Design and Analysis of Algorithms
Lecture 2: Merge Sort

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

问题背景

- 2008年北京奥运会
  - 中国举重健儿们刻苦训练、顽强拼搏、勇破纪录
  - 北京航空航天大学为举重项目提供了支持与保障

龙清泉 男子举重56公斤级冠军

北航体育馆承办奥运举重项目

问题背景

- **杠铃增重问题**
  - 每位参赛运动员向组委会提交排好序的三次试举重量
  - 为便于杠铃拆卸，组委会需对所有试举重量递增排序

125	130	132

123	127	129

117	121	126

116	120	122




杠铃增重顺序：

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132

问题：组委会如何根据试举重量安排杠铃增重顺序？

问题背景

- 杠铃增重问题
  - 选择排序
    - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
    - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132

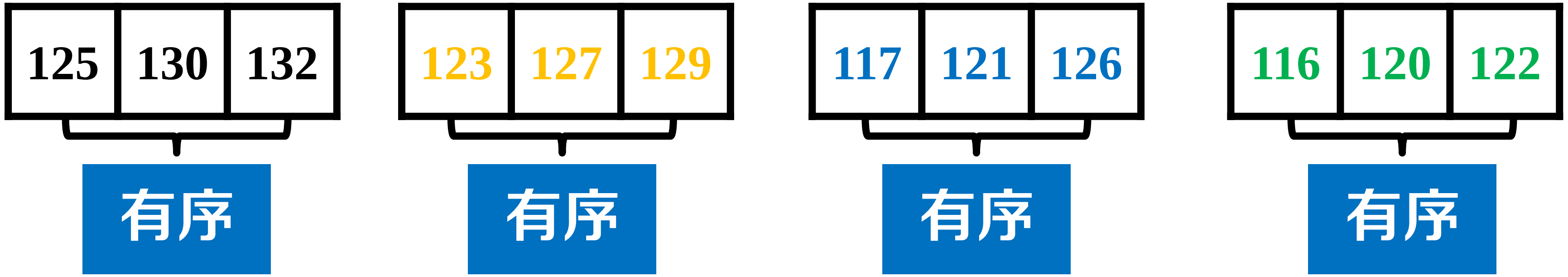
  - 插入排序
    - 依次将每个元素插入到已排序序列之中
    - 比较次数：55次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132

问题：是否还有更高效的算法？

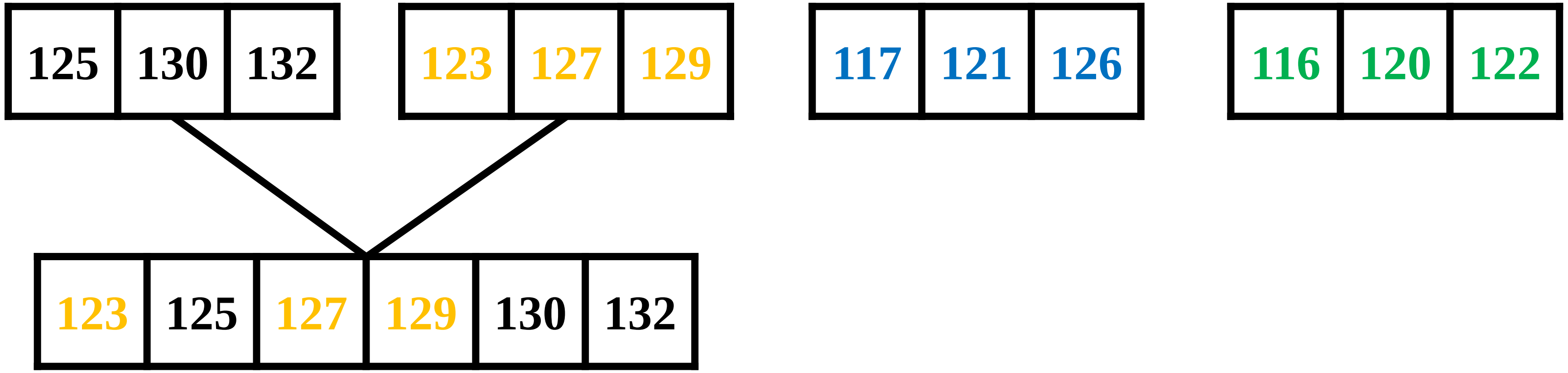
问题背景

- 杠铃增重问题
  - 问题特点：局部有序



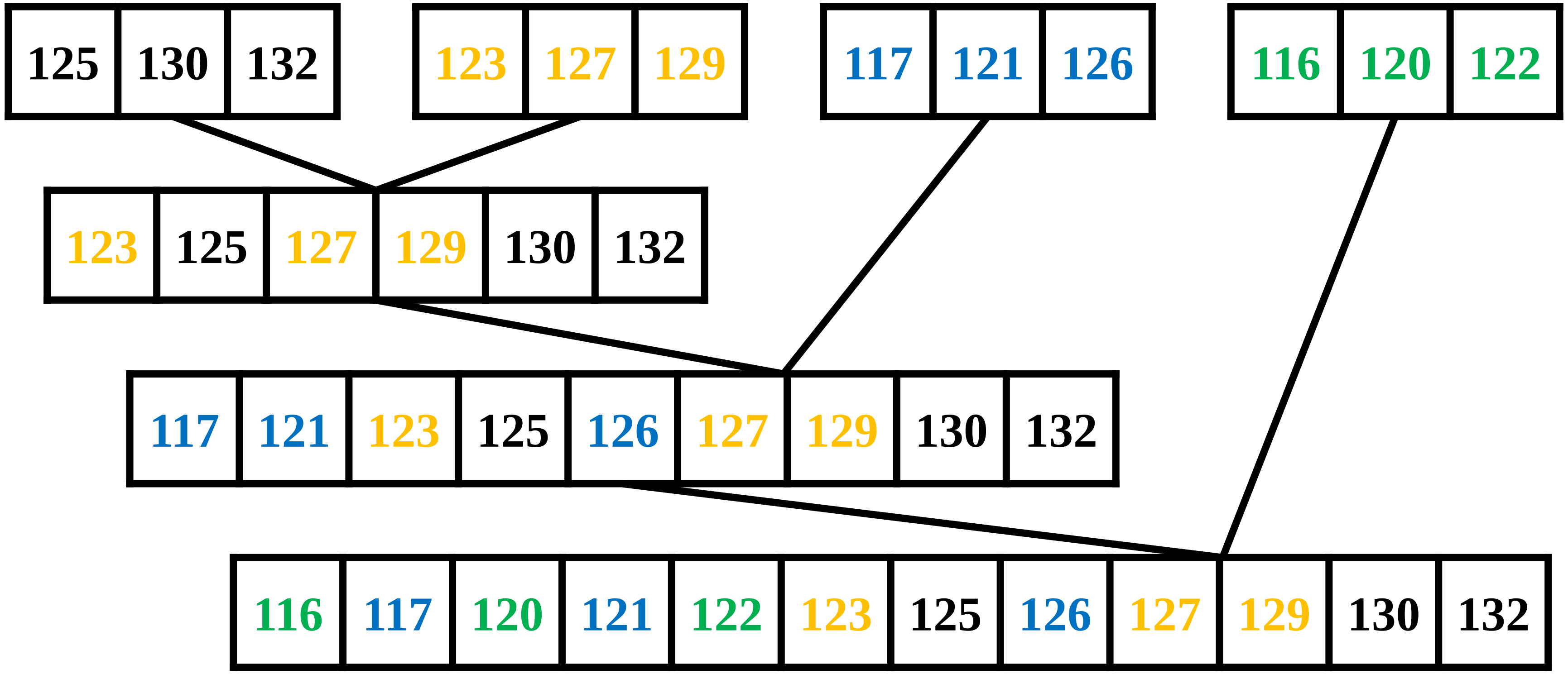
问题背景

- 杠铃增重问题
  - 问题特点：局部有序
  - 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



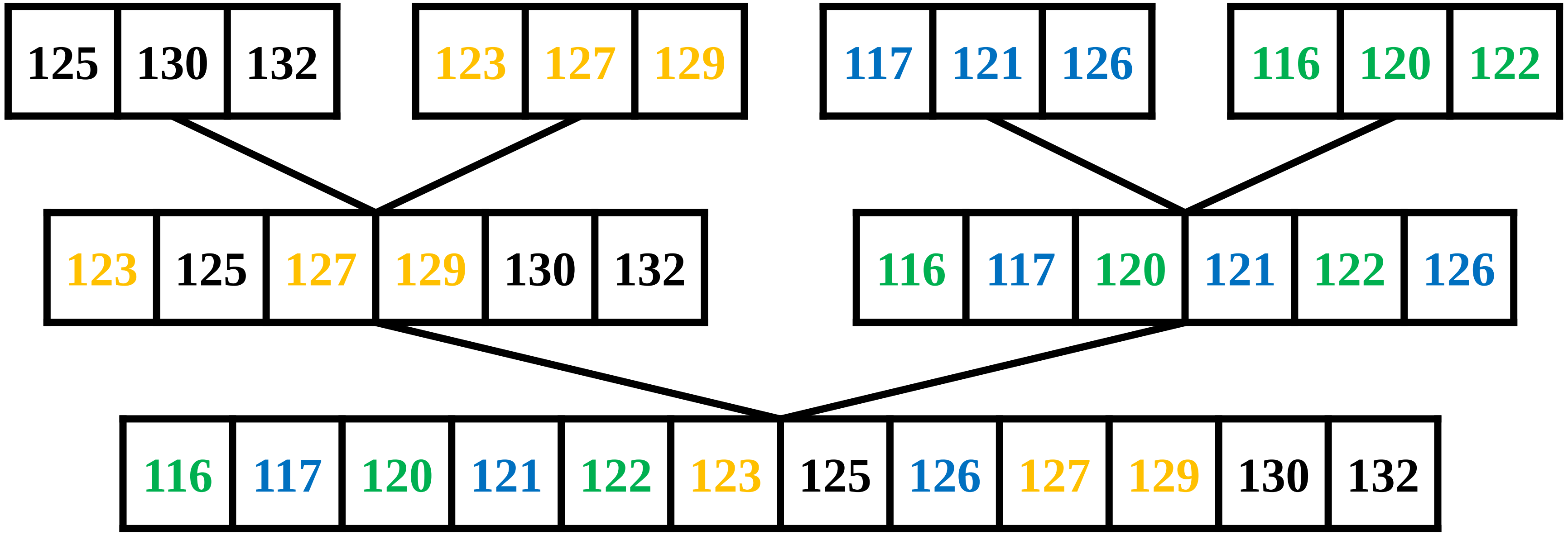
问题背景

- **杠铃增重问题**
  - 问题特点：局部有序
  - 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
  - 后续策略：
    - 逐一合并，比较27次



问题背景

- 杠铃增重问题
  - 问题特点：局部有序
  - 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
  - 后续策略：
    - 逐一合并，比较27次
    - 两两合并，比较24次



问题背景

- 杠铃增重问题
  - 问题特点：局部有序
  - 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
  - 后续策略：
    - 逐一合并，比较27次
    - 两两合并，比较24次

策略名称	4位选手	8位选手	16位选手
逐一合并	27次	105次	405次
两两合并	24次	72次	192次

求解杠铃增重问题的两两合并策略对排序问题有何启发？

从杠铃增重问题到排序问题

- 排序问题回顾

排序问题

Sorting Problem

输入

- 包含n个数字的序列 $< a_1, \dots, a_n >$

输出

- 输入序列的升序

$$< a'_1, a'_2, \dots, a'_n >$$

满足$a'_1 \le a'_2 \le \cdots \le a'_n$

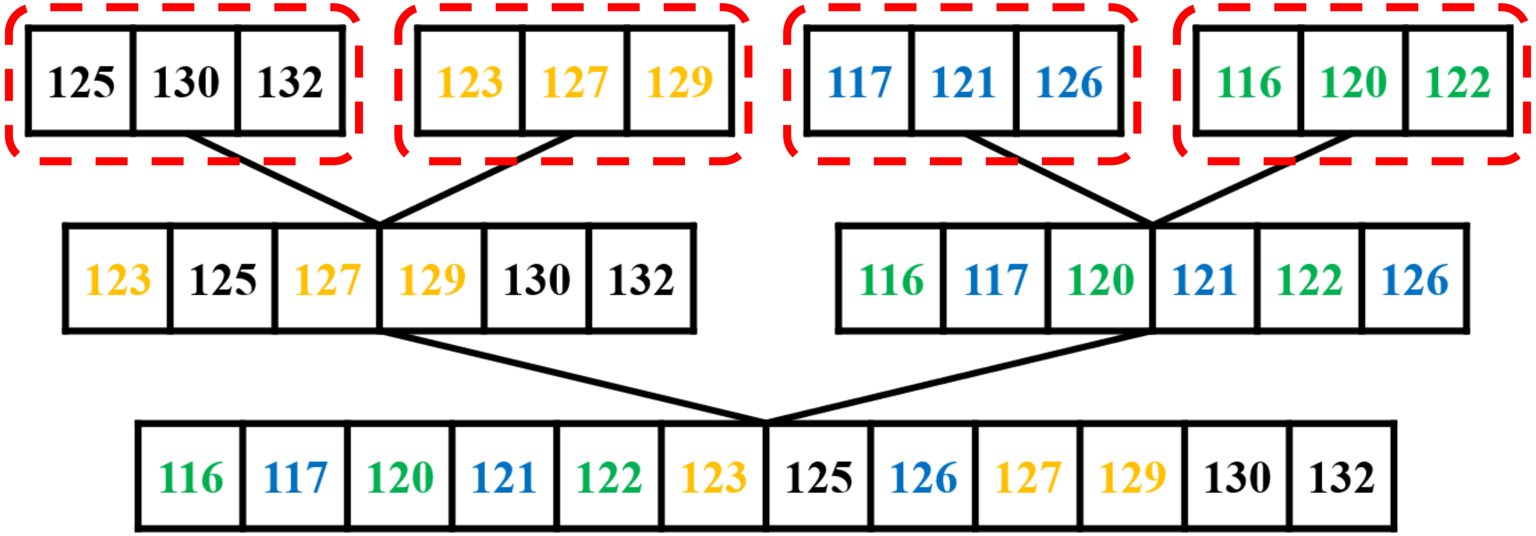
示例

24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18

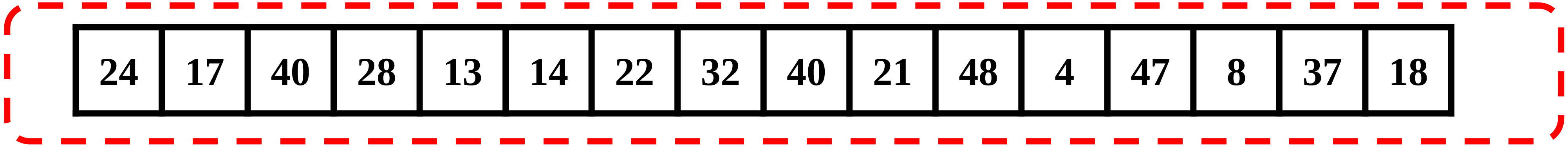
从杠铃增重问题到排序问题

- 问题输入变化
  - 完整数组输入
  - 局部有序缺失

杠铃增重问题



排序问题

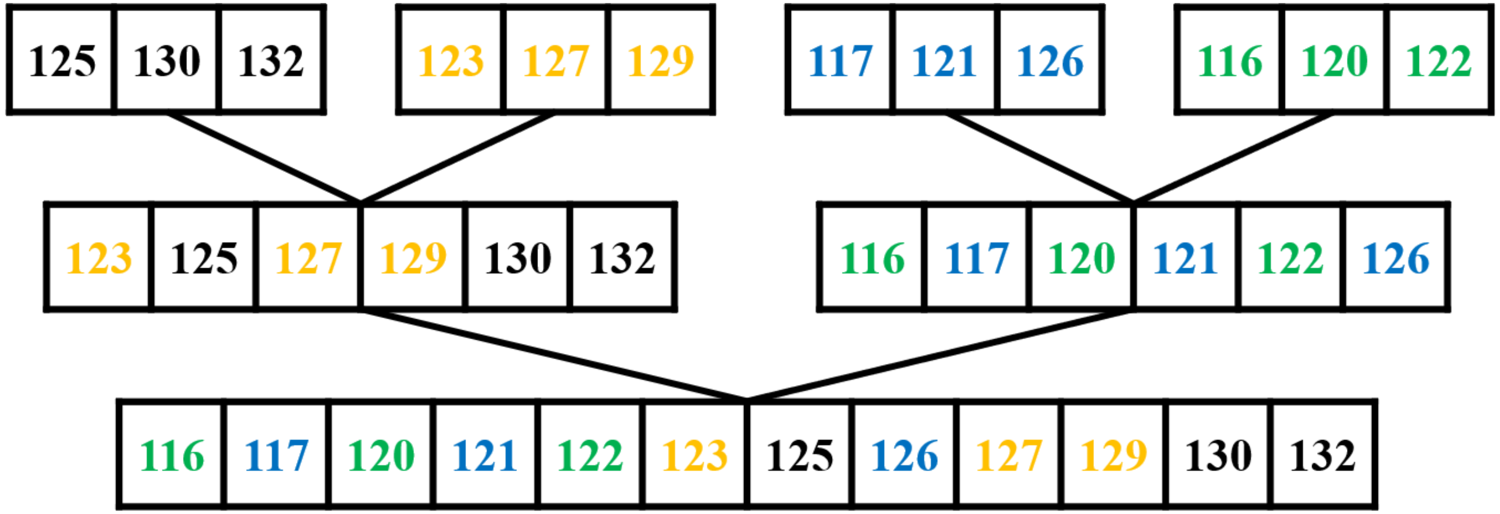


从杠铃增重问题到排序问题

- 问题输入变化
  - 完整数组输入
  - 局部有序缺失

两两合并策略如何适应问题输入的变化?

杠铃增重问题

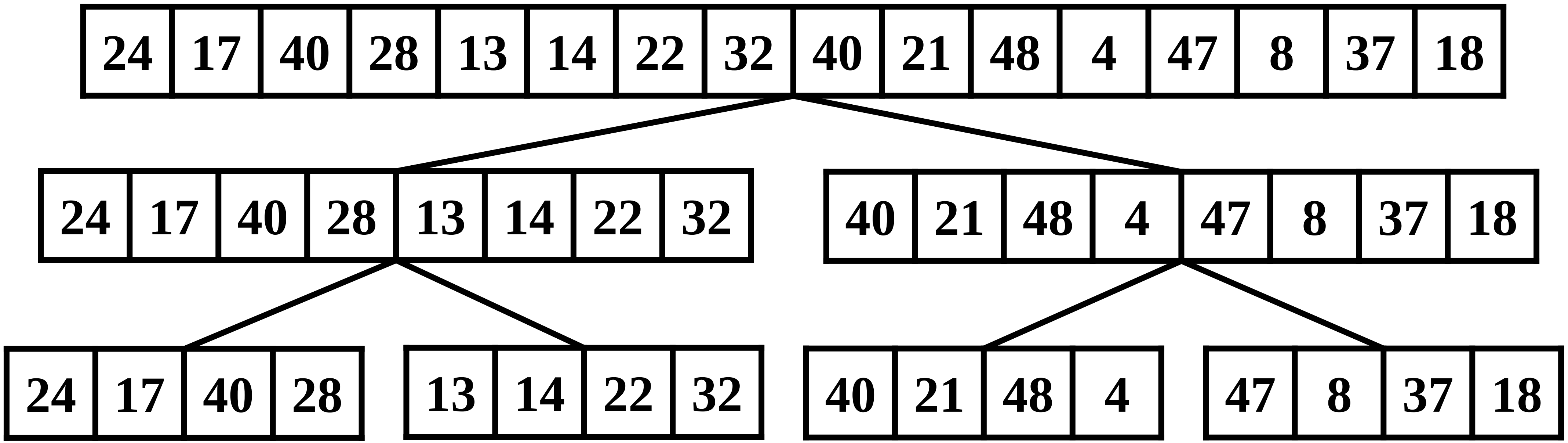


排序问题

24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18

从杠铃增重问题到排序问题

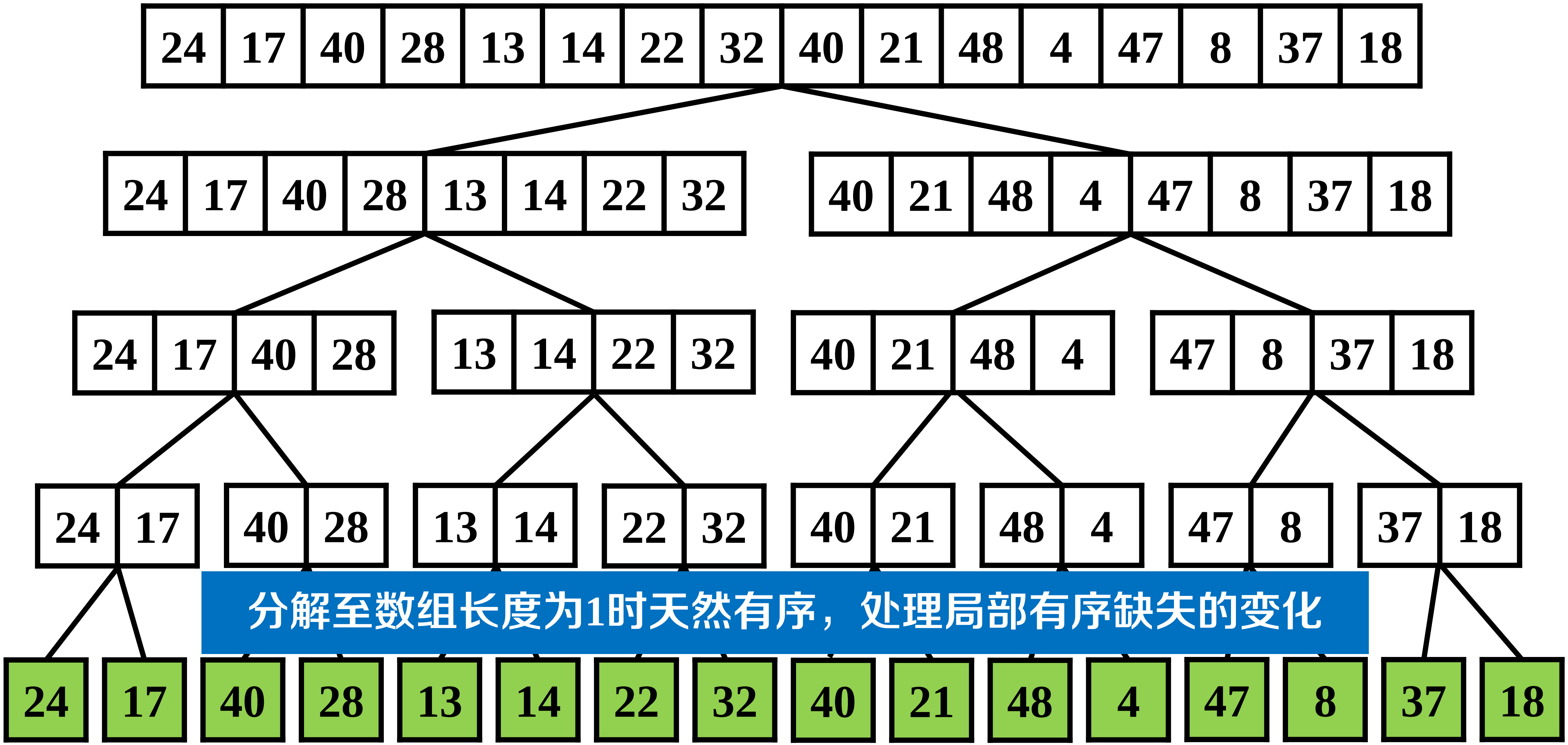
- 解决输入变化：分解输入



通过分解处理完整数组输入的变化

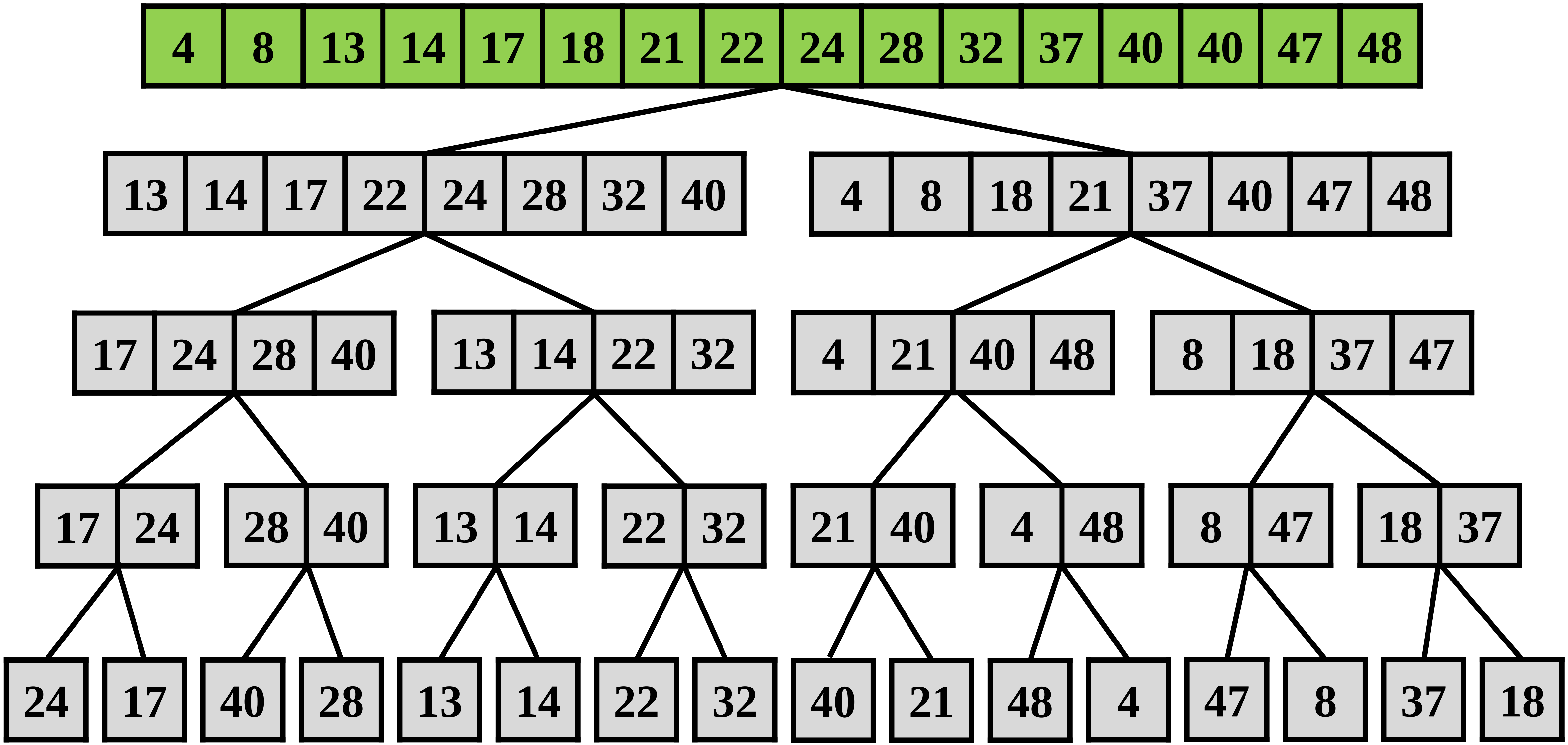
从杠铃增重问题到排序问题

- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题

- 构建有序数组：两两合并



归并排序

24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18

24	17	40	28	13	14	22	32

40	21	48	4	47	8	37	18

- 1945年，冯·诺伊曼提出归并排序

现代计算机之父
约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

归并排序

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	32	37	40	40	47	48

13	14	17	22	24	28	32	40

4	8	18	21	37	40	47	48

- **算法流程**
  - 将数组$A[1,n]$排序问题**分解**为$A[1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor]$和$A[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,n]$排序问题
  - **递归解决**子问题得到两个有序的子数组
  - 将两个有序子数组**合并**为一个有序数组

分解原问题

解决子问题

合并问题解

归并排序：分解数组，递归求解，合并排序 → 分而治之

归并排序：伪代码

- MergeSort$(A, left, right)$

初始调用：MergeSort$(A, 1, n)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

if $left \geq right$ **then**
  return $A[left..right]$
end
$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$
MergeSort$(A, left, mid)$
MergeSort$(A, mid+1, right)$
Merge$(A, left, mid, right)$
return $A[left..right]$

递归终止：仅有一个元素

归并排序：伪代码

- MergeSort$(A, left, right)$

初始调用：MergeSort$(A, 1, n)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$
if $left \geq right$ **then**
  return $A[left..right]$
end
$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$
MergeSort$(A, left, mid)$
MergeSort$(A, mid+1, right)$
Merge$(A, left, mid, right)$
return $A[left..right]$

计算子问题规模

归并排序：伪代码

- $\mathbf{MergeSort}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{left}, \boldsymbol{right})$

初始调用：$\mathbf{MergeSort}(\boldsymbol{A}, 1, \boldsymbol{n})$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$
if $left \geq right$ **then**
| **return** $A[left..right]$
end
$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$
$\text{MergeSort}(A, left, mid)$
$\text{MergeSort}(A, mid+1, right)$
$\text{Merge}(A, left, mid, right)$
return $A[left..right]$

递归求解子问题

归并排序：伪代码

- **MergeSort($A, left, right$)**

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$
if $left \geq right$ **then**
  return $A[left..right]$
end
$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$
MergeSort(A, $left$, mid)
MergeSort(A, $mid+1$, $right$)
Merge($A, left, mid, right$)
return $A[left..right]$

合并子问题解

归并排序：伪代码

- **Merge($A, left, mid, right$)**

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, mid, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$
$i \leftarrow left,\ j \leftarrow mid+1,\ k \leftarrow 0$
while $i \leq mid\ and\ j \leq right$ **do**
  if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**
    $A[left+k] \leftarrow A'[i]$
    $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$
  end
  else
    $A[left+k] \leftarrow A'[j]$
    $k \leftarrow k+1, j \leftarrow j+1$
  end
end
if $i \leq mid$ **then**
  $A[left+k..right] \leftarrow A'[i..mid]$
end
else
  $A[left+k..right] \leftarrow A'[j..right]$
end
return $A[left..right]$

初始化

归并排序：伪代码

- Merge$(A, left, mid, right)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, mid, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$
$i \leftarrow left,\ j \leftarrow mid+1,\ k \leftarrow 0$
while $i \leq mid$ *and* $j \leq right$ **do**
    if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**
        $A[left+k] \leftarrow A'[i]$
        $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$
    end
    else
        $A[left+k] \leftarrow A'[j]$
        $k \leftarrow k+1, j \leftarrow j+1$
    end
end
if $i \leq mid$ **then**
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[i..mid]$
end
else
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[j..right]$
end
return $A[left..right]$

遍历子数组，进行合并

归并排序：伪代码

- **Merge**$(A, left, mid, right)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, mid, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$
$i \leftarrow left,\ j \leftarrow mid+1,\ k \leftarrow 0$
while $i \leq mid$ *and* $j \leq right$ **do**
    if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**
        $A[left+k] \leftarrow A'[i]$
        $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$
    end
    else
        $A[left+k] \leftarrow A'[j]$
        $k \leftarrow k+1, j \leftarrow j+1$
    end
end
if $i \leq mid$ **then**
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[i..mid]$
end
else
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[j..right]$
end
return $A[left..right]$

添加剩余元素保证有序

归并排序：伪代码

- Merge$(A, left, mid, right)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, mid, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$
$i \leftarrow left,\ j \leftarrow mid+1,\ k \leftarrow 0$
while $i \leq mid$ *and* $j \leq right$ **do**
    if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**
        $A[left+k] \leftarrow A'[i]$
        $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$
    end
    else
        $A[left+k] \leftarrow A'[j]$
        $k \leftarrow k+1, j \leftarrow j+1$
    end
end
if $i \leq mid$ **then**
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[i..mid]$
end
else
    $A[left+k..right] \leftarrow A'[j..right]$
end
return $A[left..right]$

时间复杂度：$O(n)$

归并排序：复杂度分析

- $T(n)$：完成MergeSort$(A, 1, n)$ 的运行时间
  - 为便于分析，假设n是2的幂
- MergeSort$(A, left, right)$

输入: 数组$A[1..n]$,数组下标$left, right$
输出: 递增数组$A[left..right]$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{if } left \geq right \textbf{ then}\\ \quad \textbf{return } A[left..right]\\ \textbf{end}\\ mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor\end{array}\right\} O(1)$$

$\text{MergeSort}(A, left, mid) \rightarrow T(n/2)$

$\text{MergeSort}(A, mid+1, right) \rightarrow T(n/2)$

$\text{Merge}(A, left, mid, right) \rightarrow O(n)$

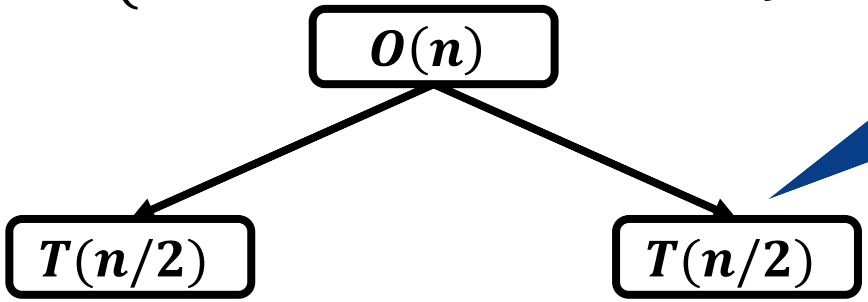
$\textbf{return } A[left..right]$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & if\ n > 1 \\ O(1), & if\ n = 1 \end{cases} \quad ?$$

归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & if\ n > 1 \\ O(1), & if\ n = 1 \end{cases}$$

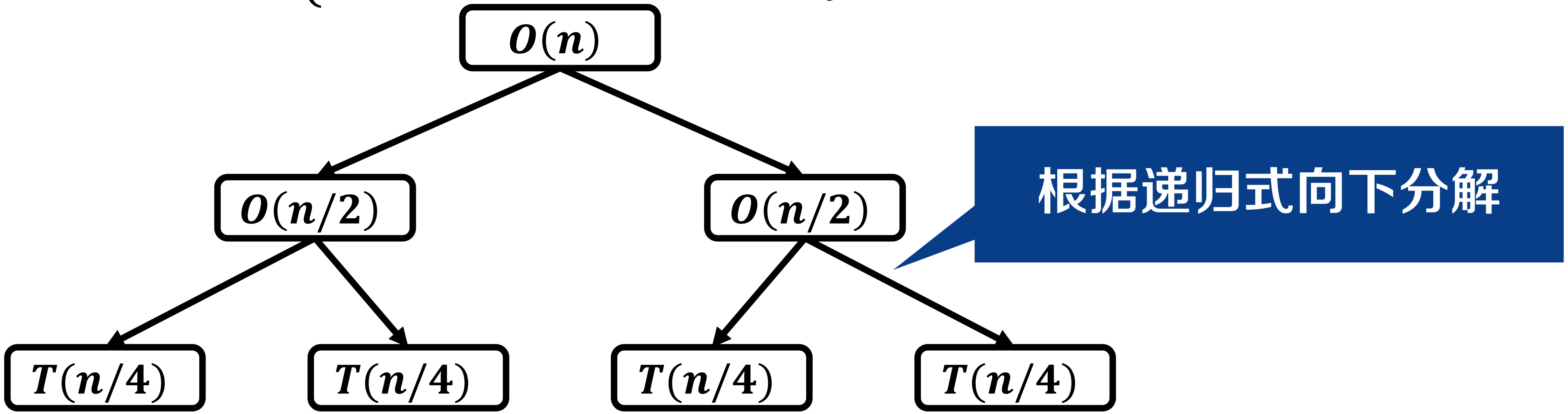


每个结点代表解决一个子问题的代价

归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

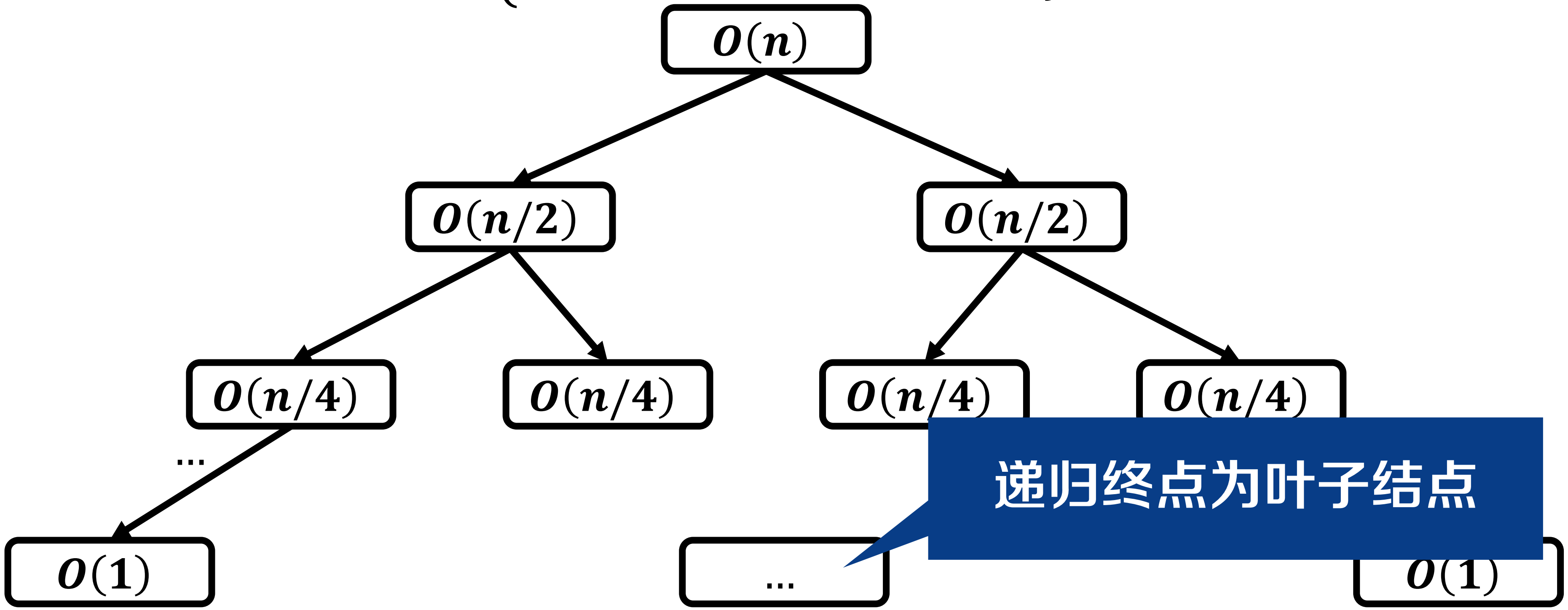
$$T(n)=\begin{cases}2T(n/2)+O(n), & if\ n>1\\ O(1), & if\ n=1\end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

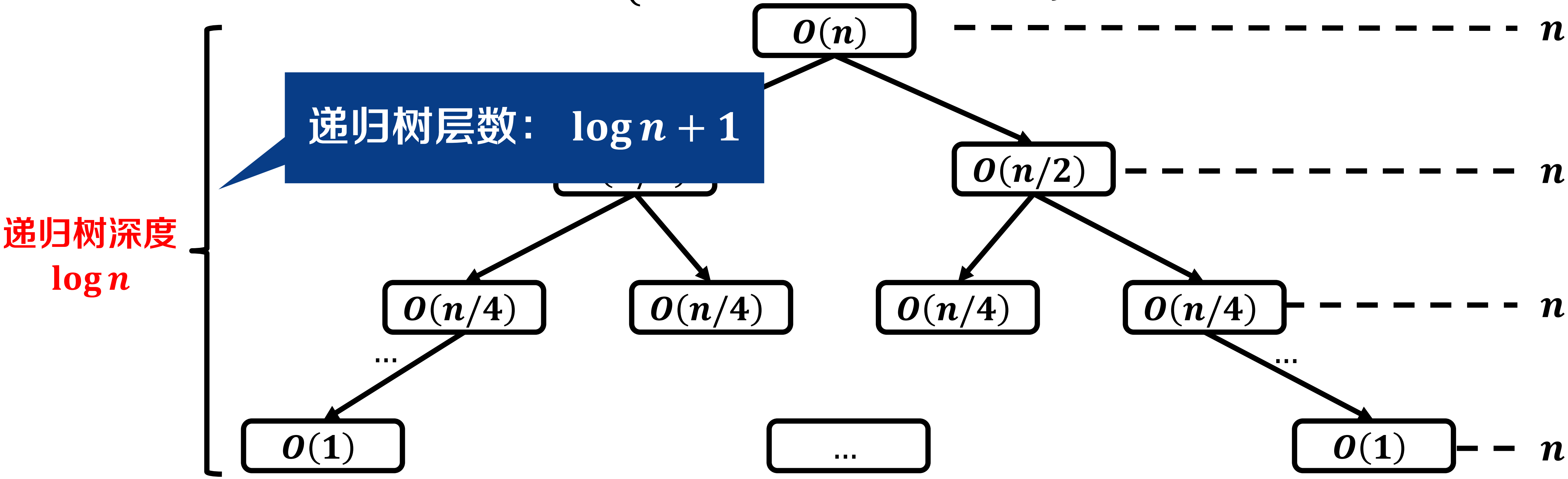
$$T(n)=\begin{cases}2T(n/2)+O(n), & if\ n>1\\ O(1), & if\ n=1\end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n)=\begin{cases}2T(n/2)+O(n), & if\ n>1\\ O(1), & if\ n=1\end{cases}$$

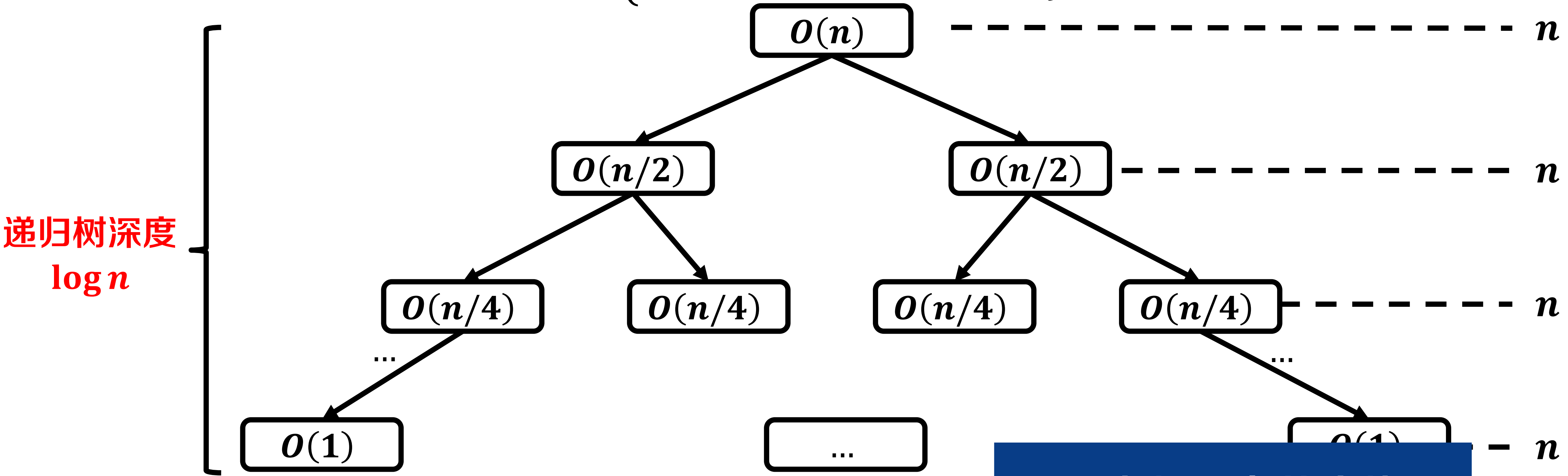


由于树的深度通常由0开始计数，故层数=深度+1，后续统一用“深度”

归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & if\ n > 1 \\ O(1), & if\ n = 1 \end{cases}$$



二者相乘为总代价

$$T(n) = O(n \log n)$$

谢谢

BDA

Beihang University