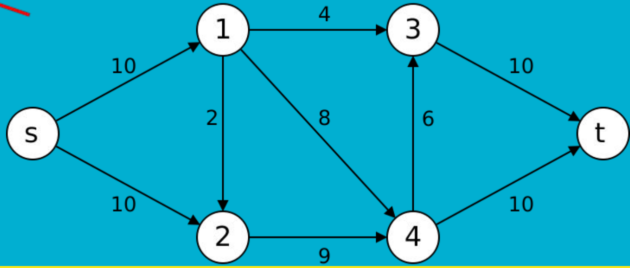
Fluxo máximo: 4
Fluxo gasto: 4
Fluxo disponível: 10



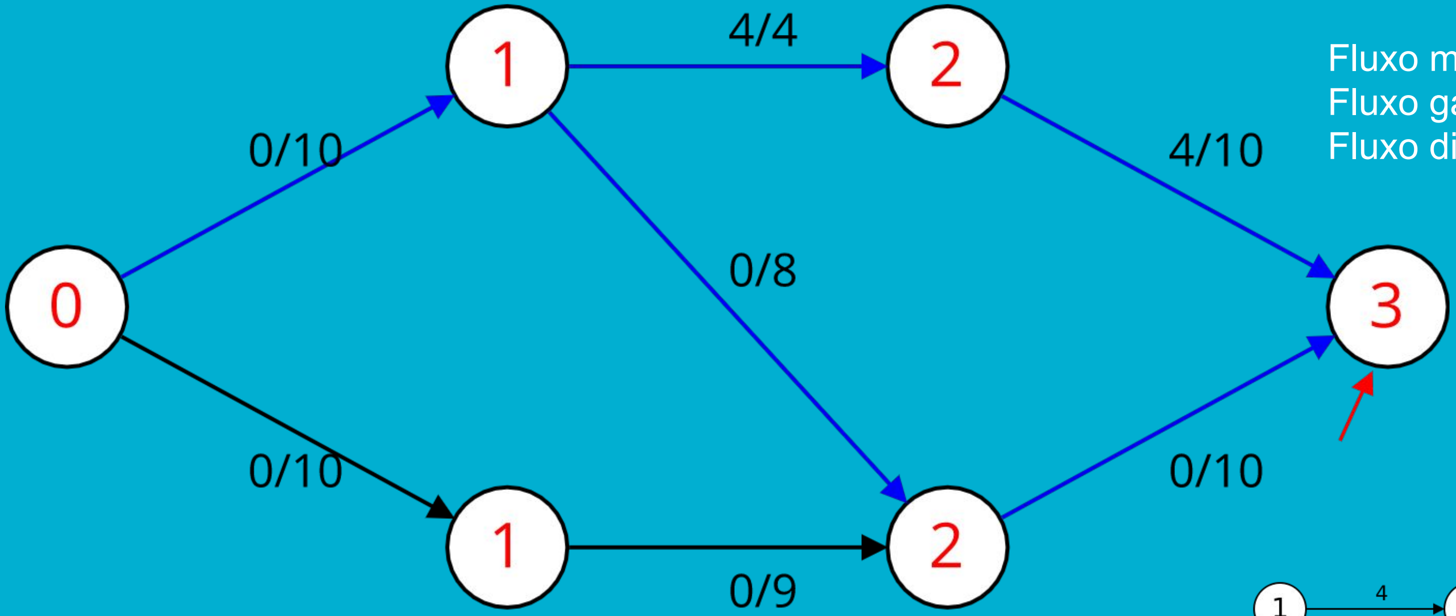
Distribuição do fluxo



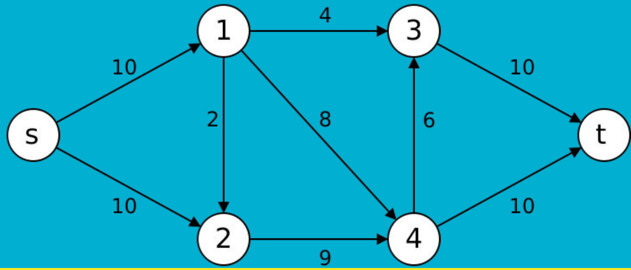
Fluxo máximo: 4
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 6



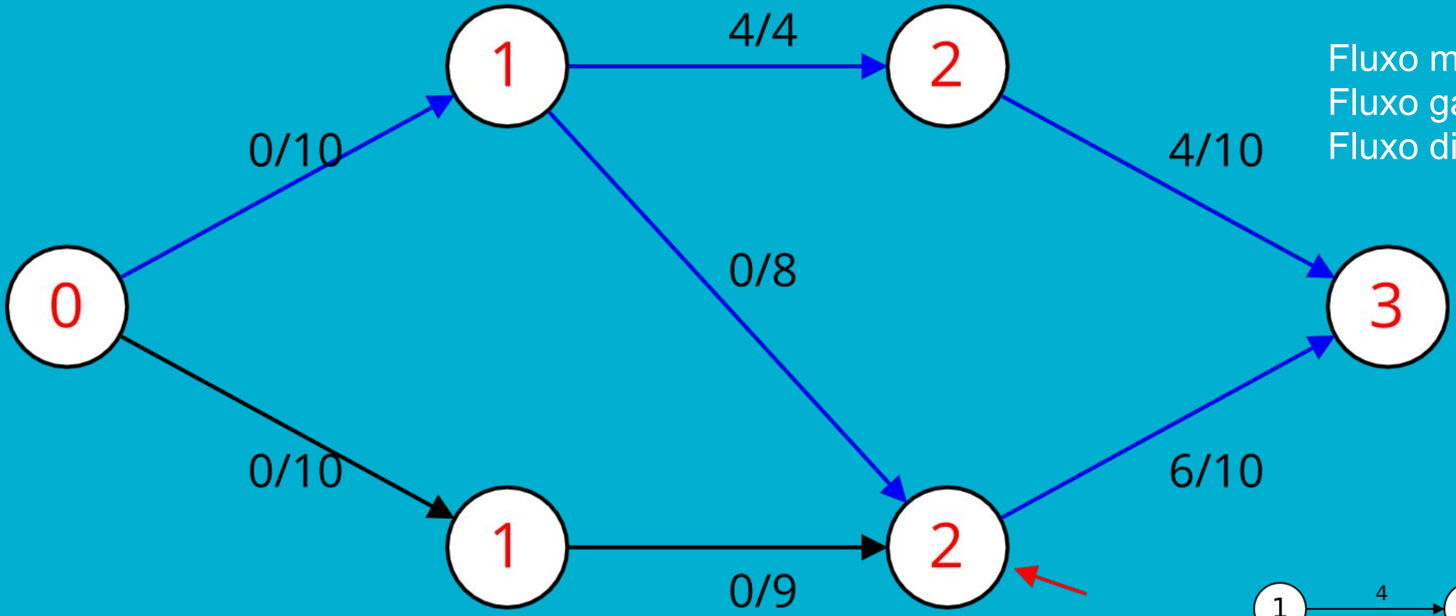
Distribuição do fluxo



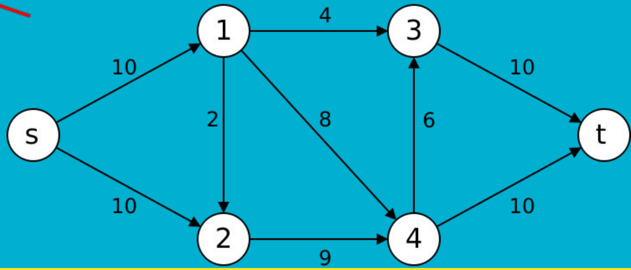
Fluxo máximo: 4
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 6



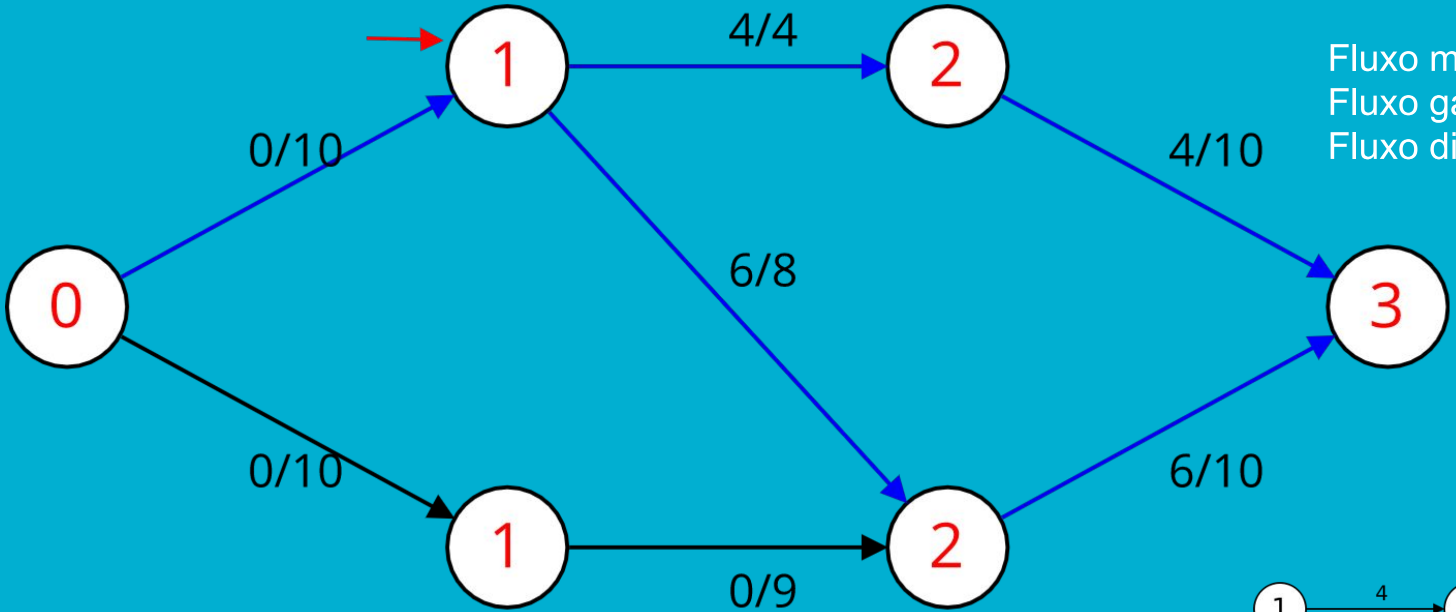
Distribuição do fluxo



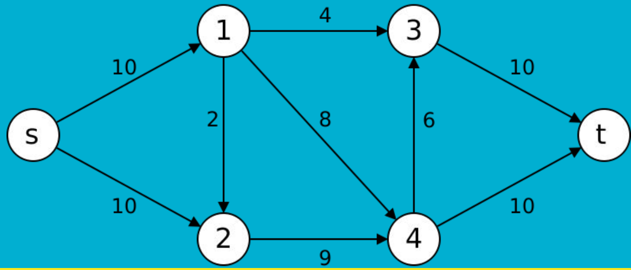
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 6
Fluxo disponível: 6



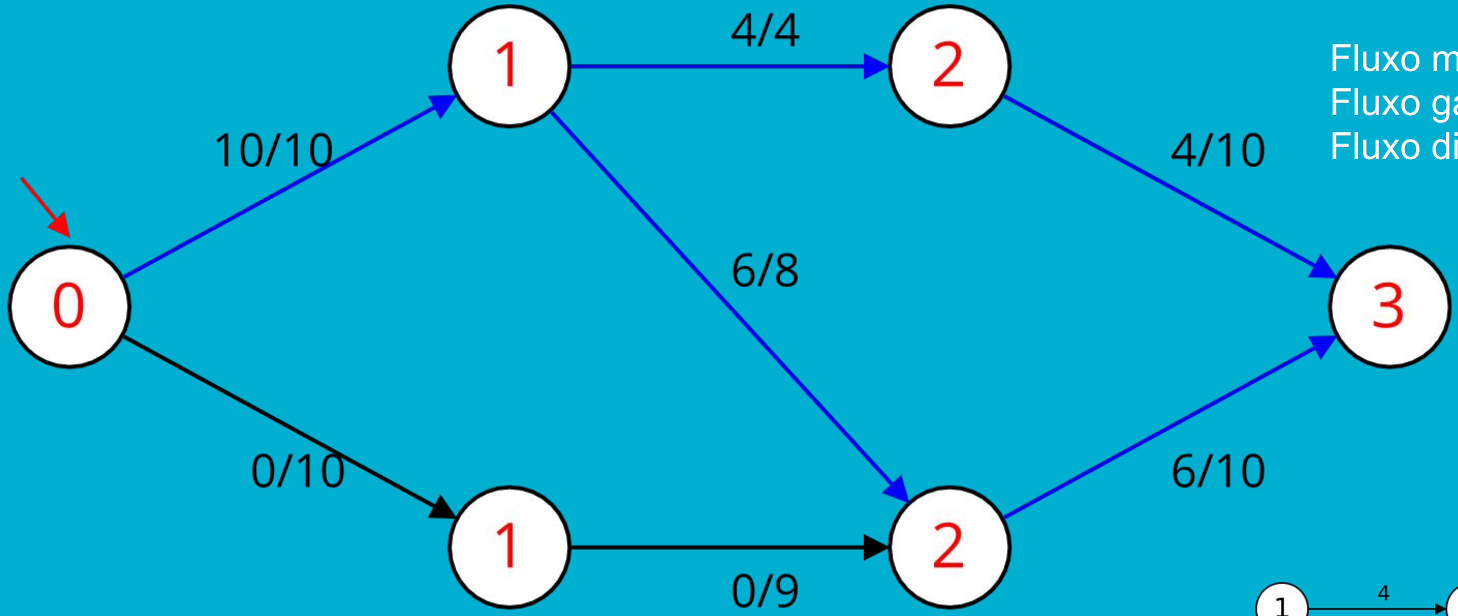
Distribuição do fluxo



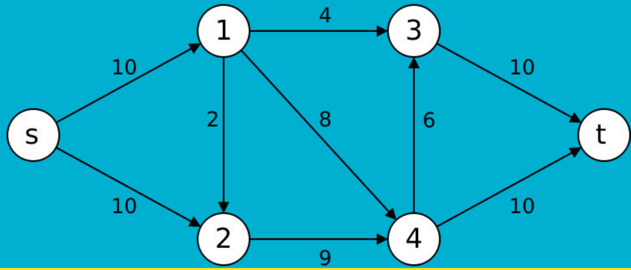
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 10
Fluxo disponível: 10



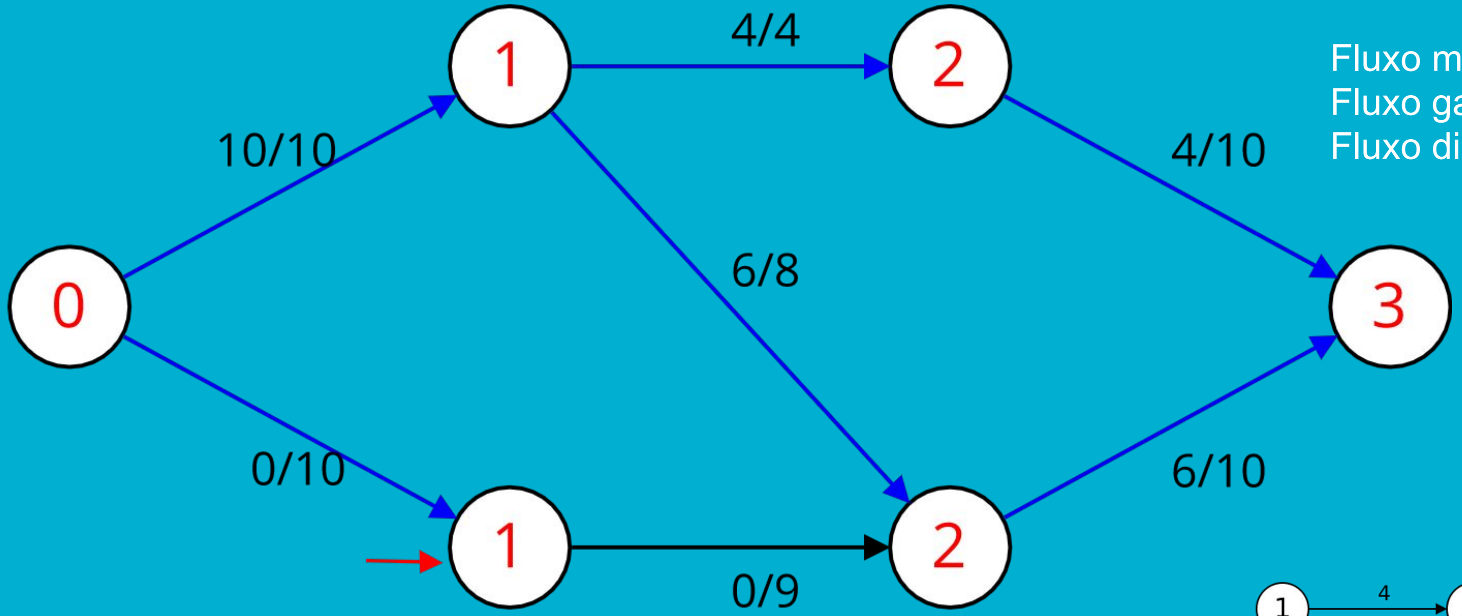
Distribuição do fluxo



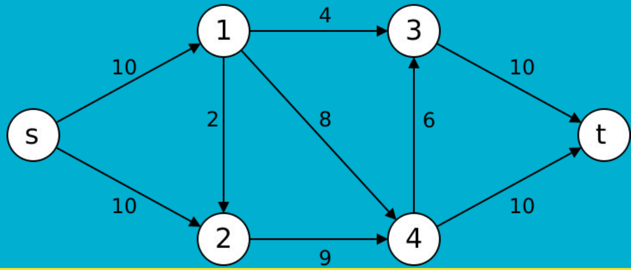
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 10
Fluxo disponível: ∞



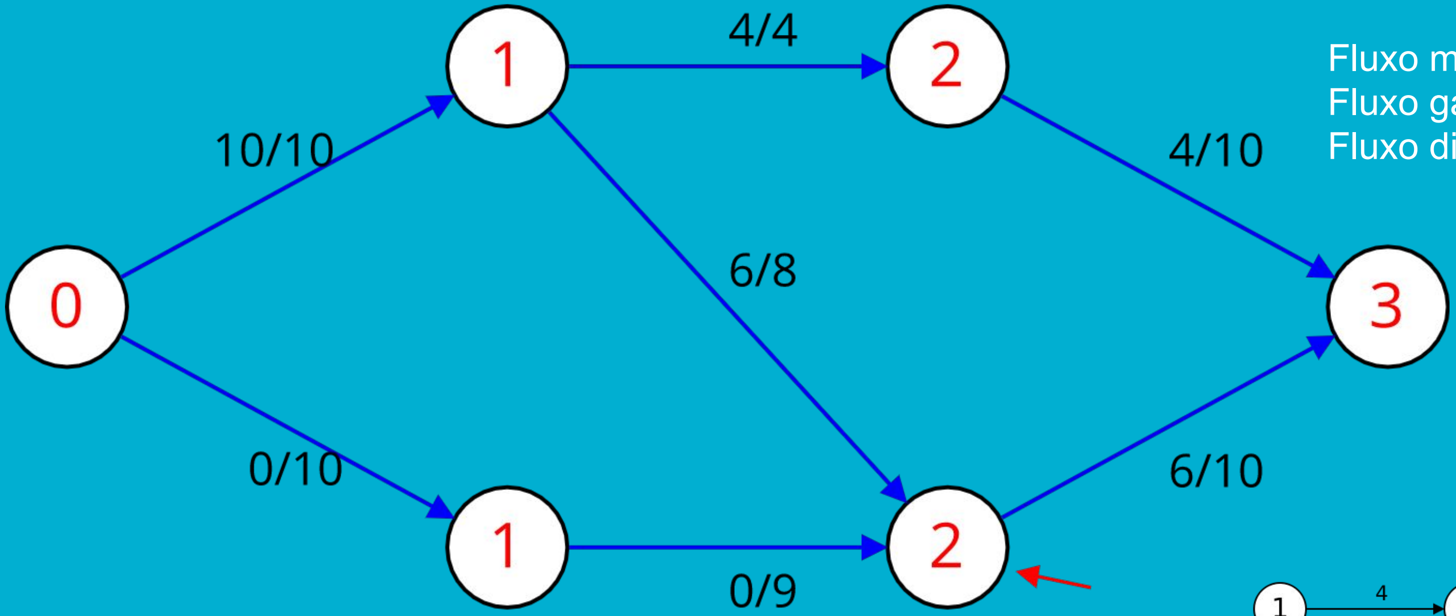
Distribuição do fluxo



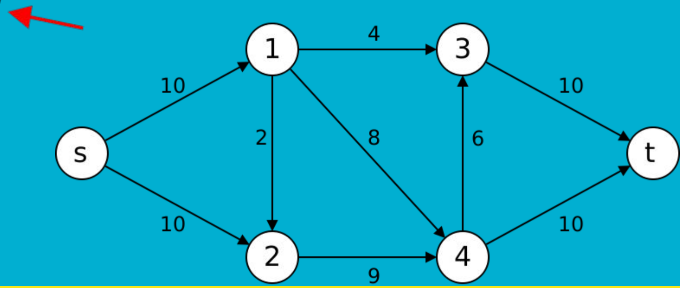
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 10



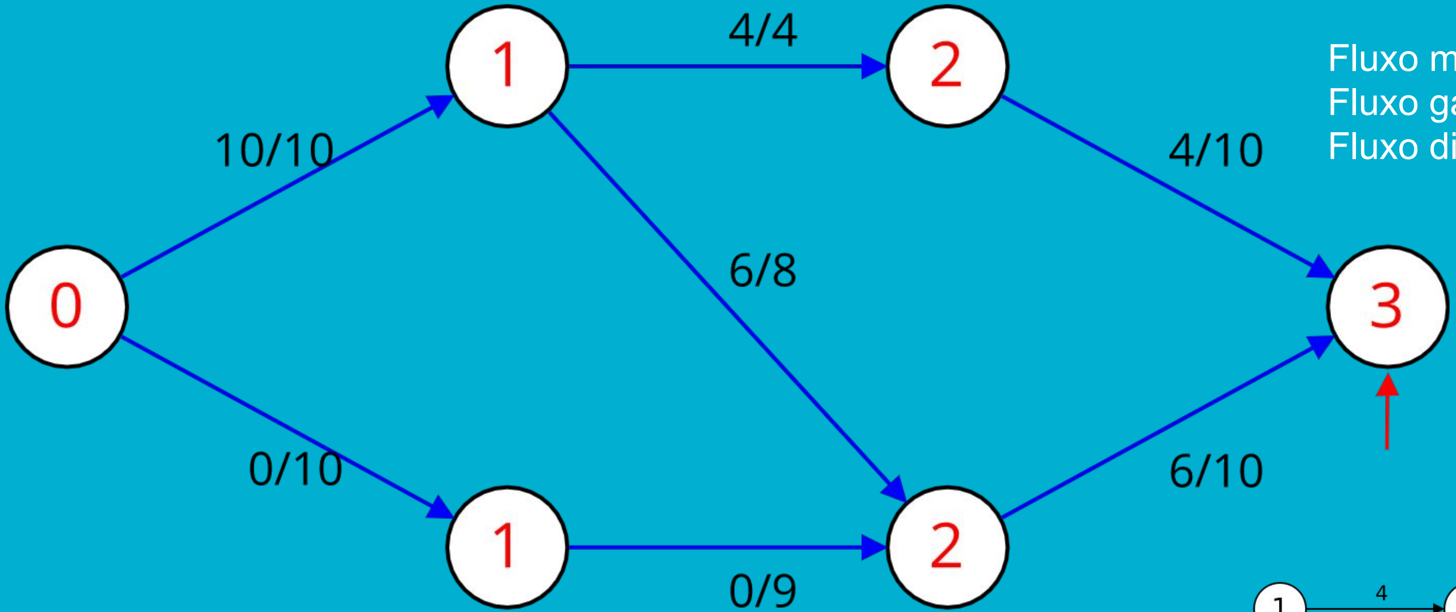
Distribuição do fluxo



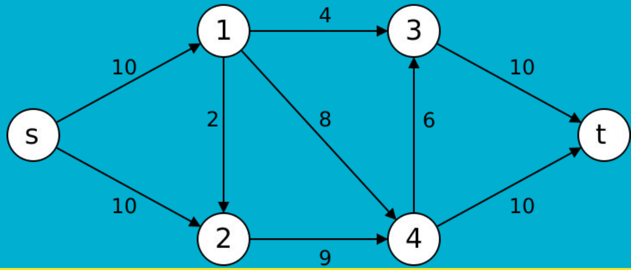
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 9



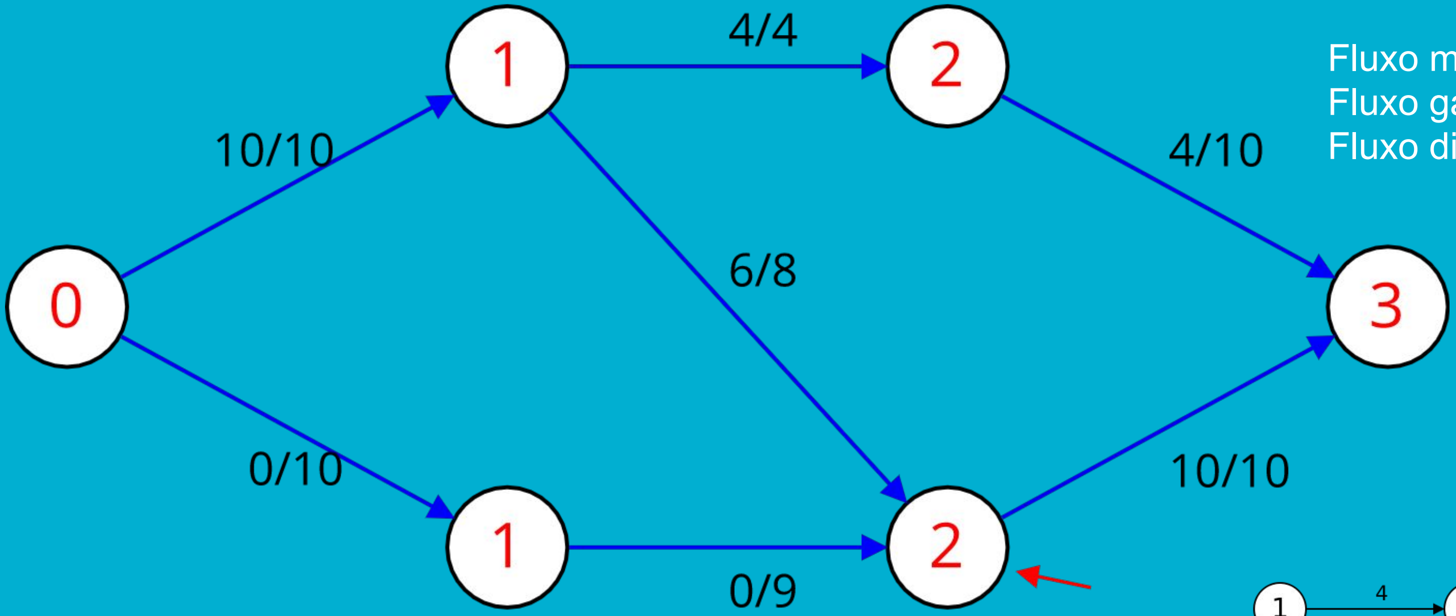
Distribuição do fluxo



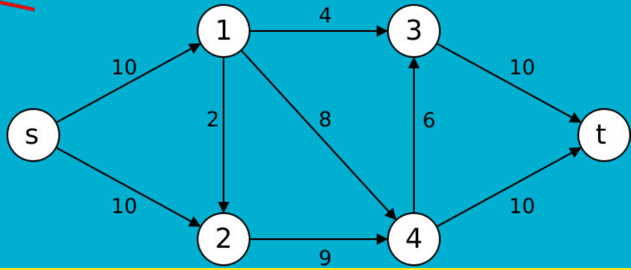
Fluxo máximo: 10
Fluxo gasto: 0
Fluxo disponível: 4



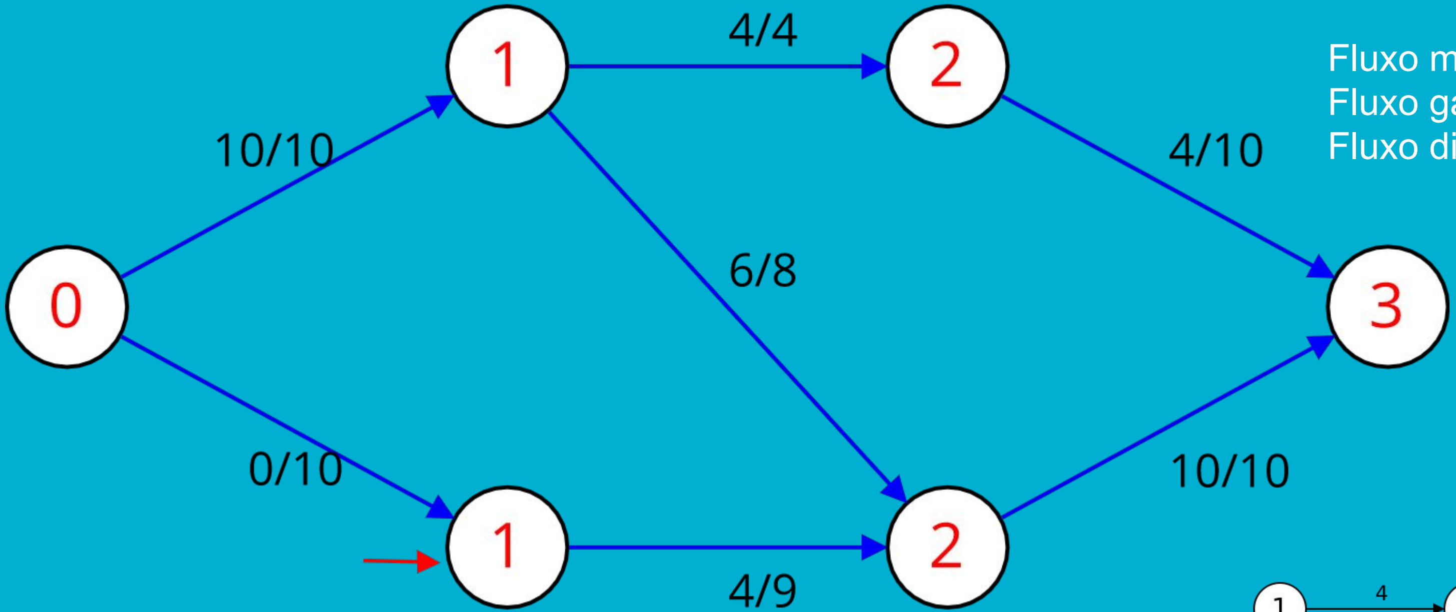
Distribuição do fluxo



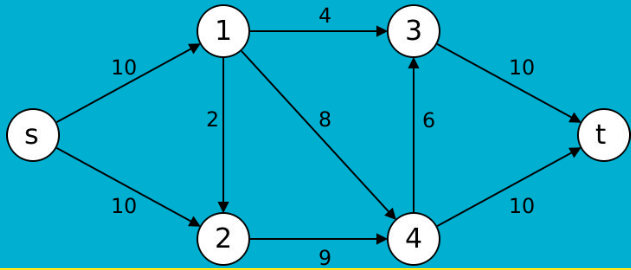
Fluxo máximo: 14
Fluxo gasto: 4
Fluxo disponível: 9



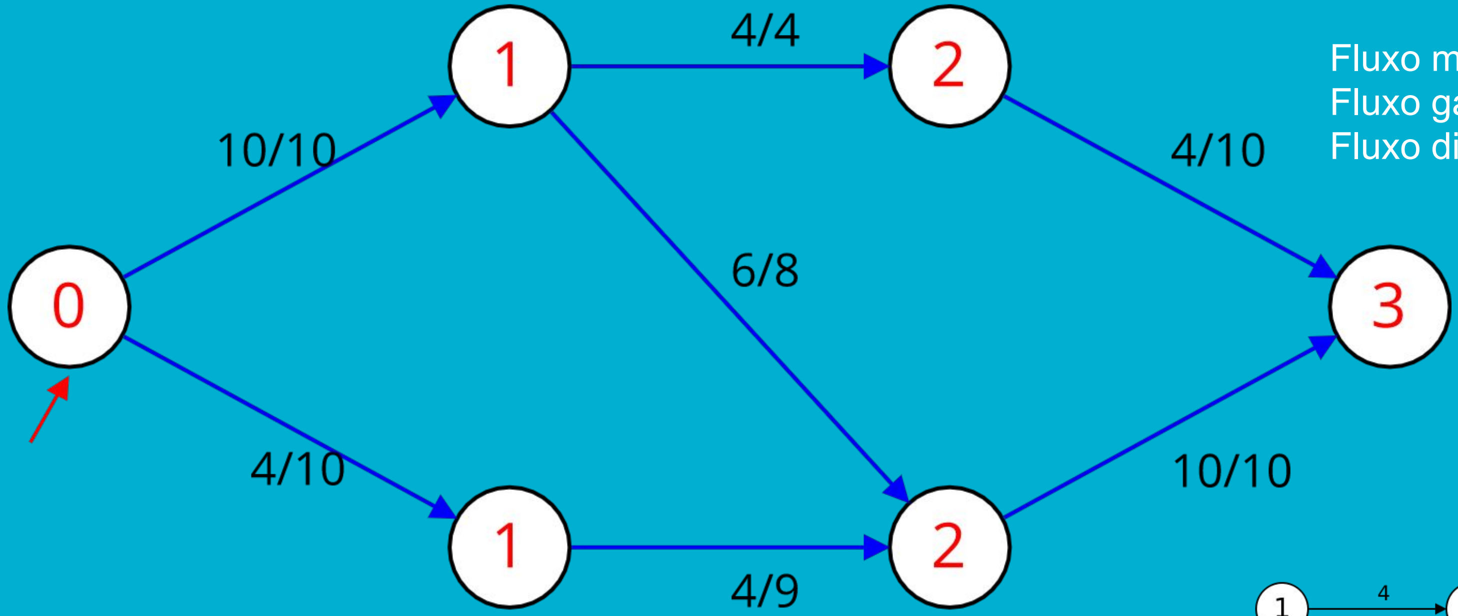
Distribuição do fluxo



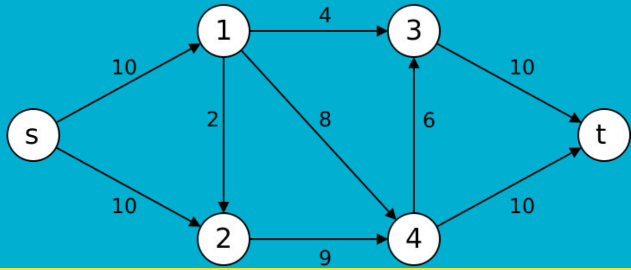
Fluxo máximo: 14
Fluxo gasto: 4
Fluxo disponível: 10



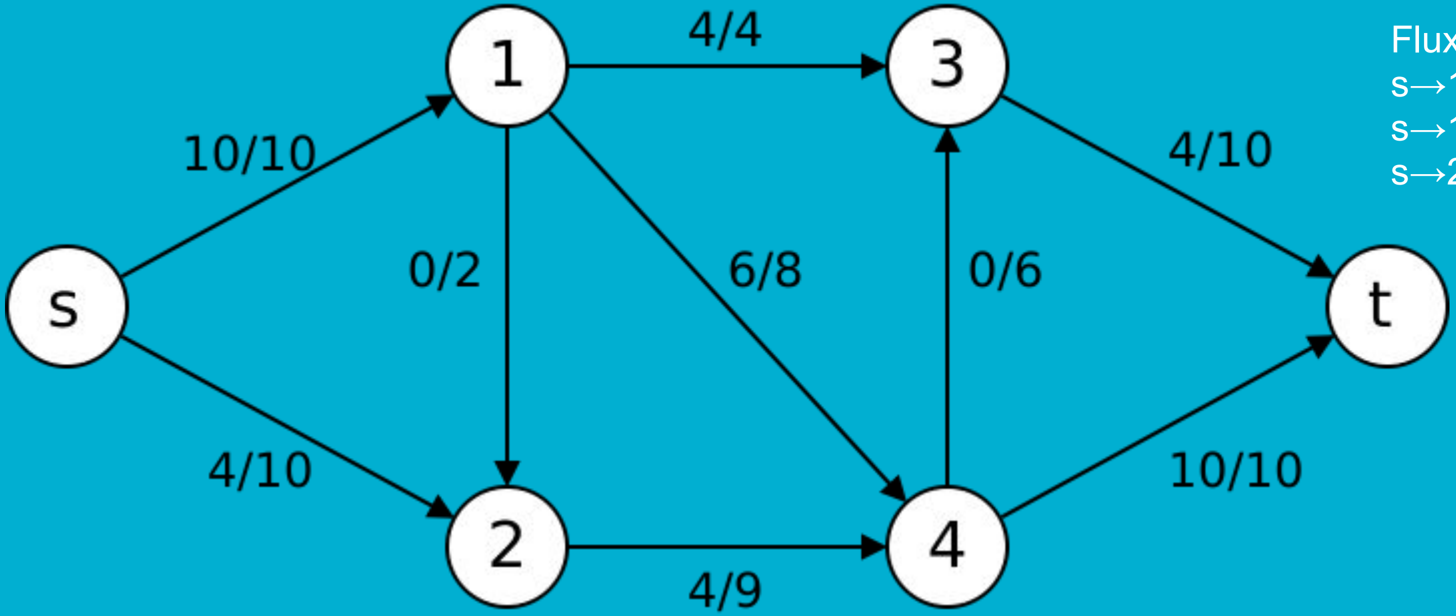
Distribuição do fluxo



Fluxo máximo: 14
Fluxo gasto: 14
Fluxo disponível: ∞

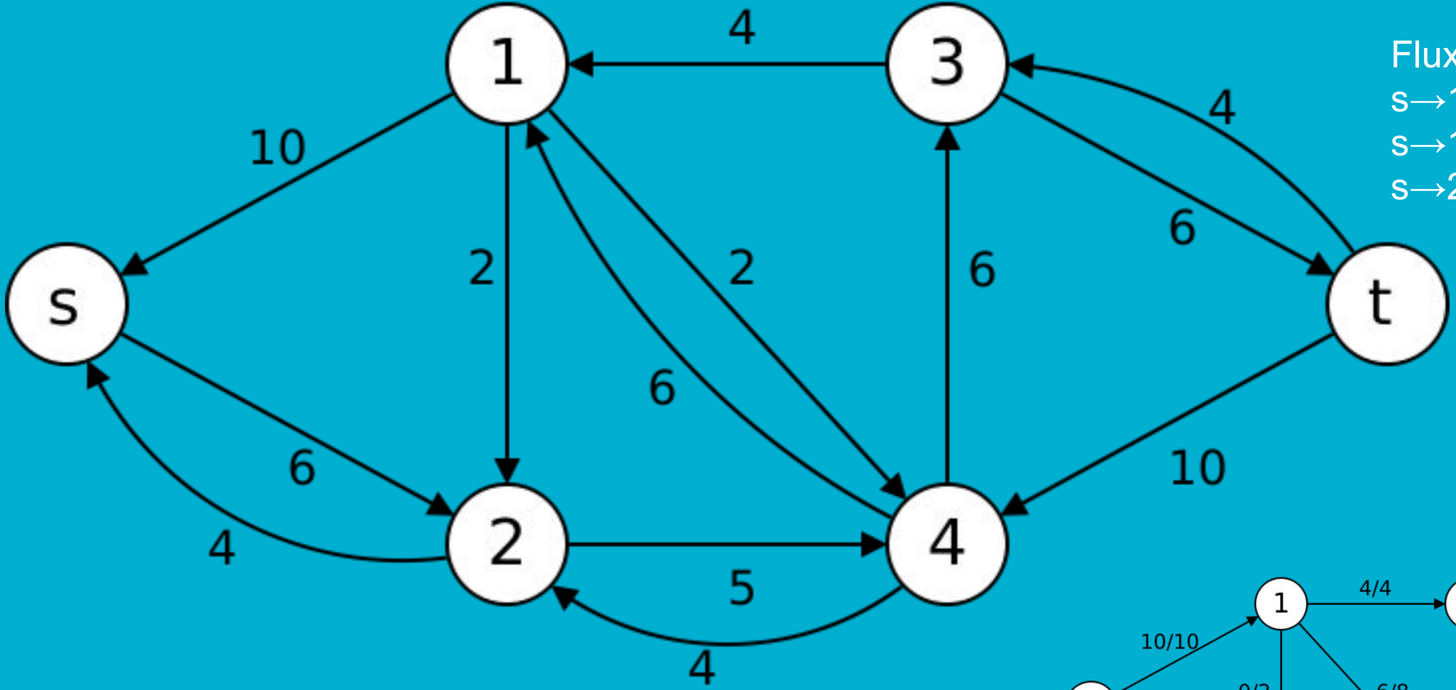


Distribuição do fluxo no grafo

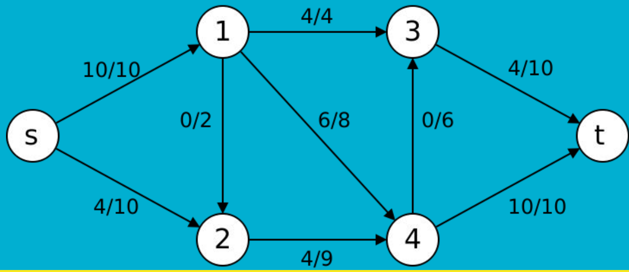


Fluxo máximo: 14
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4

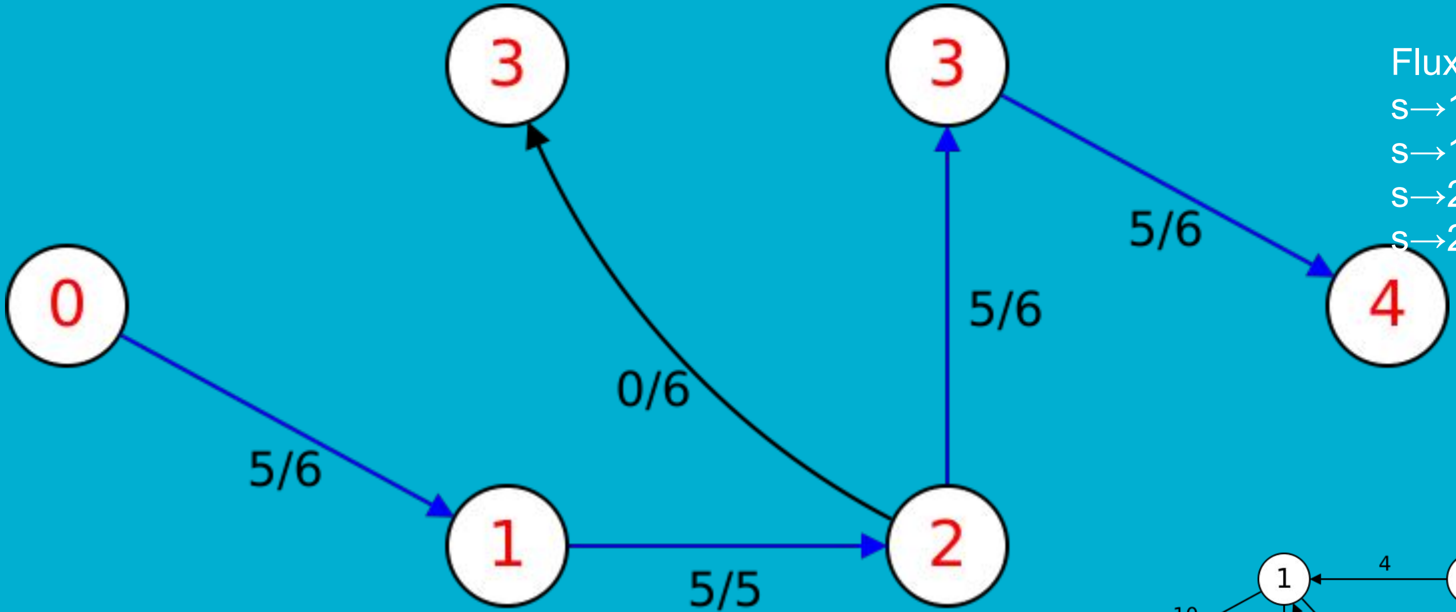
Atualização do grafo residual



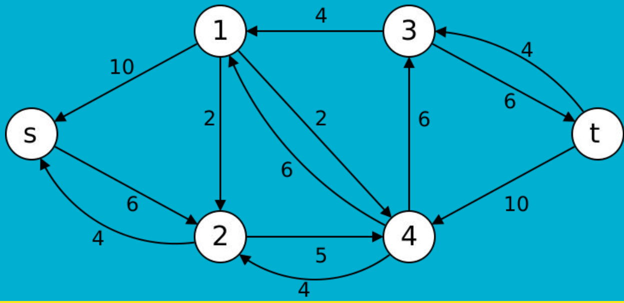
Fluxo máximo: 14
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4



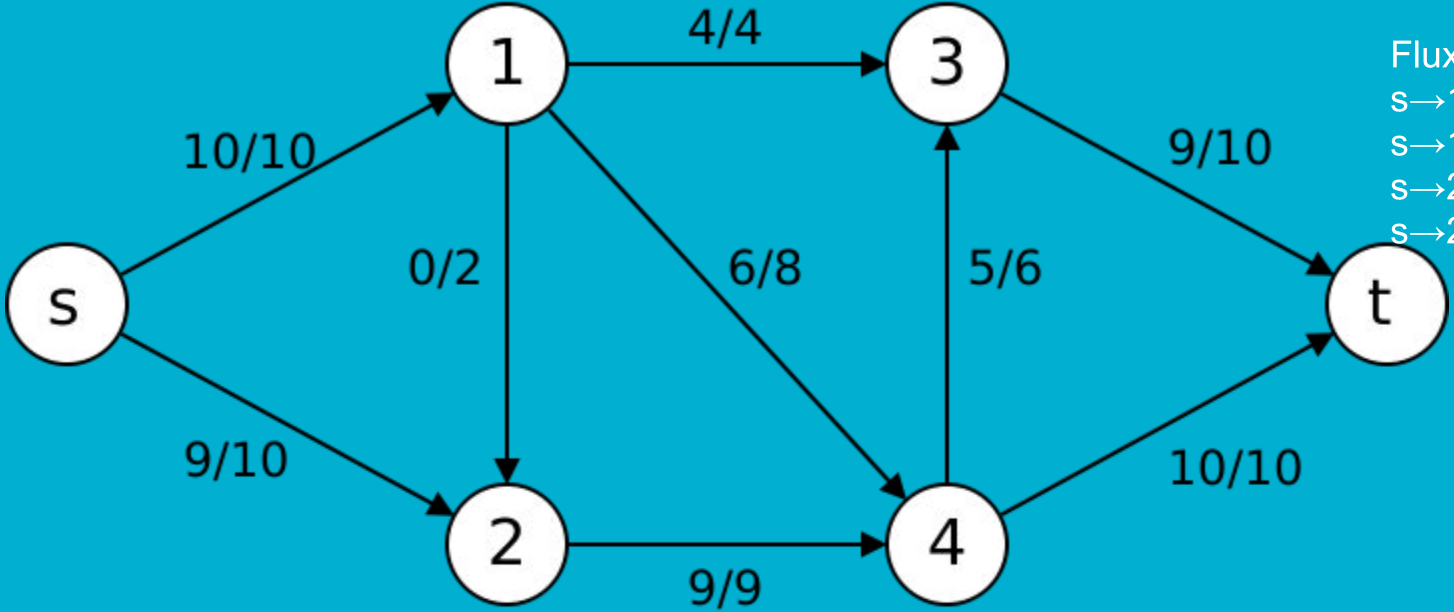
Construção da árvore e distribuição do fluxo



Fluxo máximo: 19
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4
s→2→4→3→t | 5

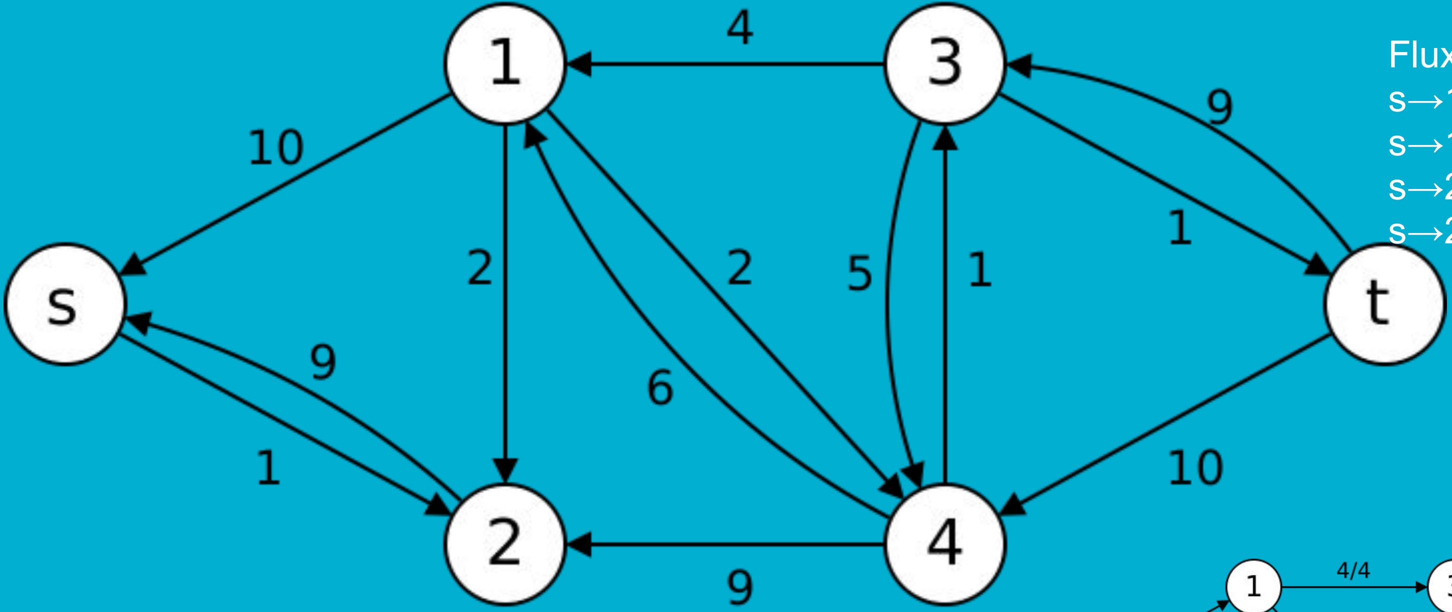


Distribuição do fluxo

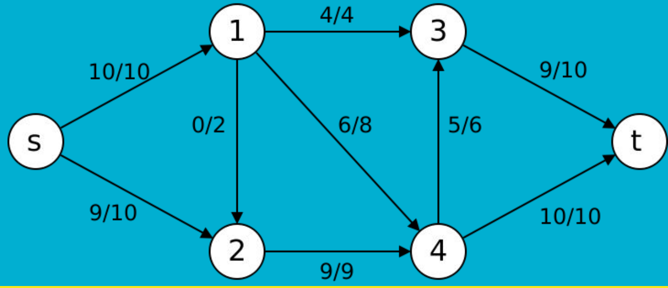


Fluxo máximo: 19
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4
s→2→4→3→t | 5

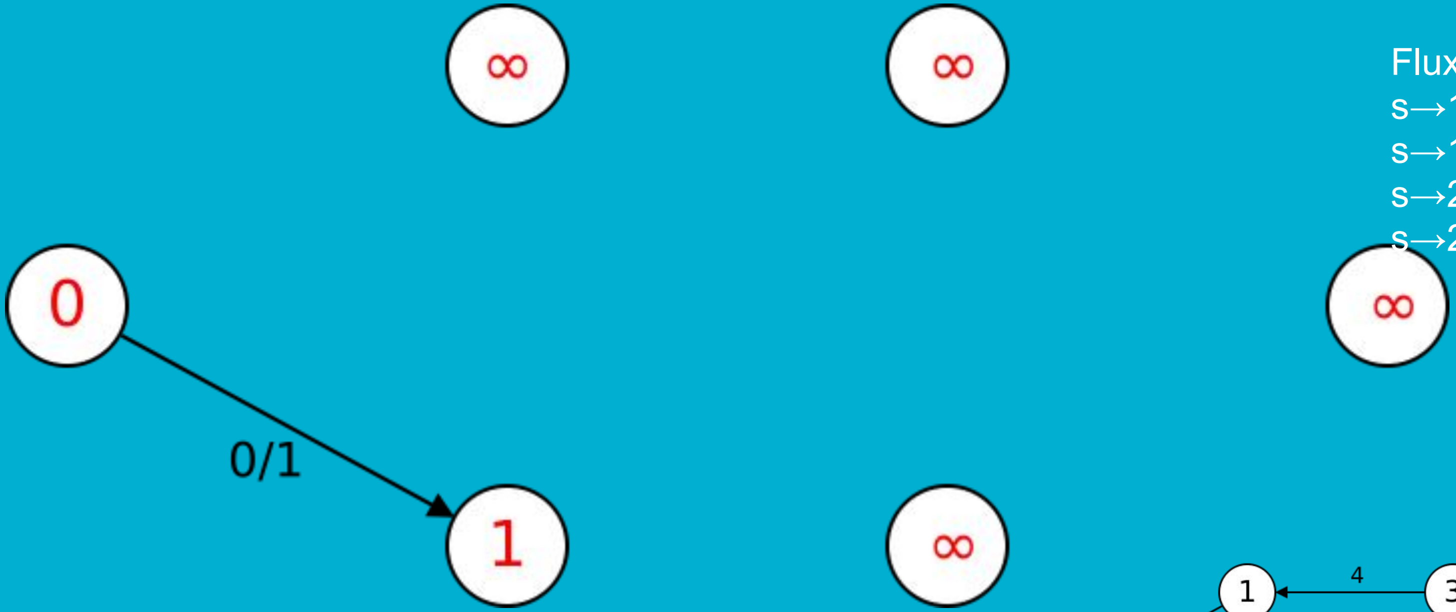
Grafo residual



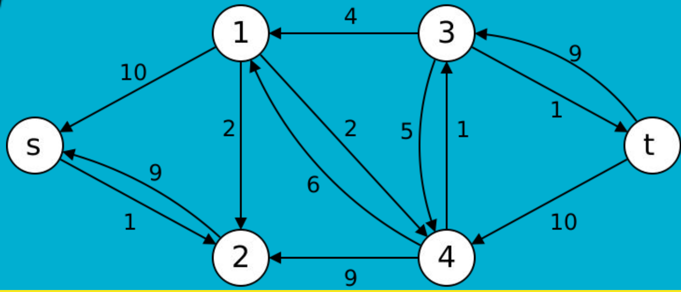
Fluxo máximo: 19
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4
s→2→4→3→t | 5



Construção da árvore de nível



Fluxo máximo: 19
s→1→3→t | 4
s→1→4→t | 6
s→2→4→t | 4
s→2→4→3→t | 5



Complexidade

- Quantas árvores podemos construir? $|V|-1$, só podemos construir uma árvore com altura máximo de $|V| - 1$.

- Qual o custo de construir uma árvore de nível? $O(|V|+|E|)$, pois utilizamos o BFS.

- Qual a complexidade de distribuir o fluxo? $O(|V| \times |E|)$, modificação no DFS, pois podemos revisitar o mesmo vértice.

- Complexidade final? $O(|V| \times (|V| + |E|) + |V| \times |V| \times |E|)$, ou seja, $O(|V|^2 \times |E|)$

Implementação

- Código em C++

Modelagem

- The Huxley 1861

Exemplo

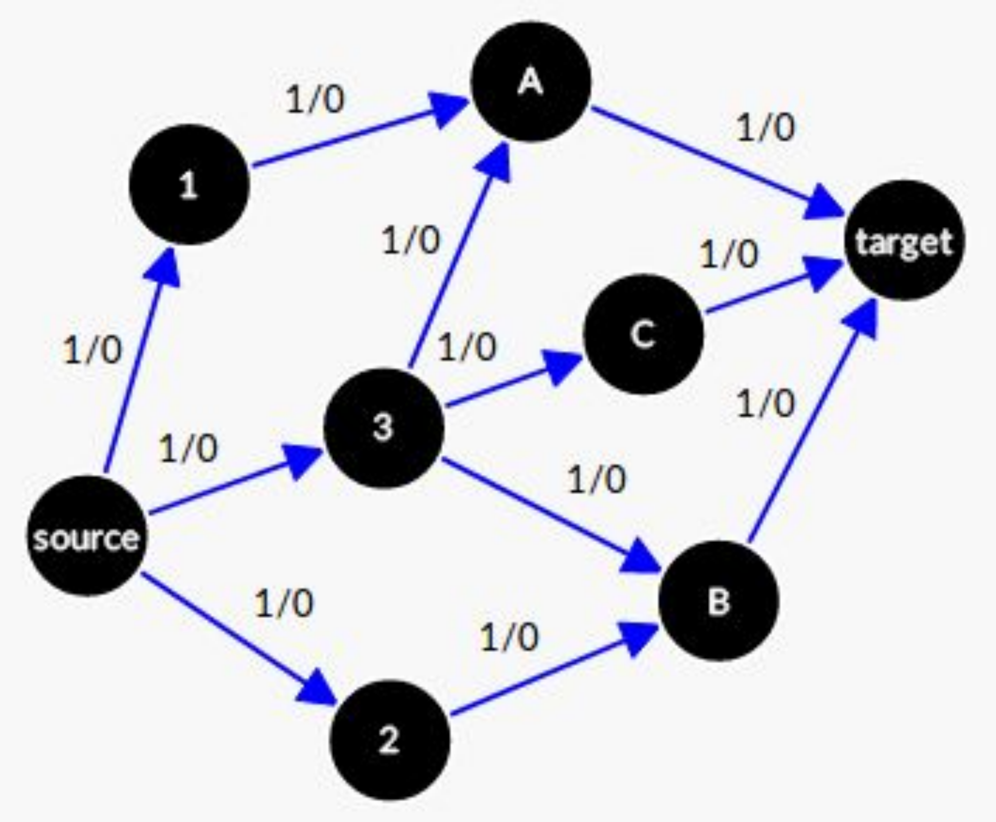
Temos que nomear três problemas que podem receber os respectivos nomes:

1. Apples ou Bananas

2. Bananas

3. Apricots, Blueberries ou Cranberries

Modelagem como problema de fluxo



Erro:
Deveria ter uma aresta que liga o 1 ao A.