

Scattering Theory Derivation of a 3D Acoustic Cloaking Shell

Вывод теории рассеяния для трехмерной акустической маскирующей оболочки

Steven Cummer
Bogdan-Ioan Popa

Аннотация

При помощи акустической теории рассеяния мы выводим массовую плотность и модуль сжатия сферической оболочки, которая может устранять рассеяние произвольного объекта, находящегося во внутренности оболочки, по другому называющейся трехмерной маскирующей оболочкой. Вычисления подтверждают, что поля давления и скорости плавно изгибаются и исключаются из центральной области, как для рассмотренной ранее электромагнитной маскирующей оболочки. Оболочка требует анизотропной массовой плотности с главными осями в сферических координатах и зависящий от радиуса модуль сжатия. Существование такой трехмерной оболочки означает, что такое нерассеивающее решение может так же существовать для других волновых систем, которые не изоморфны с электромагнитным случаем.

Pendru et al. [1] показали, что произвольное преобразование координат уравнений Максвелла может быть интерпретировано в терминах электромагнитного материала в исходной системе координат с преобразованными величинами диэлектрической и магнитной проницаемости. Следовательно, изгибание и растягивание электромагнитных полей, определяемое преобразованием координат, может быть реализовано с помощью электромагнитных материалов, открывая неожиданные и интересные решения, такие как электромагнитная маскировка [1, 2].

Степень, с которой такой подход к маскировке может быть расширен для других классов волн, в общем не известна. Миллер [?] описал активный подход для общей маскировки волн, основанный на зондировании и нелокальной ретрансляции сигналов на поверхности объекта. Leonhardt [3] описал как двумерный объект может быть замаскирован в коротковолновом пределе способом, который так же может быть применен к разным классам волн. Милтон et al. [?] показали, что подход преобразования координат не может быть расширен в общем случае до эластичной среды. Cummer и Schuring [?] показали, однако, что существует точная аналогия между двумерным электромагнетизмом и акустикой для анизотропных материалов и, следовательно, что существует двумерная маскировочная акустическая оболочка. Этот изоморфизм не расширяется на три измерения, однако, это означает, что если трехмерная акустическая маскировочная оболочка существует, она отличается от ее электромагнитной коллеги.

Chen et al. [?] произвели анализ сферических рассеивающих гармоник трехмерной сферической маскирующей оболочки, описанной в [1] и подтвердили, что такая оболочка делает любой объект в ее внутренности свободным от рассеяния во всех направлениях. Здесь мы используем анализ рассеяния как отправную точку для того чтобы вывести множество акустических материальных параметров для оболочки, которая обеспечивает трехмерному объекту во внутренности оболочки свободу от акустического рассеяния.

Для невязкой жидкости с нулевым модулем скольжения динамика малых возмущений описывается сохранением момента и отношением зависимости деформации от напряжения. Так как [?] показали, что для двумерной маскировки требуется анизотропная массовая плотность, мы полагаем эту анизотропию с самого начала. С $\exp(-i\omega t)$ зависимостью от времени, эти уравнения движения выглядят как:

$$\nabla p = i\omega \bar{\bar{\rho}}(\bar{r}) \rho_0 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$i\omega p = \lambda(\bar{r}) \lambda_0 \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2)$$

где p — скалярное давление, \mathbf{v} — вектор скорости жидкости, λ — неоднородный модуль сжатия жидкости, связанный с λ_0 , и $\bar{\bar{\rho}}$ есть неоднородный обобщенный тензор массовой плотности, связанный с ρ_0 . Эти уравнения являются версией для жидкости более общих эластодинамических уравнений, рассмотренных в [?]. Хотя анизотропная массовая плотность не является свойством обычно присущим натуральным материалам, она естественно возникает в анализе эластодинамики сильно неоднородных композитных материалов [?]. Важно отметить, что анизотропная массовая плотность в (1) является эффективной массовой плотностью и не обязательно связана с физической массовой плотностью любого из индивидуальных элементов композиного материала. Milton et al. [?] описали простую концептуальную модель, основанную на массово загруженных пружинах, встроенных в исходную матрицу, которая описывается анизотропной массовой плотностью. Сила, примененная рядом с внутренней резонансной частотой такого включения, произведет большие движения, в результате чего сообщая среде малую эффективную плотность масс. Если внутренние пружины изменяются, в зависимости от направления, то эффективная массовая плотность так же будет зависеть от направления, то есть будут анизотропными. Композитный материал, содержащий анизотропные механически резонансные включения в исходной матрице жидкости будут подчинены скалярному соотношению напряженности-деформированности потому, что при применении сил матрица жидкости все еще будет иметь анизотропный динамический ответ, и следовательно, анизотропную динамическую массовую плотность.

Мы рассматриваем эти поля в области, изображенной на Рис. 1, в которой однородная жидкость изотропной плотность ρ_0 и модулем сжатия λ_0 находится в $r > b$ и $r < a$, в то время как материал, находящийся в $a < r < b$ — неоднородная анизотропная искомая оболочка. Без потери общности будем считать, что однородная плоская полна падает на оболочку по направлению $\theta = 0$.

Симметрия диктует, что если маскирующая оболочка существует, то ее параметры рассеяния должны не зависеть от направления падающей волны. Следовательно, ее материальные свойства должны зависеть только от радиуса, а главные оси тензора массовой плотности должны быть выровнены по направлению сферических координат. $\rho_r(r)$, $\rho_\theta(r)$, $\rho_\phi(r)$ и $\lambda(r)$ — материальные свойства, которые нужно определить. Более того, симметрия предполагает, что $\rho_\theta(r) = \rho_\phi(r)$. Предполагается, что эти параметры нормализованы по отношению к плотности ρ_0 и модулю сжатия λ_0 окружения.

Легко показать, что p удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\rho}}^{-1} \nabla p) + \frac{\omega^2}{\lambda} p = 0. \quad (3)$$

Сначала мы сфокусируемся на решении уравнения (3) внутри анизотропной оболочки. В этой области в сферических координатах уравнение переходит в

$$\frac{\omega^2}{v_{p_0}^2} r^2 p + \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{\rho_\phi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\lambda}{\rho_\phi \sin \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} = 0, \quad (4)$$

здесь мы использовали сжатую скорость волны в окружающей среде $v_{p_0} = \sqrt{\rho_0/\lambda_0}$ и $\rho_\theta(r) = \rho_\phi(r)$. Азимутальные элементы массовой плотности были вынесены из под знака производной, так как они зависят только от радиуса.

Следуя методу разделения переменных положим $p(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi)$, и после умножения всех слагаемых на $\lambda^{-1}\rho_\phi \sin \theta$ обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(r)$ принимает вид

$$\rho_\phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \left[k_0^2 \frac{\rho_\phi}{\lambda} r^2 - n(n+1) \right] f = 0, \quad (5)$$

здесь мы использовали волновое число в окружающей среде $k_0^2 = \omega/v_{p0}^2$. Итоговые уравнения для $g(\theta)$ и $h(\phi)$ имеют стандартную форму [?], и их решениями являются ассоциированные функции Лежандра $g(\theta) = K_0 P_n^m(\cos \theta)$ (другие функции Лежандра были исключены из-за области) и азимутальные гармоники $h(\phi) = K_1 \cos(m\phi) + K_2 \sin(m\phi)$. Однако (5) не является сферическим уравнением Бесселя из-за зависимости r от акустических свойств оболочки.

Chen et al. [?] показали, что важным элементом при создании трехмерной электромагнитной маскирующей нерассеивающей оболочки является радиальный сдвиг r к $(r - a)$ в уравнении для $f(r)$ (которое является уравнением Рикатти-Бесселя в электромагнитном случае), которое получилось для радиально зависящих параметров среды. Считая его одним потенциальным путем для реализации нерассеивающей оболочки, найдем условия для ρ_r , ρ_ϕ и λ , которые преобразуют (5) в стандартное сферическое уравнение Бесселя для $(r - a)$. Такие условия имеют вид:

$$\frac{r^2}{\rho_r} = \frac{(r - a)^2}{k_1}, \quad (6)$$

$$\rho_\phi = k_1, \quad (7)$$

$$\frac{\rho_\phi}{\lambda} k_0^2 r^2 = k_{sh}^2 (r - a)^2, \quad (8)$$

здесь k_1 и k_{sh} константы, которые будут определены позднее. При выполнении этих условий уравнение (5) переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left((r - a)^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + [k_{sh}^2 (r - a)^2 - n(n+1)] f = 0, \quad (9)$$

которое имеет решение $f(r) = b_n[k_{sh}(r - a)]$, где $b_n(x)$ — сферическая функция Бесселя или Ханкеля порядка n .

Теперь поле давления может быть выражено во всех областях. Для $r > b$, сферическое разложение падающей сжатой волны дает

$$p^{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (10)$$

где $K_n = i^n(2n+1)$ и $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра степени n . Рассеянное поле подчинено условию излучения и, в силу азимутальной инвариантности источника и геометрии, может быть записано как

$$p^{scat} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (11)$$

с $h_n^{(1)}$ — сферической функцией Ханкеля первого рода и A_n — константами, которые следует определить из граничных условий. Для $a < r < b$ азимутальная инвариантность означает, что давление задается соотношениями:

$$p^{sh} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n[k_{sh}(r-a)] P_n(\cos \theta), \quad (12)$$

где j_n — сферическая функция Бесселя, используемая для того, чтобы убедиться, что поле остается конечным при $r = a$. Это предположение будет слегка изменено, чтобы преодолеть трудности, связанные с нулевой гармоникой. Внутри оболочки, когда $r < a$, давление имеет вид:

$$p^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta). \quad (13)$$

Радиальная скорость, перпендикулярная всем ..., непрерывна, и, следовательно, нужна для завершения задачи. Из (1) имеем

$$v_r = -\frac{1}{i\omega\rho_r\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (14)$$

и в результате выражения для радиальной скорости принимают вид

$$v_r^{inc} = \frac{-k_0}{i\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} K_n j'_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (15)$$

$$v_r^{scat} = \frac{-k_0}{i\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n h'_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (16)$$

$$v_r^{sh} = \frac{-k_{sh}}{i\omega\rho_0\rho_r} \sum_{n=0}^{\infty} B_n j'_n[k_{sh}(r-a)] P_n(\cos \theta), \quad (17)$$

$$v_r^{int} = \frac{-k_0}{i\omega\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n j'_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (18)$$

штрих обозначает дифференцирование по отношению ко всему аргументу функции Бесселя. После использования ортогональности $P_n(\cos \theta)$, непрерывность p и v_r на $r = a$ означает, что выражения, которым должны удовлетворять коэффициенты A_n и B_n

Список литературы

- [1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 312, 1780 (2006).
- [2] D. Schurig, J. B. Pendry, and D. R. Smith, Opt. Express 14, 9794 (2006).
- [3] U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006).