

Идеальная цилиндрическая оболочка: совершенная, но чувствительная к малым возмущениям

Ideal Cylindrical Cloak: Perfect but Sensitive to Tiny Perturbations

Zhichao Ruan, Min Yan, Curtis W. Neff, and Min Qiu

Laboratory of Optics, Photonics and Quantum Electronics,

Department of Microelectronics and Applied Physics,

Royal Institute of Technology (KTH), Electrum 229, 16440 Kista, Sweden

Joint Research Center of Photonics of the

Royal Institute of Technology (Sweden) and Zhejiang University,

Zhejiang University, Yu-Quan, 310027 Hangzhou, People's Republic of China

e-mail: min@kth.se

Аннотация

В последних работах обсуждался захватывающий вопрос экзотических материалов, невидимых для электромагнитных волн (ЕМ) [1]-[11]. Основываясь на преобразовании координат в уравнениях Максвелла Пендри и другие впервые предложили мантию невидимку, которая может защищать объект внутри нее от обнаружения [1]: когда электромагнитные волны проходят сквозь мантию невидимку, она отражает их, направляя вокруг объекта, затем возвращает в первоначальное направление, не возмущая внешнее поле. Также недавно сообщалось о численных методах, примененных для решения задачи ЕМ, включающую плащ невидимку [6, 9], и экспериментальных результатов маскировки с использованием метаматериалов с упрощенными параметрами [7]. Тем не менее, идеальный плащ-невидимка не была подтверждена как совершенная оболочка, в связи с экстремальными физическими параметрами (ноль или бесконечность) в идеальной оболочке при приближении к внутренней границе.

В этой работе мы рассмотрим рассеяние идеального плаща-невидимки. Мы сфокусируем наш анализ на двумерной цилиндрической оболочке, поскольку волновое уравнение, по сравнению с трехмерным случаем может быть упрощено, так же двумерную оболочку более проще изготовить [7]. Мы воспользуемся преимуществом цилиндрической геометрии структуры и используем метод расширения цилиндрической волны для изучения устройства полуаналитически. Чтобы избежать экстремальных значений (нуля или бесконечности), мы введем небольшое возмущение в идеальную оболочку и позволим ему достигнуть нуля, чтобы изучить задачу рассеяния для идеальной оболочки. Такой асимптотический анализ может показать не только, является ли идеально невидимой или нет, но и предоставляет подсказки, насколько чувствительно такое устройство к конечным возмущениям. Анализ чувствительности плаща-невидимки прямо определяет возможно его применения. Наши исследования показывают, что цилиндрическая оболочка очень чувствительна к малым возмущениям параметров.

Сначала посмотрим на волновое уравнение внутри цилиндрической оболочки. Согласно [1] простое преобразование

$$r' = \frac{b-a}{b}r + a, \quad \theta' = \theta, \quad \zeta' = \zeta \quad (1)$$

может сжать пространство из цилиндрической области $0 < r < b$ в кольцо $0 < r' < b$, где a и b внутренний и внешний радиусы оболочки соответственно, и $r, \theta, \zeta(r', \theta', \zeta')$ радиальная, угловая и вертикальная координаты в оригинальной(преобразованной) системе

соответственно. Следуя подходу работы [1] компоненты тензора диалектрическая и магнитная проницаемости могут быть записаны как

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-a}{r} \quad \varepsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r-a},$$

$$\varepsilon_\zeta = \mu_\zeta = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r-a}{r} \quad (2)$$

и предполагается воздух для окружающей среды и внутренней области. В дальнейшем рассматривается поперечно-электрическое (ТЕ) поляризованное магнитное поле (т.е. электрическое поле существует только в ζ -направлении); однако, аналогичные рассуждения могут быть проведены для поперечно-магнитного поля. На протяжении работы предполагается $\exp(-i\omega t)$ зависимость от времени. Для ТЕ-поляризованной волны только ε_ζ , μ_r и μ_θ относятся к следующему общему волновому уравнению, регулирующему поле \mathbf{E}_ζ в цилиндрических координатах оболочки

$$\frac{1}{\varepsilon_\zeta r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu_\theta} \frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon_\zeta r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial \theta} \right) + k_0^2 \mathbf{E}_\zeta = 0, \quad (3)$$

где k_0 волновой вектор света в вакууме. Если мы подставим ур. (2) для ε_ζ , μ_r и μ_θ получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\zeta}{\partial r^2} + r \mu_\theta \frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial r} + \varepsilon_\zeta \mu_\theta r^2 k_0^2 \mathbf{E}_\zeta + \frac{\mu_\theta}{\mu_r} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\zeta}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть решено разделением переменных $\mathbf{E}_\zeta = \Psi(r)\Theta(\theta)$ и введением константы l :

$$(r-a)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + (r-a) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[\left(\frac{b}{b-a}\right)^2 (r-a)^2 k_0^2 - l^2 \right] \Psi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + l^2 \Theta = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) есть дифференциальное уравнение Бесселя порядка l , а общее решение ур. (6) имеет вид $\exp(il\theta)$. Поэтому существует простое множество решений \mathbf{E}_ζ в маскирующей оболочке вида

$$F_l(k_1(r-a)) \exp(il\theta), \quad (7)$$

где $k_1 = k_0 b / (b-a)$, F_l функция Бесселя порядка l , l — целое число, как того требует вращательное граничное условие.

Рассмотрим задачу рассеяния, в которой произвольная волна падает на оболочку. Согласно строгой теории рассеяния [12], падающее поле в двумерном случае может быть разложено по координатам оболочки следующим образом:

$$\mathbf{E}_\zeta^{in} = \sum_l \alpha_l^{in} \mathbf{J}_l(k_0 r) \exp(il\theta), \quad (8)$$

где \mathbf{J}_l функция Бесселя порядка l первого рода. Рассеянное поле так же может быть разложено как

$$\mathbf{E}_\zeta^{sc} = \sum_l \alpha_l^{sc} \mathbf{H}_l(k_0 r) \exp(il\theta), \quad (9)$$

где \mathbf{H}_l функция Ханкеля порядка l первого рода.

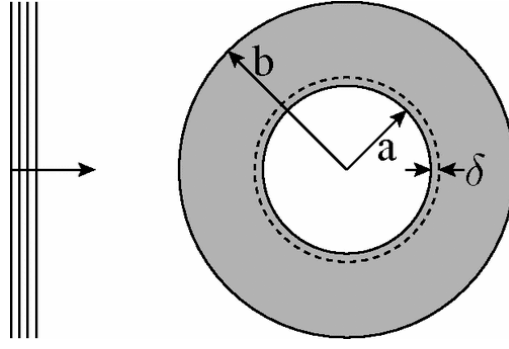


Рис. 1: Схема почти идеальной маскировочной оболочки: распределение параметров такое же, как идеальное, показанное в ур. (2) и внешняя граница зафиксирована в $r = b$. Однако реальная внутренняя граница расположена в $r = a + \delta$, где δ очень маленькое положительное число.

Отметим, что коэффициенты рассеяния не могут быть прямо получены для идеального плаща, так как $\varepsilon_\zeta \rightarrow 0$, $\mu_r \rightarrow 0$ и $\mu_\theta \rightarrow \infty$, когда $r \rightarrow a$, и функции Бесселя второго рода в ур. (7) имеют сингулярность при $r = a$. Чтобы обойти это мы вводим малое возмущение в идеальную оболочку, на такую оболочку будем ссылаться как на почти идеальную, см. Рис.1. Мы немного расширим внутреннюю границу так, что она будет находится в $r = a + \delta$, где δ очень маленькое положительное число. Тем не менее, параметры все еще вычисляются согласно формуле (2), как будто внутренняя граница не поменялась. Внешняя граница остается зафиксированной $r = b$. Когда $\delta \rightarrow 0$ наша модель будет эквивалентна идеальной оболочке. Теперь электрическое поле в каждой области задается соотношениями

$$\begin{aligned}
 (b < r) \mathbf{E}_\zeta &= \sum_l (\alpha_l^{in} \mathbf{J}_l(k_0 r) \exp(il\theta) + \alpha_l^{sc} \mathbf{H}_l(k_0 r) \exp(il\theta)) \\
 (a + \delta < r < b) \mathbf{E}_\zeta &= \sum_l (\alpha_l^1 \mathbf{J}_l(k_0(r - a)) \exp(il\theta) + \alpha_l^2 \mathbf{H}_l(k_0(r - a)) \exp(il\theta)) \\
 (r < a + \delta) \mathbf{E}_\zeta &= \sum_l \alpha_l^3 \mathbf{J}_l(k_0 r) \exp(il\theta)
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha_l^i (i = 1, 2, 3)$ коэффициенты разложения для результирующего поля внутри оболочки.

Касательные поля \mathbf{E}_ζ и \mathbf{H}_θ (которое может быть получено из \mathbf{E}_ζ) должны быть непрерывны вдоль границы $r = a + \delta$ и $r = b$ и ортогональность $\exp(il\theta)$ позволяет волнам в каждом порядке Бесселя разделяться. Таким образом, имеем следующие четыре уравнения:

$$\alpha_l^{in} \mathbf{J}_l(k_0 b) + \alpha_l^{sc} \mathbf{H}_l(k_0 b) = \alpha_l^1 \mathbf{J}_l(k_1(b - a)) + \alpha_l^2 \mathbf{H}_l(k_1(b - a)) \tag{11a}$$

$$\alpha_l^1 \mathbf{J}_l(k_1 \delta) + \alpha_l^2 \mathbf{H}_l(k_1 \delta) = \alpha_l^3 \mathbf{J}_l(k_0(a + \delta)) \tag{11b}$$

$$k_0 \alpha_l^{in} \mathbf{J}_l'(k_0 b) + \alpha_l^{sc} \mathbf{H}_l'(k_0 b) = \frac{k_1}{\mu_\theta(b)} \alpha_l^1 \mathbf{J}_l'(k_1(b - a)) + \frac{k_1}{\mu_\theta(b)} \alpha_l^2 \mathbf{H}_l'(k_1(b - a)) \tag{11c}$$

$$\frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} \alpha_l^1 \mathbf{J}_l'(k_1 \delta) + \frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} \alpha_l^2 \mathbf{H}_l'(k_1 \delta) = k_0 \alpha_l^3 \mathbf{J}_l'(k_0(a + \delta)), \tag{11d}$$

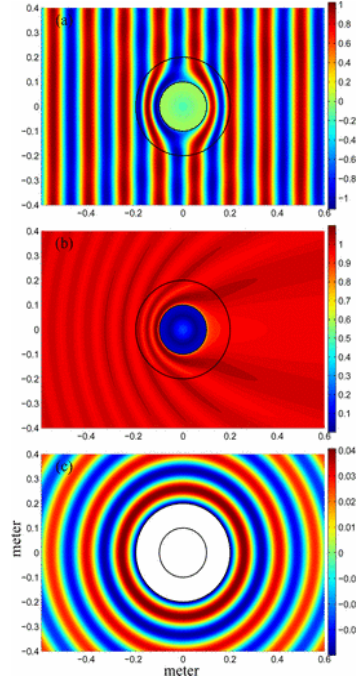


Рис. 2: (а)Снимки результирующего распределения электрического поля (b) соответствующая норм в непосредственной близости к маскируемому объекту (с)снимок соответствующего рассеянного поля вне оболочки для почти идеальной маскировки с $\delta = 10^{-5}a$, когда плоская волна падает на оболочку перпендикулярно. Черные линии обозначают оболочку, единицы измерения осей: метры

которые являются линейными. При этом каждый коэффициент разложения в каждой существенной области может быть точно решен. В свою очередь, в каждой области мы можем получить поля.

Прямо из этой системы линейных уравнений можно показать, что когда $\delta \rightarrow 0$, $\alpha_l^{sc} = \alpha_l^2 \rightarrow 0$, $\alpha_l^1 = \alpha_l^{in}$ и $\alpha_l^3 \rightarrow 0$ для любого α_l^{in} , т.е. идеальная оболочка есть совершенная маскирующая оболочка. Во первых, можно предположить, что $|\alpha_l^i (i = sc, 1, 2, 3)|$ должны быть конечны. В противном случае рассеянное поле будет бесконечным, если входящее поле будет иметь компоненту порядка l . Во вторых, когда $\delta \rightarrow 0$, $k_1(b - a) = k_0b$ и $k_1 = k_0\mu_\theta(b)$ ур. (11a) и (11c) становятся $(\alpha_l^{in} - \alpha_l^1)\mathbf{J}(k_0b) + (\alpha_l^{sc} - \alpha_l^2)\mathbf{H}_l(k_0b) = 0$ и $(\alpha_l^{in} - \alpha_l^1)\mathbf{J}'(k_0b) + (\alpha_l^{sc} - \alpha_l^2)\mathbf{H}'_l(k_0b) = 0$ соответственно. Так как b может быть произвольным и функции Бесселя не всегда равны нулю должно выполняться $\alpha_l^{in} = \alpha_l^1$ и $\alpha_l^{sc} = \alpha_l^2$. В третьих из ур. (11b) можно получить следующее неравенство:

$$|\alpha_l^2 \mathbf{H}(k_1\delta)| \leq |\alpha_l^3 \mathbf{J}_l(k_0(a + \delta))| + |\alpha_l^1 \mathbf{J}_l(k_1\delta)|. \quad (12)$$

Когда $\delta \rightarrow 0$ правая часть неравенства приближается к конечному числу, но $|\mathbf{H}(k_1\delta)|$ приближается к бесконечности. То есть $|\alpha_l^2|$ должно стремиться к нулю. Наконец, из уравнения (11b) можно получить $|\alpha_l^2 \mathbf{H}'_l(k_1\delta)| \leq \left| \alpha_l^3 \frac{k_0}{k_1} \mathbf{J}'_l(k_0(a + \delta)) \right| + |\alpha_l^1 \mathbf{J}'_l(k_1\delta)|$. В то время как из ур. (11d) имеем

$$\left| k_0 \alpha_l^3 \mathbf{J}'_l(k_0(a + \delta)) \right| \leq \left| \frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} \alpha_l^1 \mathbf{J}'_l(k_1\delta) \right| + \left| \frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} \alpha_l^2 \mathbf{H}'_l(k_1\delta) \right| \quad (13)$$

Так как $\mu_\theta(a + \delta) \rightarrow \infty$ и правая часть неравенства стремится к нулю, когда $\delta \rightarrow 0$, получаем $|\alpha_l^3| \rightarrow 0$. Это рассуждение показывает, что рассеянное поле и поле внутри оболочки равны нулю, когда $\delta = 0$, то есть идеальная оболочка есть совершенная маскирующая оболочка.

Хотя мы только что подтвердили, что идеальная оболочка может осуществлять совершенную маскировку, дальнейшее изучение указанным выше аналитическим методом почти идеальной оболочки показывает, насколько чувствителен параметр δ к производимости оболочки. Как пример мы используем те же параметры в [6], в которой внутренний радиус $a = 0.1$, внешний радиус оболочки $b = 0.2m$ и частота падающей плоской волны 2. Аналогично, мы также рассматриваем плоскую падающую волну, а коэффициенты разложения в ур. (8) равны

$$\alpha_l^{in} = i^l A \exp(-ik_0 r_1 \cos(\varphi + \theta_1) - il\varphi), \quad (14)$$

где $(r_1, \theta_1, 0)$ координаты точки опорной фазы, A — амплитуда плоской волны и φ угол падения [13]. Здесь точка опорной фазы установлена в $r_1 = 4a$ и $\theta_1 = \pi$, амплитуда $A = 1$ и угол падения $\varphi = 0$ (то есть плоская волна распространяется слева на право). Мы использовали 31 член Бесселя ($-15 \leq l \leq 15$) чтобы посчитать рассеянное поле для почти идеальной оболочки с $\delta = 10^{-5}a$. Количество взятых членов разложения достаточно для сходимости вычисленных полей.

Список литературы

- [1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 312, 1780 (2006).
- [2] U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006).
- [3] A. Alu and N. Engheta, Phys. Rev. E 72, 016623 (2005).
- [4] D. A. B. Miller, Opt. Express 14, 12457 (2006).
- [5] U. Leonhardt, New J. Phys. 8, 118 (2006).
- [6] S. A. Cummer, B. I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, and J. B. Pendry, Phys. Rev. E 74, 036621 (2006).
- [7] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, Science 314, 977 (2006).
- [8] G. W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, New J. Phys. 8, 248 (2006).
- [9] F. Zolla, S. Guenneau, A. Nicolet, and J. B. Pendry, Opt. Lett. 32, 1069 (2007).
- [10] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, Nat. Photon. 1, 224 (2007).
- [11] H. Chen and C. T. Chan, Appl. Phys. Lett. 90, 241105 (2007).
- [12] H. C. van de Hulst, Light Scattering by Small Particles (Dover, New York, 1981).
- [13] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, J. Opt. Soc. Am. A 11, 2526 (1994).