A Rigorous Time-Domain Analysis of Full-Wave Electromagnetic Cloaking (Invisibility)

Ricardo Weder

1 Введение

В настоящее время существует большой интерес к теоретической и практической возможности маскировки объектов от наблюдения при помощи электромагнитных полей. Основная идея этих маскирующих устройств [8,9,13], [18] заключается в использовании анизотропной преобразующей среды диэлектрическая и магнитная проницаемость $\varepsilon^{\lambda\nu}, \mu^{\lambda\nu}$ которой получаются из $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$ изотропной среды сингулярным преобразованием координат. Сингулярности лежат на границе маскируемых объектов. Здесь берется физическая интерпретация. А именно, $\varepsilon^{\lambda\nu}, \mu^{\lambda\nu}$ и $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$ представляют собой компоненты в плоской декартовой системе координат диэлектрической и магнитной проницаемости среды с различными физическими свойствами. Кажется, что с текущими технологиями возможно построить среду, как описано выше, используя искусственно структурированных метаматериалов. В [8,9] было дано доказательство маскировки для уравнения проводимости, тоесть случая нулевой частоты, от обнаружения путем измерения отображения Дирихле-Неймана, которое соотносит значение электрического потенциала на границе к его производной. Работы [13] и [18] рассматривают электромагнитные волны в приближении геометрической оптики, тоесть, для больших частот. В [24] представлено эксперементальное подтверждение маскировки, а [4] и [5] дают численное моделирование. Строгое доказательство маскировки уже было дано в [7], где изучались волны фиксированной частоты, тоесть в диапазоне частот.

Они рассматривали класс решений уравнений Максвелла с конечной энергией в ограниченном множестве O, которое содержит внутри маскируемый объект, и они доказывают маскировку на любой частоте, по отношению к измерению значений Коши этих решений на границе O. Мы дадим комментарии по этим работам ниже. Для наших результатов по этой задаче смотри [25] и [15]. В [16] рассматривается маскировка упругих волн, и обсуждается история невидимости.

В данной работе мы исследуем электромагнитную маскировку в временной области используя формализм теории рассеяния во времени [23]. Этот формализм дает нам строгий метод для анализа распостранения электромагнитных пакетов волн с конечно энергией в преобразующей среде. В частности, это позволяет нам однозначным способом определить математические задачи, возникающие из-за сингулярности обратных диэлектрической и магнитной проницаемости преобразующей среды на границе маскируемых объектов. Большую роль в этом вопросе играет теория фон Неймана самосопрженных расширений симметричных операторов. Мы записываем уравнения Максвелла в форме Шредингера, где роль гамильтониана будет играть электромагнитный пропагатор. Мы докажем, что электромагнитный пропагатор вне маскируемого объекьа является существенно самосопряженным. Это означает, что он имеет только одно самосопряженное расширение A_Ω, и это расширение самосопряженное расширение порождает единственно возможную эволюцию во времени с постоянно энергией, с электромагнитными волнами конечной энергии, распостраняющихся вне маскируемых объектов. Более того, A_Ω унитарно эквивалентно электромагнитному пропагатору в среде $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$. Используя этот факт и то, что вне шара преобразование координат является единичным, мы доказываем, что оператор рассеяния единичный. Это означает, что для любого входящего пакета электромагнитных волн с кончной энергией выходящий пакет будет в точности таким же. Другими словами, невозможно обнаружить замаскированный объект в любом эксперименте рассеяния, в котором пакеты волн конечной энергии посылаются в сторону замаскированных объектов, так как выходящий пакет волн, измеренный после взаимодействия, такой же, как входящий. Наши результаты дают строгое доказательство построенных в [8, 9, 13] и [18] маскирующих пассивных и активных устройств от обнаружения электромагнитными волнами. На самом деле, наружная маскировка не зависит от того, что внутри маскируемых объектов.

Как известно, самосопряженные расширения можно понять в терминах граничных условий. На самом деле, для электромагнитных полей в области A_Ω компонента, касательная внешности границе маскируемых объектов и электрического и магнитного поля должна равняться нулю. Это граничное условие самосопряженное в нашем случае, потому что диэлектрическая и магинитная проницаемости являются вырожденными на границе маскируемых объектов.

Кроме того, мы докажем маскировку для общих анизотропных материалов. В частности, наши результаты показывают, что возможно масировать объекты внутри кристаллов.

Хотя, как упоминалось выше, маскировка не зависит от маскируемых объектов, и, в частсноти, маскировка снаружи не зависит от наличия пассивных и/или активных устройств внутри маскируемых объектов, мы обсудим динамику электромагнитных волн внутри маскируемых объектов для завершенности, так как это помогает понять указанную выше независимость маскировки от свойств маскируемых объектов.

Мы докажем, что каждое самосопряженное расширение электромагнитного пропагатора в преобразующей среде является прямой суммой уникального самосопряженного расширения в внешности маскируемых объектов A_Ω и некоторого самосопряженного расширения электромагнитного пропагатора во внутренности маскируемых объектов. Каждое из этих самосопряженных расширений отвечает возможной унитарной эволюции во времени для электромагинтных волн с конечной энергией. Как известно, тот факт, что эволюция во времени является унитарной гарантирует нам, что энергия сохраняется. Из этих результатов следует, что электромагнитный волны внутри и снаружи маскируемых объектов полностью отделимы друг от друга. На самом деле, электромагнитный волны внутри маскируемых объектов не могут их покинуть, и наоборот, внешние электромагнитные волны не могут попасть внутрь.

В терминах граничных условий это означает, что условия передачи, которые связывают электромагнитные поля внутри и снаружи маскируемых объектов не допустимы, так как они не отвечают самосопряженному расширению электромагнитного пропагатора, и значит они не ведут к унитарной динамике, которая сохраняет энергию. Кроме того, выбор конкретного самосопряженное расширения электромагнитного пропагатора маскируемых объектов сводится к выбору некоторого граничного условия внутри маскируемых объектов. Другими словами, любая возможная унитарная динамика подразумевает существаование некоторого граничного условия на внутренней границе маскируемых объектов.

Тот факт, что существует большой класс самосопряженных расширений (или граничных условий), который можно взять внутри маскируемых объектов может быть полезен для улучшения маскировки на практике, где нужно рассмотреть приблизительную преобразующую среду, а так же и анализ стабильности маскировки.

На самом деле, мы рассматриваем несколько более общую конструкцию, нежели [8,9, 13], [18], так как мы допускаем конечное число замаскированных объеков.

В [7] представлена более общая конструкция для маскировки. В случае уравнений Максвелла, все их конструкции сделаны в контексте того, что тензоры плотностей диэлектрической и магнитной проницаемости конформны друг другу, тоесть кратны друг другу на некоторую положительную скалярную функцию. В частности, все изотропные среды входят в эту категорию. Они отметили, что по математическим и практическим причинам будет интересно понять маскировку для общих анизотропных материалов без этого допущения. А данной работе мы решили эту задачу, так как мы доказали маскировку для все общих анизотропных материалов. В частности, наши результаты показывают, что возможно замакировать объекты внутри кристаллов.

Отметим, более того, что [7] так же рассматривает случай уравнения Гельмгольца. Не не будем обсуждать эту задачу здесь.

Кроме того, отметим, что существующие теоремы единственности обратной задачи рассеяния не выполняются при этих условиях.

В [7] маскировка доказана по отношению к данным Коши на любой заданной фиксированной частоте на поверхности, покрывающей маскируемы объект. В случае, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости ограничены сверху и снизу известно, что данные Коши на фиксированной частоте эквивалентны матрице рассеяния на той же частоте. Для примера смотри [17] и [26]. Это равенство, однако, не доказано в случае, когда диэлекрическая и магнитная проницаемость вырождаются на границе объекта. Фактически, возможно это даже не справедливо для более общих вырождающихся сред, не являющихся преобразующими, так как в этом случае возможно существование элекромагнитных волн конечной энергии, которые поглащаются границей объекта при $t \to \pm\infty$. Если это так, то равенство не выполняется, так как данные Коши на покрывающей объекты поверхности не будут содержать информацию о волнах, которые асимптотически поглащаются границей объекта. Эта проблема представляет независимый интерес, узнать, так ли это или нет в общем случае выраждающихся диэлектрических и магнитных проницаемостей. Например, для рассеяния ограниченным препятствием с сингулярной границей и условием Неймана на границе, где это происходит смотри [10]. Для схожей ситуации с рассеянием электромагнитных волн черной дыры Шварцшильда смотри [2]. Заметим, что в нашем подходе мы непосредственно рассматриваем оператор рассеяния, который измерен в экспериментах по рассеянию.

При анализе уравнений Максвелла с диэлетрической и магнитной проницаемостью, которые не зависят от частоты, дисперсия среды не учитывается. Это означает, что маскировка будет выполнятся для пакетов электромагнитных волн достаточно узкого диапазона частот, такого, что выполняется это предположение.

Статья организована следущим образом. В разделе 2 мы доказываем наши результаты в электромагнитной маскировке. В разделе 3 мы рассматриваем распостранение электромагнитных волн во внешности маскируемых объектов. В разделе 4 мы формулируем маскировку как краевую задачу вне маскируемого объекта для уравнений Максвелла на фиксированной частоте, следующую за нашим анализом самосопряженного расширения электромагнитного пропагатора. В частности, мы задаем подходящее граничное условие на внешней границе маскируемых объектов. Наконец, в разделе 5 мы доказываем маскировку для бесконечного цилиндра. Это представляет интерес, так как этот случае рассматривается в эксперементальной проверке [24] и численном моделировании [4] и [5]. Конечно, [24] рассматривает только часть цилиндра. В разделе 3 и 4 мы даем дальнейшие комментарии по поводу результатов [7].

Добавление

После того, как предыдущая версия этой статьи была опубликована в arXiv, мы опубликовали работу [29], в которой обобщили результаты этой работы для сферических оболочек до случая оболочек высокого порядка, а также обсудили маскировку в области частот. Более того, в нашей работе [30] мы определили граничное условие маскировки, которое должно выолняться внутри границы маскируемых объектов, в случае, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости ограничены сверху и снизу внутри маскируемых объектов.