Projeto e Análise de Algoritmos: Resolução da Lista 1

Bruno Aurélio Rozza de Moura Campos
Larissa Rozza Peluso

8 de dezembro de 2021

1. (**1 ponto**) Prove as seguintes séries por indução matemática:

(a) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n >= 1$

2. (**2 pontos**) Resolva as recorrências por meio do método de iteração ou expansão telescópica, e faça a prova, por indução, da fórmula fechada:

(a) T(1) = k ; T(n) = cT(n-1) ; c,k constantes e $n > 0$

(b) T(1) = 1 ; T(n) = 3T(n/4) + n^2

3. (**1 ponto**) Use o teorema mestre para determinar o tempo de execução de seus algoritmos expressos pelas seguintes recorrências:

(a) T(n) = 3T(n/2) + n log n

(b) T(n) = 64T(n/4) + n^2

4. (**2 pontos**) Use o método de árvore de recursão para determinar o tempo de execução dos algoritmos expressos pelas recorrências abaixo:

(a) T (n) = 2T(n/2) + $\theta(n^2)$

(b) T (n) = 2T(n/3) + $\theta(n)$

5. (**2 pontos**) Suponha que, para entradas de tamanho n, você tenha que escolher um dentre três algoritmos A, B e C.

(a) Algoritmo A resolve problemas dividindo-os em oito subproblemas de tamanho n/4, recursivamente resolve cada subproblema e então combina as soluções em tempo $O(1)$.

(b) Algoritmo B resolve problemas dividindo-os em quatro subproblemas de metade do tamanho, recursivamente resolve cada subproblema e então combina as soluções em tempo $O(n)$.

(c) Algoritmo C resolve problemas dividindo-os em dois subproblemas de tamanho n–1, recursivamente resolve cada subproblema e então combina as soluções em tempo $O(n^2)$.

Qual o consumo de tempo de cada um desses algoritmos? Expresse as suas respostas em termos da notação O, mas procure dar as respostas com funções para limites superiores mais próximos possíveis.

Qual algoritmo é assintoticamente mais eficiente no pior caso? Justifique as suas respostas.

6. (**2 pontos**) Suponha que você foi contratado para prestar uma consultoria a um banco que está preocupado com a detecção de fraudes em cartões. Eles tem um conjunto de n cartões que foram confiscados por suspeita de fraude. Cada cartão de banco é um pequeno objeto de plástico contendo um conteúdo encriptado que corresponde a uma conta única no banco. Cada conta pode ter muitos cartões associados, e diz-se que dois cartões são equivalentes se os mesmos correspondem a mesma conta. É muito difícil ler um número de conta do banco diretamente, mas o mesmo disponibilizou um "testador de equivalência" que recebe dois cartões e determina se eles são equivalentes. O que se deseja saber é: dentre n cartões, mais de 50% deles são equivalentes a um outro? Para isso, crie um pseudo-código para um algoritmo de divisão e conquista que resolva o problema, respondendo a questão, e demonstre que sua solução realiza apenas O (n log n) invocações do "testador de equivalências".

Respostas

1.

a) R:

Base da indução: n = 0

$\sum_{i=0}^{n} 0^2 = 0$

$\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$

Hipótese de indução $->$ P(n): $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, é verdadeira.

Passo da indução: Provar que P(n+1) é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

Verificação da igualdade:

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

n(2n + 1) + 6(n + 1) = ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)

$2n^2 + n + 6n + 6 = (n+2)(2n+3)$

$2n^2 + 7n + 6 = 2n^2 + 3n + 4n + 6$

$2n^2 + 7n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$

Hipótese verdadeira!

b) R:

Base da indução: n = 1

$\sum\limits_{i=0}^{n} 1^3 = 1$

$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

Hipótese de indução $->$ P(n): $\sum\limits_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, é verdadeira.

Passo da indução: Provar que P(n+1) é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + i^3$$

Verificação da igualdade:

$\frac{(n)^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$

$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$