Электромагнитный анализ цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения

Ander Nicolet, Frederic Zolla, Sebastien Guenneau

Аннотация

Мы продолжим конструкции радиальных симметричных маскирующих оболочек при помощи трансформационной оптики, как предложено Пендри и др. чтобы скрыть цилиндр произвольного поперечного сечения. Справедливость нашего подхода, основанного на методе Фурье, подтверждается как аналитическими, так и численными результатами для оболочки, представляющую собой невыпуклое поперечное сечение произвольной толщины. В первом случае, мы можем вычислить функцию Грина линейного источника в преобразованных координатах. Во втором случае, мы реализуем модель конечных элементов полной волны для цилиндрической антенны, излучающей p-поляризованное электрическое поле при наличии F-образного объекта с потерями, окруженного оболочкой.

Метаматериалы, известные своими применениями для субволновых визуализаций [?]-[?], открыли новый путь в электромагнитной маскировке либо их неодронодными анизотропными эффективными материальными параметрами (трансформационная оптика [1, ?]), либо материалами с низким [?] или отрицательным индексом преломления [?]. Интересно, что невидимость сохраняется в случае интенсивного ближнего поля [?], когда нарушается картинка лучевой оптики. Тем не менее, первая эксперементальная реализация, главным образом достигнутая в микроволновом режиме [?], предпологает, что маскировка будет ограничена очень узким диапазоном частот. В оптическом спектре, она так же будет необходимо диссипативна и дисперсионна.

В настоящей работе мы обсуждаем построение цилиндрической оболочки с произвольным поперечным сечением, описываемым двумя функциями, $R_1(\theta)$ и $R_2(\theta)$, задающими зависящее от угла расстояние от начала координат. Эти функции отвечают, соответсвенно, внутренней и внешней границе оболочки. Мы только будем предпологать, что эти две границы могут быть представлены диффиренцируемыми функциями, описываемыми, например, конечным разложением в ряд Фурье. Таким образом, наш подход может быть применен не только для эллиптических оболочек [?, ?], но и для оболочек с гладкими невыпуклыми границами (но не квадратной формы [?]).

Чтобы продемонстировать нашу методологию, рассмотрим оболочку, не обладающую ни вращательной, ни трансляционной симметрией в поперечной плоскости. Сначала мы ищучим параметры оболочки на ее неотрожающей внешней границе (см. рис. 1). Затем вычислим полноволновую картинку (при помощи конечных элементов) для объекта с потерями с острыми клиньями, окруженного оболочкой, при наличии близко расположенной антенны (см. рис. 2 и 3). Наконец, мы сравним эти численные результаты с анатилической моделью, вычислив функцию Грина p-поляризованного линейного источника в соответствующей преобразованной метрике (см. рис. 4). Это подтверждает, что маскировка осуществляется не только для далекого поля, а также для близкого, где лучевая модель поля распадается.

Геометрическое преобразование, которое отражает поле во всей области $\rho \leq R_2(\theta)$ в кольцевую область $R_1(\theta) \leq \rho' le R_2(\theta)$ может быть записано как

$$\begin{cases} \rho'(\rho,\theta) = R_1(\theta) + \rho\frac{R_2(\theta)-R_1(\theta)}{R_2(\theta)} \\ \theta' = \theta, \qquad 0 < \theta \leq 2\pi \\ z' = z, \qquad z \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1}$$

где $0 \leq \rho R_2(\theta)$. Отметим, что преобразование отражает поле для $\rho > R_2(\theta)$ на себя тождественным преобразованием.

Эта замена координат, характеризуется преобразованием дифиренциалов при помощи якобиана:

$$\mathbf{J}(\rho', \theta') = \frac{\partial(\rho(\rho', \theta), \theta, z)}{\partial(\rho', \theta', z')}. \tag{2}$$

С электромагнитной точки зрения, это изменение величин координат отображением однородной изотропной среды с скалярными диэлектрической и магнитной проницаемостью ϵ и μ на материальные, описываемые анизотропной неодронодной матрицами диэлетрической и магитной проницаемости задается [**?**, **?**]

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \epsilon \mathbf{T}^{-1}, \qquad \underline{\underline{\mu}}' = \mu \mathbf{T}^{-1}, \tag{3}$$

здесь $\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} / \det(\mathbf{J})$ — представление метрического тензора в так называемых растянутых радиальных координатах.

После некоторых элементарных алгебраических преобразований находим, что

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c_{12}^2 + f_\rho^2}{c_{11} f_\rho \rho'} & -\frac{c_{12}}{f_\rho} & 0 \\ -\frac{c_{12}}{f_\rho} & \frac{c_{11}\rho'}{f_\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{11} f_\rho}{\rho'} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $c_{11}(\theta') = R_2(\theta')/[R_2(\theta') - R_1(\theta')]$ и

$$\begin{aligned} c_{12}(\rho', \theta) = {} & [\rho' - R_2(\theta')] R_2(\theta') \frac{dR_1(\theta')}{d\theta'} \\ & - \frac{[\rho' - R_1(\theta)] R_1(\theta')}{[R_2(\theta) - R_1(\theta)]^2} \frac{dR_2(\theta')}{d\theta'}, \end{aligned} \tag{5}$$

для $R_1(\theta') \leq R_2(\theta')$ с

$$f_\rho(\rho', \theta') = [\rho' - R_1(\theta')] \frac{R_2(\theta')}{R_2(\theta') - R_1(\theta')}. \tag{6}$$

В другой области $\mathbf{T}^{-1}$ переходит в тождественную матрицу $[c_{11} = 1, c_{12} = 0$ и f'_ρ для $\rho' > R_2(\theta')]$.

Сейчас мы бы хотели посмотреть на электромагнитное поле, излучаемое проводом антненны-источника с центром в точке $\mathbf{r}_s$, при наличии конечно проводящего объекта в форме буквы $\ddot{\mathrm{F}}$; когда он окружен оболочкой произвольной формы. Благодаря цилиндрической геометрии, задача разделяется на две поляризации. В p поляризации мы находим, что

$$\nabla(\underline{\underline{\mu}}_T'^{-1} \nabla E_z) + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \epsilon'_{zz} E_z = -i\omega I_s \mu_0 \delta_{\mathbf{r}_s}, \tag{7}$$

где $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$, c — скорость света в вакууме, $\underline{\underline{\mu}}_T'^{-1}$ выступает в качестве верхнего блока диагольной части $\underline{\underline{\mu}}'^{-1}$ [см. ур.(3) и (4)], и $\epsilon'_{zz} = \epsilon(c_{11} f_\rho / \rho'$. Также, E_z и I_s обозначают соответсвенно только ненулевые компоненты продольного электрического поля $\mathbf{E}_l = E_z(\rho, \theta)\mathbf{e}_z$ и заданный элекрический ток $\mathbf{J}_s = I_s \delta_\mathbf{s} \mathbf{e}_z$ на проводе антенны.

Слабая форма этого уравнения была реализована в бесплатном пакете конечных элементов GetDP [?], где были исользованы круглые прекрасно подобранные слои для моделирования бесконечной внешней среды, окружающей оболочку. Сначала мы рассмотрели цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения, параметризованную как $\rho(\theta) = ab/\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}$. Мы проверили, что она производит в точность такие же траектории волн и профиль поля, как в [?], где схожие результаты были получены при помощи искривления пространства круглой цилиндрической оболочки. Кроме того, мы восстановили шаблон волны из [?], где рассматривалась эксцентричная эллиптическая кольцевая оболочка.

Чтобы получить общие формы может быть использовано конечное разложение в ряд Фурье:

$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)]. \tag{8}$$

Для иллюстрации (смотри рис. 2), рассмотрим оболочку с внутренней и внешней границей выражаемой в виде

$$R_1(\theta) = 1 + 0.1\sin(\theta) + 0.15\cos(2\theta) + 0.2\sin(3\theta) + 0.1\cos(4\theta)$$
$$R_2(\theta) = 2 - 0.1\cos(2\theta) - 0.15\cos(3\theta) + 0.3\sin(3\theta) + 0.2\cos(4\theta) \tag{9}$$

Интересно исследовать параметры оболочки на ее внутенней неотражающей границе $R_2(\theta)$. Это может быть сделано на основе анализа элементов обратного метрического тензора $\mathbf{T}$ в полярных координатах. Для начала отметим в рис. 1, что все недиагональные члены $(T^{-1})_{r\theta} = (T^{-1})_{\theta r}$ как правило, отличны от нуля, в отличие от случая круглой оболочки, в котором $\mathbf{T}^{-1}$ — диагональный. Здесь $\mathbf{T}^{-1}$ является диагональным только для трех значений угла θ, отвечающего шести точкам внешней границы, в которых преобразованная система координат локально ортогональна. Это демонстрирует, что предыдущий критерий для неотражающего интерфейса $R_2(\theta)$, а именно, $T^{-1}_{\theta\theta} = T^{-1}_{zz} = 1/T^{-1}_{rr}, T^{-1}_{r\theta} = T^{-1}_{\theta r} = 0$ (для круглого случая [1]) и $T^{-1}_{zz} = 1/T^{-1}_{rr}$ (для эксцентричного эллиптического случая [?]), могут быть дальше ослаблены. В целом, мы видим, что $-1 < (T^{-1})_{r\theta} < 1$,

Список литературы

[1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 312, 1780 (2006).