

Electromagnetic Wave Interactions with a Metamaterial Cloak

Взаимодействие электромагнитных волн с оболочкой из метаматериалов

Chen

Аннотация

Мы аналитически устанавливаем взаимодействия электромагнитных волн с общим классом сферических оболочек, основанных на полноволновой рассеивающей модели Ми. Мы покажем, что для идеальной оболочки общее рассеяние в поперечном сечении равно нулю, но для оболочек с особым типом потерь, только обратное рассеяние в точности равно нулю, что показывает — оболочка может оставаться невидимой от моностатического (передатчик и приемник находятся в одном и том же месте) обнаружения. Более того, мы покажем, что для оболочки с неидеальными параметрами производительность бистатического (передатчик и приемник в разных местах) рассеяния более чувствительна к $\eta_t = \sqrt{(\mu_t/\epsilon_t)}$, чем к $n_t = \sqrt{\mu_t\epsilon_t}$.

В последнее время проблема маскировки получила много внимания [1]-[11]. Процесс построения для оболочки преимущественно основан на преобразовании координат [4]. Для построения среды, которая создает идеальную невидимость в ограниченной трассировке лучей, был использован метод оптического конформного отображения [6]. Подход, описанный в [4] начался с уравнений Максвелла, которые показывали, что такая маскировка должна быть эффективна на всех частотах. Sumner и другие продемонстрировали полноволновую цилиндрическую маскировку, но с сугубо численными расчетами, которые не обеспечивают представление о физике, как аналитический подход [2]. Аналитические демонстрации до сих пор показывались в пределе геометрической оптики, или в электростатическом или электромагнитическом пределе [4]-[6]. Так как оба предельных случая включают приближения в теории Максвелла, очень необходимо аналитически продемонстрировать является ли идеальная невидимость, которая может быть описана нулевым поперечным сечением, достижимой при условии любой длины волны. Более того, ни один из методов, описанных в [4]-[6] не предоставляет аналитические решения о том, насколько чувствительна неидеальная оболочка к материальным возмущениям, а так же насколько хороши оболочки с точки зрения бистатического рассеяния.

В этой работе на основе полноволновой рассеивающей модели Ми устанавливаются взаимодействия электромагнитных волн с оболочками [12]-[14]. Так как оболочка одновременно является и анизотропной и неоднородной [4], теория рассеяния Ми расширяется, чтобы быть применимой к этому специальному случаю, затем строго рассчитываются аналитические выражения для электромагнитного поля во всем пространстве. Мы показываем, что для идеальной оболочки, с параметрами определенными как в [4], результирующее поперечное рассеяние есть абсолютный ноль. Кроме того, численно подсчитаны производительность и чувствительность оболочки с неидеальными параметрами и интерпретирована физика, стоящая за феноменом.

Рисунок 1 показывает, что E_x поляризованная плоская волна с единичной амплитудой $E_i = \hat{x}e^{ik_0z}$ падает на покрытую сферу вдоль направления z . $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ — волновое число в воздухе. Временная зависимость e^{ik_0z} подавляется. Без потери общности, предполагаем, что внутренняя сфера ($r < R_1$) имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_1 и магнитную проницаемость μ_1 . Оболочка ($R_1 < r < R_2$) является своего рода вращательной одноосной средой, описываемой

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon_r(r) - \epsilon_t]\hat{r}\hat{r} + \epsilon_t\bar{I} \quad \bar{\mu} = [\mu_r(r) - \mu_t]\hat{r}\hat{r} + \mu_t\bar{I}, \quad (1)$$

где $\bar{I} = \hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}$, ϵ_t и μ_t диэлектрическая и магнитная проницаемость вдоль $\hat{\theta}$ и $\hat{\phi}$ направления, $\epsilon_r(r)$ и $\mu_r(r)$ — зависящие от r функции диэлектрической и магнитной проницаемости вдоль направления \hat{r} . Сначала рассматриваются выражения поля для распространения волны внутри оболочки. Если источники отсутствуют, мы раскладываем поля в ТЕ и ТМ режимах (по \hat{r}) введя скалярные потенциалы Φ_{TM} и Φ_{TE} :

$$\begin{aligned} B_{TM} &= \nabla \times (\hat{r}\Phi_{TM}), \\ D_{TM} &= \frac{1}{-i\omega} \nabla \times [\bar{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times (\hat{r}\Phi_{TM})], \\ B_{TE} &= \frac{1}{-i\omega} \nabla \times [\bar{\epsilon}^{-1} \cdot \nabla \times (\hat{r}\Phi_{TE})], \\ D_{TE} &= -\nabla \times (\hat{r}\Phi_{TE}). \end{aligned} \quad (2)$$

Используя ур. (1) и (2) и после некоторых алгебраических манипуляций, мы можем получить волновые уравнения для Φ_{TM} и Φ_{TE} :

$$\left\{ \frac{1}{(SR)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{(SR)} k_t^2 \right\} \Phi = 0, \quad (3)$$

где $k_t = \omega \sqrt{\mu_t \epsilon_t}$, (SR) обозначает анизотропное отношение оболочки: для ТМ волны $(SR) = \epsilon_t/\epsilon$, для ТЕ волны $(SR) = \mu_t/\mu_r$. Используя метод разделения переменных и полагая $\Phi = f(r)g(\theta)h(\phi)$, получаем $h(\phi)$ как гармоническую функцию: $h(\phi) = e^{\pm im\phi}$, $g(\theta)$ как ассоциированные многочлены Лежандра: $g(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$, и $f(r)$ как решение следующего уравнения:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[k_t^2 - (SR) \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \right\} f(r) = 0. \quad (4)$$

Если мы возьмем параметры, предложенные в [4]: $\epsilon_t = \epsilon_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$, $\epsilon_r = \epsilon_t \frac{(r-R_1)^2}{r^2}$, $\mu_t = \mu_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$ и $\mu_r = \mu_t \frac{(r-R_1)^2}{r^2}$, тогда и для ТЕ и для ТМ режима мы получим $(SR) = \frac{r^2}{(r-R_1)^2}$. Следовательно, решение ур. (4) записывается в виде

$$f(r) = k_t(R_2 - R_1)b_n(k_t(r - R_1)), \quad (5)$$

где b_n — сферическая функция Бесселя. Из анализа выше мы видим, что решения уравнения (3) это суперпозиция функций Бесселя, ассоциированных полиномов Лежандра и гармонических функций.

Чтобы совместить граничные условия на сферической поверхности, входящая волна разлагается в слагаемых сферических гармоник. С решениями ур. (3) для маскирующего слоя мы можем получить скалярные потенциалы, соответственно для входящих полей ($r > R_2$), рассеянных полей ($r > R_2$), внутренних полей ($r < R_1$) и полей маскирующего слоя ($R_1 < r < R_2$) имеющие вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{TM}^i &= \frac{\cos \phi}{\omega} \sum_n a_n \psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos(\theta)), \\ \Phi_{TE}^i &= \frac{\sin \phi}{\omega \eta_0} \sum_n a_n \psi_n(k_0 r) P_n^1(\cos(\theta)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi_{TM}^s = \frac{\cos \phi}{\omega} \sum_n a_n T_n^{(M)} \zeta_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta),$$

$$\Phi_{TE}^s = \frac{\sin \phi}{\omega \eta_0} \sum_n a_n T_n^{(N)} \zeta_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{TM}^{int} &= \frac{\cos \phi}{\omega} \sum_n c_n^{(M)} \psi(k_1 r) P_n^1(\cos \theta), \\ \Phi_{TE}^{int} &= \frac{\sin \phi}{\omega \eta_0} \sum_n c_n^{(N)} \psi(k_1 r) P_n^1(\cos \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{TM}^c &= \frac{\cos \phi}{\omega} \sum_n \{d_n^{(M)} \psi_n(k_t(r - R_1)) + f_n^{(M)} \chi_n(k_t(r - R_1))\} P_n^1(\cos \theta), \\ \Phi_{TE}^c &= \frac{\sin \phi}{\omega \eta_0} \sum_n \{d_n^{(N)} \psi_n(k_t(r - R_1)) + f_n^{(N)} \chi_n(k_t(r - R_1))\} P_n^1(\cos \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_n = \frac{(-i)^{-n}(2n+1)}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $k = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$. $T_n^{(M)}$, $T_n^{(N)}$, $d_n^{(M)}$, $d_n^{(N)}$, $f_n^{(M)}$ и $f_n^{(N)}$ — неизвестные коэффициенты разложения. $\psi_n(\xi)$, $\chi_n(\xi)$ и $\zeta_n(\xi)$ представляют функции Рикатти-Бесселя первого, второго и третьего рода соответственно [15]. Используя ур. (2), электромагнитные поля во всех трех областях могут быть разложены в терминах соответствующих скалярных потенциалов [16]. Применяя граничные условия на поверхности, мы можем получить четыре уравнения на $r = R_1$ и четыре уравнения на $r = R_2$. Отметим два уравнения на $r = R_1$ задаваемые соотношениями

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_1} c_n^{(N)} \psi(k_1 R_1) = d_n^{(N)} \psi_n(0) + f_n^{(N)} \chi_n(0) \quad (10)$$

$$\frac{\mu_t}{\mu_1} c_n^{(M)} \psi(k_1 R_1) = d_n^{(M)} \psi_n(0) + f_n^{(M)} \chi_n(0). \quad (11)$$

Мы видим $\psi_n(0) = 0$ и $\chi_n(0)$ — бесконечный член для всех $n \geq 1$. Так как поле в спрятанной сфере должно быть конечным, $f_n^{(N)}$ и $f_n^{(M)}$ должны оставаться нулевыми. Мы видим, что поле в скрытом объекте разделяется с полями в других областях. Из других четырех уравнений на границе $r = R_2$, мы можем вычислить следующие коэффициенты:

$$T_n^{(M)} = -\frac{\psi'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t) - (\eta_t/\eta_0)\psi_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t)}{\zeta'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t) - (\eta_t/\eta_0)\zeta_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t)} \quad (12)$$

$$T_n^{(N)} = -\frac{\psi_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t) - (\eta_t/\eta_0)\psi'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t)}{\zeta_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t) - (\eta_t/\eta_0)\zeta'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t)} \quad (13)$$

$$d_n^{(M)} = a_n \frac{i\mu_t/\mu_0}{\zeta'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t) - (\eta_t/\eta_0)\zeta_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t)} \quad (14)$$

$$d_n^{(N)} = a_n \frac{i\epsilon_t/\epsilon_0}{\zeta'_n(\xi_0)\psi_n(\xi_t) - (\eta_0/\eta_t)\zeta_n(\xi_0)\psi'_n(\xi_t)}, \quad (15)$$

где $\xi_0 = k_0 R_2$, $\xi_t = k_t(R_2 - R_1)$ и $\eta_t = \sqrt{\mu_t/\epsilon_t}$. Если $\epsilon_t = \epsilon_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$, $\mu_t = \mu_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$, тогда $\xi_t = \xi_0$, $\eta_t = \eta_0$. Используя определители Вронского для сферических пар решений, уравнения выше упрощаются:

$$T_n^{(M)} = T_n^{(N)} = 0, \quad d_n^{(M)} = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_0} a_n, \quad d_n^{(N)} = \frac{\mu_t}{\mu_0} a_n. \quad (16)$$

Очень интересно увидеть, что коэффициенты рассеяния $T_n^{(N)}$ и $T_n^{(M)}$ равны нулю. В точности равное нулю рассеянное поле характеризует безотражательное поведение идеальной оболочки [4]. Следует отметить, что наше математическое доказательство применимо для любых условий длин волн. Рисунок два показывает посчитанное электрическое поле и векторы Пойтинга в связи с E_x поляризованной плоской волны падающей на оболочку с $R_1 = 0.5\lambda_0$ и $R_2 = \lambda_0$ (λ_0 обозначает длину волны в свободном пространстве). Мы видим, что спрятанный объект полностью скрыт от волн, подтверждая эффективность оболочки, предложенной в [4]. Здесь нет проблемы луча на оси [4], так как сила Пойтинга становятся нулевым, когда поле проникает глубже в оболочку [4].

Самое интересное то, что ур. (12)-(15) дают дальнейшую информацию. Например, известно, что потери являются частой проблемой. Когда вводятся электрические и магнитные поперечные потери, коэффициенты рассеяния $T_n^{(M)}$ и $T_n^{(M)}$ становятся не нулевыми. На рис. 3 мы поместили бистатическое рассеяние как функцию угла рассеяния θ , для тангенса потерь 0.01, 0.1 и 1 соответственно. Вертикальная оси представляют нормализованные дифференциальные поперечные сечения $\frac{|S_1(\theta)|^2}{k_0^2 \pi R_2^2}$, $\frac{|S_2(\theta)|^2}{k_0^2 \pi R_2^2}$, здесь $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ определяются согласно [12]:

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= - \sum_n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [T_n^{(M)} \pi_n(\theta) + T_n^{(N)} \tau(\theta)], \\ S_2(\theta) &= - \sum_n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [T_n^{(M)} \tau_n(\theta) + T_n^{(N)} \pi(\theta)]. \end{aligned} \quad (17)$$

В двух уравнениях выше $\pi_n(\theta)$ и $\tau_n(\theta)$ связаны с ассоциированными функциями Лежандра как $\pi_n(\theta) = -\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$ и $\tau_n(\theta) = -\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}$ соответственно [15]. Для конфигурации, изображенной на рис. 1, $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ представляют шаблоны рассеяния в yz и xz плоскостях, соответственно. Две кривые $S_1(\theta)$ и $S_2(\theta)$ перекрываются потому, что $T_n^{(M)} = T_n^{(N)}$. Из рис. 3 мы видим, что сила рассеяния увеличивается с увеличением потерь. Более интересный феномен, что величина обратного рассеяния всегда равна нулю, потому что $T_n^{(M)} = T_n^{(N)}$ и $\pi_n(\theta) = -\tau_n(\theta)|_{\theta=180^\circ}$, что очень отличается от обычного рассеяния регулярных частиц [12]. Вычисленное распределение поля в xz плоскости для сферической оболочки с $\tan \delta = 0.1$ аналогично результатам моделирования цилиндрической оболочки с таким же типом потерь [2]. Однако, наши аналитические подсчеты показывают, что только сферическая оболочка в данном случае потерь проявляет в точности нулевое обратное рассеяние. Это уникальное свойство сферической оболочки показывает, что замаскированный объект все еще может быть спрятан от моностатического обнаружения радаром.

Так как материальные параметры для идеальной оболочки очень трудно реализовать, в измерениях гораздо чаще используются неидеальные материальные параметры [1, 2]. Следовательно, следует изучать как неидеальные параметры качественно влияют на производительность оболочки. Мы вычислим нормализованное рассеяние поперечного сечения $Q_{sca} = \frac{2}{(k_0 R_2)^2} \sum_n (2n+1) (|T_n^{(M)}|^2 + |T_n^{(N)}|^2)$ при изменяющемся ϵ_t в трех случаях: (Случай 1) $\mu_t = \mu_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$ остается постоянным; (Случай 2) импеданс $\eta_t = \sqrt{\mu_t / \epsilon_t}$ остается постоянным; и (Случай 3) индекс рефракции $n_t = \sqrt{\frac{\mu_t \epsilon_t}{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}$ остается постоянным. Результаты показаны на рис. 4(а), где горизонтальная ось нормализована идеальным параметром $\epsilon_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$. Мы видим, что когда ϵ_t эквивалентно идеальному параметру, соответствующее μ_t во всех трех случаях равно $\mu_0 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$ и Q_{sca} равно нулю, что означает — оболочка является совершенной. Когда ϵ_t немного отодвигается от идеального параметра, Q_{sca} в Случае 1 и Случае 2 возрастет от нуля более резко, чем в Случае 3. Это происходит потому, что в Случае 3 индекс рефракции остается постоянным и направления вектора Пойтинга внутри оболочки преимущественно близко к идеальному случаю, как показано

на рис. 4(b). Поэтому можем заключить, что производительность бистатического рассеяния более чувствительна к $\eta_t = \sqrt{\mu_t/\epsilon_t}$ чем к $n_t = \sqrt{\mu_t\epsilon_t}$. Однако, следует отметить, что из ур. (12), (13), (17) оболочка в Случае 2 остается невидимой от моностатического обнаружения из-за соответствующих результатов импеданса в нулевом обратном рассеянии.

Важно отметить, что весь анализ выше верен, независимо от материальных параметров замаскированного объекта. Даже если материальные параметры оболочки несовершенны, входящие поля все еще не могут проникать в спрятанный объект, и сила рассеяния полностью определяется самой оболочкой. Этот нетипичный феномен основан на предположении, что материальные параметры оболочки в радиальных и поперечных осях всегда имеют одну форму $k_r = k_t \frac{(r-R_1)^2}{r^2}$, где k означает μ или ϵ . Следовательно, ур. (5), (10) и (11) всегда выполняются, что приводит к $f_n^{(N)} = 0$ и $f_n^{(M)} = 0$ и материальные параметры скрытого объекта не участвуют в внешнем поле. Если вводятся некоторые возмущения в отношении радиальных или поперечных материальных параметров, решения ур. (4) должны быть пересмотрены, и взаимодействие внешнего поля с спрятанным объектом не может быть опущено.

В заключение, мы продемонстрировали взаимодействие электромагнитных волн с оболочкой строго решив уравнения Максвелла в сферической системе координат. Поля и бистатическое рассеяние поперечного сечения общего класса оболочек (идеальных и неидеальных) были количественно разрешены методом рассеяния полной волны. Физика, стоящая за невидимостью маскировки, была интерпретирована. Наш метод был показан как вычислительно эффективный, что очень полезно для проектирования оболочек и их применения.

Список литературы

- [1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 314, 977 (2006).
- [2] U.S. A. Cummer et al., Phys. Rev. E 74, 036621 (2006).
- [3] A. Alu and N. Engheta, Phys. Rev. E 72, 016623 (2005).
- [4] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 312, 1780 (2006).
- [5] D. Schurig, J. B. Pendry, and D. R. Smith, Opt. Express 14, 9794 (2006).
- [6] U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006).
- [7] U. Leonhardt, New J. Phys. 8, 118 (2006).
- [8] A. Hendi, J. Henn, and U. Leonhardt, Phys. Rev. Lett. 97, 073902 (2006).
- [9] A.H. Sihvola, Prog. Electromagn. Res. pier-66, 191 (2006).
- [10] G. W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, New J. Phys. 8, 248 (2006).
- [11] D. A. B. Miller, Opt. Express 14, 12 457 (2006).
- [12] L. Tsang, J.A. Kong, and K. Ding, Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and applications (Wiley, New York, 2000).
- [13] J. A. Kong, Electromagnetic Waves Theory (EMW Publishing, Cambridge, MA, 2005).
- [14] B. A. Kemp, T. M. Grzegorzczuk, and J. A. Kong, Phys. Rev. Lett. 97, 133902 (2006).

[15] H.C. van de Hulst, Light Scattering by Small Particles (Dover, New York, 1957).

[16] J. Roth and M. J. Digman, J. Opt. Soc. Am. 63, 308 (1973).

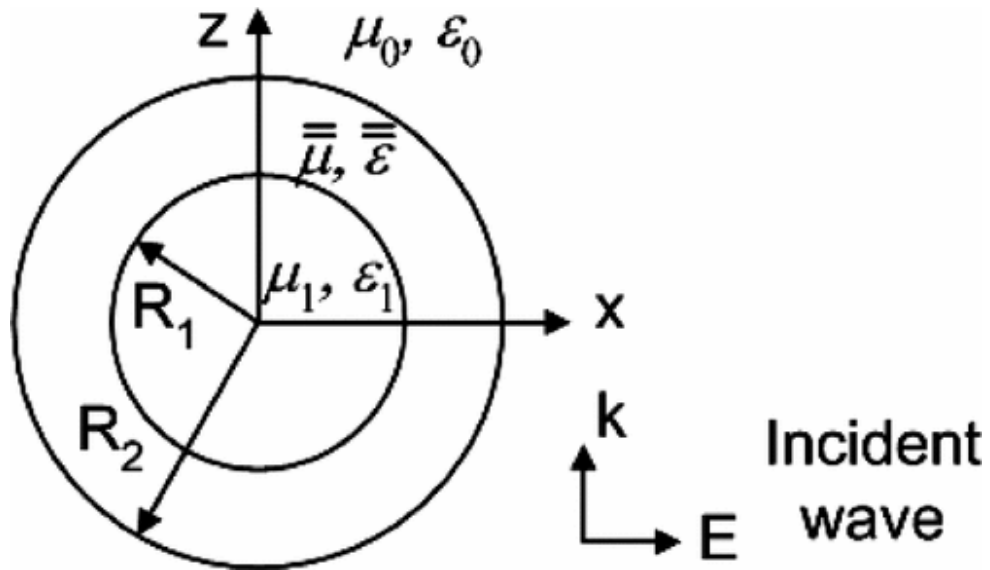


Рис. 1:

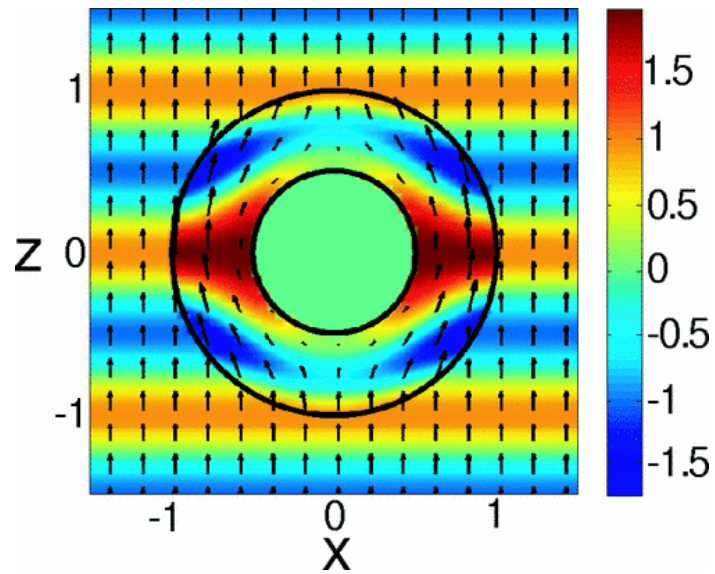


Рис. 2:

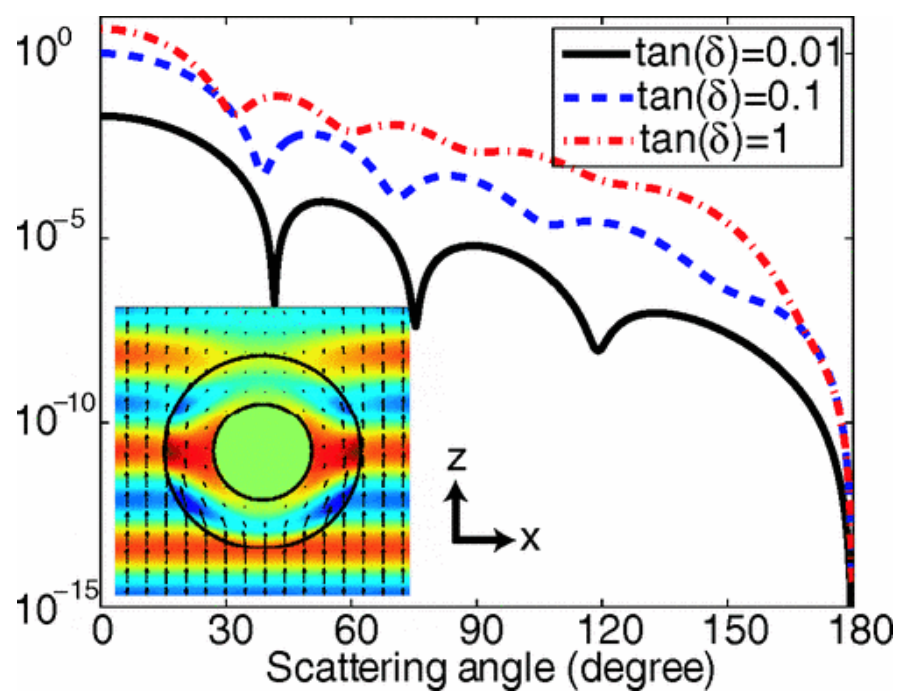


Рис. 3:

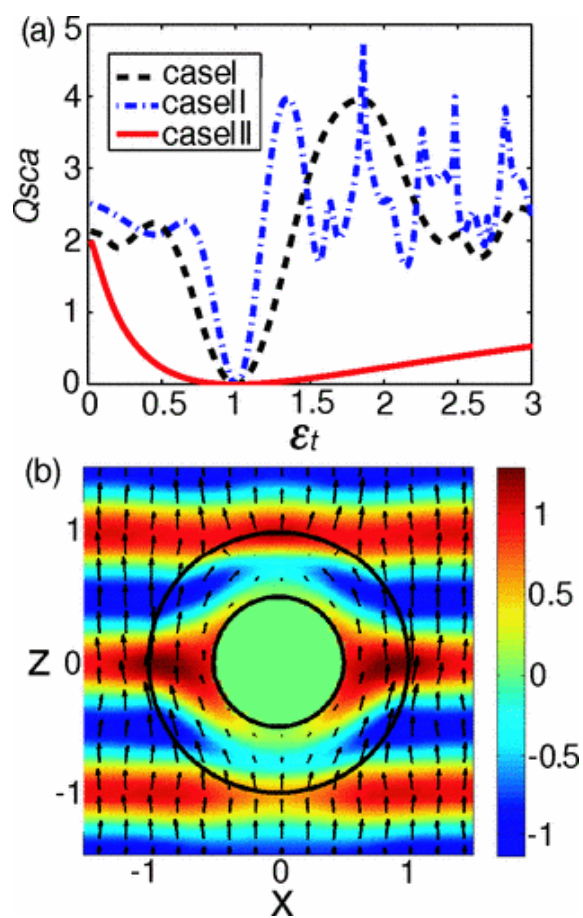


Рис. 4: