UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus Presidente Prudente

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

APLICANDO A TRANSFORMADA DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE WAVELET

PRESIDENTE PRUDENTE
2025

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

Aplicando a transformada de Fourier e a transformada de Wavelet

Tarefa desenvolvido na disciplina de Álgebra Linear para Ciências de Dados no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP-FCT.
Professor: Cássio Machiaveli Oishi

PRESIDENTE PRUDENTE
2025

Sumário

1 Introdução

O processamento de sinais e imagens é uma área fundamental em ciência de dados, com aplicações diretas em compressão, filtragem e análise de informações. Nesse contexto, a Transformada de Fourier e a Transformada Wavelet destaca como ferramentas matemáticas essenciais para representar sinais nos domínios da frequência e do tempo-frequência.

Este trabalho foi realizado dessa vez no MATLAB Online, pois a versão instalada do MATLAB não suportava adequadamente alguns pacotes da toolbox de wavelets, mas o trabalho tem como objetivo aplicar e analisar a Transformada de Fourier Bidimensional e a Transformada Wavelet, conforme apresentado na Seção 2.7 do livro *Data-Driven Science and Engineering*. Inicialmente, são reproduzidos exemplos clássicos de compressão e filtragem de imagens utilizando a Transformada de Fourier. Em seguida, a Transformada Wavelet é aplicada tanto na compressão de imagens quanto na redução de ruído em sinais de áudio, permitindo uma comparação direta entre os métodos.

Por fim, é realizada uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados, utilizando métricas como a Relação Sinal-Ruído (SNR) e o Erro Quadrático Médio (MSE), com o objetivo de avaliar a eficiência de cada técnica na preservação da informação original e na redução de ruído.

2 Análise

A análise dos métodos empregados neste trabalho se baseia na forma como cada transformada representa a informação do sinal e na eficiência com que separa componentes relevantes de ruídos ou redundâncias. A Transformada de Fourier fornece uma representação global no domínio da frequência, sendo eficaz para identificar padrões periódicos e realizar compressão ao concentrar a energia do sinal em poucos coeficientes de alta magnitude. Entretanto, sua principal limitação é a ausência de localização temporal ou espacial precisa.

Por outro lado, a Transformada Wavelet oferece uma representação multirresolução, permitindo a análise simultânea de componentes de baixa e alta frequência em diferentes escalas. Essa característica torna as wavelets especialmente adequadas para sinais não estacionários, como áudio e imagens com variações locais, além de proporcionar melhor desempenho em tarefas de compressão e redução de ruído.

A comparação entre os métodos é realizada tanto de forma visual quanto por meio de métricas quantitativas, possibilitando avaliar o impacto da eliminação de coeficientes na qualidade do sinal reconstruído e evidenciando as vantagens da abordagem wavelet na preservação das principais características do sinal.

3 Resultados

3.1 Exercício

Fourier: reproduzir os exemplos da Seção 2.7 do livro *Data-driven*.

Wavelet:
Carregue dados de alguns dos seguintes *datasets*:
`https://magenta.tensorflow.org/datasets/maestro`,
`https://keithito.com/LJ-Speech-Dataset/`,
`https://www.openslr.org/12/`.

Depois, aplique um ruído branco (gaussiano). Finalmente, aplique métodos de redução de ruído wavelet e compare som limpo, ruidoso e reduzido.

3.2 Resolução

3.2.1 Fourier

Vamos reproduzir os exemplos da Seção 2.7, com isso será produzido dois exemplos

Análise dos resultados — Transformada de Fourier

A Figura 1 apresenta o resultado da reconstrução da imagem após a aplicação da **Transformada de Fourier bidimensional (FFT2)**. O código converte a imagem original para tons de cinza e realiza a transformação para o domínio da frequência. Em seguida, os coeficientes de menor magnitude são descartados, mantendo apenas uma fração dos mais significativos, o que permite observar o efeito da compressão na qualidade da imagem reconstruída.

Ao manter **10% dos coeficientes**, a imagem conserva quase toda a informação visual, com pouca ou quase nenhuma degradação perceptível. Com **5%**, nota-se uma leve suavização, mas as estruturas permanecem nítidas. Para **1%**, a perda de nitidez é perceptível e surgem artefatos na reconstrução. Finalmente, com apenas **0,2% dos coeficientes**, a imagem perde grande parte de suas características originais, tornando-se borrada e com falhas visuais.

Esse resultado evidencia a **capacidade de compressão da Transformada de Fourier**, que concentra a maior parte da energia da imagem em poucos coeficientes de alta magnitude, permitindo representar a informação visual com eficiência, embora com perda de detalhes quando a compressão é extrema.

Figura 1

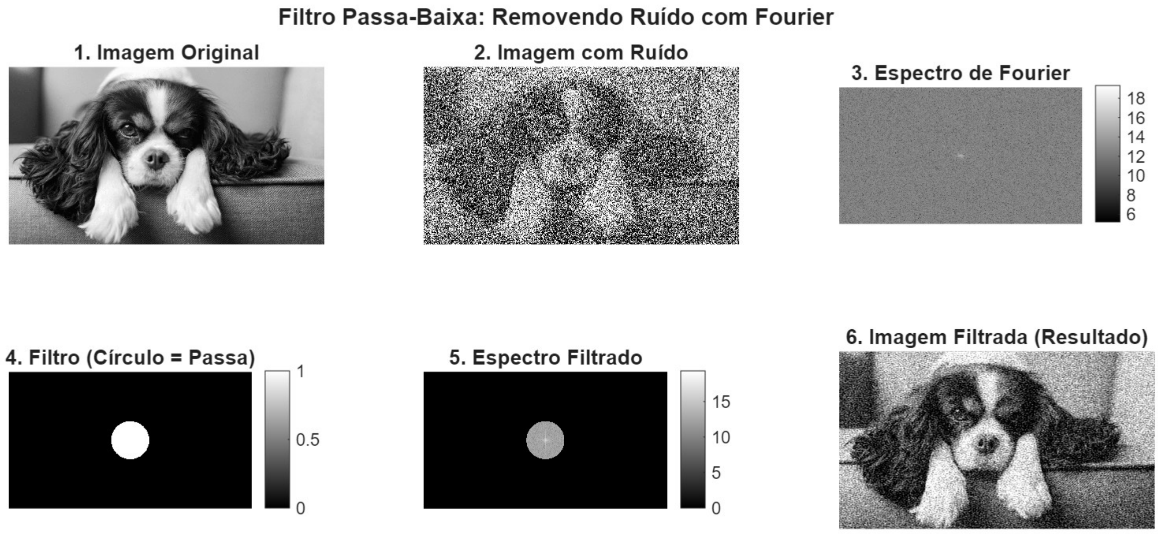
Filtro Passa-Baixa: Removendo Ruído com Fourier
1. Imagem Original
2. Imagem com Ruído
3. Espectro de Fourier
18
16
14
12
10
8
6
4. Filtro (Círculo = Passa)
1
0.5
0
5. Espectro Filtrado
15
10
5
0
6. Imagem Filtrada (Resultado)

Figura 2

3.2.2 Wavalet

Análise dos resultados — Wavelet

A Figura abaixo apresenta o resultado da reconstrução de uma imagem utilizando diferentes porcentagens dos coeficientes obtidos na decomposição Wavelet. O código realiza uma decomposição bidimensional da imagem com quatro níveis. Em seguida, os coeficientes de menor magnitude são progressivamente descartados, mantendo apenas uma fração dos mais significativos, o que permite avaliar o impacto da compressão sobre a qualidade da imagem reconstruída.

Observa-se que, ao manter **5% dos coeficientes**, a reconstrução é praticamente idêntica à imagem original, isso mostra que a maior parte da informação visual está concentrada em poucos coeficientes de alta magnitude. Com **1% dos coeficientes**, a imagem ainda preserva boa definição dos contornos principais, embora comece a apresentar pequenas perdas de contraste em alguns detalhes. Quando reduzido para **0,5%**, nota-se uma degradação mais evidente: partes perdem suavidade e surgem artefatos, isso indica que a eliminação de coeficientes relevantes compromete a reconstrução. Por fim, com apenas **0,1% dos coeficientes**, a imagem perde completamente a estrutura original, restando apenas regiões grosseiras de contraste, o que evidencia que o processo de compressão extrema descarta informações essenciais para a representação visual.

Esse experimento demonstra de forma prática a **capacidade de compressão da transformada Wavelet**, que concentra grande parte da energia da imagem em poucos coeficientes, e também mostra o limite a partir do qual a perda de informação se torna perceptível.

Figura 3

Análise da Decomposição Wavelet - 2 Níveis

A Imagem original apenas mostra a imagem utilizada no experimento, servindo apenas como referência para o processo de decomposição. Já a Figura 5 mostra a decomposição da mesma imagem em dois níveis, utilizando a wavelet.

O código realiza a decomposição bidimensional da imagem, separando os coeficientes em componentes de **aproximação** e **detalhe** (horizontal, vertical e diagonal) em cada nível. No primeiro nível, as componentes de detalhe contêm as informações de alta frequência, responsáveis pelas bordas e texturas mais finas. No segundo nível, a decomposição é aplicada sobre a aproximação do primeiro, revelando estruturas mais amplas e suavizadas.

Figura 4

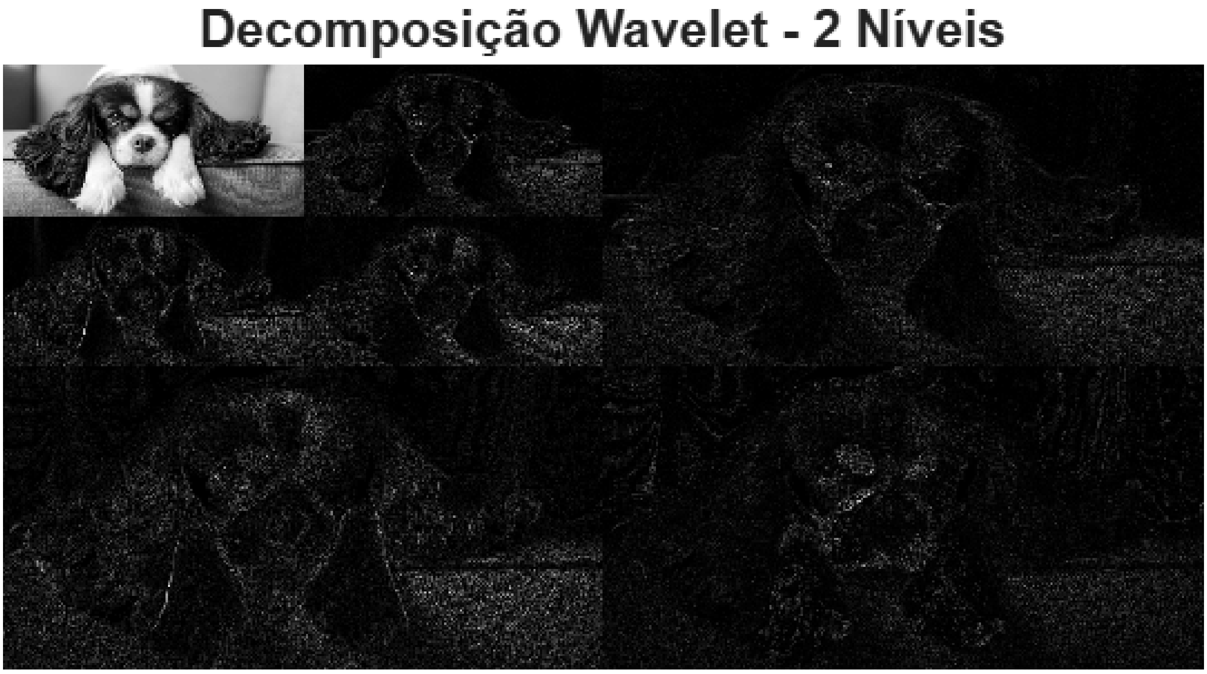

Figura 5

Na Figura 5, observa-se que a subimagem superior esquerda representa a **aproximação** (componentes de baixa frequência), responsável pela forma geral da imagem. As demais subimagens representam os **detalhes horizontais, verticais e diagonais**, que destacam as variações de intensidade em diferentes direções.

Esse resultado demonstra a **capacidade multirresolução da transformada Wavelet**, que permite representar a informação visual com diferentes níveis de detalhes, sendo muito utilizada em tarefas de compressão e processamento de imagens.

3.2.3 Ruído Branco

Para avaliar a eficácia das técnicas de redução de ruído, foi implementados dois métodos distintos: filtragem por Transformada Rápida de Fourier (FFT) e por Wavelets. O sinal analisado foi contaminado com ruído branco Gaussiano com SNR inicial de 10 dB. As métricas de qualidade adotadas foram a Relação Sinal-Ruído (SNR) e o Erro Quadrático Médio (MSE).

As métricas utilizadas para avaliação da qualidade dos sinais processados foram:

- **SNR (dB)**: Quanto maior, melhor a relação sinal-ruído
- **MSE**: Quanto menor, mais fiel a reconstrução do sinal original
- **dB**: Escala logarítmica que facilita a comparação de grandes variações

A escala logarítmica transforma multiplicações em adições, comprimindo grandes variações numéricas. Cada +10 dB representa 10× mais potência:

$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow 0\ \text{dB} \\
10 &\rightarrow 10\ \text{dB} \\
100 &\rightarrow 20\ \text{dB} \\
1.000.000 &\rightarrow 60\ \text{dB}
\end{aligned}
$$

Em vez de trabalhar com números como 1.000.000, usamos 60 dB - muito mais prático para comparações e cálculos.

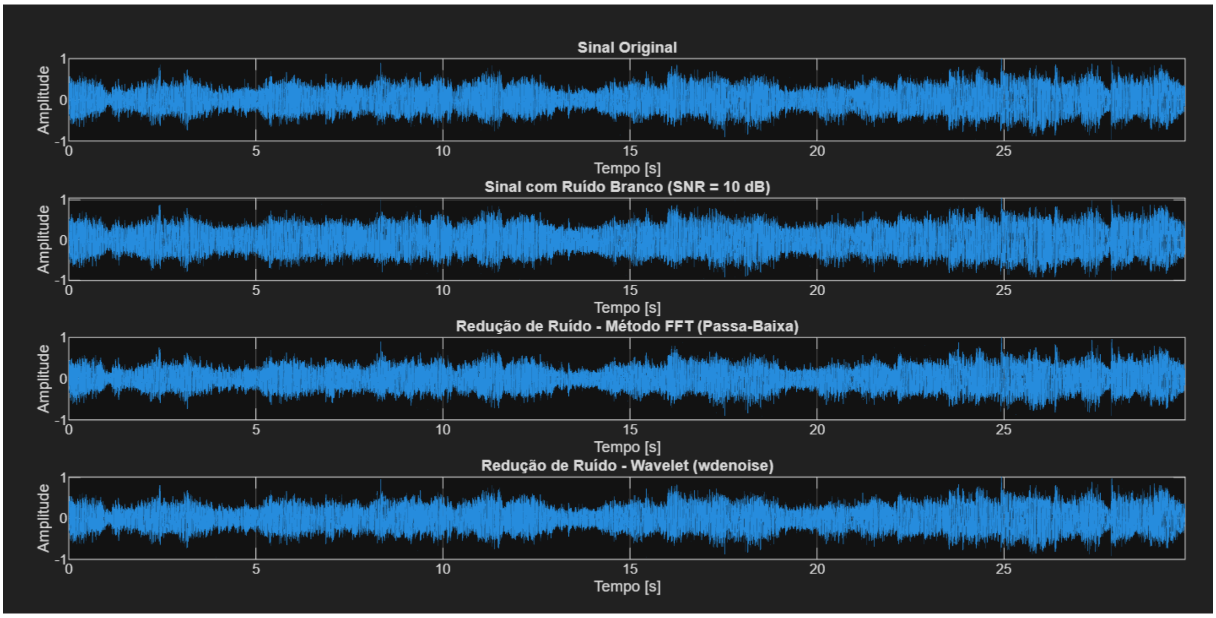

Figura 6

MÉTRICAS DE QUALIDADE	
SNR Ruidoso:	10.00 dB
SNR após FFT:	12.40 dB
SNR após Wavalet:	16.09 dB

Ao observar os dodos da Tabela, o método de Wavelets ser mais eficaz na redução do ruído, atingindo SNR de 16,09 dB contra 12,40 dB do método FFT. Essa diferença de 3,69 dB representa uma melhoria qualidade do sinal. Ao fazer a reprodução do som o método de FFT fica bem abafado e não há ruídos, enquanto o Wavelet possuí pouco ruído mas mantém boa qualidade do som.

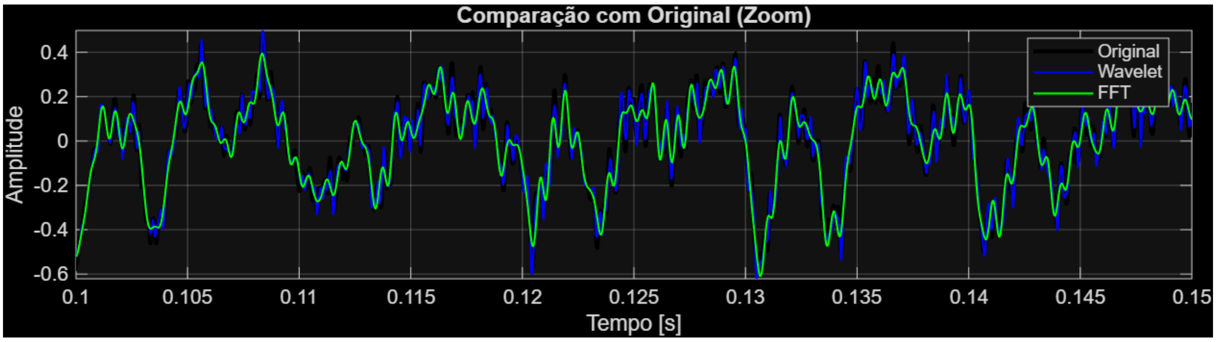

Figura 7

O Erro Quadrático Médio (MSE) foi escolhido como métrica por uma razão principal, ele penaliza mais os erros grandes do que os pequenos. No processamento de áudio, distorções significativas são muito mais perceptíveis ao ouvido humano do que pequenas variações.

O cálculo é feito da seguinte forma:

1. Mede-se a diferença entre cada amostra do sinal original e do sinal processado
2. Eleva-se cada diferença ao quadrado (erros grandes ficam ainda maiores)
3. Tira-se a média de todos esses valores ao quadrado

Quanto menor o MSE, mais fiel é a reprodução do som original e menos distorções perceptíveis o método introduz.

ERRO	
MSE após FFT:	0.001962
MSE após Wavalet:	0.000839

O Erro Quadrático Médio (MSE) é calculado pela seguinte equação:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{\text{original}} - x_{\text{filtrado}})^2 \tag{1}$$

onde:

- N: número total de amostras do sinal
- x_{original}: valor da i-ésima amostra do sinal original
- x_{filtrado}: valor da i-ésima amostra do sinal processado
- $(x_{\text{original}} - x_{\text{filtrado}})^2$: erro quadrático em cada amostra

Esta equação representa a média dos quadrados das diferenças entre o sinal original e o sinal processado, penalizando mais fortemente os erros de maior magnitude.

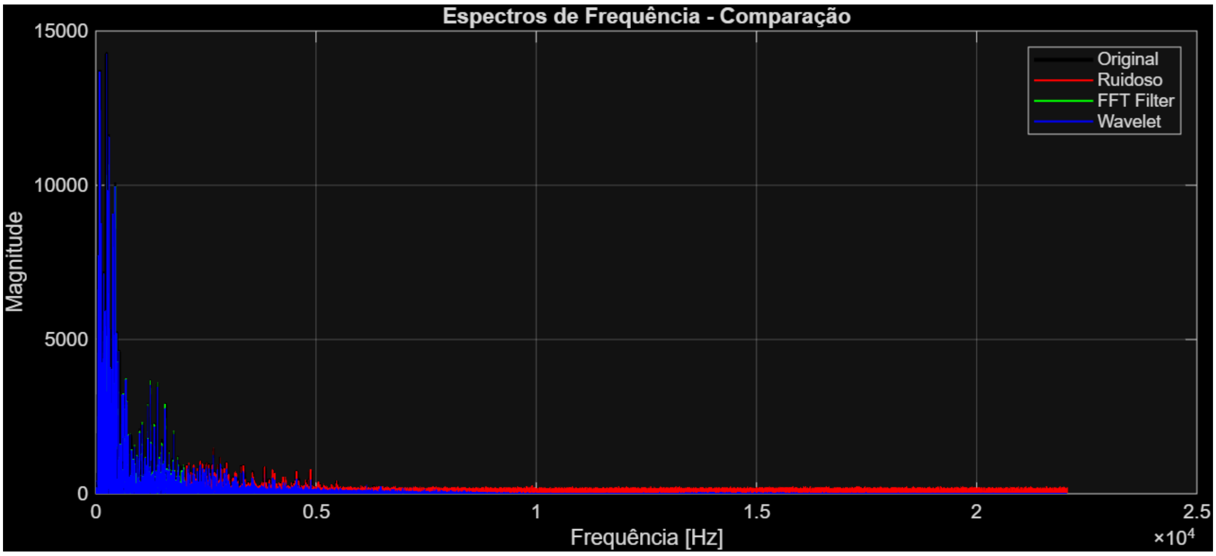

Figura 8

A Figura 8 apresenta a comparação dos espectros de frequência dos sinais processados. Note que:

- O método FFT remove eficientemente componentes de alta frequência, porém pode eliminar informações relevantes do sinal, deixando assim o som "abafado"
- A técnica Wavelet preserva melhor as características espectrais do sinal original enquanto diminui o ruído.
- A abordagem wavelet demonstra melhoria entre redução de ruído e preservação do conteúdo.