算法实现题 6

6-1 最小长度电路板排列问题。

问题描述:最小长度电路板排列问题是大规模电子系统设计中提出的实际问题。该问题的提法是,将n块电路板以最佳排列方案插入带有n个插槽的机箱中。n块电路板的不同的排列方式对应不同的电路板插入方案。

设 $B=\{1,2,\cdots,n\}$ 是 n 块电路板的集合。集合 $L=\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$ 是 n 块电路板的 m 个连接块。其中每个连接块 N_i 是 B 的一个子集,且 N_i 中的电路板用同一根导线连接在一起。在最小长度电路板排列问题中,连接块的长度是指该连接块中第 1 块电路板到最后 1 块电路板之间的距离。

试设计一个队列式分支限界法找出所给 n 个电路板的最佳排列,使得 m 个连接块中最大长度达到最小。

算法设计:对于给定的电路板连接块,设计一个队列式分支限界法,找出所给n个电路板的最佳排列,使得m个连接块中最大长度达到最小。

数据输入: 由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 2 个正整数 n 和 m ($1 \le m, n \le 20$)。接下来的 n 行中,每行有 m 个数。第 k 行的第 j 个数为 0 表示电路板 k 不在连接块 j 中,为 1 表示电路板 k 在连接块 j 中。

结果输出:将计算的电路板排列最小长度及其最佳排列输出到文件 output.txt。文件的第 1 行是最小长度;接下来的 1 行是最佳排列。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
8 5	4
11111	54316287
01010	
01110	
10110	
10100	
11010	
00001	
01001	

算法设计思路:

分析问题状态:

需要找到一种电路板的排列方式,使得所有连接块的最大长度最小。每个连接块中的电路板用同一根 导线连接,连接块的长度是该连接块中第一个和最后一个电路板之间的距离。

状态定义及初始化:读取输入数据,构建电路板与连接块的关系矩阵。每个状态表示当前已排列的电路板序列及对应的连接块最大长度。

分支限界:

队列操作:使用队列存储待处理的状态,每次从队列中取出一个状态进行扩展。对于当前状态,尝试将未排列的电路板插入到序列中,生成新的状态并计算其连接块最大长度。

剪枝: 如果新生成的状态的最大长度大于当前最优解,则剪枝,不将其加入队列。

更新最优解: 当某个状态的所有电路板都已排列完毕时,检查其最大长度是否优于当前最优解,如果 是则更新最优解。

struct State {

vector<int> boardOrder; // 当前电路板排列顺序 int maxLength; // 当前连接块最大长度

int lastBoardIndex; // 上一块电路板的位置索引

```
};
int n, m;
vector<vector<int>> connections; // 连接关系矩阵
int calculateMaxLength(const vector<int>& order) {
   vector<int> first(n + 1, INT_MAX), last(n + 1, -1);
   for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
       int board = order[i];
       for (int j = 0; j < m; ++j) {
            if (connections[board][j]) {
               first[j] = min(first[j], i);
               last[j] = max(last[j], i);
   int maxLength = 0;
   for (int j = 0; j < m; ++j) {</pre>
       if (first[j] != INT_MAX && last[j] != -1) {
           maxLength = max(maxLength, last[j] - first[j]);
   return maxLength;
void solve() {
   ifstream fin("input.txt");
  ofstream fout("output.txt");
   connections.resize(n);
   for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
       connections[i].resize(m);
       for (int j = 0; j < m; ++j) {
           fin >> connections[i][j];
   queue<State> q;
   q.push({{}}, INT_MAX, -1});
   int bestLength = INT_MAX;
  vector<int> bestOrder;
```

```
while (!q.empty()) {
       State currentState = q.front();
       q.pop();
       if (currentState.boardOrder.size() == n) {
           int length = calculateMaxLength(currentState.boardOrder);
           if (length < bestLength) {</pre>
               bestLength = length;
               bestOrder = currentState.boardOrder;
       }//已排列,跳过
       for (int nextBoard = 0; nextBoard < n; ++nextBoard) {</pre>
           if (find(currentState.boardOrder.begin(), currentState.boardOrder.end(),
nextBoard) != currentState.boardOrder.end()) {
               continue;
           vector<int> newOrder = currentState.boardOrder;
           newOrder.push_back(nextBoard);
           int estimatedLength = calculateMaxLength(newOrder);
           if (estimatedLength >= bestLength) {
           }//剪
           q.push({newOrder, estimatedLength, nextBoard});//入队
   fout << bestLength << endl;</pre>
   for (int board : bestOrder) {
       fout << board + 1 << " ";
  fout << endl;</pre>
   fin.close();
   fout.close();
```

6-2 最小权顶点覆盖问题。

问题描述: 给定一个赋权无向图 G=(V,E),每个顶点 $v\in V$ 都有权值 w(v)。如果 $U\subseteq V$. 且对任意 $(u,v)\in E$ 有 $u\in U$ 或 $v\in U$, 就称 U 为图 G 的一个顶点覆盖。 G 的最小权项点覆盖是指 G 中所含顶点权之和最小的顶点覆盖。

算法设计:对于给定的无向图 G,设计一个优先队列式分支限界法,计算 G 的最小权 顶点覆盖。

数据输入:由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 2 个正整数 n 和 m,表示给定的图 G 有 n 个顶点和 m 条边,顶点编号为 1, 2, …, n。第 2 行有 n 个正整数表示 n 个顶点的权。接下来的 m 行中,每行有 2 个正整数 u 和 v,表示图 G 的一条边(u, v)。

结果输出:将计算的最小权顶点覆盖的顶点权之和以及最优解输出到文件 output.txt。文件的第 1 行是最小权顶点覆盖顶点权之和;第 2 行是最优解 x_i (1 $\le i \le n$), $x_i = 0$ 表示顶点 i

不在最小权顶点覆盖中, x=1 表示顶点 i 在最小权顶点覆盖中。

输入文件示例	输出文件示例
input,txt	output.txt
77	13
1 100 1 1 1 100 10	1011001
16	
24	
25	
3 6	
4 5	
4 6	
67	

算法设计思路:

定义问题状态:

用一个数组 x[i] (i 从 1 到 n)表示项点 i 是否被选入项点覆盖集,x[i] = 1表示选入,x[i] = 0表示不选入。记录当前已选项点的权值和 weightSum,以及当前状态下未被覆盖边的数量 uncoveredEdges。

优先队列式分支限界:

初始化优先队列: 初始状态所有顶点未选,权值和为 0,未覆盖边数为 m。将其加入队列。

扩展节点: 从优先队列中取出当前最优节点(权值和最小的节点)。

对当前节点进行分支:分别考虑将当前未选顶点加入顶点覆盖集和不加入的情况。

加入顶点: 更新权值和(加上该顶点权值), 更新未覆盖边数(检查该顶点能覆盖的边)。

不加入顶点:权值和不变,未覆盖边数可能不变(若该顶点不影响未覆盖边)。

剪枝策略:如果当前节点的权值和已经大于当前已知的最小权值和,不再继续扩展该节点。如果未覆盖边数为 0,说明已经找到一个顶点覆盖,更新最小权值和及最优解。

终止条件:优先队列为空,此时已遍历完所有可能的状态,得到最小权顶点覆盖。

```
// 比较函数,用于优先队列(最小堆)
struct CompareState {
   bool operator()(const State& a, const State& b) {
       return a.wSum > b.wSum;
};
// 计算未覆盖边数
int countucEdges(const vector<vector<bool>>& graph, const vector<int>& x) {
   int n = graph.size();
   for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
       for (int j = i + 1; j < n; ++j) {
           if (graph[i][j] && x[i] == 0 && x[j] == 0) {
               uc++;
// 优先队列式分支限界法求解
pair<int, vector<int>> Solve(const vector<vector<bool>>& graph, const vector<int>& ws)
   int n = graph.size();
   priority_queue<State, vector<State>, CompareState> pq;
   vector<int> initialX(n, 0);
   int initialucEdges = countucEdges(graph, initialX);
   pq.push(State(initialX, initialwSum, initialucEdges));
   int minwSum = numeric_limits<int>::max();
   vector<int> bestX;
   while (!pq.empty()) {
       State cur = pq.top();
       pq.pop();
       if (cur.wSum >= minwSum) {
       if (cur.ucEdges == 0) {
```

```
for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
               if (cur.x[i] == 0) {
                   vector<int> newX = cur.x;
                   newX[i] = 1;
                   int newwSum = cur.wSum + ws[i];
                   int newucEdges = countucEdges(graph, newX);
                   pq.push(State(newX, newwSum, newucEdges));
                   vector<int> notSelectX = cur.x;
                   int notSelectucEdges = cur.ucEdges;
                   pq.push(State(notSelectX, notSelectwSum, notSelectucEdges));
   return make_pair(minwSum, bestX);
pair<vector<vector<bool>>, vector<int>> readInput(const string& filename) {
//将数据写入文件
```

6-4 最小重量机器设计问题。

问题描述: 设某一机器由n个部件组成,每种部件都可以从m个不同的供应商处购得。设 w_{ij} 是从供应商j处购得的部件i的重量, c_{ij} 是相应的价格。设计一个优先队列式分支限界法,给出总价格不超过d的最小重量机器设计。

算法设计:对于给定的机器部件重量和机器部件价格,设计一个优先队列式分支限界法, 计算总价格不超过 d 的最小重量机器设计。

数据输入:由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 3 个正整数 n、m 和 d。接下来的 2n 行,每行 n 个数。前 n 行是 c,后 n 行是 w。

结果输出:将计算的最小重量,以及每个部件的供应商输出到文件 output.txt。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
3 3 4	4
1 2 3	131
3 2 1	
2 2 2	
1 2 3	
3 2 1	
222	

算法设计思路:

定义问题状态:

用一个数组 partSupplier[n] 表示每个部件选择的供应商, 其中 partSupplier[i] 表示部件 i 选择的供应商编号(从 1 到 m)。

记录当前已选部件的总重量 totalWeight 和总价格 totalCost。

优先队列式分支限界:

初始化优先队列,将初始状态(所有部件未选,总重量为0,总价格为0)加入队列。

扩展节点: 从优先队列中取出当前最优节点, 即总重量最小的节点。

对当前节点进行分支:对于当前未确定供应商的部件,分别考虑从 m 个供应商处购买的情况。

选择供应商 j: 更新总重量(加上部件 i 从供应商 j 购买的重量),更新总价格(加上部件 i 从供应商 j 购买的价格)。

剪枝策略:如果当前节点的总价格已经超过给定的 d,不再继续扩展该节点;如果当前节点的总重量已经大于当前已知的最小总重量(在满足价格限制下),不再继续扩展该节点。

终止条件: 当所有部件都确定了供应商且总价格不超过 d 时,更新最小总重量及对应的部件供应商选择方案; 当优先队列为空时,说明已遍历完所有可能情况,得到最终结果。

```
struct CompareState {
   bool operator()(const State& a, const State& b) {
};
// 优先队列式分支限界法求解
pair<int, vector<int>> branchAndBound(const vector<vector<int>>& costMatrix, const
vector<vector<int>>& weightMatrix, int d) {
   int n = costMatrix.size();
   int m = costMatrix[0].size();
   priority queue<State, vector<State>, CompareState> pq;//优先队列
   vector<int> initialPartSupplier(n, 0);
   int initialTotalWeight = 0;
   int initialTotalCost = 0;
   pq.push(State(initialPartSupplier, initialTotalWeight, initialTotalCost));
   int minWeight = numeric_limits<int>::max();
   vector<int> bestPartSupplier;
   while (!pq.empty()) {
       State current = pq.top();
       pq.pop();
       if (current.totalCost > d) {
           continue;
       int currentPartIndex = current.partSupplier.size();
       if (currentPartIndex == n) {
           if (current.totalWeight < minWeight) {</pre>
               bestPartSupplier = current.partSupplier;
           for (int j = 0; j < m; ++j) {
               vector<int> newPartSupplier = current.partSupplier;
               newPartSupplier[currentPartIndex] = j + 1;
               int newTotalWeight = current.totalWeight +
weightMatrix[currentPartIndex][j];
               int newTotalCost = current.totalCost + costMatrix[currentPartIndex][j];
               if (newTotalCost <= d && newTotalWeight < minWeight) {</pre>
                   pq.push(State(newPartSupplier, newTotalWeight, newTotalCost));
   return make_pair(minWeight, bestPartSupplier);
```

```
}

// 从文件读取输入数据

tuple<vector<vector<int>>, vector<vector<int>>, int> readInput(const string& filename)

{
    .....
}

// 将结果写入文件

void writeOutput(const string& filename, int minWeight, const vector<int>& partSupplier)

{
    .....
}
```

6-5

6-5 运动员最佳配对问题。

问题描述: 羽毛球队有男女运动员各n人。给定 2 个 $n \times n$ 矩阵 P和 Q。P[i][j]是男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男运动员竞赛优势; Q[i][j]是女运动员 i 和男运动员j 配合的女运动员竞赛优势。由于技术配合和心理状态等因素影响,P[i][j]不一定等于 Q[j][i]。 男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男女双方竞赛优势为 $P[i][j] \times Q[j][i]$ 。 设计一个算法,计算男女运动员最佳配对法,使各组男女双方竞赛优势的总和达到最大。

算法设计:设计一个优先队列式分支限界法,对于给定的男女运动员竞赛优势,计算男女运动员最佳配对法,使各组男女双方竞赛优势的总和达到最大。

数据输入:由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 1 个正整数 n (1 $\leq n \leq 20$)。接下来的 2n 行,每行 n 个数。前 n 行是 p,后 n 行是 q。

结果输出:将计算的男女双方竞赛优势的总和的最大值输出到文件 output.txt。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output,txt
3	52
10 2 3	
234	
3 4 5	
222	
3 5 3	
451	

定义问题状态:

用一个数组 match[n] 表示男运动员的配对情况,match[i] 表示男运动员 i 配对的女运动员编号(从 0 到 n-1)。

记录当前已配对的男女运动员竞赛优势总和 advantageSum。

为了便于剪枝,还可以记录一个当前状态下,剩余未配对运动员能产生的最大竞赛优势的上界 upperBound。计算上界的方法是:对于未配对的男、女运动员,选取他们各自剩余可配对情况下的最大竞赛优势值进行累加。

分支限界:

初始化优先队列(最大堆),将初始状态(所有男运动员未配对,竞赛优势总和为 0,上界为理论最大可能值)加入队列。这里最大堆是因为要找竞赛优势总和的最大值。

扩展节点:从优先队列中取出当前最优节点(竞赛优势总和最大且上界最大的节点)。

对当前节点进行分支:对于当前未配对的男运动员,分别考虑与不同女运动员配对的情况。配对女运动员 j: 更新 match 数组,更新竞赛优势总和(加上当前男运动员 i 和女运动员 j 配对的竞赛优势 P[i][j] *Q[j][i]),同时更新上界(重新计算剩余未配对运动员能产生的最大竞赛优势)。

剪枝策略:如果当前节点的上界已经小于当前已知的最大竞赛优势总和,不再继续扩展该节点。因为即使后续都取到最大优势,也无法超过当前最优值。

终止条件: 当所有男运动员都完成配对时,更新最大竞赛优势总和。当优先队列为空时,说明已遍历 完所有可能情况,得到最终的最大竞赛优势总和。

```
struct State {
   vector<int> match; // 记录男运动员的配对情况
                            // 已配对的男女运动员竞赛优势总和
   int advantageSum;
   int upperBound;
   State(const vector<int>& match, int advantageSum, int upperBound)
       : match(_match), advantageSum(_advantageSum), upperBound(_upperBound) {}
};
struct CompareState {
   bool operator()(const State& a, const State& b) {
       if (a.advantageSum != b.advantageSum) {
       return a.upperBound < b.upperBound;</pre>
};
int calculateUpperBound(const vector<vector<int>>& P, const vector<vector<int>>& Q,
const vector<int>& match) {
   int n = P.size();
   vector<bool> used(n, false);
   for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
       if (match[i] != -1) {
           used[match[i]] = true;
   int upperBound = 0;
   for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
       if (match[i] == -1) {
           int maxAdvantage = 0;
           for (int j = 0; j < n; ++j) {
```

```
if (!used[j]) {
                   maxAdvantage = max(maxAdvantage, P[i][j] * Q[j][i]);
           upperBound += maxAdvantage;
   return upperBound;
// 优先队列式分支限界法求解
int branchAndBound(const vector<vector<int>>& P, const vector<vector<int>>& Q) {
   int n = P.size();
   priority queue<State, vector<State>, CompareState> pq;
   vector<int> initialMatch(n, -1);
   int initialUpperBound = calculateUpperBound(P, Q, initialMatch);
   pq.push(State(initialMatch, initialAdvantageSum, initialUpperBound));
   int maxAdvantageSum = 0;
   while (!pq.empty()) {
       State current = pq.top();
       pq.pop();
       if (current.upperBound <= maxAdvantageSum) {</pre>
       int currentIndex = -1;
       for (int i = 0; i < n; ++i) {</pre>
           if (current.match[i] == -1) {
               break;
       if (currentIndex == -1) {
           maxAdvantageSum = max(maxAdvantageSum, current.advantageSum);
           for (int j = 0; j < n; ++j) {
               if (find(current.match.begin(), current.match.end(), j) ==
current.match.end()) {
                   vector<int> newMatch = current.match;
                   newMatch[currentIndex] = j;
                   int newAdvantageSum = current.advantageSum + P[currentIndex][j] *
Q[j][currentIndex];
                   int newUpperBound = calculateUpperBound(P, Q, newMatch);
                   if (newUpperBound > maxAdvantageSum) {
```

```
pq.push(State(newMatch, newAdvantageSum, newUpperBound));
}
}

return maxAdvantageSum;

// 从文件读取输入数据
pair<vector<vector<int>>> readInput(const string& filename) {
    .....:
}

//写入数据
void writeOutput(const string& filename, int maxAdvantageSum) {
    .....:
}
```

6-10

6-10 世界名画陈列馆问题。

问题描述: 世界名画陈列馆由 m×n 个排列成矩形阵列的陈列室组成。为了防止名画被盗,需要在陈列室中设置警卫机器人哨位。除了监视所在的陈列室,每个警卫机器人还可以监视与它所在的陈列室相邻的上、下、左、右 4 个陈列室。试设计一个安排警卫机器人哨位的算法,使名画陈列馆中每个陈列室都在警卫机器人的监视下,且所用的警卫机器人数最少。

算法设计:设计一个优先队列式分支限界法,计算警卫机器人的最佳哨位安排,使名画陈列馆中每个陈列室都在警卫机器人的监视下,且所用的警卫机器人数最少。

数据输入:由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行有 2 个正整数 m 和 n ($1 \le m$, $n \le 20$)。 结果输出:将计算的警卫机器人数及其最佳哨位安排输出到文件 output.txt。文件的第 1 行是警卫机器人数,接下来的 m 行中每行 n 个数,0 表示无哨位,1 表示有哨位。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
4 4	4
	0010
	1000
	0001
	0100

算法设计思路:

定义问题状态:

用一个二维数组 layout[m][n] 表示陈列室的布局,其中 layout[i][j] 为 0 表示该陈列室无警卫机器人哨位,为 1 表示有哨位。

记录当前已放置的警卫机器人数量 robotCount。

为了便于剪枝,计算当前状态下还未被监视的陈列室数量 unmonitoredCount。

分支限界:

初始化优先队列(最小堆),将初始状态(所有陈列室无哨位,机器人数量为 0,未监视陈列室数量为m*n)加入队列。

扩展节点:从优先队列中取出当前最优节点(机器人数量最少且未监视陈列室数量最少的节点)。 对当前节点进行分支:对于当前未放置机器人的陈列室,分别考虑放置和不放置机器人的情况。

放置机器人: 更新 layout 数组,将该陈列室设为有哨位(值为 1),更新机器人数量(加 1),更新未 监视陈列室数量(检查该机器人能监视到的陈列室,减少相应数量)。

不放置机器人: layout 数组不变,机器人数量不变,未监视陈列室数量可能不变(若该陈列室不影响监视情况)。

剪枝策略:如果当前节点的机器人数量已经大于当前已知的最少机器人数量,不再继续扩展该节点。如果当前节点的未监视陈列室数量为0,说明所有陈列室都已被监视,更新最少机器人数量及对应的布局。

```
终止条件: 优先队列为空, 此时已遍历完所有可能的状态, 得到最少机器人数量及最佳哨位安排。
// 定义问题状态结构体
struct State {
   vector<vector<int>> layout; // 陈列室布局
                             // 已放置的警卫机器人数量
   int robotCount;
                             // 未被监视的陈列室数量
   int unmonitoredCount;
   State(const vector<vector<int>>& _layout, int _robotCount, int _unmonitoredCount)
       : layout(_layout), robotCount(_robotCount), unmonitoredCount(_unmonitoredCount)
\{\}
};
// 比较函数,用于优先队列(最小堆)
struct CompareState {
   bool operator()(const State& a, const State& b) {
       if (a.robotCount != b.robotCount) {
          return a.robotCount > b.robotCount;
       return a.unmonitoredCount > b.unmonitoredCount;
};
// 检查坐标是否在陈列室范围内
bool isValid(int i, int j, int m, int n) {
   return i >= 0 && i < m && j >= 0 && j < n;
// 计算未被监视的陈列室数量
int countUnmonitored(const vector<vector<int>>& layout, int m, int n) {
   int count = 0;
   for (int i = 0; i < m; ++i) {
       for (int j = 0; j < n; ++j) {
          if (layout[i][j] == 0) {
              bool isMonitored = false;
              int dx[] = {-1, 1, 0, 0};//x 方向的移动
```

```
int dy[] = {0, 0, -1, 1};//y 方向移动
               for (int k = 0; k < 4; ++k) {
                   int newI = i + dx[k];
                  int newJ = j + dy[k];
                  if (isValid(newI, newJ, m, n) && layout[newI][newJ] == 1) {
                      break;
                  }//剪枝
               if (!isMonitored) {
                  count++;
       }//遍历每个陈列室
   return count;
// 优先队列式分支限界法求解
pair<int, vector<vector<int>>> branchAndBound(int m, int n) {
   priority queue<State, vector<State>, CompareState> pq;
   vector<vector<int>> initialLayout(m, vector<int>(n, 0));
   int initialRobotCount = 0;
   int initialUnmonitoredCount = m * n;
   pq.push(State(initialLayout, initialRobotCount, initialUnmonitoredCount));
   int minRobotCount = numeric_limits<int>::max();
   vector<vector<int>> bestLayout;
   while (!pq.empty()) {//循环找最优解
       State current = pq.top();
       if (current.robotCount >= minRobotCount) {
       if (current.unmonitoredCount == 0) {
           if (current.robotCount < minRobotCount) {</pre>
               minRobotCount = current.robotCount;
               bestLayout = current.layout;
           for (int i = 0; i < m; ++i) {
               for (int j = 0; j < n; ++j) {
                  if (current.layout[i][j] == 0) {
                      // 放置机器人
                      vector<vector<int>> newLayout = current.layout;
```

```
newLayout[i][j] = 1;
                       int newRobotCount = current.robotCount + 1;
                       int newUnmonitoredCount = countUnmonitored(newLayout, m, n);
                       if (newRobotCount < minRobotCount) {</pre>
                          pq.push(State(newLayout, newRobotCount,
newUnmonitoredCount));
                      // 不放置机器人
                      vector<vector<int>> notPlaceLayout = current.layout;
                      int notPlaceUnmonitoredCount = current.unmonitoredCount;
                      pq.push(State(notPlaceLayout, notPlaceRobotCount,
notPlaceUnmonitoredCount));
   return make_pair(minRobotCount, bestLayout);
// 从文件读取输入数据
pair<int, int> readInput(const string& filename) {
// 将结果写入文件
void writeOutput(const string& filename, int minRobotCount, const vector<vector<int>>&
bestLayout) {
```