

# A Rigorous Time-Domain Analysis of Full-Wave Electromagnetic Cloaking (Invisibility)

Ricardo Weder

## 1 Введение

В настоящее время существует большой интерес к теоретической и практической возможности маскировки объектов от наблюдения при помощи электромагнитных полей. Основная идея этих маскирующих устройств [8,9,13], [18] заключается в использовании анизотропной преобразующей среды диэлектрическая и магнитная проницаемость  $\varepsilon^{\lambda\nu}, \mu^{\lambda\nu}$  которой получаются из  $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$  изотропной среды сингулярным преобразованием координат. Сингулярности лежат на границе маскируемых объектов. Здесь берется физическая интерпретация. А именно,  $\varepsilon^{\lambda\nu}, \mu^{\lambda\nu}$  и  $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$  представляют собой компоненты в плоской декартовой системе координат диэлектрической и магнитной проницаемости среды с различными физическими свойствами. Кажется, что с текущими технологиями возможно построить среду, как описано выше, используя искусственно структурированных метаматериалов. В [8,9] было дано доказательство маскировки для уравнения проводимости, то есть случая нулевой частоты, от обнаружения путем измерения отображения Дирихле-Неймана, которое соотносит значение электрического потенциала на границе к его производной. Работы [13] и [18] рассматривают электромагнитные волны в приближении геометрической оптики, то есть, для больших частот. В [24] представлено экспериментальное подтверждение маскировки, а [4] и [5] дают численное моделирование. Строгое доказательство маскировки уже было дано в [7], где изучались волны фиксированной частоты, то есть в диапазоне частот.

Они рассматривали класс решений уравнений Максвелла с конечной энергией в ограниченном множестве  $O$ , которое содержит внутри маскируемый объект, и они доказывают маскировку на любой частоте, по отношению к измерению значений Коши этих решений на границе  $O$ . Мы дадим комментарии по этим работам ниже. Для наших результатов по этой задаче смотри [25] и [15]. В [16] рассматривается маскировка упругих волн, и обсуждается история невидимости.

В данной работе мы исследуем электромагнитную маскировку в временной области используя формализм теории рассеяния во времени [23]. Этот формализм дает нам строгий метод для анализа распространения электромагнитных пакетов волн с конечной энергией в преобразующей среде. В частности, это позволяет нам однозначным способом определить математические задачи, возникающие из-за сингулярности обратных диэлектрической и магнитной проницаемости преобразующей среды на границе маскируемого объекта. Большую роль в этом вопросе играет теория фон Неймана самосопряженных расширений симметричных операторов. Мы записываем уравнения Максвелла в форме Шредингера, где роль гамильтониана будет играть электромагнитный пропагатор. Мы докажем, что электромагнитный пропагатор вне маскируемого объекта является существенно самосопряженным. Это означает, что он имеет только одно самосопряженное расширение  $A_\Omega$ , и это расширение самосопряженное расширение порождает единственно возможную эволюцию во времени с постоянной энергией, с электромагнитными волнами конечной энергии, распространяющихся вне маскируемого объекта. Более того,  $A_\Omega$  унитарно эквивалентно электромагнитному пропагатору в среде  $\varepsilon_0^{\lambda\nu}, \mu_0^{\lambda\nu}$ . Используя этот факт и то, что вне шара преобразование координат является единичным, мы доказываем, что оператор

рассеяния единичный. Это означает, что для любого входящего пакета электромагнитных волн с конечной энергией выходящий пакет будет в точности таким же. Другими словами, невозможно обнаружить замаскированный объект в любом эксперименте рассеяния, в котором пакеты волн конечной энергии посылаются в сторону замаскированных объектов, так как выходящий пакет волн, измеренный после взаимодействия, такой же, как входящий. Наши результаты дают строгое доказательство построенных в [8, 9, 13] и [18] маскирующих пассивных и активных устройств от обнаружения электромагнитными волнами. На самом деле, наружная маскировка не зависит от того, что внутри маскируемого объекта.

Как известно, самосопряженные расширения можно понять в терминах граничных условий. На самом деле, для электромагнитных полей в области  $A_\Omega$  компонента, касательная внешности границе маскируемого объекта и электрического и магнитного поля должна равняться нулю. Это граничное условие самосопряженное в нашем случае, потому что диэлектрическая и магнитная проницаемости являются вырожденными на границе маскируемых объектов.

Кроме того, мы докажем маскировку для общих анизотропных материалов. В частности, наши результаты показывают, что возможно масировать объекты внутри кристаллов.

Хотя, как упоминалось выше, маскировка не зависит от маскируемого объекта, и, в частности, маскировка снаружи не зависит от наличия пассивных и/или активных устройств внутри маскируемого объекта, мы обсудим динамику электромагнитных волн внутри маскируемого объекта для завершенности, так как это помогает понять указанную выше независимость маскировки от свойств маскируемого объекта.

Мы докажем, что каждое самосопряженное расширение электромагнитного пропагатора в преобразующей среде является прямой суммой уникального самосопряженного расширения в внешности маскируемых объектов  $A_\Omega$  и некоторого самосопряженного расширения электромагнитного пропагатора во внутренности маскируемого объекта. Каждое из этих самосопряженных расширений отвечает возможной унитарной эволюции во времени для электромагнитных волн с конечной энергией. Как известно, тот факт, что эволюция во времени является унитарной гарантирует нам, что энергия сохраняется. Из этих результатов следует, что электромагнитные волны внутри и снаружи маскируемых объектов полностью отделимы друг от друга. На самом деле, электромагнитные волны внутри маскируемых объектов не могут их покинуть, и наоборот, внешние электромагнитные волны не могут попасть внутрь.