

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

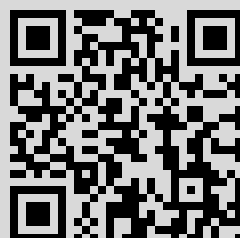
А. А. Самарский, И. М. Соболев, Примеры численного расчета температурных волн, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963, том 3, номер 4, 702–719

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.54.14.88

11 июня 2015 г., 13:37:43



УДК 518:517.944/.947

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН

А. А. САМАРСКИЙ, И. М. СОБОЛЬ

(Москва)

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена численному решению квазилинейного уравнения теплопроводности

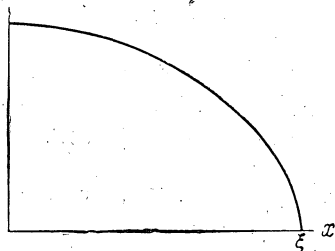
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(K_{\alpha}(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad (1.1)$$

для случаев $p = 1, 2, 3$. Как правило, всюду предполагается, что

$$K_{\alpha}(u) = \kappa_{\alpha} u^{\sigma_{\alpha}},$$

где $\sigma_{\alpha} \geq 1, \kappa_{\alpha} > 0$. Хотя уравнение (1.1) встречается в различных областях математической физики, мы, для определенности, будем называть функцию $u = u(t, x_1, \dots, x_p)$ температурой.

В [1], [2] показано, что уравнение (1.1) в случае $p = 1$ имеет решения, производные которых в точках, где $u(t, x)$ обращается в нуль, разрывны, а поток $K(u) \partial u / \partial x$ непрерывен, т. е. существует фронт температуры $u = 0$ (фиг. 1), который распространяется с конечной скоростью (см. [3]). Классического решения уравнение в этом случае не имеет. Существование обобщенного решения задачи Коши и краевых задач доказано в [4]. В [5], [6] доказана сходимость одной явной разностной схемы для уравнения вида



Фиг. 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

в классе обобщенных решений (эти результаты, вероятно, могут быть распространены и на случай неявных схем). В [7] обобщенное решение уравнения вида (1.2) сосчитано методом интегральных соотношений А. А. Дородницына.

Для расчета таких обобщенных решений (которые мы будем ниже называть температурными волнами или просто решениями) мы используем однородные разностные схемы сквозного счета, не предусматривающие явного выделения точек слабого разрыва. Теория таких схем разработана

в статьях [8], [9], [10], в последней из которых приведена также библиография. Однако все доказательства сходимости предполагают, что $K_\alpha(u) \geq c > 0$, и, несмотря на большую общность этих теорем (допускающих даже разрывные функции $K_\alpha = K_\alpha(t, x, u)$), к случаю, когда $K_\alpha(u)$ обращается в нуль, они неприменимы.

Цель настоящей статьи — показать, что эти схемы пригодны и для расчета температурных волн. Такие схемы позволяют вести счет крупным шагом по времени, хорошо передают скорость распространения фронта, а при достаточно подробной сетке — и сам профиль фронта.

В случае нескольких пространственных переменных ($p > 1$) мы пользуемся локально-одномерным методом переменных направлений, изложенным в [11], [12]. Там имеется также библиография работ по этому вопросу (среди которых следует отметить работу [13]). Дадим краткую характеристику метода [11], [12] применительно к уравнению (1.1).

Шаг по времени $t^j \leq t \leq t^{j+1}$ разбивается на p слоев одинаковой толщины («дробных шагов»)

$$t^{j+(\alpha-1)/p} \leq t \leq t^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

В слое номер α решается одномерное уравнение

$$\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(K_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right). \quad (1.3)$$

При этом все другие координаты x_β , отличные от x_α , играют роль параметров. На этом этапе в качестве краевых условий используются значения краевых функций в точках пересечения прямых, параллельных оси ox_α , с границей области интегрирования, а в качестве начальных значений берутся значения, полученные при расчете предыдущего слоя. Фактически для решения всех уравнений (1.3) используется одна и та же одномерная программа (ОП), в которой уравнение (1.3) заменено неявной однородной разностной схемой (§ 2, п. 2).

По нашему мнению, в настоящее время нет практически более удобного метода для решения многомерных квазилинейных параболических уравнений. Этот метод применим к произвольным областям (а не только к параллелепипедам) и сохраняет порядок точности на неравномерных сетках [12]. Он годится для квазилинейных параболических уравнений общего вида даже при наличии в коэффициентах разрывов (I рода). При такой широкой области применения метод переменных направлений обладает еще целым рядом практических достоинств: простота программы; пониженные (по сравнению с большинством других схем) требования к объему оперативной памяти; устойчивость счета при очень крупных шагах по времени, позволяющая, в частности, быстро решать сложные задачи, где не требуется большая точность.

Вычисления по любой разностной схеме вместо точного профиля волны дают какой-то свой, разностный профиль (тем более точный, чем мельче сетка). Чтобы исследовать строение этого профиля при очень крупной сетке и оценить эффективную ширину фронта, в § 5 для случая $p = 1$ построена разностная бегущая волна — аналог известного решения вида $u = f(ct - x)$, называемого бегущей волной (постоянная c — скорость

волны). Для разностных схем сквозного счета газодинамики с вязкостью разностная бегущая волна была построена в [14].

Необходимо подчеркнуть, что мы нигде не стремились выбирать наиболее благоприятные для данной задачи условия счета. Наоборот, в некоторых случаях выбирались заведомо плохие условия, чтобы расхождение было более заметным. Сетки по пространству в некоторых примерах грубые, в других — достаточно подробные. Шаг по времени всюду крупный.

Авторы выражают свою глубокую благодарность А. А. Думовой за составление программ и проведение расчетов.

§ 2. Одномерные задачи

1. О скорости распространения температурного фронта

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\sigma}{\partial x} \left[K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (2.1)$$

где $K(0) = \varphi(0) = 0$; $K(u) > 0$, $\varphi'(u) > 0$ при $u > 0$;

$$\lim_{u \rightarrow 0} [K(u)/\varphi'(u)] = 0.$$

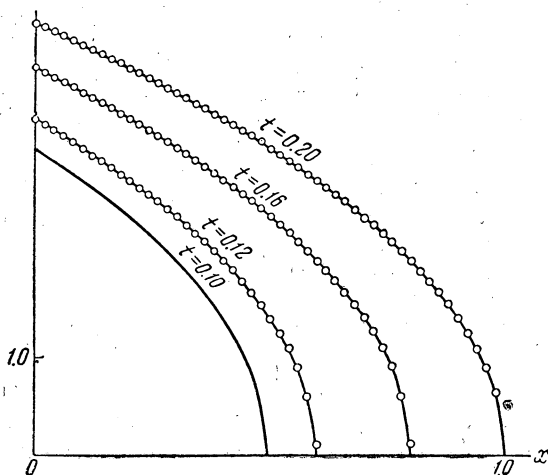
Распространение фронта тепла в этом случае происходит с конечной скоростью. Обозначим положение фронта в момент t через $\xi(t)$ (фиг. 1).

Дифференцируя тождество $\varphi(u(t, \xi(t))) \equiv 0$ и учитывая условие непрерывности потока на фронте

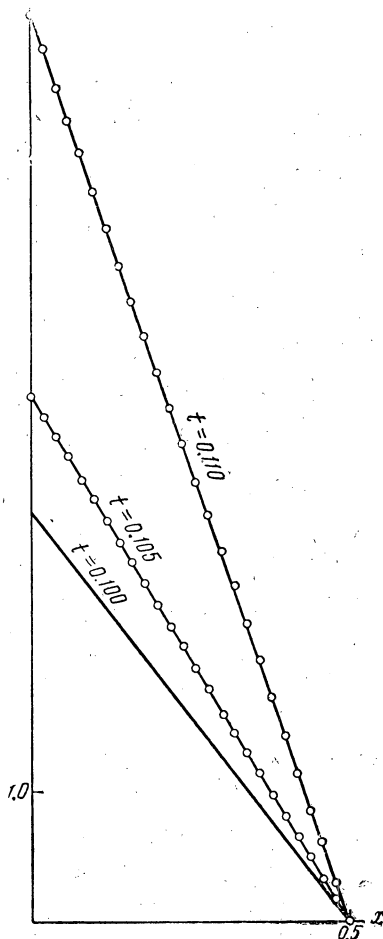
$$[K(u) \partial u / \partial x]_{x=\xi(t)} \equiv 0,$$

можно вывести следующее выражение для скорости фронта:

$$\frac{d\xi}{dt} = - \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{K(u)}{\varphi(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (2.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Ниже, в примере 1, начальный профиль при $t_0 = 0.1$

$$u = \begin{cases} \sqrt{10(1-2x)}, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 \leq x < 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\xi(t_0) = 0.5$ и по формуле (2.2) $d\xi/dt = 5$.

В примере 2 начальный профиль при $t_0 = 0.1$

$$u = \begin{cases} \sqrt{10(1-2x)}, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 \leq x < 1. \end{cases}$$

И здесь $\xi(t_0) = 0.5$, однако по формуле (2.2) получим $d\xi/dt = 0$. Соответствующее решение в первом случае (фиг. 2) представляет собой волну, распространяющуюся с постоянной скоростью, а во втором случае (фиг. 3), несмотря на быстрый рост температуры, фронт не распространяется.

2. В ы ч и с л и т е л ь н а я с х е м а

Программа ОП составлена для решения уравнения (2.1), несколько более общего, чем уравнение (1.1) при $p = 1$, с краевыми условиями I рода

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad u(t, l) = \bar{\mu}(t).$$

Предполагается, что $\varphi(u) = u^r$, однако во всех приведенных ниже примерах $r = 1$.

Уравнение (2.1) заменяется однородной разностной схемой (см. [10]) с опережением:

$$\varphi(v_i) - \varphi(\check{v}_i) = A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) - A_i(v_i - v_{i-1}), \quad (2.3)$$

где

$$A_i = \frac{\tau}{h^2} K \left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2} \right); \quad (2.4)$$

величины без «галок» считаются на шаге $j + 1$, а величина с «галкой» на шаге j . Сетка предполагается равномерной: $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$; $t^j = j\tau$. Для такой схемы устойчивость имеет место при любом шаге τ .

Система уравнений (2.3) при $i = 1, 2, \dots, N - 1$ на каждом шаге $j + 1$ решается следующим методом итераций. Пусть s — номер итерации; полагая

$$\varphi^{(s+1)}(v_i) = \varphi^{(s)}(v_i) + (v_i - v_i^{(s)}) \varphi'^{(s)}(v_i),$$

перепишем уравнение (2.3) в виде линейного уравнения относительно $v_i^{(s+1)}$, опуская для краткости индексы (s) над всеми остальными величинами:

$$A_{i+1}v_{i+1}^{(s+1)} - (A_{i+1} + A_i + B_i)v_i^{(s+1)} + A_iv_{i-1}^{(s+1)} + F_i = 0. \quad (2.5)$$

Здесь A_i определяются формулой (2.4),

$$B_i = \varphi'(v_i),$$

$$F_i = \varphi(\check{v}_i) - \varphi(v_i) + v_i B_i.$$

Каждая итерация требует решения системы (2.5) при $i = 1, 2, \dots$

..., $N - 1$. Это осуществляется методом прогонки (см. [15]) по формулам:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0; & \alpha_{i+1} &= \frac{A_{i+1}}{A_{i+1} + A_i(1 - \alpha_i) + B_i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1; \\ \beta_1 &= v_0; & \beta_{i+1} &= \frac{A_i\beta_i + F_i}{A_{i+1} + A_i(1 - \alpha_i) + B_i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1; \\ v_N^{(s+1)} &= v_N; & v_i^{(s+1)} &= \alpha_{i+1}v_{i+1}^{(s+1)} + \beta_{i+1}^{(s+1)}, & i &= N-1, N-2, \dots, 1.\end{aligned}$$

Значения v_0 и v_N заданы краевыми условиями:

$$v_0 = \mu(j\tau), \quad v_N = \bar{\mu}(j\tau).$$

В качестве нулевой итерации выбираются значения с предыдущего шага: $v_i^{(0)} = \check{v}_i$. Условие окончания итераций

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |v_i^{(s+1)} - v_i^{(s)}| < \varepsilon.$$

Во всех расчетах мы полагали $\varepsilon = 10^{-3}$ (ср. § 3, табл. 3).

Для каждого примера считается фактическое число итераций v^j и так называемое «отношение Куранта»

$$\chi = \max [K(u) \tau / h^2],$$

характеризующее размер шага по времени.

3. Пример 1. Волна, распространяющаяся с постоянной скоростью

Используется аналитическое решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.6)$$

представляющее собой бегущую волну:

$$u = \begin{cases} [\sigma \kappa_0^{-1} (ct + x_1 - x)]^{1/\sigma}, & \text{при } x \leq x_1 + ct, \\ 0, & \text{при } x_1 + ct \leq x. \end{cases} \quad (2.7)$$

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $\kappa_0 = 0.5$, $c = 5$, $x_1 = 0$. Из решения (2.7) были выбраны начальные значения при $t_0 = 0.100$ и краевые условия

$$u(t, 0) = 10 \sqrt{t}, \quad u(t, x_N) = 0.$$

Сетка достаточно мелкая: $h = 0.02$, $N = 50$. Расчет проводился до $t = 0.200$ шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 5.0$). Аналитическое решение и результаты расчета нанесены на фиг. 2. Всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного не превосходит 0.002. Число итераций $v \leq 3$.

4. Пример 2. Нераспространяющийся фронт

Используется аналитическое решение уравнения (2.6) при $-\infty < t < c$:

$$u = \begin{cases} \left[\frac{\sigma(x_1 - x)^2}{2\kappa_0(\sigma + 2)(c - t)} \right]^{1/\sigma} & \text{при } x \leq x_1, \\ 0, & \text{при } x_1 \leq x. \end{cases} \quad (2.8)$$

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $\kappa_0 = 0.5$, $x_1 = 0.5$, $c = 0.1125$. Шаг сетки $h = 0.02$, число узлов $N = 50$. Из решения (2.8) были взяты начальные значения при $t_0 = 0.100$ и краевые условия

$$u(t, 0) = 1/\sqrt{0.9-8t}, \quad u(t, x_N) = 0.$$

Счет проводился до $t = 0.110$ шагом $\tau = 10^{-4}$ ($\chi = 6.2$). Аналитическое решение и результаты расчета нанесены на фиг. 3.

Абсолютная погрешность при $t = 0.110$ не превосходит 0.03. Число итераций $v \leq 3$.

Обращаем внимание на то, что начальные и краевые условия в примерах 1 и 2 весьма схожи. И. условия расчета одинаковые.

5. Пример 3. Волна, распространяющаяся с переменной скоростью

Используется автомодельное решение уравнения (2.6), представимое в виде ряда

$$u = \begin{cases} c(t + c_1)^n (1-s)^{1/\sigma} \frac{1 + a_1(1-s) + a_2(1-s)^2 + \dots}{1 + a_1 + a_2 + \dots} & \text{при } 0 \leq x \leq \xi, \\ 0, & \text{при } \xi \leq x, \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$s = x/\xi, \quad \xi = D(t + c_1)^m,$$

а постоянные

$$m = \frac{n\sigma + 1}{2}, \quad D^2 = \frac{\kappa_0 c^\sigma}{m\sigma(1 + a_1 + a_2 + \dots)^\sigma},$$

$$a_1 = \frac{n\sigma - m}{2m\sigma(\sigma + 1)}, \quad a_2 = -a_1 \cdot \frac{1 + 0.5a_1[(2\sigma + 1)(3\sigma + 1) - 4(\sigma + 1)]}{3(2\sigma + 1)}.$$

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $n = 0$, $c = 10$, $c_1 = 0$, $\kappa_0 = (1 + a_1 + a_2)^2$. Шаг сетки $h = 0.05$, число узлов $N = 80$. Начальный профиль был со- считан по выписанным членам решения (2.9) при $t_0 = 0.010$. Краевые условия:

$$u(t, 0) = 10, \quad u(t, 4) = 0.$$

Счет проводился до $t = 0.090$: а) шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 6.7$) и б) шагом $\tau = 10^{-3}$ ($\chi = 33.6$). Разница между результатами обоих расчетов не превосходит 0.02 всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов.

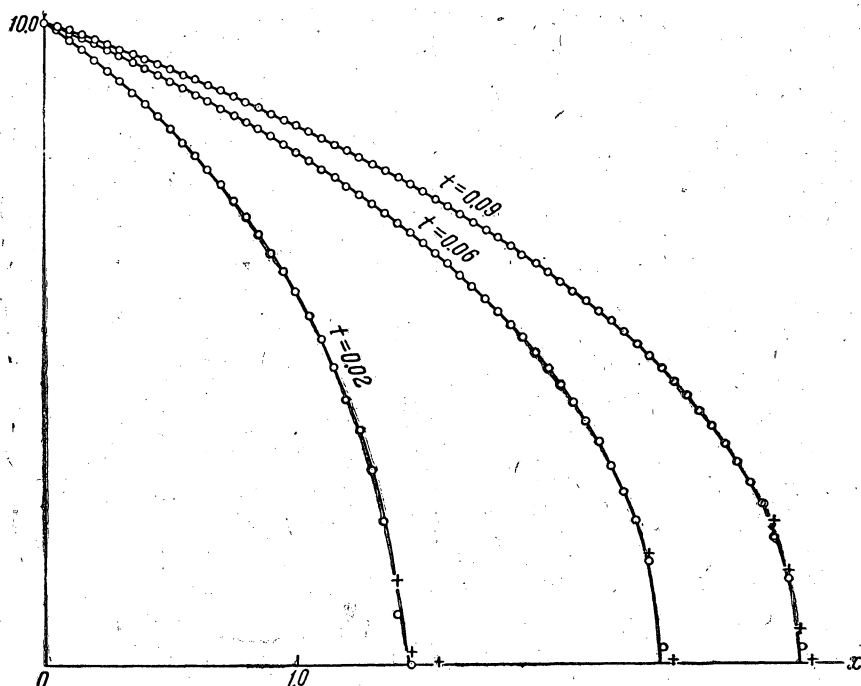
Таблица 1

t	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
а)	4	4	4	3	3	3	3	3
б)	8	7	6	6	6	6	5	5

Поэтому на фиг. 4 нанесены все точки, полученные в варианте а), и лишь несколько крестиков, соответствующих результатам варианта б). Сплошная кривая вычислена по выписанным в (2.9) членам.

Количества итераций v указаны в табл. 1.

Очевидно, увеличение шага в 5 раз сопровождается увеличением количества итераций всего в 2 раза. Поэтому счет *крупным шагом выгоднее*, если только он обеспечивает достаточную точность.



Фиг. 4

6. Пример 4. «Распад разрыва» и счет на установление

При заданных краевых условиях

$$u(t, 0) = u_0, \quad u(t, l) = 0$$

уравнение (2.6) имеет стационарное решение

$$u = u_0 (l - x)^{1/(\sigma+1)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.10)$$

Выберем параметры для расчета: $\sigma = 2$, $\kappa_0 = 3$, $u_0 = 10$, $l = 1$. Шаг сетки $h = 0.02$, число узлов $N = 50$. Начальный профиль при $t = 0$ зададим, как в [7]:

$$u(0, x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x < 0.5, \\ 0 & 0.5 < x < 1. \end{cases}$$

Краевые условия:

$$u(t, 0) = 10, \quad u(t, 1) = 0.$$

Используя теорему сравнения [3], можно оценить момент t^* , когда фронт достигнет точки $x = 1$. Для этого надо построить два аналитических решения уравнения (2.6) при $\sigma = 2$ и $\kappa_0 = 3$ так, чтобы

$$u_1(0, x) \leq u(0, x) \leq u_2(0, x)$$

и

$$u_1(t, 0) \leq u(t, 0) \leq u_2(t, 0),$$

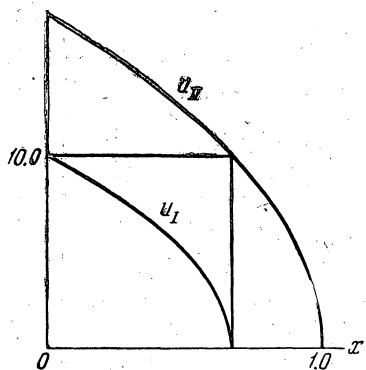
и найти соответствующие моменты t_1^* и t_2^* .

В качестве u_1 можно выбрать решение вида (2.9) при $n = 0$, определив произвольные постоянные c и c_1 из условий $u_1(0, 0) = 10$, $\xi_1(0) = 0.5$ (фиг. 5). Получим $t_1^* = 2.1 \cdot 10^{-3}$. В качестве u_2 выберем решение типа (2.7), где параметры c и x_1 определим из условия $u(0, \frac{1}{2}) = 10$ и $t^* = \max$.

Получим $u_2 = 20 \sqrt{600t - x + 0.75}$ (фиг. 5) и $t_2^* = 0.4 \cdot 10^{-3}$. Итак, оценка

$$0.4 \cdot 10^{-3} < t^* < 2.1 \cdot 10^{-3}.$$

Расчет а) проводился шагом $\tau = 10^{-5}$ ($\chi = 7.5$) до $t = 5 \cdot 10^{-3}$; момент t^* оказался несколько меньшим, чем $1.5 \cdot 10^{-3}$ (результаты выдавались через 50 шагов). К моменту $t = 5 \cdot 10^{-3}$ профиль еще не установился. Число итераций:

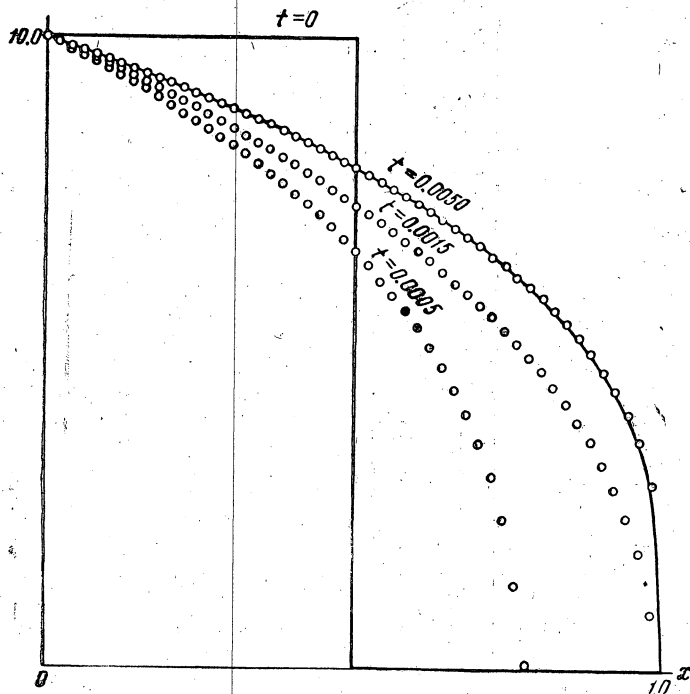


Фиг. 5

$10^4 t$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
ν	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1

Результаты нанесены на фиг. 6.

В § 5 п. 5 доказано, что в этом примере устанавливающийся профиль не зависит от шага по времени. Поэтому выгоднее более крупный шаг. Расчет б) проводился шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 150$) до $t = 2.5 \cdot 10^{-2}$. Про-



Фиг. 6

филь установился*) уже при $t = 10^{-2}$. Для всех t , начиная с $5 \cdot 10^{-3}$, число итераций $v = 1$.

§ 3. Двумерная задача

1. Вычислительная схема

Программа составлена для решения уравнения (1.1) при $p = 2$ с крайними условиями

$$\begin{aligned} u(t, 0, y) &= \mu_1(t, y), & u(t, x, 0) &= \mu_2(t, x), \\ u(t, l_1, y) &= \bar{\mu}_1(t, y), & u(t, x, l_2) &= \bar{\mu}_2(t, x); \end{aligned}$$

для простоты вместо независимых переменных x_1, x_2 будем употреблять x, y .

Сетка предполагается равномерной: $x_i = ih_1, 0 \leq i \leq N_1; y_k = kh_2, 0 \leq k \leq N_2; t^j = j\tau$.

В начальный момент $t_0 = 0$ задана матрица начальных значений (v_{ik}^0) . Переход от матрицы (v_{ik}^j) на шаге t^j к матрице (v_{ik}^{j+1}) осуществляется в два этапа:

1) вычисляется матрица $(v_{ik}^{j+1/2})$. Для ее вычисления используется та же одномерная программа ОП (§ 2, п. 2), в которой полагаем $N = N_1$,

$$A_i = \tau h_1^{-2} K_1 [0.5 (v_{i-1} + v_i)],$$

$$v_0 = \mu_1((j + \frac{1}{2})\tau, kh_2),$$

$$v_{N_1} = \bar{\mu}_1((j + \frac{1}{2})\tau, kh_2).$$

Эта программа по каждой строчке v_{ik}^j вычисляет строчку $v_{ik}^{j+1/2}$ поочередно для всех $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$;

2) в ОП полагаем $N = N_2$,

$$A_k = \tau h_2^{-2} K_2 [0.5 (v_{k-1} + v_k)],$$

$$v_0 = \mu_2((j + 1)\tau, ih_1),$$

$$v_{N_2} = \bar{\mu}_2((j + 1)\tau, ih_1),$$

и с помощью этой программы по каждому столбцу $v_{ik}^{j+1/2}$ вычисляем столбец v_{ik}^{j+1} — поочередно для всех $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$.

Таким образом, ОП играет роль подпрограммы, которая «перерабатывает» строчки (v_{ik}^j) в строчки $(v_{ik}^{j+1/2})$, а потом столбцы $(v_{ik}^{j+1/2})$ в столбцы (v_{ik}^{j+1}) . Всего на каждом шаге ОП работает $(N_2 - 1) + (N_1 - 1)$ раз**).

Для характеристики размера шага вычислены величины

$$\chi_1 = \max [K_1(u) \tau / h_1^2] \quad \text{и} \quad \chi_2 = \max [K_2(u) \tau / h_2^2].$$

Чтобы облегчить наблюдение за ходом счета, на каждом шаге вычислялась

*) Дальнейшие изменения значений v_i не превосходят одной единицы в шестой значащей цифре.

**) Краевые условия на первом этапе можно было бы брать и в любой другой момент t' , заключенный между t^j и t^{j+1} .

величина

$$\delta^j = \left\{ \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_2-1} [v_{ik}^j - u(j\tau, ih_1, kh_2)]^2 \cdot h_1 h_2 \right\}^{1/2},$$

в какой-то мере характеризующая отклонение от точного решения.

2. Выбор аналитического решения

Решение уравнения (1.1) можно искать в виде плоской бегущей волны $u = f(\omega)$, где

$$\omega = t - \sum_{\alpha=1}^p \lambda_{\alpha} x_{\alpha},$$

а $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — постоянные. Подставив предполагаемое решение в уравнение (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, интеграл которого имеет вид

$$\omega = C_1 + \sum_{\alpha=1}^p \kappa_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 \int \frac{u^{\sigma_{\alpha}} du}{u - C};$$

здесь C и C_1 — постоянные интегрирования.

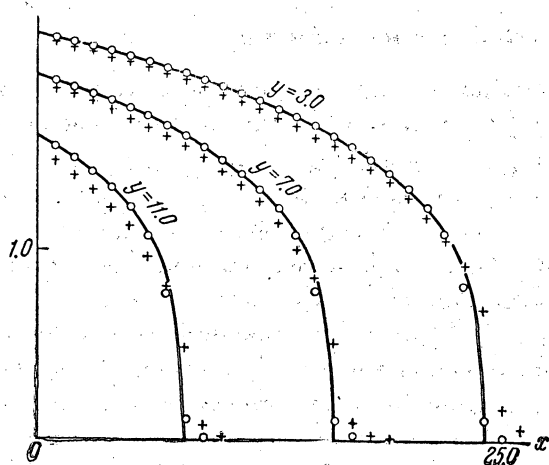
Особенно просто выглядит семейство решений, соответствующих $C = 0$:

$$\omega = C_1 + \sum_{\alpha=1}^p (\kappa_{\alpha} / \sigma_{\alpha}) \lambda_{\alpha}^2 u^{\sigma_{\alpha}}. \quad (3.1)$$

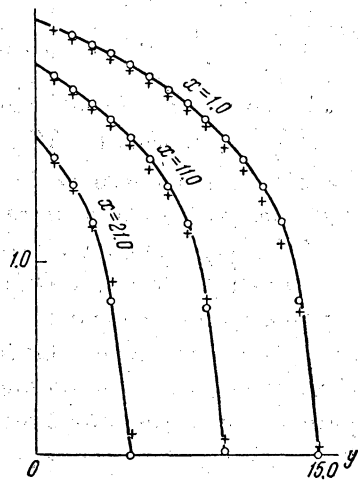
3. Пример 5. Анизотропная плоская волна

Рассмотрим двумерное уравнение (1.1) с параметрами

$$\sigma_1 = 4, \kappa_1 = 4; \quad \sigma_2 = 2, \kappa_2 = 0.25,$$



Фиг. 7



Фиг. 8

и для расчета используем решение (3.1) с заданными постоянными $C_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Соответствующее решение:

$$u = \begin{cases} 0.5 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x - 2y)}} & \text{при } t \geq x + 2y, \\ 0 & \text{при } t \leq x + 2y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сетка грубая: $h_1 = h_2 = 1$; число узлов $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$. Из решения (3.2) взяты начальные значения, т. е. $u(0, x, y) \equiv 0$, и краевые условия на прямых $x = 0$, $x = 30$, $y = 0$ и $y = 20$. Расчеты проводились до $t = 50$: а) шагом $\tau = 0.2$ ($\chi_1 = 37.2$, $\chi_2 = 0.34$); б) шагом $\tau = 1.0$ ($\chi_1 = 186$, $\chi_2 = 1.7$); в) шагом $\tau = 2.0$ ($\chi_1 = 372$, $\chi_2 = 3.4$). Некоторые

Таблица 2

t		10	20	30	50
δ^j	а)	0.290	0.438	0.543	0.457
	б)	0.538	0.935	1.270	1.019
	в)	0.825	1.55	2.13	1.85

Таблица 3

$\epsilon \backslash t$	5	10	15	20	25
10	0.356	0.963	1.477	1.89	2.27
10^{-3}	0.217	0.290	0.392	0.438	0.509
10^{-6}	0.217	0.290	0.392	0.438	0.509

результаты при $t = 30$ нанесены на фиг. 7 и 8, где крестиками обозначены результаты варианта в), точками — варианта а); сплошные кривые — это аналитическое решение.

Отклонения от точного решения указаны в табл. 2.

Уменьшение отклонения при $t = 50$ объясняется тем, что волна уже захватила почти весь прямоугольник, а процесс выравнивания температуры считается лучше, чем процесс распространения.

Чтобы исключить возможность «недоитерирования», часть варианта а) считалась с тремя различными значениями ϵ (см. § 2, п. 2). Соответствующие значения δ^j указаны в табл. 3 *).

Максимальные числа итераций v_{\max} приведены в табл. 4 **).

Замечание, сделанное в конце п. 5, § 2, остается в силе.

4. Некоторые замечания

Так как при счете по x использовались краевые значения, взятые при $t = t^{j+1/2}$, то профили $v(t^{j+1}, x, y_k)$ хуже примыкают к краевым условиям при $x = 0$, чем профили $v(t^{j+1}, x_i, y)$ — к краевым значениям при $y = 0$.

На первый взгляд кажется, что все значения $v(t^{j+1}, x, y)$ на линии $x + 2y = \text{const}$ должны быть заключены между соответствующими значениями $u(t^{j+1/2}, x, y)$ и $u(t^j, x, y)$. Однако на втором этапе в процессе счета по y некоторые значения, главным образом в окрестности фронта, могут опуститься ниже, чем значения $u(t^{j+1/2}, x, y)$. В принципе это явление может привести к возникновению немонотонностей в счете. В нашем примере даже при крупном шаге немонотонности весьма малы, а в варианте а) не превосходят двух — трех тысячных.

Наконец, заметим, что в анизотропной задаче изменение порядка счета направлений — сперва по y , затем по x — вообще говоря, влияет на точность результата.

*) При $\epsilon = 10$ считается всего одна итерация на каждом шаге.

**) При всех t , для которых есть выдачи, значения u равны 1 для тех строк (столбцов), до которых волна еще не дошла, и равны v_{\max} для большинства других строк (столбцов).

§ 4. Трехмерная задача

1. Вычислительная схема

Программа составлена для решения уравнения (1.1) при $p = 3$ в кубе $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $0 \leq z \leq l_3$ (вместо x_1, x_2, x_3 будем писать x, y, z), на поверхности которого заданы значения искомой функции.

Сетка равномерная: $x_i = ih_1$, $0 \leq i \leq N_1$; $y_k = kh_2$, $0 \leq k \leq N_2$; $z_m = mh_3$, $0 \leq m \leq N_3$; $t^j = j\tau$.

В начальный момент $t_0 = 0$ задана начальная таблица (v_{ikm}^0) . Переход от (v_{ikm}^j) к (v_{ikm}^{j+1}) осуществляется в три этапа:

1) сначала подпрограмма ОП преобразует «строчки» $0 \leq i \leq N_1$ таблицы (v_{ikm}^j) в «строчки» $(v_{ikm}^{j+1/3})$, используя краевые значения $u(t^{j+1/3}, 0, y_k, z_m)$ и $u(t^{j+1/3}, l_1, y_k, z_m)$; на этом этапе $N = N_1$ и

$$A_i = \tau h_1^{-2} K_1 [0.5 (v_{i-1} + v_i)];$$

2) «столбцы» $0 \leq k \leq N_2$ таблицы $(v_{ikm}^{j+1/3})$ преобразуются программой ОП в «столбцы» $(v_{ikm}^{j+2/3})$ с помощью краевых значений $u(t^{j+2/3}, x_i, 0, z_m)$ и $u(t^{j+2/3}, x_i, l_2, z_m)$; на этом этапе $N = N_2$ и

$$A'_k = \tau h_2^{-2} K_2 [0.5 (v_{k-1} + v_k)];$$

3) «высоты» $0 \leq m \leq N_3$ таблицы $(v_{ikm}^{j+2/3})$ преобразуются в «высоты» (v_{ikm}^{j+1}) с использованием значений $u(t^{j+1}, x_i, y_k, 0)$ и $u(t^{j+1}, x_i, y_k, l_3)$ в предположении, что в ОП число узлов $N = N_3$ и

$$A_m = \tau h_3^{-2} K_3 [0.5 (v_{m-1} + v_m)].$$

Всего на каждом шаге подпрограмма ОП работает $(N_2 - 1)(N_3 - 1) + (N_1 - 1)(N_3 - 1) + (N_1 - 1)(N_2 - 1)$ раз.

2. Пример 6. Изотропная плоская волна в пространстве

Рассмотрим трехмерное уравнение (1.1) с параметрами

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0.06$$

и для расчета используем решение (3.1) с заданными постоянными $C_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Соответствующее решение:

$$u = \begin{cases} (10/3) \sqrt{t - x - y - z}, & \text{при } t \geq x + y + z, \\ 0 & \text{при } t \leq x + y + z. \end{cases} \quad (4.1)$$

Сетка грубая: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; число узлов $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 10^3$. Из решения (4.1) взяты начальные значения, т. е. $u(0, x, y, z) \equiv 0$, и краевые условия на плоскостях $x = 0$, $x = 10$, $y = 0$, $y = 10$, $z = 0$ и $z = 10$.

Расчет проводился от $t_0 = 0$ до $t = 9.0$ *): а) шагом $\tau = 0.2$ ($\chi = 1.2$) и б) шагом $\tau = 1.0$ ($\chi = 6.0$).

Результаты расцениваются нами как хорошие: на расстоянии двух счетных интервалов от фронта счетные значения уже весьма близки к точ.

*) Волна за это время не успевает дойти до плоскости $x + y + z = 10$, что позволяет на гранях $x = 10$, $y = 10$ и $z = 10$ использовать нулевые краевые условия.

ным. Для примера приводим в табл. 5 значения v_{i21} (т. е. значения функции в узлах, расположенных на прямой $y = 2, z = 1$) в момент $t = 9$.

Таблица 5

i		1	2	3	4	5	6	7
u		7.4536	6.6667	5.7735	4.7140	3.3333	0	0
v_{i21}	а)	7.4541	6.6673	5.7740	4.7154	3.3587	0.735	0.001
	б)	7.4547	6.6710	5.7832	4.7352	3.3901	1.119	0.002

Чтобы показать, насколько хорошо передается скорость распространения волны, приводим в табл. 6 значения функции v во всех внутренних узлах, расположенных в плоскости $x + y + z = 5$ при $t = 8$ и в плоскости $x + y + z = 6$ при $t = 9$ (вариант а).

Таблица 6

$t = 8$			$t = 9$			
</						

точность, что в методе переменных направлений, пришлось уменьшить шаг в 20 раз ($\tau = 0.01$ и $\tau = 0.05$). Время счета по явной схеме оказалось почти в 4 раза большим *).

§ 5. Разностная бегущая волна

1. Определение

Построим решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию

$$v_i^j = v_{i-\beta}^{j-1}, \quad (5.1)$$

где $\beta \geq 1$ — целое число. Очевидно, такое решение сохраняет свой профиль от шага к шагу (по j), смещаясь при этом на β счетных интервалов вправо. Таким образом, скорость движения всех точек профиля постоянна и равна $c = \beta h / \tau$.

Подставив (5.1) в (2.3), получим уравнение

$$\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+\beta}) = A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) - A_i(v_i - v_{i-1}),$$

в которое входят все величины на одном шаге. Это уравнение допускает «первый интеграл»:

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} \varphi(v_{i+k}) = C_1. \quad (5.2)$$

Разностными бегущими волнами мы называем все решения уравнения (5.2).

Такие решения могут оказаться очень полезными для исследования различных способов интерполяции (т. е. различных способов вычисления A_i).

Дальше будем полагать $\varphi(v) \equiv v$.

2. Разностная бегущая волна,

распространяющаяся по нулевому фону

Решение уравнения (5.2), представляющее собой волну, движущуюся по нулевому фону (фиг. 9), можно выделить следующим образом. Пусть $\xi_0 = x_{i_0+1}$ — положение разностного фронта. Будем считать, что

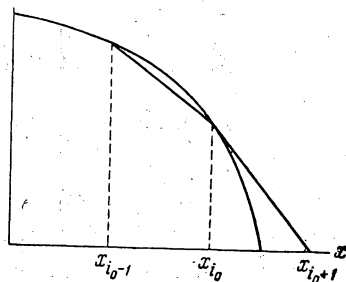
$$v_{i_0+1} = v_{i_0+2} = \dots = v_{i_0+\beta} = 0,$$

а значение $v_{i_0} \neq 0$. Определим это значение с помощью формулы (2.2), допустив, что равенство

$$-\frac{K(u)}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\beta h}{\tau}$$

справедливо в фиктивной точке $x_{i_0+1/2}$:

$$-\frac{(h/\tau) A_{i_0+1}(v_{i_0+1} - v_{i_0})}{0.5(v_{i_0+1} + v_{i_0})} = \frac{\beta h}{\tau}.$$



Фиг. 9

Отсюда получаем условие для нахождения v_{i_0} :

$$A_{i_0+1} = 0.5 \beta. \quad (5.3)$$

*) Как известно, явная схема теряет устойчивость при увеличении χ . Необходимость вести счет мелким шагом может обойтись гораздо дороже (чем в 4 раза) в случае, когда уравнение теплопроводности входит в состав системы дифференциальных уравнений.

Все значения v_i при $i < i_0$ будем находить из уравнения

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} v_{i+k} = C_1, \quad (5.4)$$

где, очевидно, $C_1 = -0.5 \beta v_{i_0}$.

В случае $K(u) = \kappa_0 u^\sigma$ из (5.3) следует, что

$$v_{i_0} = 2 (hc/2\kappa_0)^{1/\sigma},$$

где $c = \beta h/\tau$ — скорость. Нетрудно проверить, что это значение отличается от соответствующего значения на аналитической бегущей волне (см. (2.7)) множителем $0.5 (2\sigma)^{1/\sigma}$. В частности, при $\sigma = 1$ (уравнение Буссинеска), а также при $\sigma = 2$ профиль построенной нами волны (5.3) — (5.4) очень близок к профилю волны (2.7).

3. Разностный фронт в случае схемы сквозного счета]

Однако при сквозном счете волны, распространяющейся по нулевому фону, мы имеем дело не с решением (5.3) — (5.4), а с решением, удовлетворяющим, строго говоря, условию на бесконечности:

$$v_i \rightarrow 0, \quad \text{когда } i \rightarrow \infty.$$

Появление фронта связано с появлением «машинного нуля», или, иначе говоря, определяется допустимой точностью вычислений. Значит, чтобы исследовать схему сквозного счета (п. 2, § 2), нужно рассмотреть решения уравнения

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} v_{i+k} = 0. \quad (5.5)$$

Легко доказать, что все положительные решения уравнения (5.5) монотонны, стремятся к нулю, когда $i \rightarrow \infty$, и стремятся к ∞ , при $i \rightarrow -\infty$.

Введем новые переменные

$$w_i = \chi_0^{1/\sigma} v_i,$$

где $\chi_0 = \kappa_0 \tau h^{-2}$. В новых переменных вместо (5.5) получим уравнение

$$[0.5 (w_{i+1} + w_i)]^\sigma (w_{i+1} - w_i) + \sum_{k=1}^{\beta} w_{i+k} = 0. \quad (5.6)$$

Следовательно, профили искомых решений зависят главным образом от нелинейности (σ) и от скорости (β), а не от сетки или κ_0 .

Обозначим через η наименьшее допустимое в счете число (иначе говоря, всякое число, меньшее η , считается нулем). Если $w_{i+1} = \eta$, то из (5.6) следует, что

$$w_i = (2^\sigma \eta)^{1/(\sigma+1)} - \frac{\sigma-1}{\sigma+1} \eta + o(\eta).$$

Поэтому, обозначив через i_0 номер последнего отличного от нуля числа w_i можно утверждать, что в счете возможны только значения *)

$$\eta < w_{i_0} < (2^\sigma \eta)^{1/(\sigma+1)} - \frac{\sigma-1}{\sigma+1} \eta.$$

*) Для простоты это рассуждение проведено для w_i , а не для v_i .

В самом деле, если бы w_i было меньше η , то последний номер ненулевых w_i был бы меньше i_0 , а если бы w_{i_0} было больше правой части, то мы имели бы $w_{i_0+1} \geq \eta$ и последний номер был бы больше i_0 .

В табл. 7 приведены значения w_i , соответствующие случаю $\sigma = 2$, $\eta = 2.5 \cdot 10^{-10}$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2$; номер $i_0 = 10$.

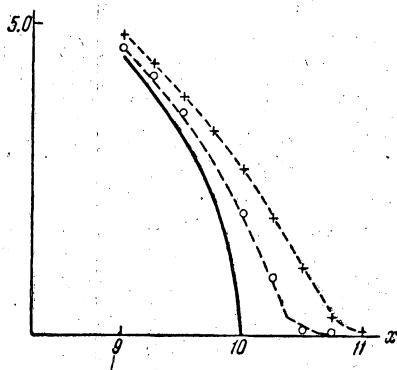
Таблица 7

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta=1$	3.359	3.062	2.736	2.372	1.955	1.454	0.820	0.158	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0
$\beta=2$	4.253	3.814	3.333	2.801	2.205	1.530	0.822	0.158	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0

4. Численный пример

Задача, рассмотренная в примере 1 (§ 2), считалась по очень грубой сетке: $N = 50$, $h = 0.25$, от $t_0 = 0.10$ до $t = 2.00$ шагом $\tau = 0.05$ ($\chi = 80$) и шагом $\tau = 0.10$ ($\chi = 160$). Эти параметры удовлетворяют условию $\sigma\tau/h = \beta$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2$, так что при специальном выборе краевых условий решение могло бы оказаться бегущей разностной волной.

В нашем примере через несколько шагов счетный профиль становится весьма близким к разностной бегущей волне. В дальнейшем этот профиль перемещается со скоростью, близкой к c , незначительно перестраиваясь, так что $|v_i^j - v_{i-\beta}^{j-1}| \rightarrow 0$ с ростом j . На фиг. 10 в крупном масштабе нанесены аналитическое решение (2.7) в окрестности фронта в момент $t = 2.00$ (сплошная кривая) и результаты, полученные в счете (точки — при $\tau = 0.05$, крестики — при $\tau = 0.10$); пунктирные кривые — это профили разностных бегущих волн, сосчитанные по таблице, помещенной в конце п. 3, по формуле $v_i = w_i/\sqrt{\chi_0}$.



Фиг. 10

Так как фронт «размазывается» по очень грубой сетке, то ошибка в окрестности фронта довольно заметная. При удалении от фронта она быстро уменьшается.

Для первого из этих вариантов число итераций на каждом шаге $\nu = 9$, а для второго $\nu = 12$ (ср. конец п. 5, § 2).

5. Разностное стационарное решение

Стационарное решение уравнения (2.3), определяющееся условием

$$v_i^j = v_i^{j-1}, \quad (5.7)$$

можно рассматривать как частный случай разностной бегущей волны при $\beta = 0$, когда скорость профиля равна нулю. Разностные стационарные решения удовлетворяют уравнению

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) = C_1, \quad (5.8)$$

вполне аналогичному (5.2), где C_1 — произвольная постоянная.

В примере 4 устанавливается стационарное решение, удовлетворяющее крайним условиям: v_0 — задано, $v_N = 0$. Нетрудно проверить, что это решение не зависит от шага по времени τ (это свойство однородных разностных схем).

В самом деле, так как в рассматриваемом примере $\sigma = 2$, то уравнение (5.8) (принимая во внимание (2.4)) можем переписать в виде

$$(v_{i+1} + v_i)^2 (v_{i+1} - v_i) = -C^3,$$

где $C = -\sqrt[3]{4C_1 h^2 / \kappa_0 \tau}$ — снова произвольная постоянная. Сделаем замену $v_i = Cw_i$. Для определения w_i получим уравнение

$$(w_{i+1} + w_i)^2 (w_i - w_{i+1}) = 1.$$

Зная $w_N = 0$, можно определить все w_i , $i = N-1, N-2, \dots, 0$. Затем надо выбрать значение произвольной постоянной $\bar{C} = v_0 / w_0$ и найти искомые значения $v_i = \bar{C}w_i$. Очевидно, это решение зависит лишь от N , т. е. от размера сетки по пространству.

При счете на установление примера 4 (б) получены значения, совпадающие с таким образом сосчитанным стационарным решением с точностью до 0.0000001.

Таблица 8

x_i		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.98
$u(x_i)$		9.283	8.434	7.368	5.848	4.642	2.714
v_i	$N=50$	9.289	8.447	7.393	5.900	4.733	2.981
	$N=10$	9.308	8.495	7.486	6.091	5.052	—
	$N=5$	9.332	8.551	7.592	6.298	—	—

В табл. 8 приведены значения аналитического и разностных стационарных решений для этой задачи при $N = 50$, $N = 10$, $N = 5$.

Поступила в редакцию
6.04.1963

Цитированная литература

1. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В «Сб. к семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе». М., Изд-во АН СССР, 1950, 61—71.
2. Г. И. Баренблатт. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. Прикл. матем. и механ., 1952, 16, № 1, 67—78.
3. Г. И. Баренблатт, И. М. Вишик. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 3, 411—417.
4. О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-линь. Уравнения типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, 1958, 22, № 5, 667—704.
5. В. Ф. Баклановская. Численное решение одномерной задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 461—469.

6. В. Ф. Баклановская. Численное решение второй краевой задачи для одномерного уравнения нестационарной фильтрации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 1129—1133.
 7. М. А. Таиров. Решение одной задачи нестационарной фильтрации методом интегральных соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 938—942.
 8. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 4—63.
 9. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифф. уравнениям (Ереван, ноябрь 1958). Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148—160.
 10. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—298.
 11. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
 12. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерной сетке для многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
 13. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210.
 14. А. А. Самарский, В. Я. Арсенин. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 2, 357—360.
 15. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.
-