

Лабораторная работа 1.2.5 Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Михаил Колтаков

5 октября 2020 г.

Цель работы

Исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить её со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование

Гироскоп в карданном подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы и диаметра, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Теория к работе

Уравнения движения твёрдого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) – уравнение моментов. Если сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент сил \vec{M} – от скорости поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо. В нашем случае так и происходит, поэтому для описания движения гироскопа потребуется только уравнение (2). Момент импульса вращающегося твёрдого тела можно выразить по формуле

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z,$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции, а $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Если произведение момента по какой-то оси на компоненту угловой скорости по этой же оси много больше, чем другие такие произведения, то такое вращающееся тело называется гироскопом.

Приращение момента импульса можно выразить по формуле

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt$$

Если момент внешних сил прикладывается в течение короткого промежутка времени, то из интеграла следует, что $|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|$. С этим связана устойчивость гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Если к оси гироскопа прикладывать небольшой момент силы, то он будет вращаться с угловой скоростью Ω , и при этом $L_{\Omega} \ll L_{\omega_0}$, где ω_0 – угловая скорость вращения гироскопа в основном направлении.

Из этого можно вывести формулу

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Из этого уравнения можно вывести уравнение для угловой скорости прецессии Ω с учётом массы подвешенных грузов и расстояния до них.

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}$$

m – масса груза, l – расстояние от центра карданного подвеса до точки подвеса груза, I_z – момент инерции гироскопа относительно основной оси вращения, ω_0 – угловая скорость вращения гироскопа относительно основной оси вращения (скорость вращения вала мотора)

Момент инерции I_z можно рассчитать с помощью крутильного маятника, подвесив к нему сначала цилиндр известной массы и диаметра, т.е. момент которого мы знаем, а потом гироскоп. Тогда

$$I_z = I_{\text{ц}} \frac{T_z^2}{T_{\text{ц}}^2}$$

$T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра, а T_z – период крутильных колебаний гироскопа

Ход работы

Проведём измерения для грузов 5 различных масс, проведя по 5 измерений для каждой массы и занесём результаты измерений в таблицу.

m , г	T , с	Кол-во оборотов	$\Omega \cdot 10^2$, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\bar{\Omega} \cdot 10^2$, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Верт. \angle , рад	$\Omega_{\mu} \cdot 10^3$, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\bar{\Omega}_{\mu} \cdot 10^3$, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$
142	335	4	7,6	7,6	0,46	1,4	1,4
	329	4	7,4		0,44	1,4	
	333	4	7,6		0,46	1,4	
	331	4	7,5		0,42	1,3	
	322	4	7,8		0,43	1,3	
176	272	4	9,3	9,3	0,45	1,6	1,6
	269	4	9,2		0,45	1,7	
	271	4	9,3		0,45	1,6	
	274	4	9,4		0,46	1,6	
	272	4	9,3		0,46	1,7	
220	273	5	11,6	11,6	0,57	2,0	2,0
	271	5	11,6		0,58	2,1	
	269	5	11,5		0,58	2,0	
	275	5	11,7		0,57	2,0	
	270	5	11,5		0,57	2,0	
273	222	5	14,4	14,3	0,57	2,5	2,6
	219	5	14,3		0,58	2,6	
	220	5	14,3		0,58	2,6	
	217	5	14,2		0,57	2,5	
	224	5	14,4		0,58	2,6	
342	213	6	17,7	17,7	0,70	3,3	3,3
	210	6	17,5		0,68	3,2	
	214	6	17,8		0,70	3,3	
	212	6	17,6		0,69	3,3	
	216	6	17,9		0,70	3,3	

Для каждого грузика можно рассчитать момент, который он создаёт по формуле $\vec{M} = m\vec{l}\vec{g}$

Оценим погрешность измерения Ω : Массы грузов и длина рычага измерены очень точно, поэтому их погрешностью можно пренебречь, значит, моменты сил измерены без погрешностей. Погрешность измерения времени с помощью секундомера - 0,2с. Можем рассчитать угловую скорость вращения вала мотора в гироскопе по формуле

$$\omega_0 = \frac{mgl}{I_z \Omega} \quad \omega_0 \sim \frac{M}{\Omega}$$

Выходит, искомую угловую скорость можно рассчитать как коэффициент угла наклона графика $M(\Omega)$ (график в конце работы, кресты погрешностей настолько малы, что ложатся внутри точек)

Рассчитаем момент инерции цилиндра из его массы $m_{\text{ц}} = 1617,8 \pm 0,2$ г и диаметра $d_{\text{ц}} = 78,1 \pm 0,1$ мм.

$$I_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ц}} d_{\text{ц}}^2}{8} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешности измерения $T_{\text{ц}}$ и $T_0 = 0,2$ с

$t_{\text{ц}}, \text{ с}$	Кол-во периодов	$t_0, \text{ с}$	Кол-во периодов
46,5	10	17,9	5
44,7	10	17,5	5
44,6	10	17,6	5
45,1	10	18,2	5
45,2	10	17,5	5

Среднее значение $T_{\text{ц}} = 4,5$ с, а среднее значение $T_0 = 3,5$ с Тогда можно определить

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = \frac{3,5^2}{4,5^2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,73 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность при измерении I_0 равна $0,02 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Относительная погрешность при измерении угловой скорости прецессии Ω имеет порядок 10^{-3} , поэтому ей можно пренебречь. Рассчитаем частоту вращения гироскопа по формуле, указанной выше

Масса груза, г	142	176	220	273	342
$\omega_0, \text{ рад/с}$	3065	3098	3086	3102	3123

Усреднив, получим $\overline{\omega_0} = 3095 \pm 28 \text{ рад/с}$, тогда частота будет равна $\nu_0 = 492,6 \pm 4,5 \text{ Гц}$.

Оценим действие силы трения по скорости опускания рычага

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} l = \frac{m \Omega_{\mu} l^2}{t}$$

$$L_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} t$$

При вычислении точных значений моментов силы трения получаются величины порядка 10^{-8} , а при вычислении моментов импульса силы трения получаются величины порядка 10^{-6} . И то, и другое значения много меньше других, поэтому ими можно пренебречь в расчётах.

Другим методом измерения скорости вращения вала мотора является получение стабильного эллипса на экране осцилографа, подключив его к второй обмотке статора гироскопа и к генератору синусоидальных сигналов. Этим методом мы получаем значение $\nu_{\text{осц}} = 490,3 \text{ Гц}$, погрешностью измерения которого можно пренебречь. Это значение лежит в пределах 0,5% от определённого с помощью подвешивания грузов.

Вывод

При измерении угловой скорости двумя разными методами результаты совпали с точностью 0,5%. Теория согласуется с практикой, небольшие расхождения можно объяснить трением в осях карданного подвеса, хотя и его момент много меньше моментов других сил. Гипотеза о том, что $L_{\Omega} \ll L_{\omega_0}$ подтвердилась. В итоге угловую скорость мотора гироскопа можно считать равной $3095 \pm 28 \text{ рад/с}$.

