Идеальная цилиндрическая оболочка: совершенная, но чувствительная к малым возмущениям

Ideal Cylindrical Cloak: Perfect but Sensitive to Tiny Perturbations

Zhichao Ruan, Min Yan, Curtis W. Neff, and Min Qiu
Laboratory of Optics, Photonics and Quantum Electronics,
Department of Microelectronics and Applied Physics,
Royal Institute of Technology (KTH), Electrum 229, 16440 Kista, Sweden
Joint Research Center of Photonics of the
Royal Institute of Technology (Sweden) and Zhejiang University,
Zhejiang University, Yu-Quan, 310027 Hangzhou, People's Republic of China
e-mail: min@kth.se

Аннотация

В последних работах обсуждался захватывающий вопрос экзотичесих материалов, невидимых для электромагнитных волн (EM) [1]-[11]. Основываясь на преобразовании координат в уравнениях Максвелла Пендри и другие впервые предложили мантию невидивку, которая может защищать объект внутри нее от обнаружения [1]: когда электромагнитные волны проходят сквозь мантию невидимку, она отражает их, направляя вокруг объекта, затем возвращает в первоначальное направление, не возмущая внешнее поле. Также недавно сообщалось о численных методах, примененных для решения задачи EM, включающаю плащ невидимку [6, 9], и экспериментальных результатов маскировки с использованием метаматериалов с упрощенными параметрами [7]. Тем не менее, идеальный плащ- невидимка не была подтверждена как совершенная оболочка, в связи с экстримальными физическими параметрами (ноль или бесконечность) в идеальной оболочке при приближении к внутренней границе.

В этой работе мы рассмотрим рассеяние идеального плаща-невидимки. Мы сфокусируем наш анализ на двумерной циллиндрической оболочке, поскольку волновое уравнение, по сравнению с трехмерным случаем может быть упрощено, так же двумерную оболочку более проще изготовить [7]. Мы воспользуемся приемуществом цилиндрической геометрии структуры и используем метод расширения цилиндрической волны для изучения устройства полуаналитически. Чтобы избежать экстремальных значений (нуля или бесконечности), мы введем небольшое возмущение в идеальную оболочку и позволим ему достигнуть нуля, чтобы изучить задачу рассеяния для идеальной оболочки. Такой асимптотический анализ может показать не только, является ли идеально невидимой или нет, но и предоставляет подсказки, насколько чувствительно такое устройство к конечным возмущениям. Анализ чувствительности плаща-невидимки прямо определяет возможно его применения. Наши исследования показывают, что цилиндическая оболочка очень чувствительна к малым возмущениям параметров.

Сначала посмотрим на волновое уравнение внутри цилиндрической оболочки. Согласно [1] простое преобразование

$$r' = \frac{b-a}{b}r + a, \quad \theta' = \theta, \quad \zeta' = \zeta \tag{1}$$

может сжать пространство из цилиндрической области $0 < r < b$ в кольцо $0 < r' < b$, где a и b внутренний и внешний радиусы оболочки соответственно, и $r, \theta, \zeta(r', \theta', \zeta')$ радиальная, угловая и вертикальная координаты в оригинальной(преобразованной) системе соответственно. Следуя подходу работы [1] компоненты тензора диалектрическая и магнитая проницаемости могут быть записаны как

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-a}{r} \quad \varepsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r-a},$$

$$\varepsilon_\zeta = \mu_\zeta = (\frac{b}{b-a})^2 \frac{r-a}{r} \tag{2}$$

и предполагается воздух для окружающей среды и внутренней области. В дальнейшем рассматривается поперечно-электрическое(TE) полязированное магнитное поле (т.е. электрическое поле существует только в ζ-направлении); однако, аналогичные рассуждения могут быть проведены для поперечно-магнитного поля. На протяжении работы предполагается $\exp(-iwt)$ зависимость от времени. Для TE-поляризованной волны только ε_ζ, μ_r и μ_θ относятся к следущему общему волновому уравнению, регулирующему поле $\mathbf{E}_\zeta$ в цилиндрических координатах оболочки

$$\frac{1}{\varepsilon_\zeta r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{r}{\mu_\theta}\frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial r}) + \frac{1}{\varepsilon_\zeta r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial \theta}) + k_0^2 \mathbf{E}_\zeta = 0, \tag{3}$$

где k_0 волновой вектор света в вакууме. Если мы подставим ур. (2) для ε_ζ, μ_r и μ_θ получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\zeta}{\partial r^2} + r\mu_\theta \frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial r} + \varepsilon_\zeta \mu_\theta r^2 k_0^2 \mathbf{E}_\zeta + \frac{\mu_\theta}{\mu_r}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\zeta}{\partial \theta^2} = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) может быть решено разделением переменных $\mathbf{E}_\zeta = \mathbf{\Psi}(r)\mathbf{\Theta}(\theta)$ и введением константы l:

$$(r-a)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial r^2} + (r-a)\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial r} + \left[(\frac{b}{b-a})^2 (r-a)^2 k_0^2 - l^2\right] \mathbf{\Psi} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Theta}}{\partial \theta^2} + l^2 \mathbf{\Theta} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) есть диффиренциальное уравнение Бесселя порядка l, а общее решение ур. (6) имеет вид $\exp(il\theta)$. Поэтому существует простое множество решений $\mathbf{E}_\zeta$ в маскирующей оболочке вида

$$F_l(k_1(r-a))\exp(il\theta), \tag{7}$$

где $k_1 = k_0 b/(b-a), F_l$ функция Бесселя порядка l, l — целое число, как того требует вращательное граничное условие.

Рассмотрим задачу рассеяния, в которой произвольная волна падает на оболочку. Согласно строгой теории рассеяния [12], падающее поле в двумерном случае может быть разложено по координатам оболочки следущим образом:

$$\mathbf{E}_\zeta^{in} = \sum_l \alpha_l^{in} \mathbf{J}_l(k_0 r)\exp(il\theta), \tag{8}$$

где $\mathbf{J}_l$ функция Бесселя порядка l первого рода. Рассеянное поле так же может быть разложено как

$$\mathbf{E}_\zeta^{sc} = \sum_l \alpha_l^{sc} \mathbf{H}_l(k_0 r)\exp(il\theta), \tag{9}$$

где $\mathbf{H}_l$ функция Ханкеля порядка l первого рода.

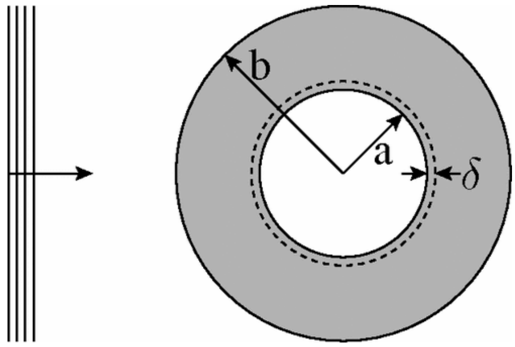

Рис. 1: Схема почти идеальной маскировочной оболочки: распределение параметров такое же, как идеальное, показанное в ур. (2) и внешняя граница зафиксирована в $r = b$. Однако реальная внутренняя граница расположена в $r = a + \delta$, где δ очень маленькое положительное число.

Отметим, что коэффициенты рассеяния не могут быть прямо получены для идеального плаща, так как $\varepsilon_\zeta \to 0, \mu_r \to 0$ и $\mu_\theta \to \infty$, когда $r \to a$, и функции Бесселя второго рода в ур. (7) имеют сингулярность при $r = a$. Чтобы обойти это мы вводим малое возмущение в идеальную оболочку, на такую оболочку будем ссылаться как на почти идеальную, см. Рис.1. Мы немного расширим внутреннюю границу так, что она будет находится в $r = a + \delta$, где δ очень маленькое положительное число. Тем не менее, параметры все еще вычисляются согласно формуле (2), как будто внутренняя граница не поменялась. Внешняя граница остается зафиксированной $r = b$. Когда $\delta \to 0$ наша модель будет эквивалентна идеальной оболочке. Теперь электрическое поле в каждой области задается соотношениями

$$
\begin{aligned}
(b < r)\mathbf{E}_\zeta &= \sum_l (\alpha_l^{in}\mathbf{J}_l(k_0 r)\exp(il\theta) + \alpha_l^{sc}\mathbf{H}_l(k_0 r)\exp(il\theta)) \\
(a + \delta < r < b)\mathbf{E}_\zeta &= \sum_l (\alpha_l^1\mathbf{J}_l(k_0(r-a))\exp(il\theta) + \alpha_l^2\mathbf{H}_l(k_0(r-a))\exp(il\theta)) \\
(r < a + \delta)\mathbf{E}_\zeta &= \sum_l \alpha_l^3\mathbf{J}_l(k_0 r)\exp(il\theta)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\alpha_l^i (i = 1, 2, 3)$ коэффциенты разложения для результирующего поля внутри оболочки.

Касательные поля $\mathbf{E}_\zeta$ и $\mathbf{H}_\theta$(которое может быть получено из $\mathbf{E}_\zeta$) должны быть непрерывны вдоль границы $r = a + \delta$ и $r = b$ и ортогональность $\exp(il\theta)$ позволяет волнам в каждом порядке Бесселя разделяться. Таким образом, имеем следущие четыре уравнения:

Список литературы

[1] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, Science 312, 1780 (2006).

[2] U. Leonhardt, Science 312, 1777 (2006).

[3] A. Alu and N. Engheta, Phys. Rev. E 72, 016623 (2005).

[4] D. A. B. Miller, Opt. Express 14, 12457 (2006).

[5] U. Leonhardt, New J. Phys. 8, 118 (2006).

[6] S. A. Cummer, B. I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, and J. B. Pendry, Phys. Rev. E 74, 036621 (2006).

[7] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, Science 314, 977 (2006).

[8] G. W. Milton, M. Briane, and J. R. Willis, New J. Phys. 8, 248 (2006).

[9] F. Zolla, S. Guenneau, A. Nicolet, and J. B. Pendry, Opt. Lett. 32, 1069 (2007).

[10] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, Nat. Photon. 1, 224 (2007).

[11] H. Chen and C. T. Chan, Appl. Phys. Lett. 90, 241105 (2007).

[12] H. C. van de Hulst, Light Scattering by Small Particles(Dover, New York, 1981).

[13] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, J. Opt. Soc. Am. A 11, 2526 (1994).