



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus Presidente Prudente

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

**ESTUDO SOBRE O TEOREMA DA MELHOR APROXIMAÇÃO DE
UMA MATRIZ**

PRESIDENTE PRUDENTE

2025

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

Estudo sobre o Teorema da Melhor Aproximação de uma matriz

Tarefa desenvolvido na disciplina de Álgebra Linear para Ciências de Dados no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP-FCT.

Professor: Cássio Machiaveli Oishi

PRESIDENTE PRUDENTE

2025

Sumário

1	Decomposição SVD	2
1.1	Propriedades:	2
1.2	Teorema (Melhor aproximação de posto inferior de uma matriz)	4
2	Resultados	5
2.1	Exercício	5

1 Decomposição SVD

A decomposição em valores singulares (SVD) de uma matriz

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

é a fatoração

$$A = U \Sigma V^*$$

onde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $p = \min\{m, n\}$, e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. Além disso, as matrizes quadradas

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

são unitárias.

Observação: As entradas da diagonal de Σ são chamadas de *valores singulares* de A , as colunas de U são chamadas de *vetores singulares à esquerda*, e as colunas de V são chamadas de *vetores singulares à direita* de A .

Definição (Forma reduzida): Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ com posto $r \leq p = \min\{m, n\}$. A *forma reduzida da SVD* de A é a fatoração

$$A = U \Sigma_r V^*$$

com $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, onde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $U = [u_1, \dots, u_r] \in \mathbb{C}^{m \times r}$, $V = [v_1, \dots, v_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$.

Neste caso, as colunas de U e V são ortonormais.

1.1 Propriedades:

a) Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ possui uma decomposição SVD na forma

$$A = U \Sigma V^*$$

b) Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então U e V são matrizes reais.

c) Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ possui uma decomposição SVD, então para todo $j = 1, 2, \dots, p = \min\{m, n\}$ temos:

$$A v_j = \sigma_j u_j, \quad A^* u_j = \sigma_j v_j, \quad u_j^* A v_j = \sigma_j$$

d) Se $U \Sigma V^*$ é uma decomposição de A , então $V \Sigma^T U^*$ é uma decomposição SVD de A^* .

e) Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tem r valores singulares não nulos, então:

$$\begin{cases} \text{posto}(A) = r \\ A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^* \\ \text{im}(A) = \text{gerado}\{u_1, \dots, u_r\} \\ \text{espaço nulo}(A) = \text{gerado}\{v_{n+1}, \dots, v_n\} \end{cases}$$

f) Para a forma reduzida da SVD, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então \hat{U} e \hat{V} podem ser reais.

g) Se $\text{posto}(A) = r$, então A tem r valores singulares não nulos.

h)

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)}$$

i) Se $U\Sigma V^*$ é uma decomposição SVD de A , então as colunas de V são autovetores de A^*A , enquanto que as colunas de U são autovetores de AA^* .

j) Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é Hermitiana com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então seus valores singulares são $\sigma_1 = |\lambda_1|, \sigma_2 = |\lambda_2|, \dots, \sigma_n = |\lambda_n|$.

Observação: Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então as matrizes da decomposição SVD U , V e Σ também são matrizes reais de ordem $n \times n$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Sigma_n & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Observação: Seja $r = n \leq m$. Então a matriz

$$C = A^T A \quad \text{é simétrica e positiva definida (S.P.D.)}$$

Denotamos os autovalores de C em ordem decrescente como $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Note que:

$$C = A^T A = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T$$

já que a matriz U é ortogonal.

Dessa forma, a matriz

$$\Sigma^T \Sigma \quad \text{é diagonal com elementos} \quad \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2,$$

e V^T é uma matriz que garante uma "transformação semelhante" com C . Além disso,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{e} \quad \|A\|_2 = \sigma_1$$

1.2 Teorema (Melhor aproximação de posto inferior de uma matriz)

A melhor aproximação de posto r denotada por A_r de uma matriz A , que admite a decomposição

$$A = U\Sigma V^T \quad \text{e a relação}$$

$$\|A - A_r\| \quad \text{é a matriz}$$

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

onde u_i e v_i são as colunas de U e V , respectivamente.

Observação: Esse teorema é aplicado para a construção de uma decomposição SVD “truncada”, que faz a “redução dimensional” de um determinado problema.

2 Resultados

2.1 Exercício

Usando uma imagem, analisar esse teorema. Apresente seus resultados, mostrando as imagens variando com o valor de r , e faça um estudo sobre o erro de reconstrução ($\|A - A_r\|$). Depois disso, crie um *dataset* de imagens da mesma categoria da imagem utilizada na primeira parte e repita o estudo. Seu *dataset* precisa ter no mínimo 25 imagens. Vá aumentando essa quantidade e verifique os resultados. Apresente tudo isso em forma de um simples relatório descritivo.

Resolução:

Inicialmente será apresentado os resultados das imagens variando conforme o valor de r , a partir de uma imagem, com o erro de reconstrução.

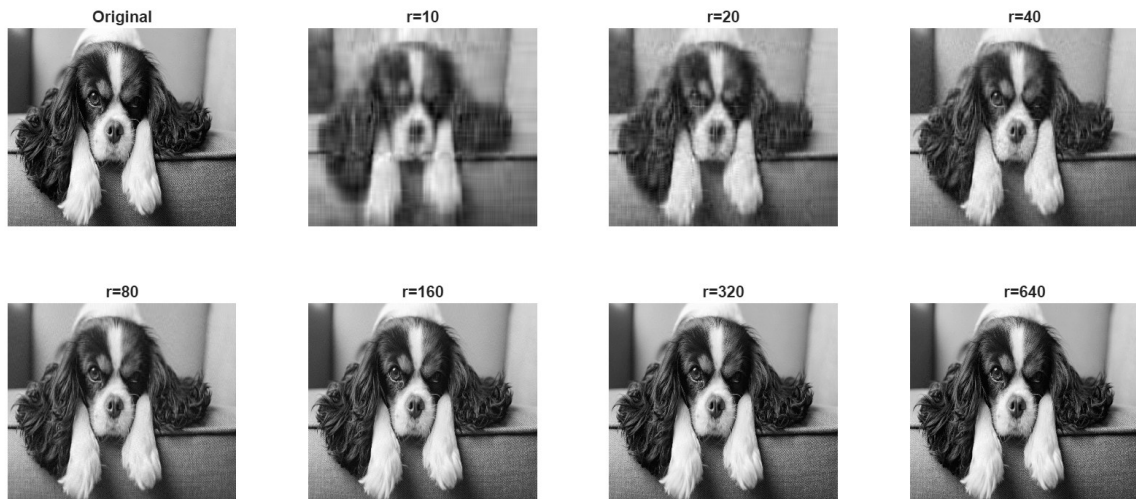


Figura 1: Solução da Melhor Aproximação de uma matriz.

Tabela 1: Erros de construção (r) para a norma euclidiana

Valores dos r	Valores dos erros
10	7585.87359718529
20	4676.17310962342
40	2364.91766972714
80	1276.02627067775
160	708.997037481413
320	290.23001198271
640	109.772714398467

Tabela 2: Erros de construção (r) para a norma frobenius

Valores dos r	Valores dos erros
10	28885.1990709783
20	21804.3247413625
40	15675.0035480483
80	11053.670070757
160	7021.88844083664
320	3537.74847611983
640	1465.5769681978

Os valores do erro caem de forma acentuada conforme o valor de r aumenta. O erro da norma euclidiana mostra que poucos valores singulares já capturam grande parte da informação da imagem, mas o ganho diminui conforme r cresce.

Com a norma de Frobenius o comportamento é semelhante, pois a redução é consistente, mas gradual, mostrando que a norma de Frobenius fornece uma medida global do erro em toda a matriz.

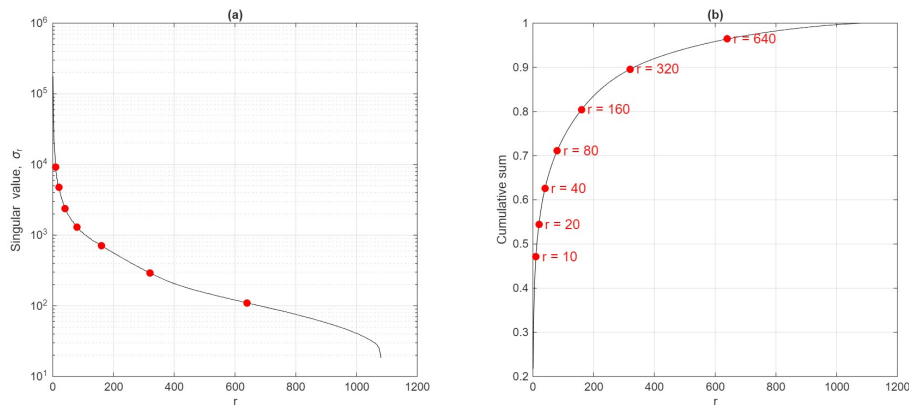


Figura 2: Erro absoluto e porcentagem de correção

Os resultados mostram que o erro de reconstrução diminui à medida que r aumenta, confirmando o Teorema da Melhor Aproximação. Poucos valores singulares já são suficientes para recuperar grande parte da informação da imagem, mas os ganhos adicionais reduzem conforme r cresce. A norma Euclidiana mede o pior erro individual (relacionado ao maior valor singular descartado), enquanto a norma de Frobenius avalia o erro acumulado global, resultando em valores mais altos, mas seguindo a mesma tendência de queda.

A partir da criação de um *dataset* com imagens da mesma categoria da utilizada na primeira parte, foram analisados conjuntos contendo 25, 30 e 35 imagens.

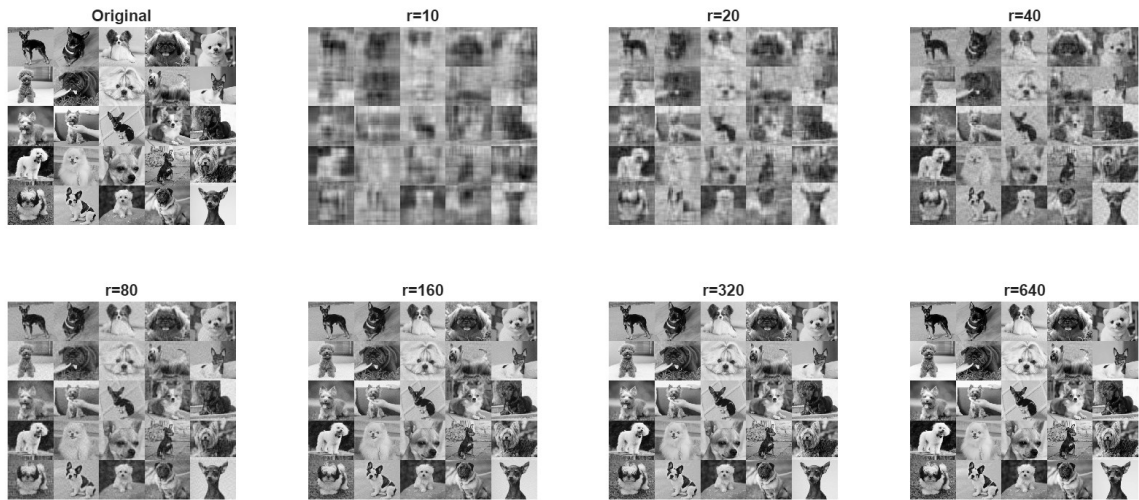


Figura 3: Solução da Melhor Aproximação de uma matriz com 25 imagens.

Tabela 3: Erros de construção (r) para norma euclidiana

Valores dos r	Valores dos erros
10	6763.86164577907
20	3903.78024382672
40	2194.39335848058
80	1068.56684408484
160	512.136465386862
320	191.045004814679
640	21.0177078686483

Tabela 4: Erros de construção (r) para norma frobenius

Valores dos r	Valores dos erros
10	25123.3493008419
20	18470.3354745659
40	12717.7877245155
80	8136.14942291872
160	4555.4614643098
320	1808.37582405096
640	106.635337232353

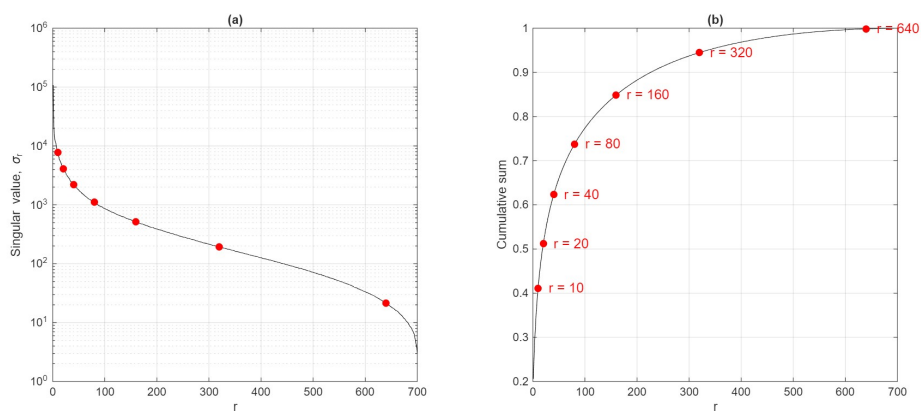


Figura 4: Erro absoluto e porcentagem de correção

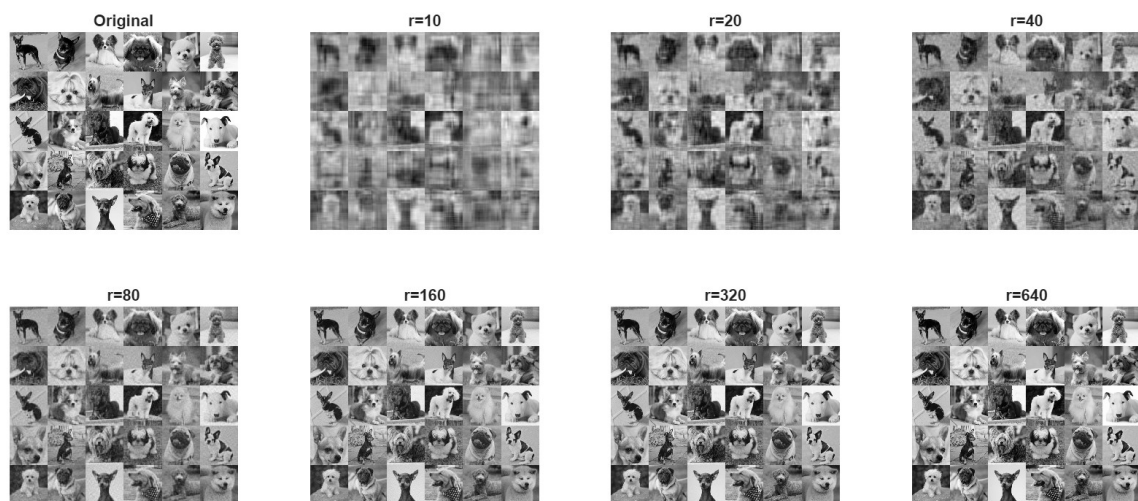


Figura 5: Solução da Melhor Aproximação de uma matriz com 30 imagens.

Tabela 5: Erros de construção (r) para a norma euclidiana

Valores dos r	Valores dos erros
10	8511.5111935858
20	5003.12502998495
40	2624.59826717928
80	1380.8625208299
160	644.710549938018
320	254.786853430961
640	49.8780020347124

Tabela 6: Erros de construção (r) para a norma frobenius

Valores dos r	Valores dos erros
10	30619.4186058162
20	22837.8640387093
40	16110.5494989448
80	10457.3467366011
160	5960.91336522702
320	2565.75739292838
640	373.66676226577

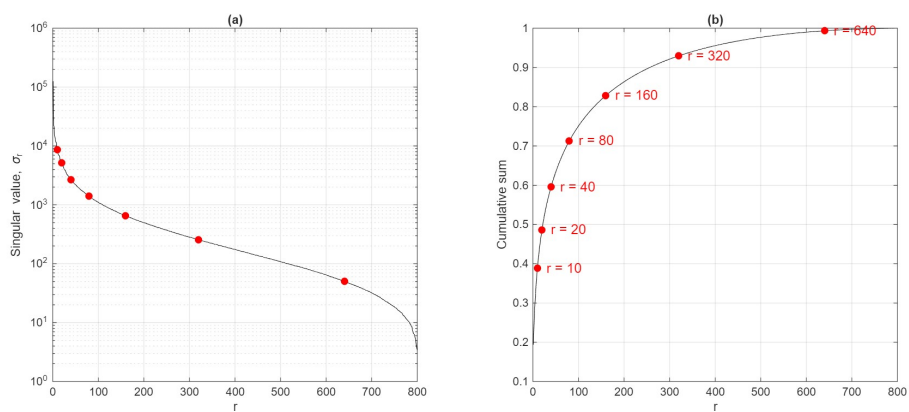


Figura 6: Erro absoluto e porcentagem de correção

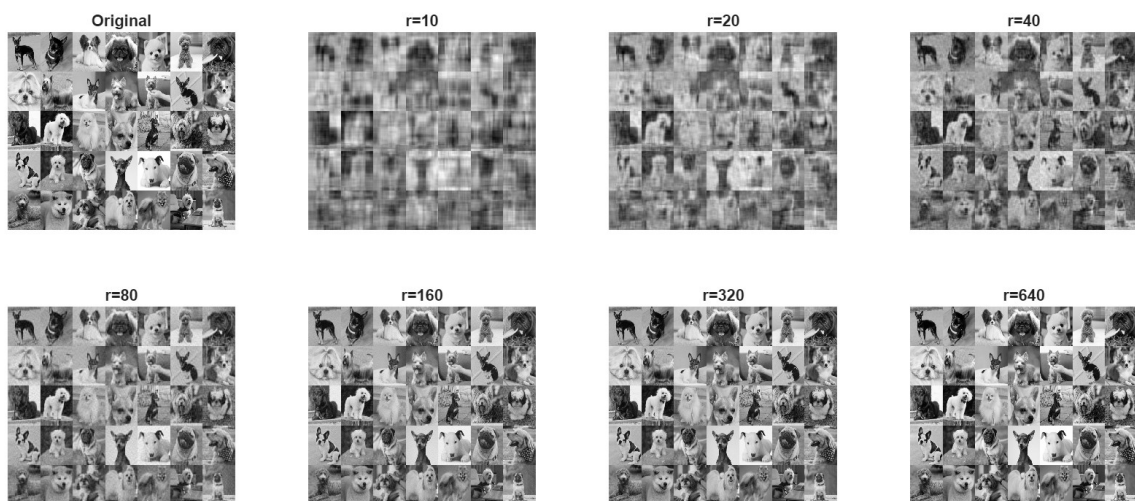


Figura 7: Solução da Melhor Aproximação de uma matriz com 35 imagens.

Tabela 7: Erros de construção (r) para norma euclidiana

Valores dos r	Valores dos erros
10	8265.72469720265
20	4797.10533419602
40	2651.77466088921
80	1381.44909123964
160	642.673560575027
320	246.779623685279
640	46.3789342126059

Tabela 8: Erros de construção (r) para norma frobenius

Valores dos r	Valores dos erros
10	30835.8285424043
20	22849.8298147816
40	16045.8457326775
80	10333.7216618439
160	5821.00554738484
320	2483.7246074135
640	299.831327491235

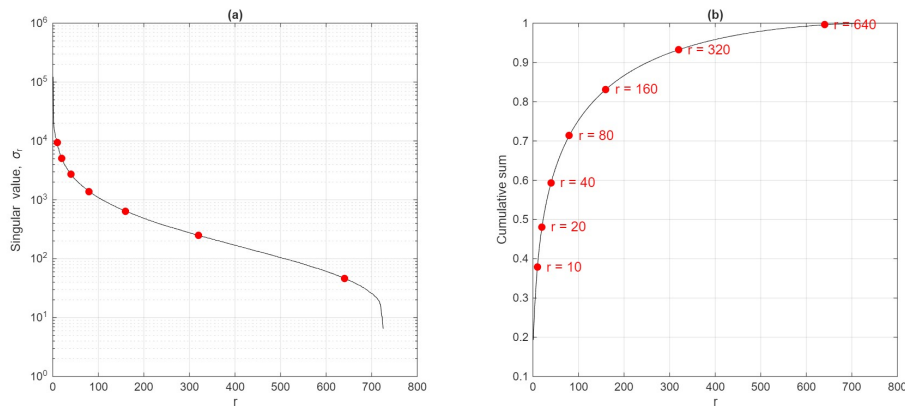


Figura 8: Erro absoluto e porcentagem de correção

Nos experimentos com datasets de 25, 30 e 35 imagens, observa-se um comportamento consistente na qual o erro de reconstrução diminui de forma acentuada com o aumento de r , confirmando novamente o Teorema da Melhor Aproximação. Quando utilizado os valores pequenos de r , já é possível recuperar boa parte da informação, conseguimos visualizar, mas os ganhos adicionais se tornam cada vez menores conforme mais valores singulares são incluídos. Já a norma Euclidiana apresentou erros menores pois pega apenas o maior valor singular descartado, enquanto a norma de Frobenius forneceu uma visão acumulada do erro global, resultando em valores mais altos. Apesar dessa diferença de escala, ambas as normas mostram a mesma tendência decrescente, isso evidencia a eficiência do método mesmo em conjuntos maiores de imagens.