

魔术态蒸馏

林雨轩

March 2025

1 核心目的

假设我们已经拥有了如下完美操作：

- 1、制备初态 $|0\rangle$ 。
- 2、所有的 Clifford 操作。
- 3、Pauli 测量。

然而以上操作是不足以实现通用量子计算的。可以证明，利用以上操作以及两个类型的魔术态便可以实现通用量子计算。其中，魔术态的定义为 $\rho_T = |T\rangle\langle T| = \frac{1}{2}[I + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$, $\rho_H = |H\rangle\langle H| = \frac{1}{2}[I + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)]$ 。于是乎如何完美制备出魔术态就成为了需要解决的新问题。我们打算通过蒸馏操作来实现，即输入若干个不完美的初态 $\rho \approx |T\rangle\langle T|$, $\rho \approx |H\rangle\langle H|$ ，仅通过以上所提及的完美操作，便能够输出一个精度足够高的魔术态。

2 魔术态的基本性质

2.1 T 型魔术态

记 $T = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} SH$ ，可以证明 T 型魔术态是 T 门的本征态： $T\rho_T T^\dagger = \rho_T$ 。

T 门有两个本征态： $T|T_0\rangle = e^{i\pi/3}|T_0\rangle$, $T|T_1\rangle = e^{-i\pi/3}|T_1\rangle$ ，其中 $|T_1\rangle = YH|T_0\rangle$ 。

T 门与 Pauli 算符之间有如下关系： $TXT^\dagger = Z$, $TZT^\dagger = Y$, $TYT^\dagger = X$ (利用 $SZ = ZS$, $SX = YS$) 即可证明。

退相位操作 $D(\eta) = \frac{1}{3}(\eta + T\eta T^\dagger + T^\dagger\eta T)$ 可以通过以 $\frac{1}{3}$ 概率分别作用 I, T, T^\dagger 实现。

由于 $D(|T_0\rangle\langle T_1|) = D(|T_1\rangle\langle T_0|) = 0$ ，于是我们总是可以将不完美的初态写作：

$\rho_{in} = (1 - \epsilon)|T_0\rangle\langle T_0| + \epsilon|T_1\rangle\langle T_1|$ ，其中 ϵ 表征错误率。

需要说明的是，实际上对于该类型的魔术态的需求不高，本文中我们只是通过该类型魔术态的构建来启发后续的构造。

2.2 H 型魔术态

记 $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) = e^{-i\pi/4} SX$ 可以证明 H 型魔术态是 A 门的本征态。

A 门的本征态为: $|A_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}|1\rangle)$, $|A_1\rangle = Z|A_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}|1\rangle)$ 。

并且 $A|A_0\rangle = |A_0\rangle$, $A|A_1\rangle = -|A_1\rangle$ 。

注意到 A 门满足如下性质: $A^2 = I$, $AZ = -ZA$, 这将有利于后续构造。

同样地, 我们总是可以通过退相位操作 $D(\eta) = \frac{1}{2}(\eta + A\eta A^\dagger)$ 使得不完美初态变为: $\rho_{in} = (1 - \epsilon)|A_0\rangle\langle A_0| + \epsilon|A_1\rangle\langle A_1|$ 。

可以看出, 这时我们所制备的态 $|A_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}|1\rangle)$ 对于所有的 $\frac{\pi}{8}$ 相位操作都是极其重要的, 因此也将成为后续讨论的核心。

3 基本想法: 横截性与 T 型魔术态蒸馏

假如在某种编码 C 上 T 门具有横截性 $T_L = T^{\otimes n}$, 则若干个 T 门本征态 $|T_0\rangle, |T_1\rangle$ 的直积态直接投影到编码 C 上, 必然也是逻辑 T_L 的本征态 $|T_0^L\rangle, |T_1^L\rangle$ 。只要在这个新的逻辑态上 $|T_0^L\rangle$ 所占比例高于原先输入态上 $|T_0\rangle$ 所占比例, 则总能通过级联的方式获得任意精度的 $|T_0\rangle$ 初态制备。

幸运的是, T 门在五比特编码上满足横截性。

稳定子: $S_1 = XZZXI, S_2 = IXZZX, S_3 = XIXZZ, S_4 = ZXIXZ$, 投影算符: $\Pi = \frac{1}{16} \prod_{i=1}^4 (I + S_i)$ 。

输入直积态 $\rho_{in} = \rho^{\otimes 5} = \sum_{x \in \{0,1\}^5} \epsilon^{|x|} (1 - \epsilon)^{5-|x|} |T_x\rangle\langle T_x|$, 其中 x 是长度为 5 的 01 串, $|x|$ 代表其中 1 的个数。

注意此处我们不加证明地使用了横截性的结论, 只是为了快速理解魔术态蒸馏的过程, 以便后续 H 型魔术态蒸馏的详细推导。

$T_L |T_x\rangle = e^{i\frac{\pi}{3}(5-2|x|)} |T_x\rangle$, 由于 T_L 为逻辑算符, 有 $[\Pi, T_L] = 0$ 。 $\Rightarrow T_L \Pi |T_x\rangle = e^{i\frac{\pi}{3}(5-2|x|)} \Pi |T_x\rangle$ 。

$$\Rightarrow \Pi |T_x\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{6}} |T_1^L\rangle, & \text{if } |x| = 0, \\ 0, & \text{if } |x| = 1, \\ a_x |T_0^L\rangle, & \text{if } |x| = 2, \\ b_x |T_1^L\rangle, & \text{if } |x| = 3, \\ 0, & \text{if } |x| = 4, \\ \sqrt{\frac{1}{6}} |T_0^L\rangle, & \text{if } |x| = 5, \end{cases}$$

其中的首尾两项系数利用了等式 $\langle T_{00000} | \Pi | T_{00000} \rangle = \langle T_{11111} | \Pi | T_{11111} \rangle = \frac{1}{6}$ 。

由于投影算符满足: $|T_0^L\rangle\langle T_0^L| + |T_1^L\rangle\langle T_1^L| = \Pi = \sum_{x \in \{0,1\}^5} \Pi |T_x\rangle\langle T_x| \Pi$,

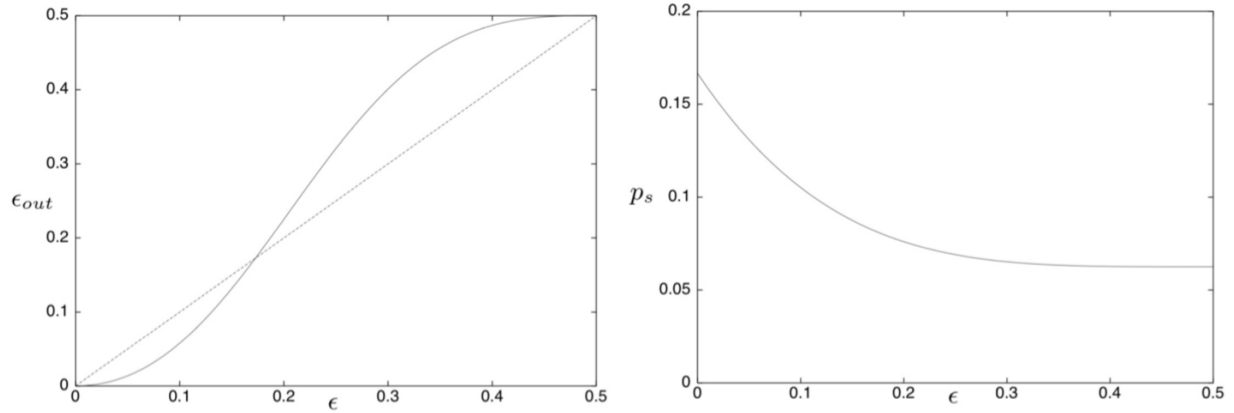
因此有 $\sum_{|x|=2} |a_x|^2 = \sum_{|x|=4} |b_x|^2 = \frac{5}{6}$ 。

于是输出态为 $\rho_{out} = \frac{\epsilon^5 + 5\epsilon^2(1-\epsilon)^3}{6} |T_0^L\rangle\langle T_0^L| + \frac{(1-\epsilon)^5 + 5\epsilon^3(1-\epsilon)^2}{6} |T_1^L\rangle\langle T_1^L|$ 。

投影得到平凡征态的概率, 即能够得出有效输出态的概率为 $p_s = \frac{\epsilon^5 + 5\epsilon^2(1-\epsilon)^3 + (1-\epsilon)^5 + 5\epsilon^3(1-\epsilon)^2}{6}$ 。

输出态的正确率为 $\epsilon_{out} = \frac{t^5 + 5t^2}{1 + 5t^2 + 5t^3 + t^5}$, $t = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ 。

可以做出 $\epsilon_{out} - \epsilon, p_s - \epsilon$ 图像:



容错阈值 $\epsilon_0 \approx 0.173$, 当 $\epsilon \rightarrow 0, p_s \approx \frac{1}{6}, \epsilon_{out} \approx 5\epsilon^2$ 。需要 $\frac{1}{r} \approx 30$ 个物理比特编码一个逻辑比特。考虑 k 级容错操作, $\epsilon_{out} = \frac{1}{5}(5\epsilon)^{2^k}, r^k n \approx 1. \Rightarrow \epsilon_{out}(n, \epsilon) \sim (5\epsilon)^{n^\xi}, \xi \approx \frac{1}{\log_2 30} \approx 0.2$ 。

4 H 型魔术态蒸馏

根据 T 型魔术态蒸馏的思路, 实际上整个过程的核心在于寻找一个对 A 门满足横截性的编码。如果我们找到了这样一套编码, 便总是可以期待按照上述程序进行蒸馏操作。然而此时我们所熟知的那些简单编码不再满足如此性质, 因此需要通过其他方法进行构造, 以寻找对 A 满足横截性的编码。

4.1 广义 CSS 编码

$CSS(A, \mathcal{L}_A; B, \mathcal{L}_B)$ 定义如下:

A, B 表示稳定子的基本组成单位, 即对应的单比特算子; $\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B$ 表示施加对应单比特算子的位置, 可以用长为 n 的 01 串表征, 1 表示在该位置上作用 A 或 B 算子。

$A^2 = B^2 = I, AB = -BA$, 表明组成稳定子的单比特算子必须是相互反对易的。

$\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B \subseteq \mathbb{F}_2^n$, 并且 $\forall u \in \mathcal{L}_A, v \in \mathcal{L}_B, (u, v) = 0$ 。注意内积的计算均需要模 2 处理。

以上性质保证了稳定子的乘积仍为稳定子, 并且 A 型稳定子与 B 型稳定子之间是相互对易的。

整个 Hilbert 空间被进行了如下划分: $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{L}_A^*} \bigoplus_{\eta \in \mathcal{L}_B^*} \mathcal{H}(\mu, \eta)$ 。

μ, η 表示从 $\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B$ 到 $(0,1)$ 的映射, 因此属于对偶空间, 表征的是稳定子测量的结果:

$$A(u) |\Psi\rangle = (-1)^{\mu(u)} |\Psi\rangle, B(v) |\Psi\rangle = (-1)^{\eta(v)} |\Psi\rangle。$$

因此实际上我们需要的编码空间是测量所有稳定子均得到平凡结果的空间: $\mathcal{H}(0,0)$ 。

一个 CSS 编码得到的逻辑比特数目为: $k = \log_2 (\dim \mathcal{H}(0,0)) = n - \dim \mathcal{L}_A - \dim \mathcal{L}_B$ 。

逻辑算符可以按照如下方式构造: $\{A(u) : u \in \mathcal{L}_B^\perp / \mathcal{L}_A\}, \{B(v) : v \in \mathcal{L}_A^\perp / \mathcal{L}_B\}$ 。

4.2 Reed-Muller 编码

我们之前曾指出, H 型魔术态是 A 门的本征态, 并且 A 满足 $A^2 = I, AZ = -ZA$, 因此如果构造 $CSS(Z, \mathcal{L}_2; A, \mathcal{L}_1), [1] \subseteq \mathcal{L}_1^\perp, \mathcal{L}_2^\perp$, 则 A 天然满足横截性。其中 $[1]$ 表示全为 1 的向量。

然而编码的过程需要对稳定子进行测量，现在面临的问题是如何仅使用文章开头所提及的完美操作实现对于 A 型稳定子的测量。

直观上来看，这似乎不可能，因为我们只能进行 Pauli 测量。但是，或许通过对 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 进行适当的构造，可以使得在进行了所有的 Z 测量之后，进行 A 测量与进行 X 测量对于量子态的限制是一样的。下面给出这种构造方式：

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 是一个四元 Bool 函数，输入四个二进制数，输出 0 或 1，且满足 $f(0)=0$ 。

$[f] = (f(0001), f(0010) \dots f(1111)) \in \mathbb{F}_2^{15}$ ，表示一个长度为 15 的 01 串，每一位反映对应二进制输入时的输出值。 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 是满足特定条件的 $[f]$ 所组成的集合。

具体地， \mathcal{L}_1 对应的是线性函数 f ，即 \mathcal{L}_1 是由 $[x_1], [x_2], [x_3], [x_4]$ 所张成的线性空间。可以看出 \mathcal{L}_1 的维度为 4，元素个数 $|\mathcal{L}_1| = 2^4 = 16$ 。

\mathcal{L}_2 对应的是不超过 2 次的函数 f ，即 \mathcal{L}_2 是由 $[x_1], [x_2], [x_3], [x_4], [x_1x_2], [x_1x_3], [x_1x_4], [x_2x_3], [x_2x_4], [x_3x_4]$ 所张成的线性空间。可以看出 \mathcal{L}_2 的维度为 10，元素个数 $|\mathcal{L}_2| = 2^{10} = 1024$ 。

我们不妨列出 \mathcal{L}_1 的一组基，以更好地观察其性质：

$$\begin{aligned} x_1 : & 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ x_2 : & 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ x_3 : & 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ x_4 : & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{aligned}$$

如此构造的 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 满足一下良好的性质：

- 1) $\forall u \in \mathcal{L}_1, |u| \equiv 0 \pmod{8}, \forall v \in \mathcal{L}_2, |v| \equiv 0 \pmod{2}$ 。
- 2) $\forall u, v \in \mathcal{L}_1, |u \cdot v| \equiv 0 \pmod{4}$ 。

以上两条性质可以如此理解：上述矩阵中每一行均有 8 个 1，且任意两行同时有 1 的位置均有 4 个。因此在 \mathcal{L}_1 中，除了 0 以外，其他的 01 串均有 8 个 1，对于 $v \in \mathcal{L}_2$ 情形，即加入上述矩阵任意两行的乘积，此时 1 的重叠位置有偶数个。

$$3) \mathcal{L}_1^\perp = \mathcal{L}_2 \oplus [1], \mathcal{L}_2^\perp = \mathcal{L}_1 \oplus [1]。$$

容易验证 $[1], \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2^\perp; [1], \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1^\perp$ ，同时 $\dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) = 14$ ，总的维度为 15。利用 $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ 即可证明结论成立。

$$4) \forall u \in \mathcal{L}_1, v \in \mathcal{L}_2^\perp, |u \cdot v| \equiv 0 \pmod{4}。$$

利用 $\mathcal{L}_2^\perp = \mathcal{L}_1 \oplus [1]$ 。如果 $v \in \mathcal{L}_1$ ，则等同于性质 2；如果 $v = [1] + w, w \in \mathcal{L}_1$ ，则 $|u \cdot v| = \sum_{j=1}^{15} u_j(1 - w_j) = |u| - |u \cdot w| \equiv 0 \pmod{4}$ 。

利用以上性质，我们可以证明如下重要结论：

$$\text{对于 } CSS(Z, \mathcal{L}_2; A, \mathcal{L}_1), \text{ 空间被划分为 } (\mathbb{C}^2)^{\otimes 15} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{L}_2^*} \bigoplus_{\eta \in \mathcal{L}_1^*} \mathcal{H}(\mu, \eta);$$

$$\text{对于 } CSS(Z, \mathcal{L}_2; X, \mathcal{L}_1), \text{ 空间被划分为 } (\mathbb{C}^2)^{\otimes 15} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{L}_2^*} \bigoplus_{\eta \in \mathcal{L}_1^*} \mathcal{G}(\mu, \eta)。$$

对于任意征状 $\eta \in \mathcal{L}_1^*$ ，有 $\mathcal{H}(0, \eta) = \mathcal{G}(0, \eta)$ 。

更进一步地，对于任意 $\mu \in \mathcal{L}_2^*$ ，存在 $w \in \mathbb{F}_2^{15}$ ，可以使得对于任意 $\eta \in \mathcal{L}_1^*$ ，有 $\mathcal{H}(\mu, \eta) = A(w)\mathcal{G}(0, \eta)$ 。

利用以上结论，我们就能够对 A 型稳定子进行测量。具体地，先测所有的 Z 稳定子，根据征状 μ 计算出 w ，作用算符 $A(w)^\dagger$ ，再测量所有的 X 稳定子，舍弃非平凡答案，于是量子态被限制在编码空间 $\mathcal{G}(0, 0) = \mathcal{H}(0, 0)$ 上。

下面证明该结论：

引入辅助空间 $\mathcal{H} = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{L}_1^*} \mathcal{H}(0, \eta) = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{L}_1^*} \mathcal{G}(0, \eta)$ 。

对于 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ ，可以表述为 $|\Psi\rangle = \sum_{v \in \mathcal{L}_2^\perp} c_v |v\rangle$ 。

因为所有 $Z(v \in \mathcal{L}_2)$ 的测量结果均为 0 意味着该 01 串在 v 上总是有偶数个 1，即可以由对应的正交补空间表示。

现在证明 $A(u)|\Psi\rangle = X(u)|\Psi\rangle$ ，其中 $A = e^{\frac{i\pi}{4}}XS^\dagger$ 。

$$A(u)|v\rangle = e^{\frac{i\pi}{4}}(u)X(u)S^\dagger(u)|v\rangle = X(u)e^{\frac{i\pi}{4}|u|}e^{-\frac{i\pi}{2}|u \cdot v|}|v\rangle,$$

由于 $|u| \equiv 0 \pmod{8}$, $|u \cdot v| \equiv 0 \pmod{4}$, $\Rightarrow A(u)|v\rangle = X(u)|v\rangle \Rightarrow \mathcal{H}(0, \eta) = \mathcal{G}(0, \eta)$ 。

对于 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}(\mu, \eta)$, $u \in \mathcal{L}_1$, $v \in \mathcal{L}_2$, $\mu \in \mathcal{L}_2^*$, 有 $Z(v)|\Psi\rangle = (-1)^{\mu(v)}|\Psi\rangle$,

总是可以找到 w 使得对于任意 v 均有 $\mu(v) = (w, v)$,

$$\text{于是 } Z(v)A(w)^\dagger|\Psi\rangle = (-1)^{(w,v)}A(w)^\dagger Z(v)|\Psi\rangle = A(w)^\dagger(-1)^{\mu(v)}Z(v)|\Psi\rangle = A(w)^\dagger|\Psi\rangle,$$

$$\text{同时 } A(u)A(w)^\dagger|\Psi\rangle = A(w)^\dagger A(u)|\Psi\rangle = (-1)^{\eta(u)}(A(w)^\dagger|\Psi\rangle)。$$

可以看出此时 $A(w)^\dagger|\Psi\rangle$ 进行 Z 测量得到平凡结果，进行 A 测量给出 η 征状，即 $A(w)^\dagger|\Psi\rangle \in \mathcal{H}(0, \eta) = \mathcal{G}(0, \eta)$, $\Rightarrow \mathcal{H}(\mu, \eta) = A(w)\mathcal{H}(0, \eta) = A(w)\mathcal{G}(0, \eta)$ 。

4.3 15-1 魔术态蒸馏

现在我们已经拥有了满足横截性的编码，并且可以利用已有操作测量出对应编码上的稳定子，便可以仿照之前的步骤进行蒸馏操作。在开始具体计算该蒸馏效果的收益时，我们先给出整个操作流程：

1. 测量所有 Z 稳定子，得到对应的征状 μ 。
2. 计算出符合条件 $(w, v) = \mu(v)$, $v \in \mathcal{L}_2$ 的 w ，并作用算符 $A(w)^\dagger$ 。
3. 测量所有的 X 稳定子，如果得到非平凡结果则舍弃测量结果，只保留 $\eta = 0$ 的情况。
4. 将对应的逻辑比特解码到一个物理比特上，便得到了纯化过的魔术态。

$$\text{输入的态为 } \rho_{in} = \rho^{\otimes 15} = \sum_{x \in \mathbb{F}_2^{15}} \epsilon^{|x|} (1 - \epsilon)^{15 - |x|} |A_x\rangle \langle A_x|,$$

经过以上操作，该直积态被投影到编码空间 $\mathcal{H}(0, 0) = \mathcal{G}(0, 0)$, $\rho_{out} = \Pi \rho_{in} \Pi$,

$$\text{其中 } \Pi = \Pi_Z \Pi_A, \Pi_Z = \frac{1}{|\mathcal{L}_2|} \sum_{v \in \mathcal{L}_2} Z(v), \Pi_A = \frac{1}{|\mathcal{L}_1|} \sum_{u \in \mathcal{L}_1} A(u)。$$

注意理解实际上这和 $\prod_i \frac{I+S_i}{2}$ 是完全一样的，因为上式中的 u, v 遍历了所有可能的稳定子。

注意到 $A(u)|A_x\rangle = (-1)^{(u,x)}|A_x\rangle$, $Z(v)|A_x\rangle = |A_{x+v}\rangle$ ，这一步利用了 $|A_0\rangle, |A_1\rangle$ 的性质。

$$\text{容易看出 } \Pi_A |A_x\rangle = \begin{cases} |A_x\rangle, & x \in \mathcal{L}_1^\perp = \mathcal{L}_2 \oplus [1] \\ 0, & x \notin \mathcal{L}_1^\perp = \mathcal{L}_2 \oplus [1] \end{cases}$$

于是投影作用后能出现非 0 结果只有两种可能， $x \in \mathcal{L}_2$ 或者 $x \in \mathcal{L}_2 + [1]$ ，无论是这两种情况中的哪一种在 Π_Z 作用后均保持，同时可以看出这两类情况分别对应逻辑 $|A_0^L\rangle, |A_1^L\rangle$ 。

$$\text{可以得出 } |A_0^L\rangle = \sqrt{|\mathcal{L}_2|} \Pi_Z |A_{0\dots 0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{L}_2|}} \sum_{x \in \mathcal{L}_2} |A_x\rangle, |A_1^L\rangle = \sqrt{|\mathcal{L}_2|} \Pi_Z |A_{1\dots 1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{L}_2|}} \sum_{x \in \mathcal{L}_2} |A_{x+[1]}\rangle。$$

$$\text{同时可以得到 } \Pi |A_x\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{L}_2|}} |A_0^L\rangle, & x \in \mathcal{L}_2 \\ \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{L}_2|}} |A_1^L\rangle, & x \in \mathcal{L}_2 + [1] \end{cases}, \text{ 注意其中已经保证了归一化。}$$

$$\text{于是输出态可以表示为 } \rho_{out} = \frac{1}{|\mathcal{L}_2|} \sum_{x \in \mathcal{L}_2} (1 - \epsilon)^{15 - |x|} \epsilon^{|x|} |A_0^L\rangle \langle A_0^L| + \frac{1}{|\mathcal{L}_2|} \sum_{x \in \mathcal{L}_2} (1 - \epsilon)^{|x|} \epsilon^{15 - |x|} |A_1^L\rangle \langle A_1^L|。$$

蒸馏操作的成功率为 $p_s = |\mathcal{L}_2| \text{Tr}(\rho_{out}) = \sum_{x \in \mathcal{L}_1^\perp} \epsilon^{15-|x|} (1-\epsilon)^{|x|}$ 。注意前面的系数是因为我们在测量过程中对所有征状 μ 均可进行相应操作以投影到编码空间 $\mathcal{H}(0,0) = \mathcal{G}(0,0)$ 上。输出态的错误率为 $\epsilon_{out} = \frac{\sum_{x \in \mathcal{L}_2} \epsilon^{15-|x|} (1-\epsilon)^{|x|}}{p_s}$ ，下面对以上两式进行具体计算。

我们引入多项式 $W_{\mathcal{L}}(x, y) = \sum_{u \in \mathcal{L}} x^{n-|u|} y^{|u|}$ 。

利用该多项式，待求量可以表述为 $p_s = W_{\mathcal{L}_1^\perp}(\epsilon, 1-\epsilon)$, $\epsilon_{out} = \frac{W_{\mathcal{L}_2}(\epsilon, 1-\epsilon)}{W_{\mathcal{L}_1^\perp}(\epsilon, 1-\epsilon)}$ 。

利用 MacWilliams 恒等式， $W_{\mathcal{L}}(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{L}^\perp|} W_{\mathcal{L}^\perp}(x+y, x-y)$ 。

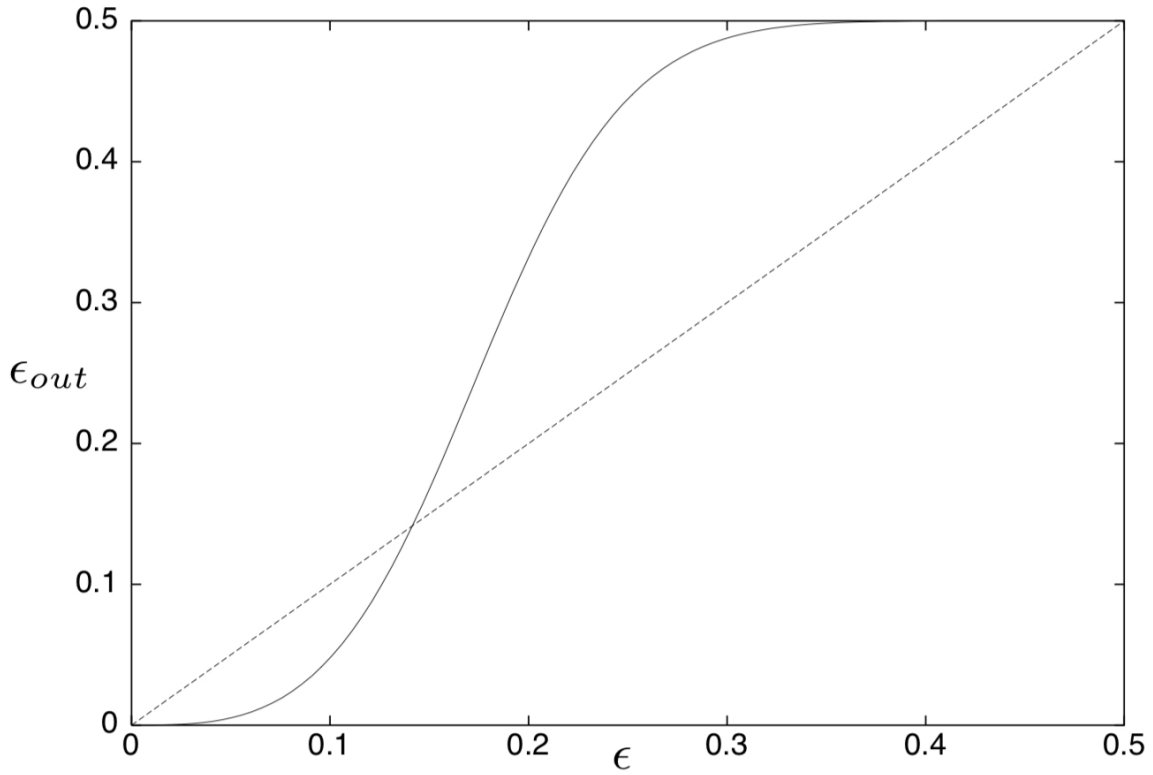
化简得到， $p_s = \frac{1}{16} W_{\mathcal{L}_1}(1, 2\epsilon-1) = \frac{1}{16} W_{\mathcal{L}_1}(1, 1-2\epsilon)$ ，注意其中利用了 $\forall u \in \mathcal{L}_1, |u| \equiv 0 \pmod{8}$ 。

$\epsilon_{out} = \frac{\frac{1}{32} W_{\mathcal{L}_1 \oplus [1]}(1, 2\epsilon-1)}{\frac{1}{16} W_{\mathcal{L}_1}(1, 2\epsilon-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{W_{\mathcal{L}_1}(1, 2\epsilon-1) + W_{\mathcal{L}_1 + [1]}(1, 2\epsilon-1)}{W_{\mathcal{L}_1}(1, 2\epsilon-1)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{W_{\mathcal{L}_1}(2\epsilon-1, 1)}{W_{\mathcal{L}_1}(1, 1-2\epsilon)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W_{\mathcal{L}_1}(1-2\epsilon, 1)}{W_{\mathcal{L}_1}(1, 1-2\epsilon)} \right)$ 。

注意到 $W_{\mathcal{L}_1}(x, y) = x^{15} + 15x^7y^8$ ，这一点可以从 \mathcal{L}_1 的元素中除了全 0 以外，其余 15 项均有 8 个 1 看出。

于是有 $p_s = \frac{1+15(1-2\epsilon)^8}{16}$, $\epsilon_{out} = \frac{1+15(1-2\epsilon)^8 - (1-2\epsilon)^{15} - 15(1-2\epsilon)^7}{2(1+15(1-2\epsilon)^8)}$ 。

可以做出 $\epsilon_{out} - \epsilon$ 图象如下所示：



容错阈值 $\epsilon_0 \approx 0.141$; $\epsilon \rightarrow 0, \epsilon_{out} \approx 35\epsilon^3$ 。

注意到 $\epsilon \rightarrow 0, p_s \rightarrow 1$ ，因此 15 个不纯的初态可以纯化为 1 个纯净的态。

考虑 k 级容错操作， $15^k \approx n$, $\epsilon_{out} \approx \frac{1}{\sqrt{35}} (\sqrt{35}\epsilon)^{3^k} \sim (\sqrt{35}\epsilon)^{n^\xi}$, $\xi = \frac{1}{\log_3 15} \approx 0.4$, $n \approx O(\log^{\frac{1}{\xi}}(\frac{1}{\epsilon}))$ 。

从结果上来看，如果初始错误率为 0.1，大概需要 10000 个不纯的初态才能蒸馏出 1 个较为纯净的

5 低开销 H 型魔术态蒸馏

需要理解的是, X 算符对应的是两行之间的加法, 因此可以由 $|G_0\rangle$ 表出 $|G\rangle$ 。

可以证明存在仅由 $\Lambda(Z)$ (受控 Z 门) 与 S 门构成的 Clifford 操作 U, 使得 $|\overline{A^{\otimes k}}\rangle = UT^{\otimes n}|G\rangle$,

其中 $T = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$, 下面为具体证明过程:

首先定义 $\epsilon(y) \equiv |y| \pmod{2}$ 来表征 01 串 $y = (y_1, y_2 \dots y_m)$ 的奇偶性。

$$\epsilon(y) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2)^{|y|}] = \frac{1}{2}[1 - \sum_{p=0}^{|y|} \binom{|y|}{p} (-2)^p] = \sum_{p=1}^{|y|} \binom{|y|}{p} (-2)^{p-1}。$$

其中的组合数可以理解成从 $|y|$ 中选 p 个的种数, 亦即 $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_p}$ 。

$$\text{于是可以得到 } e^{\frac{i\pi\epsilon(y)}{4}} = \exp\left[\frac{i\pi}{4} \sum_a y_a - \frac{i\pi}{2} \sum_{a < b} y_a y_b + i\pi \sum_{a < b < c} y_a y_b y_c\right],$$

后续的项不需要考虑是因为 $e^{2k\pi i} = 1$ 。

我们知道 $T^{\otimes n}|G\rangle = \sum_{f \in \mathcal{G}} e^{\frac{i\pi|f|}{4}} |f\rangle$, 其中 $f = \sum_{a=1}^m x_a g^a \pmod{2}$, g^a 表示 G 的行向量。

将 f 按照每一列进行分别处理, 此时可以定义新的 01 串 $y_j = (x_1 g_j^1, x_2 g_j^2 \dots x_m g_j^m)$, $|f| = \sum_{j=1}^n \epsilon(y_j)$ 。

利用前面求得的公式, 可以得到:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\pi|f|}{4}} &= \exp\left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{i\pi}{4} \sum_a y_j^a - \frac{i\pi}{2} \sum_{a < b} y_j^a y_j^b + i\pi \sum_{a < b < c} y_j^a y_j^b y_j^c\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{i\pi}{4} \sum_{a=1}^m x_a |g^a| - \frac{i\pi}{2} \sum_{a < b} x_a x_b |g^a \cdot g^b| + i\pi \sum_{a < b < c} x_a x_b x_c |g^a \cdot g^b \cdot g^c|\right]。 \end{aligned}$$

注意到三正交性质保证了最后一项没有贡献, 更一般地, 可以定义整数 Γ_a, Γ_{ab} :

$$|g^a \cdot g^b| = 2\Gamma_{ab}, |g^a| = \begin{cases} 2\Gamma_a + 1, & 1 \leq a \leq k \\ 2\Gamma_a, & k + 1 \leq a \leq m \end{cases}。$$

把其中的前 k 行剥离出来, 其余部分收缩进相位函数 $Q(x)$ 中:

$$e^{\frac{i\pi|f|}{4}} = \exp\left[\frac{i\pi}{4} \sum_{a=1}^k x_a\right] \exp\left[\frac{i\pi}{2} Q(x)\right], \text{ 其中 } Q(x) = \sum_{a=1}^m \Gamma_a x_a - 2 \sum_{a < b} \Gamma_{ab} x_a x_b。$$

现在我们想要说明后半部分可以由某个 Clifford 操作 U 作用于 $|f\rangle$ 来实现, 这就需要将系数 x 用向量 f 表示出来。

我们知道 $f = \sum_{a=1}^m x_a g^a$, 其中 g^a 是线性无关的, 因此总是可以找到矩阵 B, 使得 $x_a = \sum_{p=1}^n B_{ap} f_p \pmod{2}$, 实际上 $B=G$ 即可。

这一步可以再一次利用之前的二项式展开, 构造 $y = (B_{a1} f_1 \dots B_{an} f_n)$, $\epsilon(y) = x_a$,

$$\text{于是有 } x_a = \sum_{p=1}^n B_{ap} f_p - 2 \sum_{p < q} B_{ap} B_{aq} f_p f_q \pmod{4}, 2x_a x_b = 2 \sum_{p, q} B_{ap} B_{bq} f_p f_q \pmod{4}。$$

此时可以把 Q 作为 f 的函数, 得到 $Q(f) = \sum_{p=1}^n C_p f_p - 2 \sum_{p < q} C_{pq} f_p f_q \pmod{4}。$

具体地, $C_p = \sum_{a=1}^m \Gamma_a B_{ap} - 2 \sum_{a < b} \Gamma_{ab} B_{ap} B_{bp}$, (注意这一步利用了 $f_a f_a = f_a$)。

$$C_{pq} = \sum_{a=1}^m \Gamma_a B_{ap} B_{aq} - \sum_{a < b} \Gamma_{ab} (B_{ap} B_{bq} + B_{bp} B_{aq})。$$

因此我们可以相应地定义对于所有比特 p 上的 $(S^\dagger)^{C_p}$ 与所有 $p < q$ 上的 $\Lambda(Z)^{C_{pq}}$ 操作来与 $Q(f)$ 相位部分相抵消, 注意整个 U 操作都是由三正交矩阵的形式确定的。

$$\text{于是我们得到了 } UT^{\otimes n}|f\rangle = \exp\left[\frac{i\pi}{4} \sum_{a=1}^k x_a\right] |f\rangle。$$

对于所有的 f 进行求和, 有 $UT^{\otimes n} |G\rangle = \prod_{a=1}^k [I + e^{\frac{i\pi}{4}} X(g^a)] |G_0\rangle = |\overline{A^{\otimes k}}\rangle$ 。

注意理解其中的求和, 连乘式前后两项的选择对于每一套 $x_a (1 \leq a \leq k)$, 因此在奇矩阵空间已被固定, 而在偶矩阵空间可以任意选择, 满足这样条件的所有项表述为 $\prod X(x_a) |G_0\rangle$ 。

最后给出一个关于三正交矩阵的有趣性质: 如果三正交矩阵没有全 0 的列, 且存在奇矩阵部分, 且偶矩阵部分的行数小于 3, 则偶矩阵部分一定包含全 0 的列。

采用反证法证明, 如果偶矩阵只有一行, 必须全为 1, 此时与奇矩阵的任意一行都必然有奇数个共同的 1, 矛盾。

如果偶矩阵只有 2 行 g_1, g_2 , 且没有全 0 列, 经过列重排之后可以写作 $G_0 = [A \ B \ C], A = \begin{bmatrix} 1 \dots 1 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}$ 。

考虑 G_1 中的某一行 f , 其在 A,B,C 三个部分中 1 的个数分别为 w_A, w_B, w_C , 可以得到:

$$|g_1 \cdot f| = w_A + w_C = 0 \pmod{2}, |g_2 \cdot f| = w_B + w_C = 0 \pmod{2}, |g_1 \cdot g_2 \cdot f| = w_C = 0 \pmod{2},$$

这与 $|f| = w_A + w_B + w_C = 0 \pmod{2}$ 矛盾。综上, 原结论成立。

5.2 稳定子编码的构造

基于以上三正交矩阵的理论, 我们可以构造出稳定子编码 $CSS(X, \mathcal{G}_0; Z, \mathcal{G}^\perp)$, 可以看出其中的 X 型稳定子与 Z 型稳定子是相互对易的, 下面我们着重关注该编码的逻辑空间的性质。

该编码有 k 个逻辑比特, 并且逻辑算符为 $X_a^L = X(f^a), Z_a^L = Z(f^a), a = 1, 2 \dots k$, 其中 $f_1, f_2 \dots f_k$ 为 G_1 中的行。

由于奇矩阵的每一行之间有奇数个 1, 因此对于逻辑 Z, 逻辑 X 之间是反对易的; 而不同奇矩阵的行之间有三正交性保证了同为 1 的位置有偶数个, 因此不同逻辑比特上的逻辑算子是对易的。同时容易看出逻辑算子与所有的稳定子也正交, 并且维度计算也能够说明的确有 k 个逻辑比特。

现在我们需要说明在前一节中所定义的 $|G_0\rangle, |G\rangle, |\overline{A^{\otimes k}}\rangle$ 分别对应 $|0^{\otimes k}\rangle, |+\otimes^k\rangle, |A_0^{\otimes k}\rangle$, 即对应于逻辑本征态的直积态。

方便起见, 我们再次列出定义这三个态的定义式:

$$|G_0\rangle = \sum_{g \in \mathcal{G}_0} |g\rangle, |G\rangle = \sum_{g \in \mathcal{G}} |g\rangle = \prod_{a=1}^k (I + X(f^a)) |G_0\rangle, |\overline{A^{\otimes k}}\rangle = \prod_{a=1}^k [I + e^{\frac{i\pi}{4}} X(f^a)] |G_0\rangle.$$

首先说明 $|G_0\rangle$ 被 $X(f \in \mathcal{G}_0), Z(f \in \mathcal{G}^\perp), Z(f \in \mathcal{G}_1)$ 稳定:

X 算符的作用相当于给 g 加上 \mathcal{G}_0 中的某一行, 由于 \mathcal{G}_0 对加法的封闭性可以证得被 X 稳定子所稳定。

Z 算符的稳定性只需要计算作用位置所代表的 01 串 f 与量子态本身的 01 串 g 之间是否有偶数个重合, 即两个 01 串的内积是否为 0。显然由于三正交矩阵的性质可知, 被所有逻辑 Z 算子稳定; 由于正交补的定义可知, 被所有的 Z 稳定子稳定。

于是可以看出 $|G\rangle = \prod_{a=1}^k (I + X(f^a)) |G_0\rangle$ 对应于 $|+\otimes^k\rangle$ 并且 $|\overline{A^{\otimes k}}\rangle = \prod_{a=1}^k [I + e^{\frac{i\pi}{4}} X(f^a)] |G_0\rangle$ 对应于 $|A_0^{\otimes k}\rangle$ 。注意以上过程我们不考虑归一化问题。

利用上一节中我们所证明的关键定理 $|\overline{A^{\otimes k}}\rangle = UT^{\otimes n} |G\rangle$, 我们可以通过对所有比特作用 T 门 (非 Clifford) 与作用一些 CZ 门与 S 门 (Clifford) 来完成魔术态 $|A_0^{\otimes k}\rangle$ 的制备。

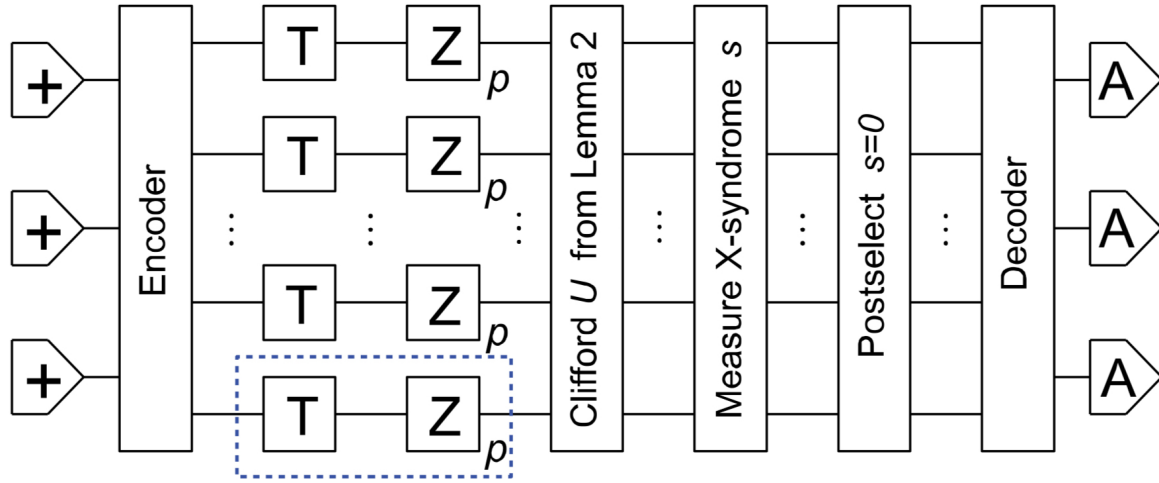
更一般地, 对于逻辑态 $|x\rangle = |x_1 x_2 \dots x_k\rangle$,

$$\text{定义 } |\bar{x}\rangle = (X_1^L)^{x_1} (X_2^L)^{x_2} \dots (X_k^L)^{x_k} |G_0\rangle = \sum_{f \in \mathcal{G}_0 + x_1 f^1 + x_2 f^2 + \dots + x_k f^k} |f\rangle,$$

利用前一节所证明的 $UT^{\otimes n} |f\rangle = \exp[\frac{i\pi}{4} \sum_{a=1}^k x_a] |f\rangle$, 可以实现多比特魔术态的制备。

5.3 魔术态蒸馏

我们考虑不完美的 T 门仅仅是在每个完美 T 门之后引入了 p 概率的 Z 噪声而造成的, 于是整个线路可以构造如下:



具体来说, 先构造初态 $|G\rangle$, 再在每个比特上作用喊 Z 噪声的 T 门, 并进行相应的 U 操作, 这样就实现了对应的多个逻辑比特上魔术态的制备。接着进行稳定子测量, 使得量子态投影到编码空间上。注意在该过程中我们只测量了 X 稳定子, 是因为引入 Z 错误并不会改变任何 Z 测量的结果。

由此我们知道, 此时的噪声相当于以一定概率对目标的量子态作用了一些 Z 算子 (逻辑算子和稳定子所对应的 Z 算子), 即 $Z(f), f \in \mathcal{G}_0^\perp = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}^\perp$,

$$\text{于是蒸馏操作的成功率为 } p_s = \sum_{f \in \mathcal{G}_0^\perp} (1-p)^{n-|f|} p^{|f|} = \frac{1}{|\mathcal{G}_0|} \sum_{f \in \mathcal{G}_0} (1-2p)^{|f|}.$$

现在考虑噪声对我们所制备出的完美 $|\overline{A^{\otimes k}}\rangle = |A_0^{\otimes k}\rangle$ 的影响:

$$Z(f \in \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}^\perp) |\overline{A^{\otimes k}}\rangle = Z(g + x_1 f^1 + x_2 f^2 + \dots + x_k f^k) |\overline{A^{\otimes k}}\rangle = (Z_1^L)^{x_1} (Z_2^L)^{x_2} \dots (Z_k^L)^{x_k} |A_0^{\otimes k}\rangle = |A_x\rangle, \text{ 注意其中 } Z(g \in \mathcal{G}^\perp) \text{ 代表稳定子, } |A_x\rangle = |A_{x_1}\rangle \otimes |A_{x_2}\rangle \otimes \dots \otimes |A_{x_k}\rangle.$$

$$\text{噪声作用的结果为: } \rho_{out} = \frac{1}{p_s} \sum_{x \in \mathbb{F}_2^k} p_{out}(x) |A_x\rangle \langle A_x|, \text{ 其中 } p_{out}(x) = \sum_{f \in \mathcal{G}^\perp + x_1 f^1 + \dots + x_k f^k} (1-p)^{n-|f|} p^{|f|}.$$

最后的解码操作是将其中的每一个逻辑态编码到一个物理比特上, 因此需要知道上述过程中某一个逻辑比特得到正确结果的概率:

$$p_{out,a} = (1 - q_a) |A_0\rangle \langle A_0| + q_a |A_1\rangle \langle A_1|, q_a = 1 - \frac{1}{p_s} \sum_{x: x_a=0} p_{out}(x),$$

上式的含义为正确输出由上述噪声作用结果所给定, 其他情况在解码后可进行退相位操作,

$$\text{于是得到 } q_a = 1 - \frac{\sum_{f \in (\mathcal{G}_0 \oplus f^a)^\perp} (1-p)^{n-|f|} p^{|f|}}{\sum_{f \in \mathcal{G}_0^\perp} (1-p)^{n-|f|} p^{|f|}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sum_{f \in \mathcal{G}_0 \oplus f^a} (1-2p)^{|f|}}{\sum_{f \in \mathcal{G}_0} (1-2p)^{|f|}}。$$

实际的错误率用 q_a 中的最大值表征，对于给定的三正交矩阵，可以数值计算得到结果。

从量级上看 $q_a \approx O(p^d)$, $d = \min_{f \in \mathcal{G}_0^\perp \setminus \mathcal{G}^\perp} |f|$ ，这是因为上式中的分母约为 1，需要找到分子 p 的最低次项。

一次性得到若干个纯化态的意义使得最初设计下 1:15 的比例得到优化，变为 $\Gamma(p) = \frac{k p_s(p)}{n} \approx \frac{k}{n}$ 。

于是此时级联编码 s 次的开销为 $C = (\frac{n}{k})^s$ ，错误率为 $\epsilon = p^{d^s} = p^{C^{\frac{1}{\gamma}}}$, $\gamma = \frac{\log(\frac{n}{k})}{\log(d)}$ 。

因此总的开销可以记为 $C(\epsilon) = O(\log^\gamma(\frac{1}{\epsilon}))$

5.4 三正交矩阵的构造

为了使得上述的 γ 尽可能小，同时魔术态蒸馏操作有效，我们需要满足两个条件：1. $\frac{n}{k}$ 尽可能大，2. $d \geq 2$ 。很容易想到我们可以使得三正交矩阵中的偶矩阵尽量小，不过在前面章节中我们曾证明过偶矩阵的行数小于 3 时将会带来全 0 的列，不妨设为第一列，此时 $(1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{G}_0^\perp \setminus \mathcal{G}^\perp$ ，此时将导致 $d=1$ ，从而蒸馏失效。下面给出一种三正交矩阵的构造：

我们用如下方式构造 $\frac{k}{n} = \frac{k}{3k+8}$ 的矩阵：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

$$G(k) = \begin{bmatrix} 0 & L & M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L & 0 & M & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & \cdots & M \\ S_1 & S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \end{bmatrix}, \text{其中 } L, M \text{ 均出现 } \frac{k}{2} \text{ 次。}$$

该矩阵有 k 个奇行，3 个偶行，现在来验证其三正交性质：

1. 所有奇行之间两两重叠部分为 L ，均正交。偶行之间每个部分 S_1, S_2 均满足两两重叠部分为偶数。一个奇行与偶行之间可能的重叠部分为 L, M 。 L 部分与 S_1 所有行满足正交关系， M 部分与 S_2 所有行也满足，因为 S_2 的前 3 列与后 3 列总是有偶数个 1。因此两行之间的正交关系满足。

2. 三重叠关系：奇行之间三重叠部分只有 L ，满足条件；偶行之间三重叠部分只有 2 个 S_1 ，因此也为偶数；2 个奇行 1 个偶行，可能的三重叠部分只有 L ，无论 S_1 中的任意一行均有偶数个 1，因此满足三重叠关系；1 个奇行 2 个偶行，存在三重叠的部分 L 和 M ，在偶矩阵中如果挑选前 2 行，则在 L 部分三重叠为 1，在 M 部分三重叠也为 1；在偶矩阵中挑选前两行之一与第三行，则在 M 部分三重叠为 0，在 L 部分三重叠为 2，均满足条件。

由于 \mathcal{G}_0 部分只有 3 列，因此错误概率是容易计算的。

具体地，记 $W_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{f \in \mathcal{F}} x^{|f|}$ ，则有：

$W_{\mathcal{G}(k)_0}(x) = 1 + x^8 + 6x^{4+2k}$ ，只需枚举其中的 8 个元素，全 0 对应 1，第三行对应 x_8 ，其余情况均对应于 x^{4+2k} ，因为行相加后仍不改变各部分之内的 1 的个数。

$W_{\mathcal{G}(k)_0 \oplus g^1}(x) = 1 + 2x^7 + x^8 + 6x^{3+2k} + 6x^{4+2k}$ 。枚举其中包含 g_1 的 8 个元素：仅由 g_1 以及 g_1 与第三行相加，均贡献 x^7 ，其余情况再第一个 S_1 部分贡献 2，在第二个 S_1 部分贡献 2，在有 M 的 S_2 部分贡献 $1+2=3$ ，在无 M 的 S_2 部分贡献 4，总计 $2 + 2 + 4 \times \frac{k}{2} - 1 = 2k + 3$ 。

于是 $p_s = \frac{1}{|\mathcal{G}_0|} \sum_{f \in \mathcal{G}_0} (1-2p)^{|f|} \approx 1 - (3k+8)p$,

$$q(p) = 1 - \frac{\frac{1}{2} \sum_{f \in \mathcal{G}_0 \oplus f^a} (1-2p)^{|f|}}{\sum_{f \in \mathcal{G}_0} (1-2p)^{|f|}} = \frac{1 + (1-2p)^8 + 6(1-2p)^{4+2k} - 2(1-2p)^7 - 6(1-2p)^{3+2k}}{2(1 + (1-2p)^8 + 6(1-2p)^{4+2k})} \approx \frac{1 - (1+2p)(1-2p)^7 - 12p(1-2p)^{3+2k}}{2 \times 8} \\ \approx \frac{12p - 56p^2 - 12p(1-2p)^{3+2k}}{16} \approx (1+3k)p^2。$$

因此纠错阈值为 $p_{th} = \frac{1}{3k+1}$ ，可以看出是随着 k 增大而减小的。而随着 k 增大，开销的指数 $\gamma = \log_2 \frac{3k+8}{k} \rightarrow 1.585, C(\epsilon) = O(\log^\gamma \frac{1}{\epsilon})$ 。

15-1 魔术态蒸馏中的开销指数 $\gamma \approx 2.47$ ，但是其容错阈值高，单次蒸馏的错误率为 p^3 ，由此我们不难设想实际上多级蒸馏可以利用阈值高， d 大但是开销较高的方式初次蒸馏，得到较高精度的魔术态之后，再搭配以上构造的低开销低阈值蒸馏方法，实现目标容错率的最低总开销，具体的方式如下：

$-\log_{10} \epsilon_{\text{target}}$	Protocol	$-\log_{10} \epsilon_{\text{actual}}$	C
3	5	3.030	5.521
4	15	4.443	17.44
5	5-5	5.104	27.86
6	15-40	6.802	56.07
7	15-24	7.022	58.30
8	5-5-40	8.125	89.26
9	5-5-5	9.253	139.3
10	15-40-40	11.52	179.4
11	15-40-40	11.52	179.4
12	15-24-36	12.01	187.9
13	15-10-20	13.00	225.6
14	5-5-40-40	14.17	285.6
15	5-5-18-28	15.00	315.5
16	5-5-6-22	16.03	406.2
17	5-5-5-10	17.02	529.5
18	15-40-40-40	20.96	574.1
19	15-40-40-40	20.96	574.1
20	15-40-40-40	20.96	574.1
21	15-38-40-40	21.05	575.9
22	15-22-38-40	22.03	604.3
23	15-14-30-40	23.01	652.3
24	15-10-18-40	24.01	731.5
25	15-6-16-36	25.01	853.1
26	5-5-40-40-40	26.25	914.0
27	5-5-26-38-40	27.04	947.5
28	5-5-16-32-40	28.01	1015
29	5-5-10-26-38	29.01	1125
30	5-5-8-14-30	30.01	1301

以上模拟的 p 为 0.01。不过可以看到，要达到 10^{-12} 的理想正确率，仍需要 180 个逻辑比特，而这些逻辑比特又需要通过较高码距的编码来实现。现在设想，是否并不需要所有的 Clifford 操作在全过程都是完美的，而是按需取用合适的码距进行编码逻辑比特，从而真正意义上减少开销。通过把不同层级的蒸馏操作放在不同码距的编码上，或许才是进一步减小开销的道路。