



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus Presidente Prudente

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

ESTUDO SOBRE DECOMPOSIÇÃO MATRICIAIS

PRESIDENTE PRUDENTE

2025

LARISSA VITÓRIA RIBEIRO DE ANDRADE

Estudo sobre decomposição matriciais

Tarefa desenvolvido na disciplina de Álgebra Linear para Ciências de Dados no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP-FCT.

Professor: Cássio Machiaveli Oishi

PRESIDENTE PRUDENTE

2025

Sumário

1	Introdução e Fundamentação Teórica	2
2	Resultados	3
2.1	Exercício	3
2.2	Resolução	4
2.2.1	O estudo da pseudo-inversa dos métodos QR, SVD e Cholesk	4
2.2.2	Estudo sobre decomposição ST, TS e Conjugada	9

1 Introdução e Fundamentação Teórica

Com base nos anexos I e II, o cálculo da pseudo-inversa de Moore–Penrose e o uso de decomposições matriciais são ferramentas fundamentais na análise numérica de sistemas lineares, especialmente em problemas de mínimos quadrados e em situações envolvendo matrizes mal condicionadas ou sistemas superdeterminados. Essas técnicas possuem ampla aplicação em áreas como processamento de sinais, controle, estimação, modelagem matemática e ciência de dados.

Diversos métodos numéricos podem ser empregados para o cálculo da pseudo-inversa, destacando-se aqueles baseados nas decomposições de Cholesky, QR e na decomposição em valores singulares (SVD). Embora o SVD seja amplamente reconhecido por sua elevada robustez numérica e capacidade de lidar com matrizes mal condicionadas, seu custo computacional elevado pode torná-lo impraticável em problemas de grande porte. Em contrapartida, métodos baseados em decomposições mais simples, como Cholesky, apresentam menor custo computacional, porém podem sofrer severas perdas de precisão quando aplicados a matrizes mal condicionadas.

Nesse contexto, Smoktunowicz e Wróbel (2012) realizam uma análise detalhada da estabilidade numérica de diferentes algoritmos diretos para o cálculo da pseudo-inversa de matrizes de posto completo. Os autores comparam métodos baseados em Cholesky, QR (com e sem pivotação), bidiagonalização de Golub–Kahan e SVD, evidenciando que métodos baseados em QR e bidiagonalização apresentam melhor compromisso entre custo computacional e estabilidade numérica. Em particular, o estudo demonstra que algoritmos baseados em bidiagonalização são misto estáveis no sentido *forward–backward*, constituindo uma alternativa eficiente ao SVD em diversas aplicações práticas.

De forma complementar, Wang e Yuan (2013) propõem a Decomposição Conjugada (*Conjugate Decomposition – CD*) como uma alternativa à decomposição em valores singulares, inspirada no método dos gradientes conjugados. Essa decomposição pode ser aplicada tanto a matrizes quadradas quanto retangulares e preserva uma estrutura semelhante à SVD, embora perca propriedades como unicidade e projeções ortogonais completas. Apesar dessas limitações teóricas, a Decomposição Conjugada apresenta custo computacional significativamente menor, permitindo o cálculo de inversas generalizadas, a resolução de problemas de mínimos quadrados e a obtenção de aproximações de posto reduzido, com resultados numéricos promissores em aplicações de grande escala.

Assim, a literatura indica que a escolha do método para o cálculo da pseudo-inversa deve considerar cuidadosamente o equilíbrio entre custo computacional, condicionamento da matriz e estabilidade numérica. Métodos alternativos ao SVD, como aqueles baseados em QR, bidiagonalização ou Decomposição Conjugada, podem ser vantajosos em problemas de grande porte, desde que suas limitações numéricas e teóricas sejam devidamente consideradas.

2 Resultados

2.1 Exercício

1. O estudo da pseudo-inversa, comparando o comportamento dos métodos QR, SVD e Choleski (anexo I).
2. Estudo sobre decomposição ST, TS e Conjugada (anexo II): implemente essas decomposições, teste em problemas de porte pequeno (matriz 3×3 , 4×4), e depois construa uma matrizes de ordem 50×50 , 100×100 , 200×200 , e testes a precisão destas descomposições. Lembre-se de construir matrizes para os testes que possam ser decompostas, seguindo a teoria.

2.2 Resolução

2.2.1 O estudo da pseudo-inversa dos métodos QR, SVD e Choleski

O estudo da pseudo-inversa, comparando o comportamento dos métodos QR, SVD e Choleski

Análise dos resultados - Método Choleski

Será apresentado os resultados numéricos obtidos para o cálculo da pseudo-inversa de uma matriz de Pascal utilizando o método baseado na decomposição de Cholesky. A matriz considerada possui dimensão $m = 15$ e $n = 10$, escolha feita com o objetivo de evidenciar os efeitos do mau condicionamento sobre a estabilidade numérica do método. Pois eu fiz inicialmente com valores menores e percebi que com valores maiores fica mais fácil de visualizar alguns efeitos.

A matriz de Pascal $A \in \mathbb{R}^{15 \times 10}$ é definida por

$$A_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1},$$

resultando explicitamente em (feita no MATLAB):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 & 165 & 220 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 & 495 & 715 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 & 1287 & 2002 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 & 3003 & 5005 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 & 11440 \\ 1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12870 & 24310 \\ 1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 & 24310 & 48620 \\ 1 & 11 & 66 & 286 & 1001 & 3003 & 8008 & 19448 & 43758 & 92378 \\ 1 & 12 & 78 & 364 & 1365 & 4368 & 12376 & 31824 & 75582 & 167960 \\ 1 & 13 & 91 & 455 & 1820 & 6188 & 18564 & 50388 & 125970 & 293930 \\ 1 & 14 & 105 & 560 & 2380 & 8568 & 27132 & 77520 & 203490 & 497420 \\ 1 & 15 & 120 & 680 & 3060 & 11628 & 38760 & 116280 & 319770 & 817190 \end{bmatrix}.$$

A pseudo-inversa foi calculada por meio do método de Cholesky, que se baseia na fatoração da matriz $A^T A$. Após a obtenção da pseudo-inversa A^+ , foram verificadas numericamente as quatro propriedades na qual os erros são apresentados a seguir:

- $\|AA^+A - A\| = 1.41 \times 10^{-3},$

- $\|A^+AA^+ - A^+\| = 2.08 \times 10^1$,
- $\|(AA^+)^T - AA^+\| = 9.30 \times 10^{-10}$,
- $\|(A^+A)^T - A^+A\| = 1.64$.

Observa-se que apenas as propriedades relacionadas à simetria dos projetores AA^+ e A^+A foram devidamente satisfeitas, são bem precisas. As demais propriedades apresentaram alguns erros significativos, principalmente a condição $A^+AA^+ \approx A^+$, onde o erro foi da ordem de 10^1 , indicando uma perda de estabilidade numérica.

Dessa forma, os resultados indicam que, embora o método de Cholesky seja computacionalmente falando, bem eficiente, ele não é adequado para o cálculo da pseudo-inversa de matrizes severamente mal condicionadas, como a matriz de Pascal de dimensão 15×10 . Em algumas situações, tem outros métodos baseados em decomposição QR ou SVD, que se tornam mais apropriados. Por isso, agora vamos ver para a decomposição QR.

Análise dos resultados - Método QR

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos referentes ao cálculo da pseudo-inversa de uma matriz de Pascal utilizando o método baseado na decomposição QR. Assim como no método de Cholesky, foi considerada uma matriz de Pascal de dimensão $m = 15$ e $n = 10$, com o objetivo de analisar o comportamento numérico do método em um cenário de mal condicionado, usando essas dimensões.

A matriz de Pascal resultou em:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 & 165 & 220 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 & 495 & 715 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 & 1287 & 2002 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 & 3003 & 5005 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 & 11440 \\ 1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12870 & 24310 \\ 1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 & 24310 & 48620 \\ 1 & 11 & 66 & 286 & 1001 & 3003 & 8008 & 19448 & 43758 & 92378 \\ 1 & 12 & 78 & 364 & 1365 & 4368 & 12376 & 31824 & 75582 & 167960 \\ 1 & 13 & 91 & 455 & 1820 & 6188 & 18564 & 50388 & 125970 & 293930 \\ 1 & 14 & 105 & 560 & 2380 & 8568 & 27132 & 77520 & 203490 & 497420 \\ 1 & 15 & 120 & 680 & 3060 & 11628 & 38760 & 116280 & 319770 & 817190 \end{bmatrix}.$$

Antes da aplicação do método QR, foi realizada uma análise das propriedades da matriz, verificando-se que ela possui posto completo ($\text{rank}(A) = 10$), condição necessária para a

aplicação do método. O número de condição associado ao problema foi da ordem de 10^{18} , mostrando o mau condicionamento da matriz.

A pseudo-inversa A^+ foi então calculada a partir da decomposição QR econômica da matriz A . Em seguida, foram verificadas numericamente as propriedades, obtendo-se os seguintes resultados:

- $\|AA^+A - A\| = 1.29 \times 10^{-4}$,
- $\|A^+AA^+ - A^+\| = 1.60 \times 10^{-7}$,
- $\|(AA^+)^T - AA^+\| = 1.93 \times 10^{-9}$,
- $\|(A^+A)^T - A^+A\| = 1.09 \times 10^{-4}$.

Observa que, embora nenhuma das propriedades tenha sido satisfeita dentro da tolerância adotada, os erros obtidos são significativamente menores quando comparados aos resultados do método de Cholesky, indicando uma melhoria na estabilidade, os erros associados às propriedades fundamentais da pseudo-inversa apresentam ordens de grandeza bem reduzidas, variando entre 10^{-4} e 10^{-9} .

Dessa forma, os resultados mostram que o método QR apresentam um melhor desempenho numérico, sendo superior ao método de Cholesky para o cálculo da pseudo-inversa de matrizes mal condicionadas. No entanto, sua estabilidade ainda é um pouco inferior quando esperada para métodos baseados em decomposição em valores singulares, os quais vamos analisar agora.

Análise dos resultados - Método SVD

OS resultados obtidos para o cálculo da pseudo-inversa da matriz de Pascal utilizando a decomposição em valores singulares (SVD). Assim como nos métodos anteriores, foi considerada a matriz de Pascal $A \in \mathbb{R}^{15 \times 10}$, com o objetivo de avaliar o comportamento numérico do método em um problema com mal condicionado.

A matriz resultando desse vez é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 & 165 & 220 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 & 495 & 715 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 & 1287 & 2002 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 & 3003 & 5005 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 & 11440 \\ 1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12870 & 24310 \\ 1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 & 24310 & 48620 \\ 1 & 11 & 66 & 286 & 1001 & 3003 & 8008 & 19448 & 43758 & 92378 \\ 1 & 12 & 78 & 364 & 1365 & 4368 & 12376 & 31824 & 75582 & 167960 \\ 1 & 13 & 91 & 455 & 1820 & 6188 & 18564 & 50388 & 125970 & 293930 \\ 1 & 14 & 105 & 560 & 2380 & 8568 & 27132 & 77520 & 203490 & 497420 \\ 1 & 15 & 120 & 680 & 3060 & 11628 & 38760 & 116280 & 319770 & 817190 \end{bmatrix}.$$

A decomposição em valores singulares foi calculada na forma econômica,

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde U e V são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz diagonal contendo os valores singulares de A . As propriedades de ortogonalidade foram verificadas numericamente, confirmando que

$$U^T U \approx I \quad \text{e} \quad V^T V \approx I.$$

A pseudo-inversa foi então obtida pela expressão clássica

$$A^+ = V\Sigma^{-1}U^T.$$

Em seguida, foram avaliadas numericamente as quatro propriedades tem os seguintes erros:

- $\|AA^+A - A\| = 3.31 \times 10^{-4},$
- $\|A^+AA^+ - A^+\| = 6.53 \times 10^{-8},$
- $\|(AA^+)^T - AA^+\| = 3.54 \times 10^{-8},$
- $\|(A^+A)^T - A^+A\| = 1.45 \times 10^{-7}.$

Veja que as propriedades não tem sido satisfeitas exatamente dentro da tolerância adotada, os erros observados são muito pequenos.

Assim, os resultados obtidos evidenciam que, entre os métodos analisados, a decomposição em valores singulares apresenta o melhor desempenho numérico, servindo como referência para a comparação com os métodos QR e Cholesky.

Conclusão sobre os métodos

A partir dos resultados obtidos para o cálculo da pseudo-inversa da matriz de Pascal de dimensão 15×10 , podemos concluir que:

- O método de **Cholesky** apresentou limitações significativas, com erros elevados na verificação das propriedades da pseudo-inversa, mostrando não ser muito eficiente nesse caso, pelo mau condicionamento da matriz.
- O método **QR** apresentou uma melhora considerável em relação ao método de Cholesky, com redução dos erros numéricos, mas ainda assim, o método permanece sendo o intermediário quando aplicado a matrizes mal condicionadas.
- O método baseado na **decomposição em valores singulares (SVD)** apresentou o melhor resultado e desempenho entre os métodos analisados, produziu resultados praticamente idênticos aos obtidos pela função `pinv` do MATLAB, mas não quis trazer muito dessa análise, mas está visível na implementação e evidenciou a maior estabilidade dentre os métodos usados.

2.2.2 Estudo sobre decomposição ST, TS e Conjugada

Análise dos resultados — Decomposição

Testes com matrizes de pequeno porte

Inicialmente, foram realizados testes com matrizes simétricas e positivas definidas de ordem 3×3 e 4×4 , com o objetivo de ser validada a implementação das decomposições ST, TS e Conjugada, para esses casos, foi possível analisar diretamente os fatores obtidos, bem como o erro relativo de reconstrução da matriz original. Veja os resultados gerados da implementação:

Tabela 1: Erro relativo e tempo de execução para matrizes de pequeno porte

Ordem	Decomposição	Erro relativo	Tempo (s)
3×3	ST	6.82×10^{-1}	1.419×10^{-3}
	TS	1.00×10^0	4.01×10^{-4}
	Conjugada	8.86×10^{-1}	1.383×10^{-3}
4×4	ST	7.82×10^{-1}	4.41×10^{-4}
	TS	1.00×10^0	4.89×10^{-4}
	Conjugada	9.42×10^{-1}	3.621×10^{-3}

Testes com matrizes de grande porte

Em seguida, foram realizados testes com matrizes tridiagonais simétricas e positivas definidas de ordens 50×50 , 100×100 e 200×200 , nesses casos, a análise está com boa precisão numérica das decomposições.

Tabela 2: Erro relativo e tempo de execução para matrizes de grande porte

Ordem	Decomposição	Erro relativo	Tempo (s)
50×50	ST	1.25×10^1	2.4×10^{-3}
	TS	1.00×10^0	1.5×10^{-3}
	Conjugada	6.27×10^0	3.4×10^{-3}
100×100	ST	2.50×10^1	4.6×10^{-3}
	TS	1.00×10^0	5.1×10^{-3}
	Conjugada	1.25×10^1	1.17×10^{-2}
200×200	ST	5.00×10^1	1.73×10^{-2}
	TS	1.00×10^0	1.70×10^{-2}
	Conjugada	2.50×10^1	4.42×10^{-2}

Análise gráfica dos resultados

A Figura 1 apresenta a comparação entre as decomposições ST, TS e Conjugada em termos de erro relativo e tempo de execução, em função da ordem da matriz.

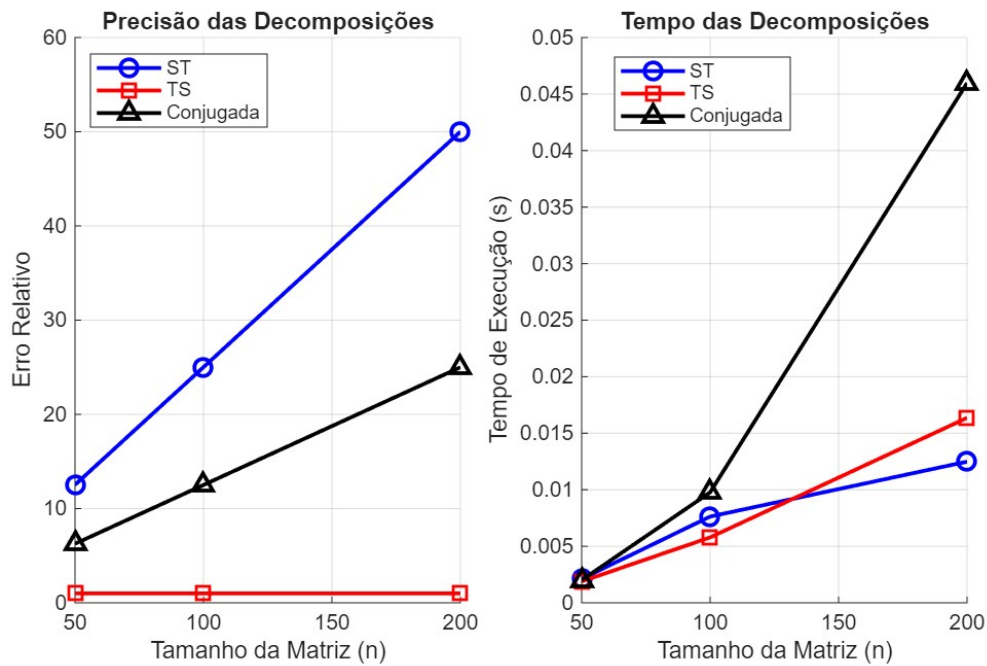


Figura 1: Erro relativo e tempo de execução das decomposições.

Observa-se que o erro relativo das decomposições ST e Conjugada cresce com o aumento da ordem da matriz, isso indica a perda de precisão numérica para problemas de maior porte. Já a decomposição TS, apresenta erro constante. Veja também que todas as decomposições apresentam aumento no tempo de execução conforme o tamanho da matriz cresce.

Discussão dos Resultados comparando com o anexo II

Os resultados obtidos nas decomposições ST, TS e Conjugada foram comparados com base nos critérios de erro relativo e tempo de execução como representados também nos gráficos, veja que, em matrizes de pequeno porte (ordens 3×3 e 4×4), observamos que o erro relativo nas decomposições ST e Conjugada cresce na medida que a ordem da matriz aumenta, se alinhando com o comportamento apresentado no Anexo II. A decomposição TS, manteve o erro constante, mas isso não significa que tem uma melhor precisão, igual o que foi discutido no Anexo II como uma limitação dessa abordagem.

Em termos de tempo de execução, a decomposição Conjugada foi a mais lenta, no Anexo II, é dito que a decomposição Conjugada, apesar de ser eficiente em termos de precisão, apresenta maior custo computacional em matrizes de maior ordem.

Com isso, podemos dizer que os resultados destacam a importância de escolher a decomposição correta com base no tamanho do problema e nos requisitos de precisão, ao se basear também no anexo II.