Design and Analysis of Algorithms

Part IV: Graph Algorithms

Lecture 27: Minimum Spanning Trees: Prim

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

图算法篇概述

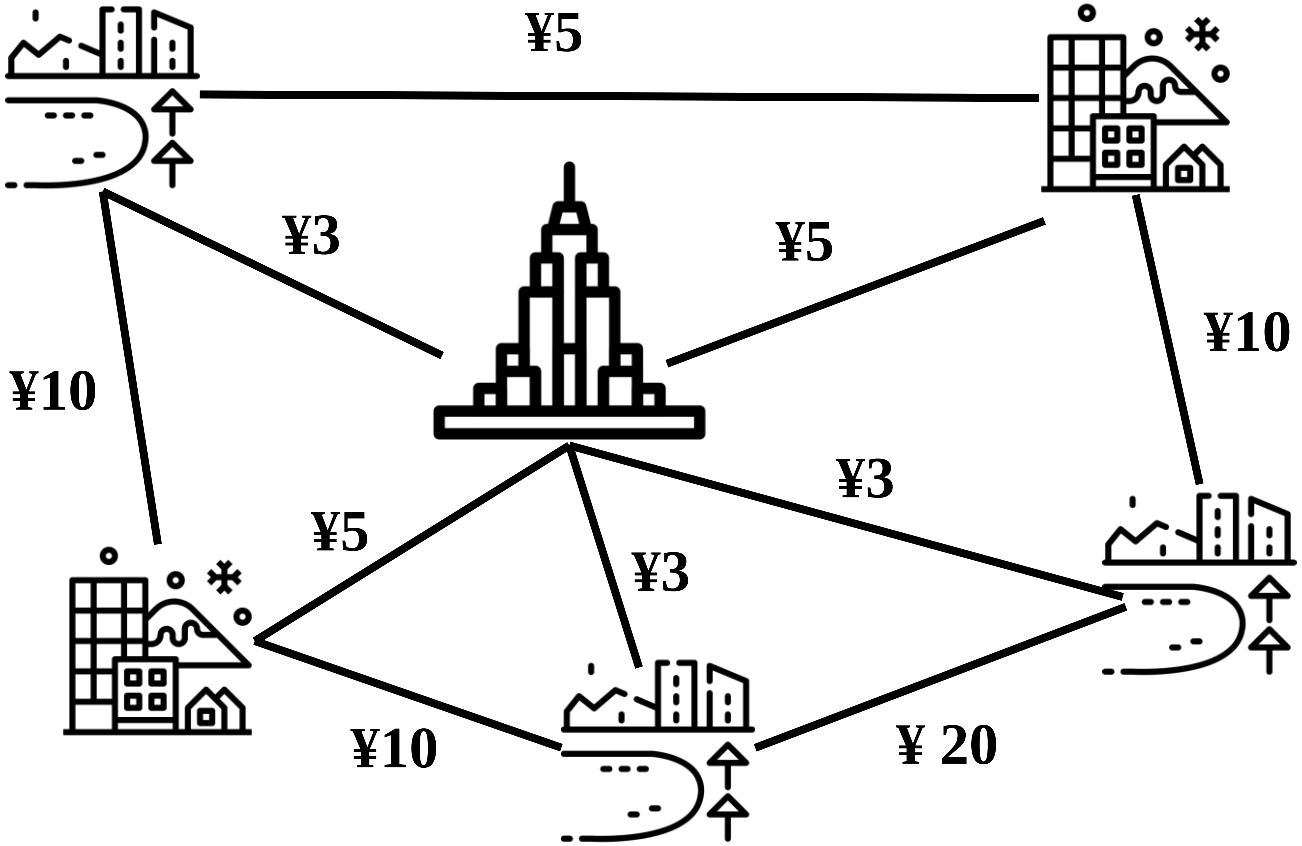
- 在算法课程第四部分“图算法”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Basic Concepts in Graph Algorithms（图算法的基本概念）
  - Breadth-First Search (BFS，广度优先搜索）
  - Depth-First Search (DFS，深度优先搜索）
  - Cycle Detection（环路检测）
  - Topological Sort （拓扑排序）
  - Strongly Connected Components（强连通分量）
  - Minimum Spanning Trees (最小生成树)
  - Single Source Shortest Path (单源最短路径)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有点对最短路径)
  - Bipartite Graph Matching（二分图匹配）
  - Maximum/Network Flows (最大流/网络流)

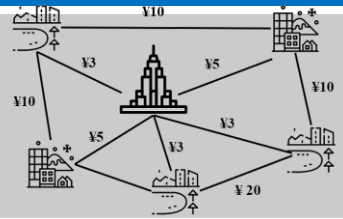
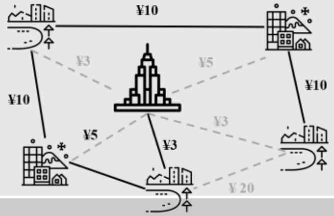
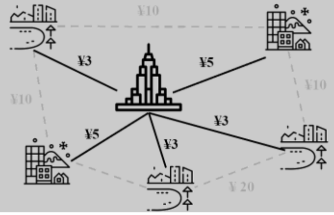
提纲

- 问题背景
- 通用框架
- Prim算法
- 算法实例
- 算法分析

问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同



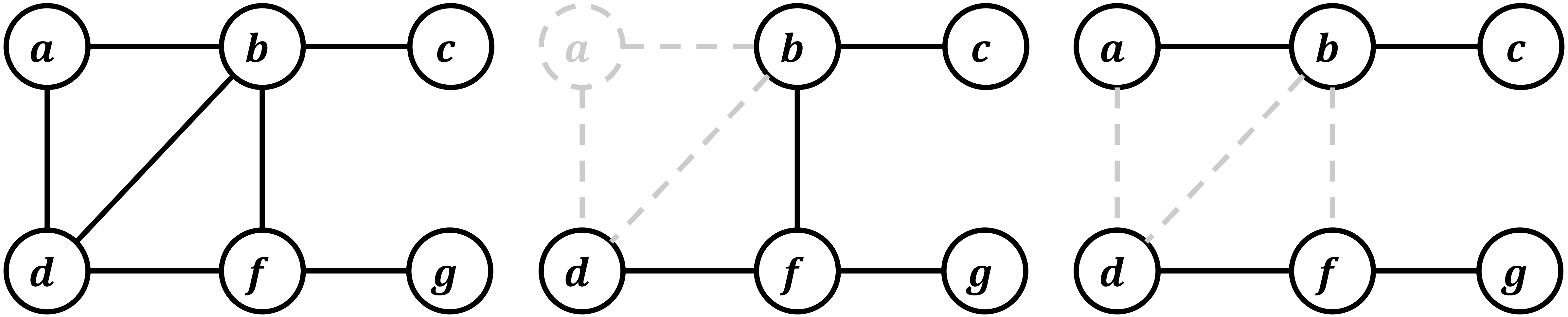
方案	花费
	¥74
	¥38
	¥19

问题：连通各城市的最小花费是多少?

权重最小的连通生成子图

图的概念回顾：生成子图

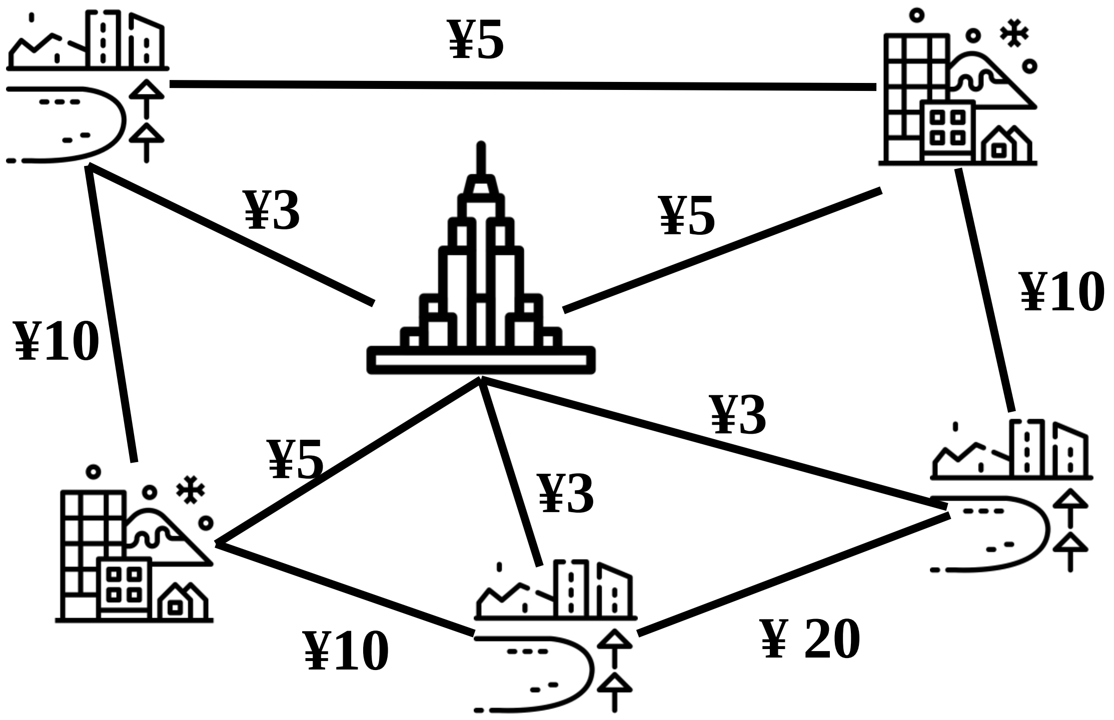
- 子图(Subgraph)
  - 如果$V' \subseteq V, E' \subseteq \mathrm{E}$，则称图$G' =< V', E' >$是图$G$的一个子图
- 生成子图(Spanning Subgraph)
  - 如果$V' = V, E' \subseteq \mathrm{E}$，则称图$G' =< V', E' >$是图$G$的一个生成子图

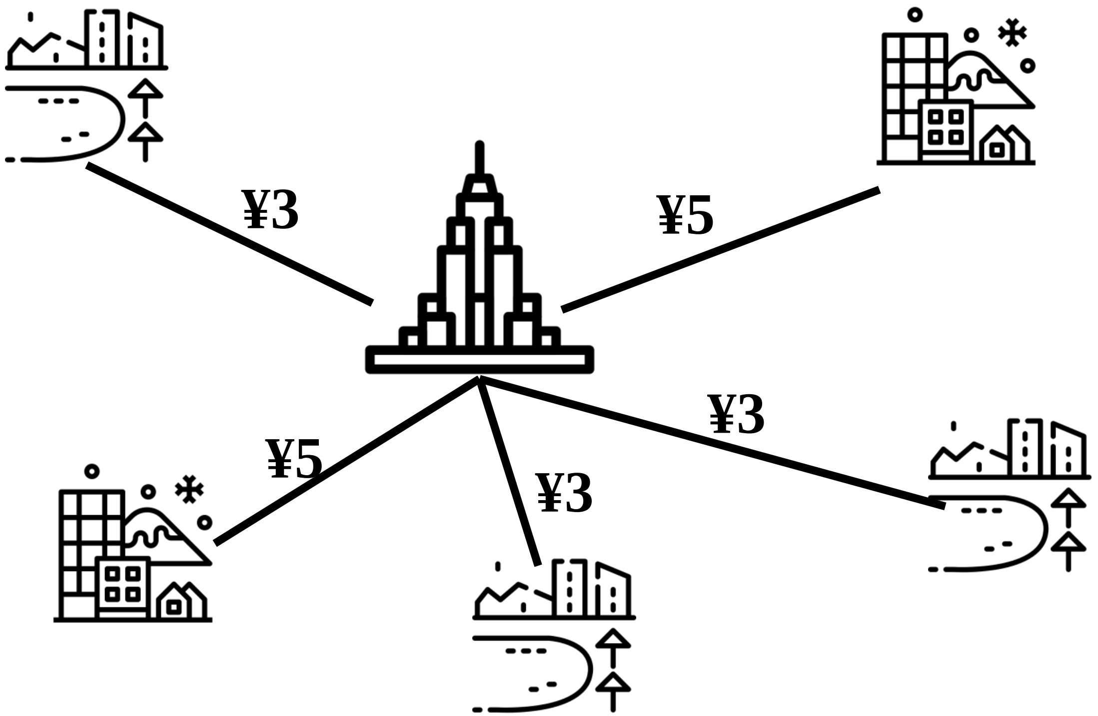


图G　　G的子图　　G的生成子图

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)



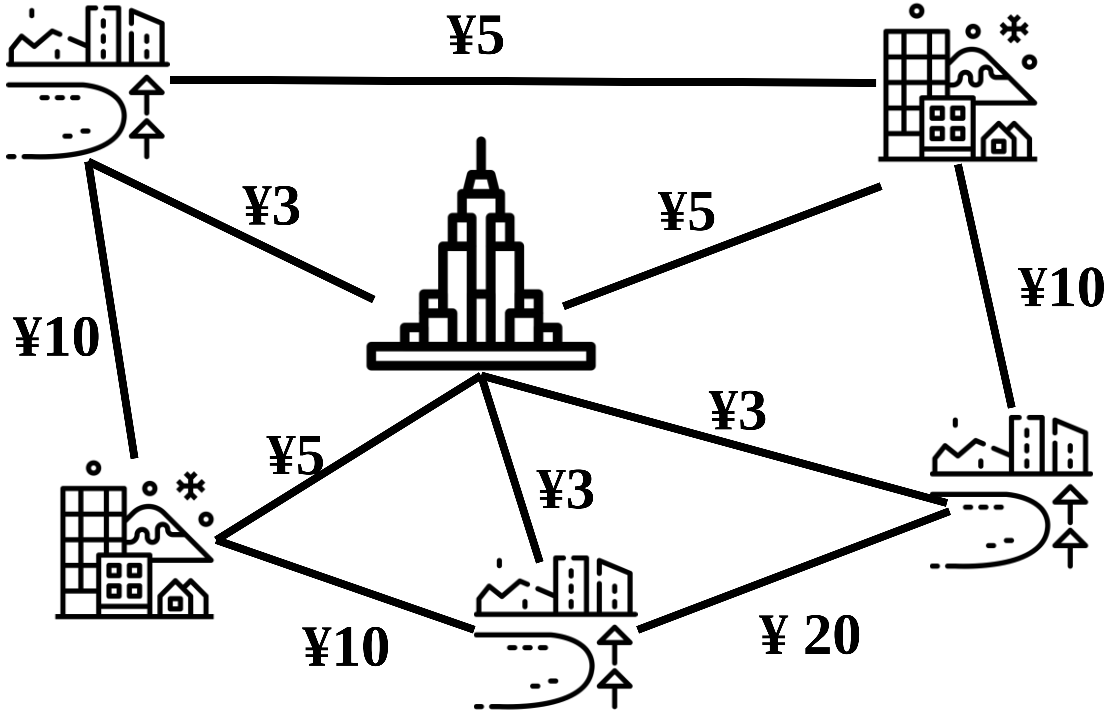


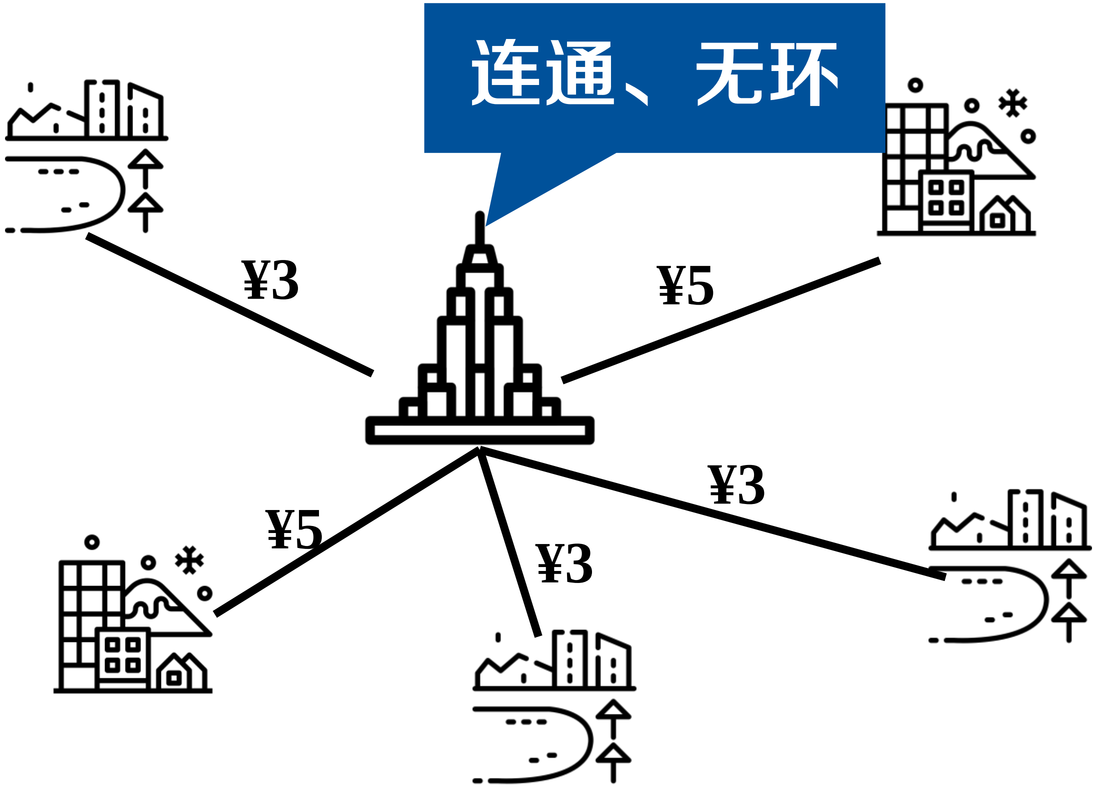
问题：连通各城市的最小花费是多少？

权重最小的连通生成子图

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' = < V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)



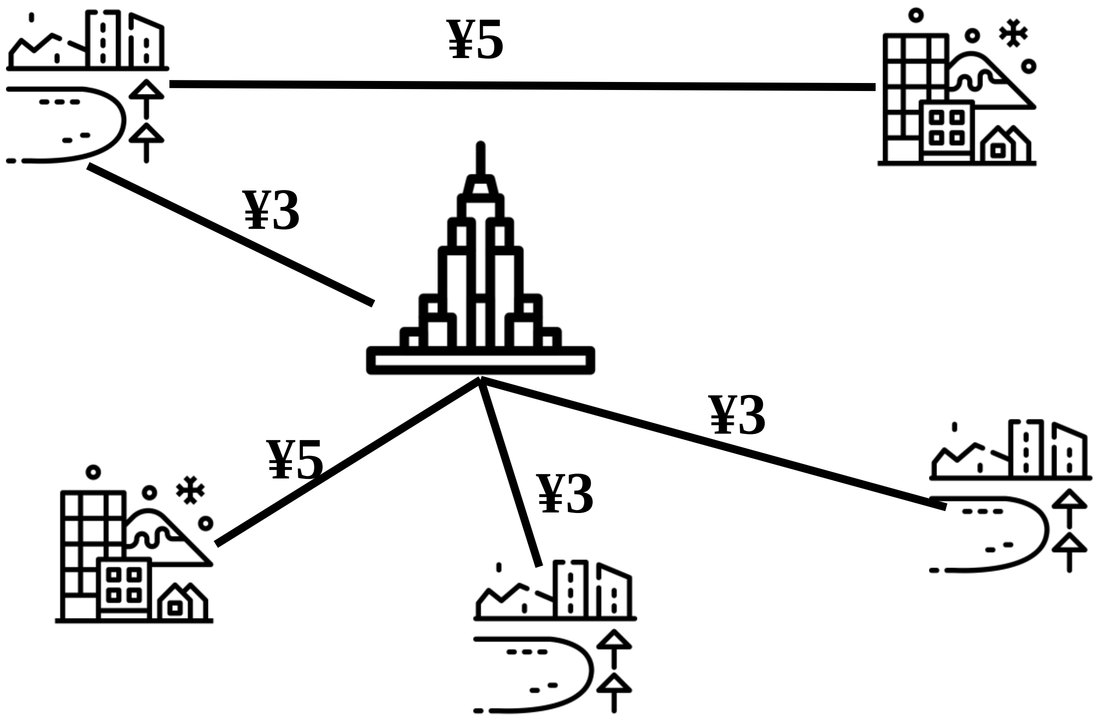


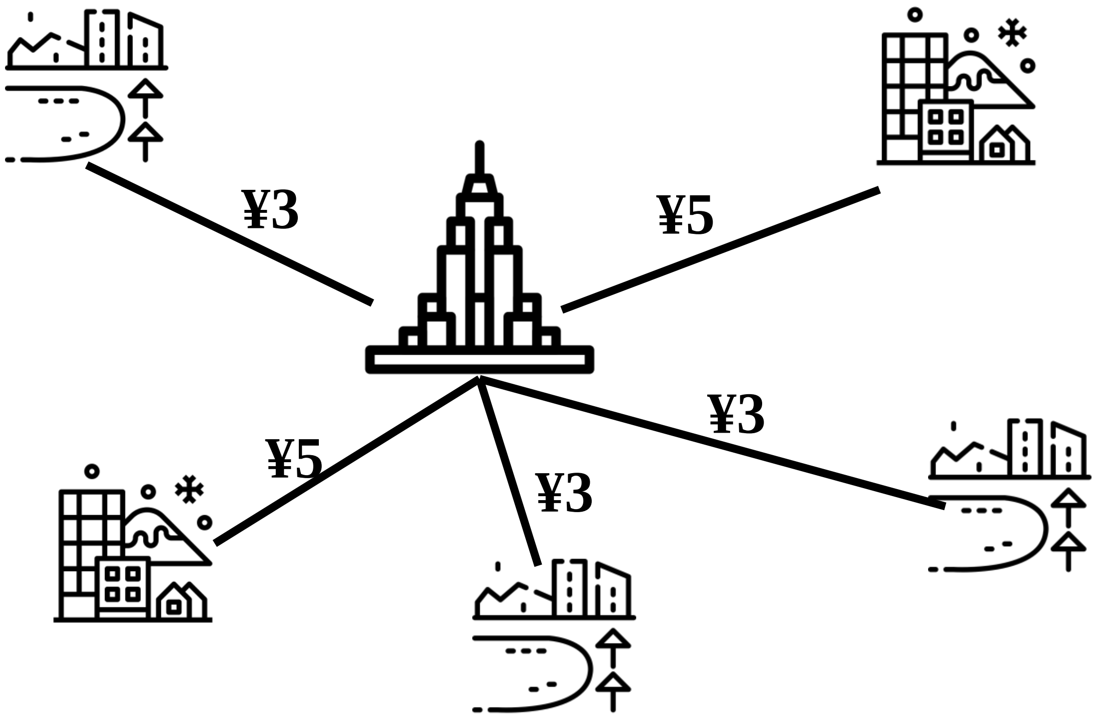
问题：连通各城市的最小花费是多少?

权重最小的生成树

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)





权重最小的生成树可能不唯一！

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G=<V,E,W>$, 其中$w(u,v)\in W$表示边(u,v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T=<V_T,E_T>$

$$min \sum_{e\in E_T} w(e)$$

优化目标

$$s.t. \quad V_T=V, E_T\subseteq E$$

约束条件

提纲

问题背景

通用框架

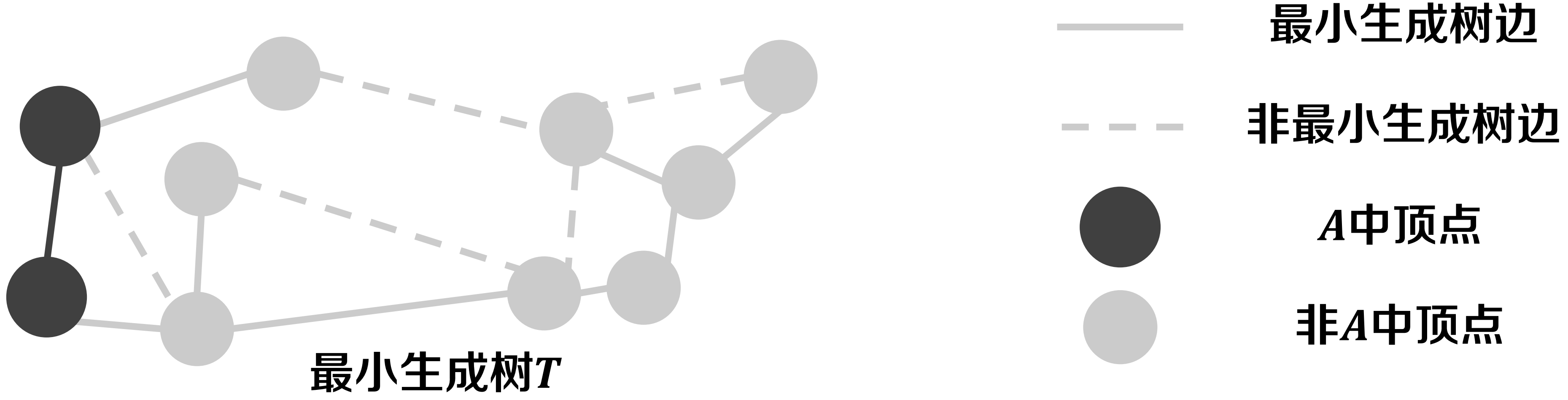
Prim算法

算法实例

算法分析

通用框架

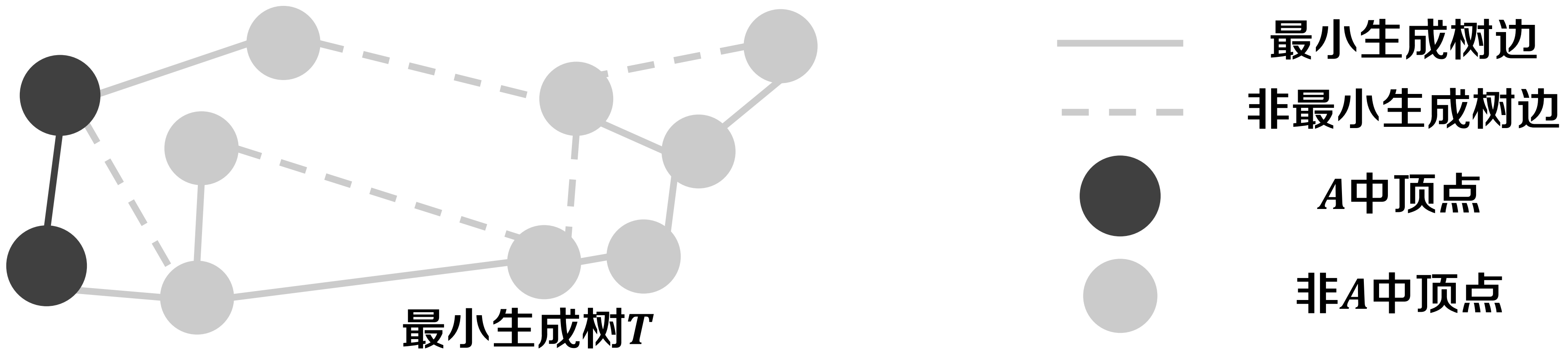
- 生成树是一个无向图中的连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集



问题：如何保证边集A仍是最小生成树的子集？

相关概念

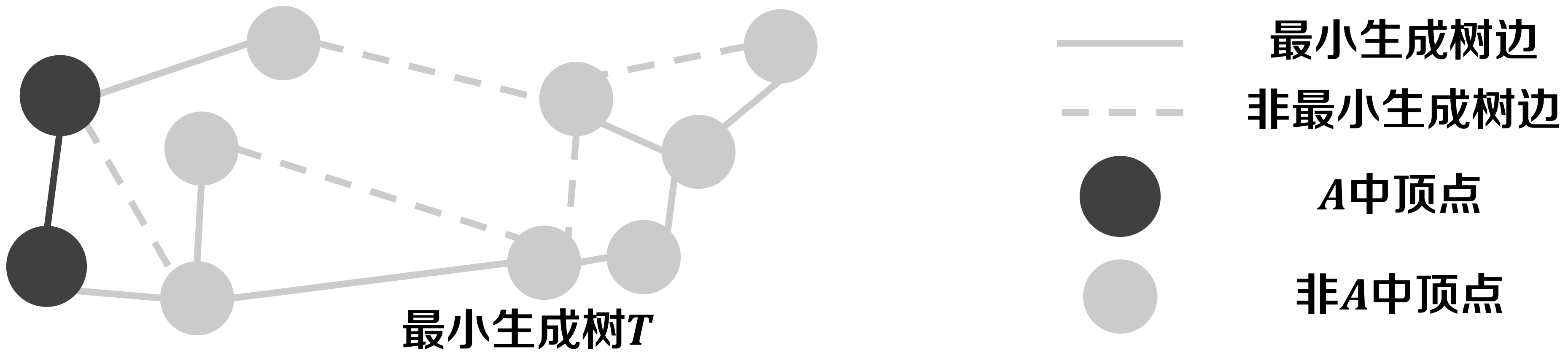
- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u, v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u, v)是A的安全边



若每次向边集A中新增安全边，可保证边集A是最小生成树的子集

相关概念

- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的安全边



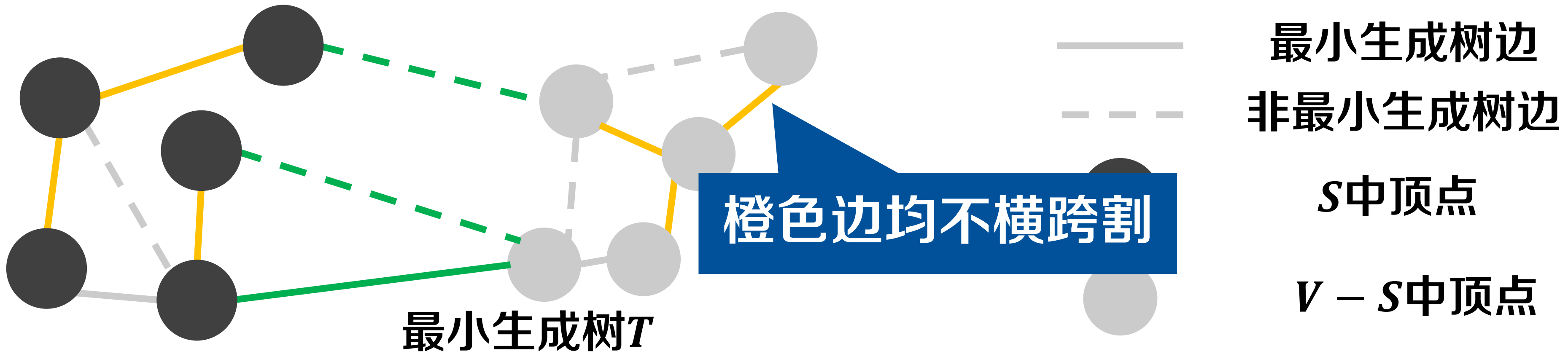
- Generic-MST(G)

```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u,v)
    A ← A ∪ (u,v)
end
return A
```

问题：如何有效辨识安全边？

相关概念

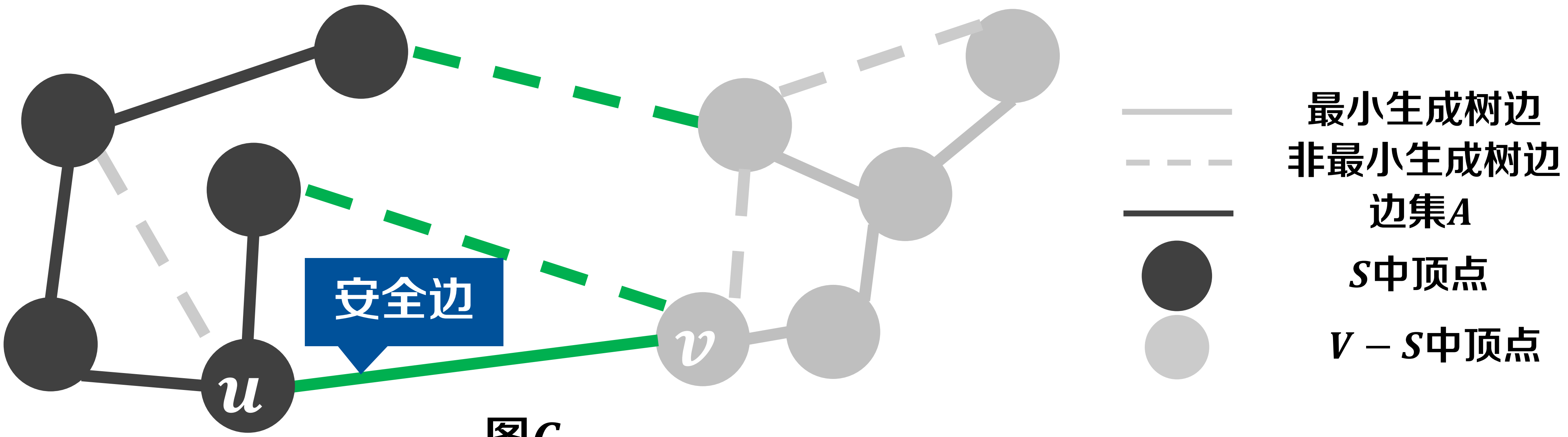
- 割(Cut)
  - 图$G =< V,E >$是一个连通无向图，割$(S,V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分
- 横跨(Cross)
  - 给定割$(S,V-S)$和边(u,v)，$u\in S$，$v\in V-S$，称边(u,v)横跨割$(S,V-S)$
- 轻边(Light Edge)
  - 横跨割的所有边中，权重最小的称为横跨这个割的一条轻边
- 不妨害(Respect)
  - 如果一个边集A中没有边横跨某割，则称该割**不妨害**边集A



最小生成树T

安全边辨识定理

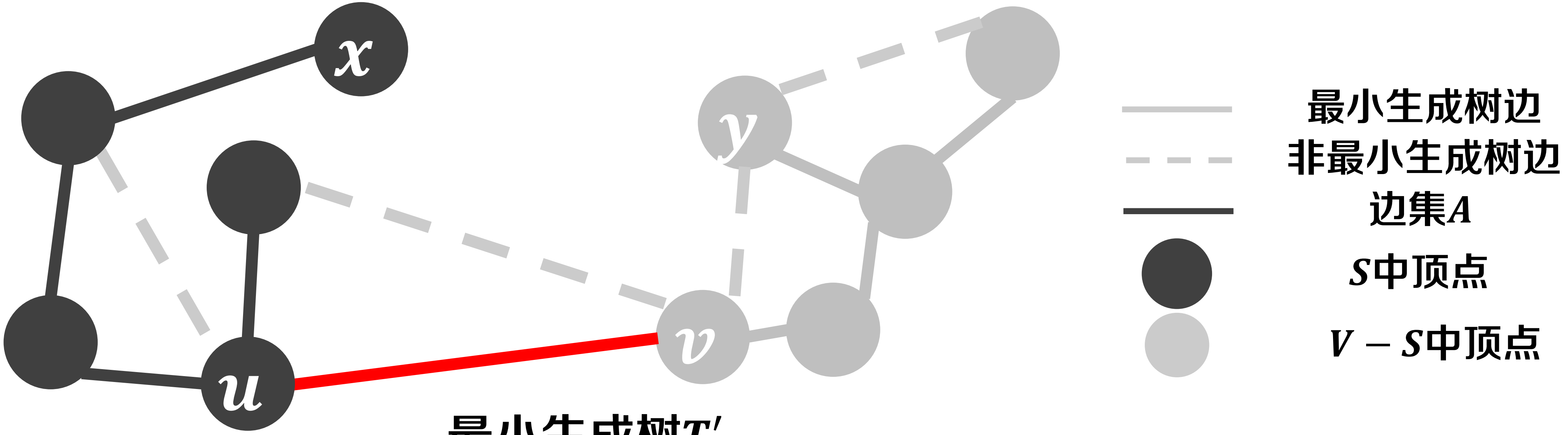
- 给定图$G=<V,E>$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中
  - 若割$(S,V-S)$是图G中不妨害边集A的任意割，且(u,v)是横跨该割的轻边
  - 则对于边集A，边(u,v)是其安全边



图G

安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'
    - $w(T') \leq w(T)$，T'也是最小生成树，$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$，边$(u,v)$是安全边



最小生成树T'

通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略?

Prim算法

Kruskal算法

提纲

问题背景

通用框架

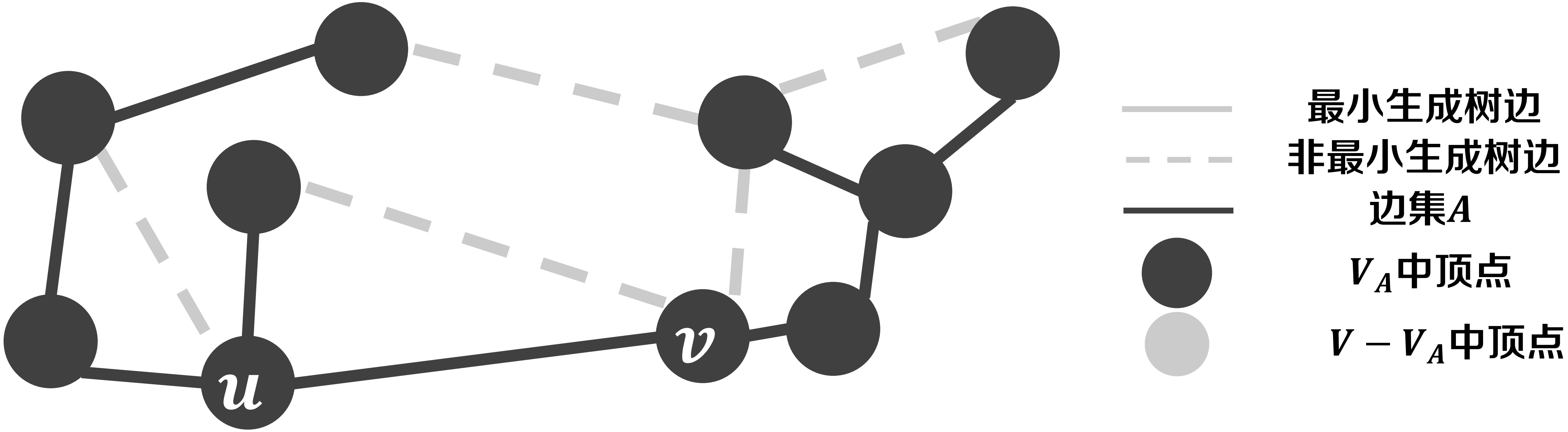
Prim算法

算法实例

算法分析

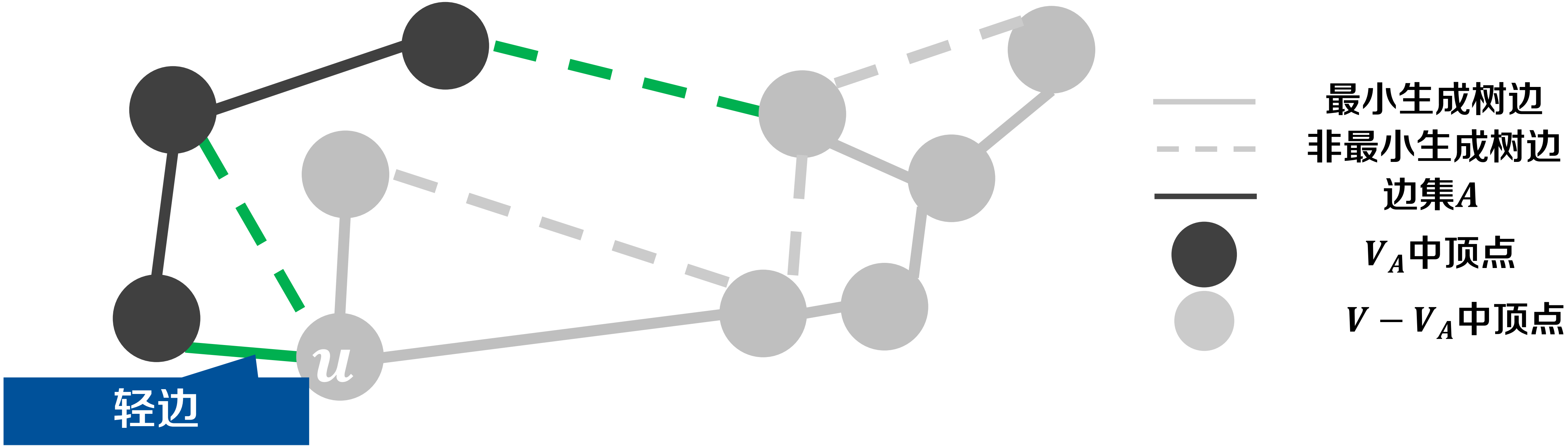
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树，选择割$(V_A, V - V_A)$
  - 步骤3：选择横跨割$(V_A, V - V_A)$的轻边，添加到边集A中
  - 步骤4：重复步骤2和步骤3，直至覆盖所有顶点



Prim算法

- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$
  - $dist$记录横跨$(V_A, V - V_A)$边的权重
    - 顶点集V_A到顶点u的最短距离，$dist[u] = \min\{w(x,u)\}, \forall x \in V_A$
    - 轻边：$\min\{dist[u]\}, \forall u \in V - V_A$



Prim算法

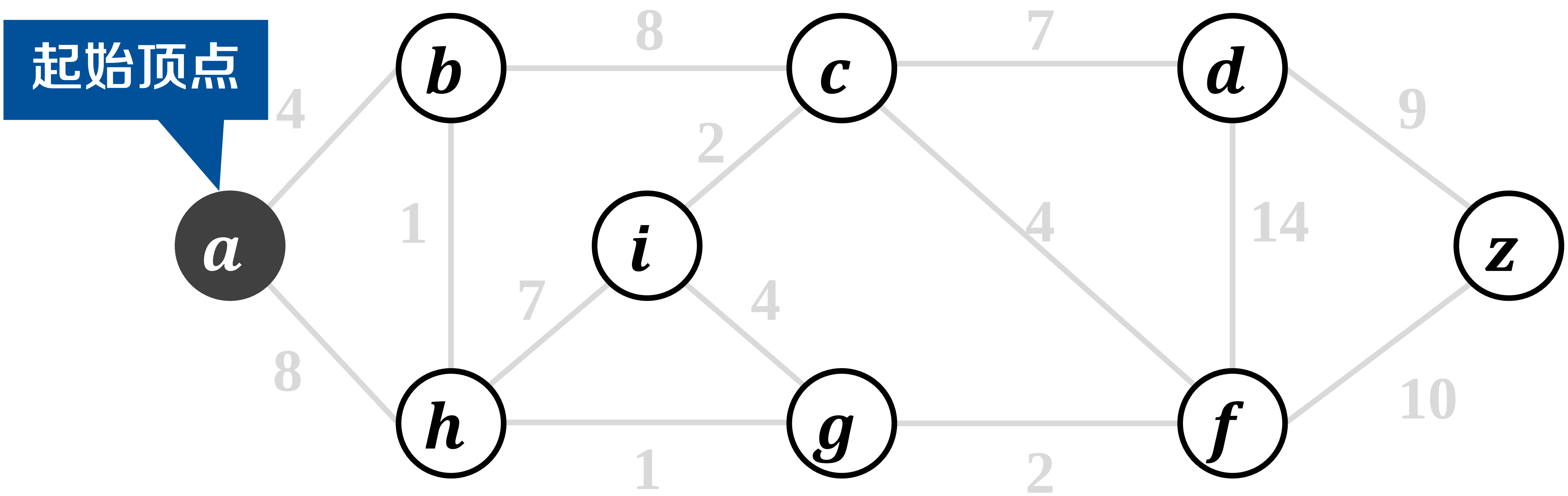
- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$
  - $dist$记录横跨$(V_A, V - V_A)$边的权重
    - 顶点集V_A到顶点u的最短距离，$dist[u] = \min\{w(x,u)\}, \forall x \in V_A$
    - **轻边**：$\min\{dist[u]\}, \forall u \in V - V_A$
  - $pred$表示前驱顶点
    - $(pred[u], u)$为最小生成树的边

提纲

- 问题背景
- 通用框架
- Prim算法
- **算法实例**
- 算法分析

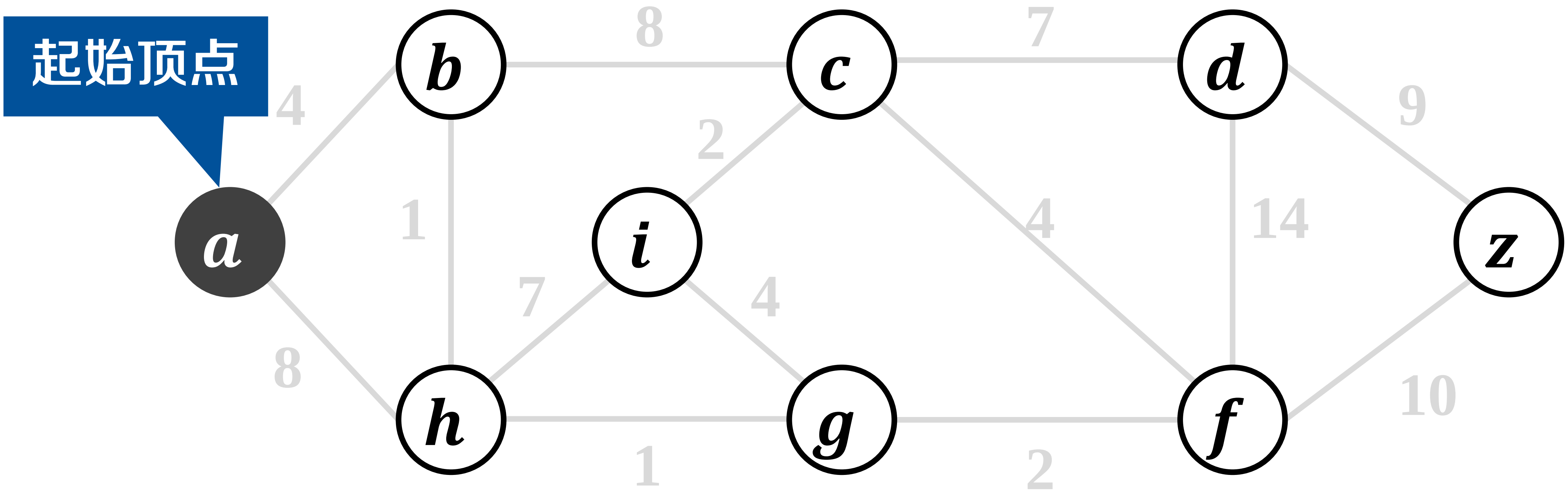
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	W	W	W	W	W	W	W	W	W
dist	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
pred	N	N	N	N	N	N	N	N	N



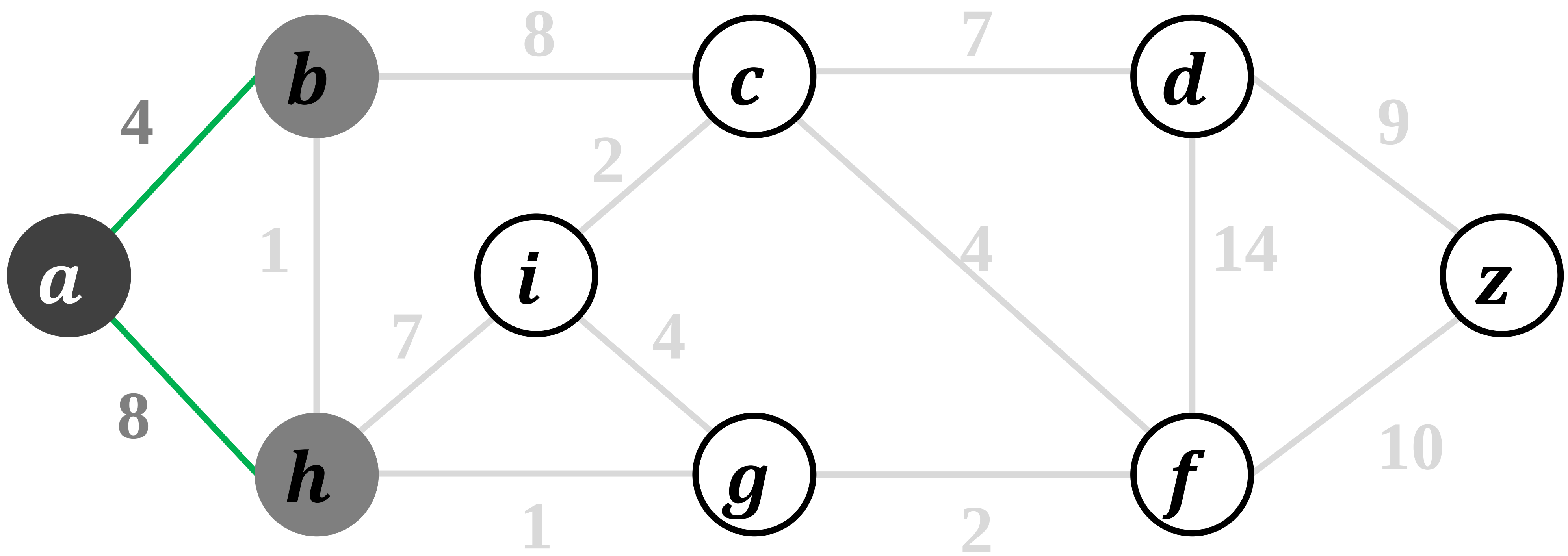
算法实例

V	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*z*
color	**B**	W	W	W	W	W	W	W	W
dist	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
pred	N	N	N	N	N	N	N	N	N



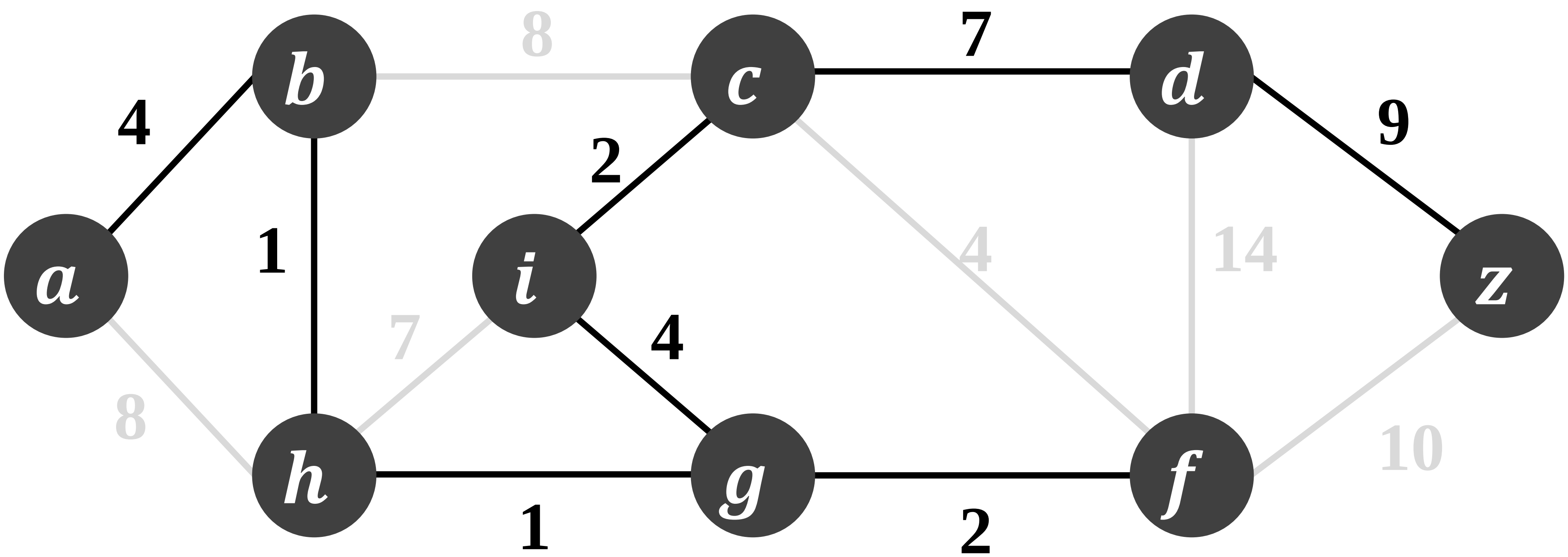
算法实例

V	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*z*
color	B	W	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	∞	∞	∞	∞	8	∞	∞
pred	N	*a*	N	N	N	N	*a*	N	N



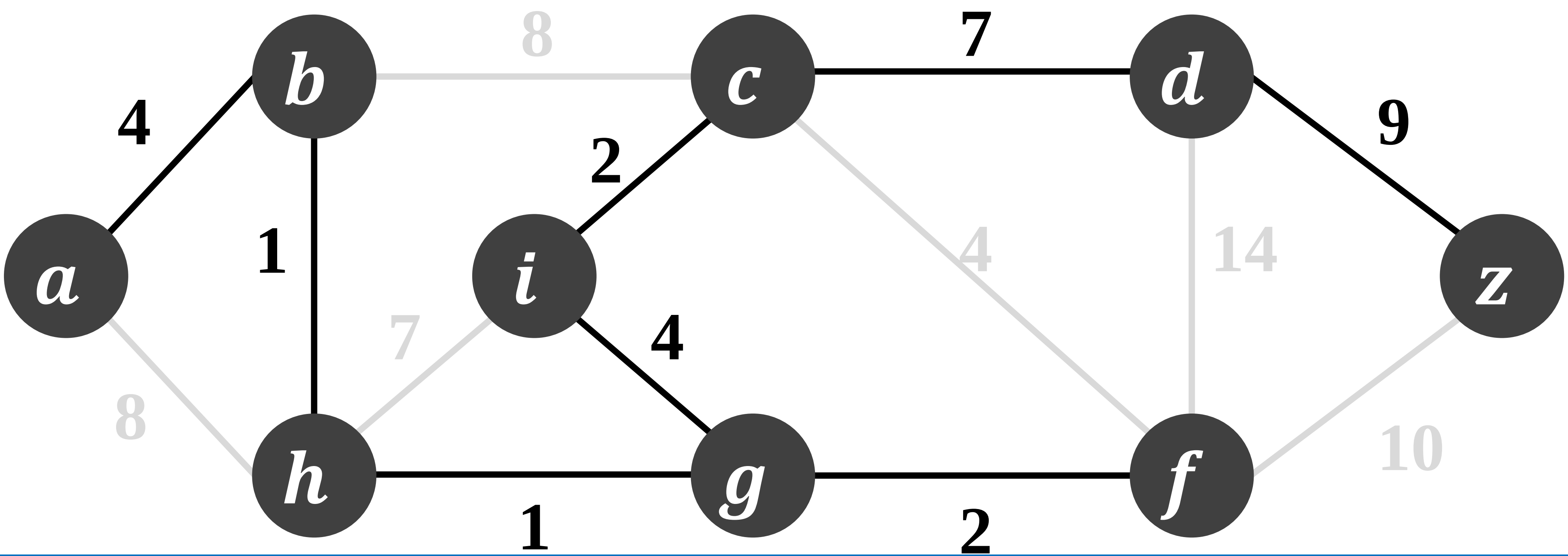
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	B
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	9
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	d



算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	B
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	9
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	d



$$W(T) = 0 + 4 + 2 + 7 + 2 + 1 + 1 + 4 + 9 = 30$$

提纲

问题背景

通用框架

Prim算法

算法实例

算法分析

伪代码

- **MST-Prim(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|], dist[1..|V|], pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ **do**
    $color[u] \leftarrow WHITE$
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

输入: 图$G = < V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ **do**
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$

$O(|V|)$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(\deg(u))$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(?)$

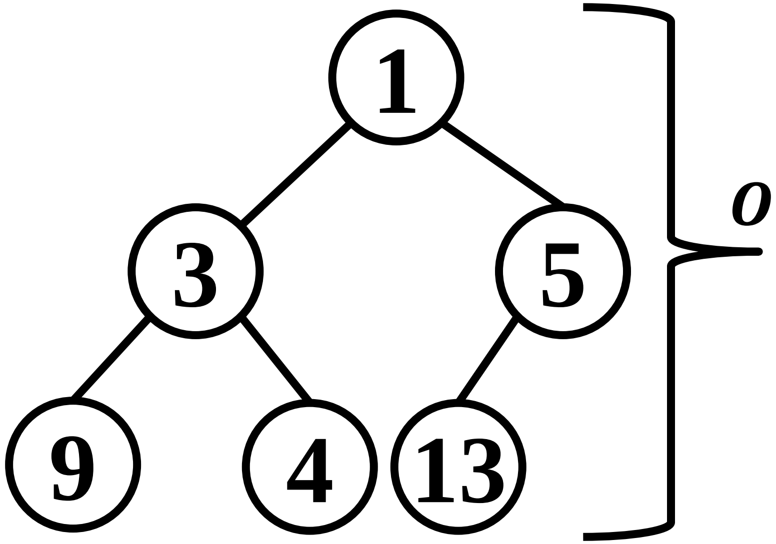
$O(|V|^2)$

数据结构加速最小值查询

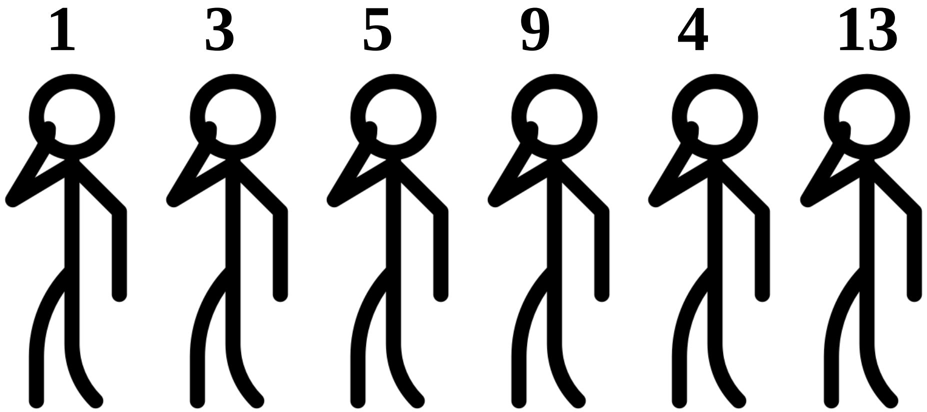
数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据**关键字大小**离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.ExtractMin()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.DecreaseKey()$ 时间复杂度$O(\log n)$



$O(\log n)$层



优先队列Q

使用优先队列，高效查找的安全边

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(*G*)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ **do**
    $color[u] \leftarrow WHITE$
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(*G*)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v, u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

输入: 图$G=<V,E,W>$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ **do**
    $color[u] \leftarrow WHITE$
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

$O(|V|)$

复杂度分析

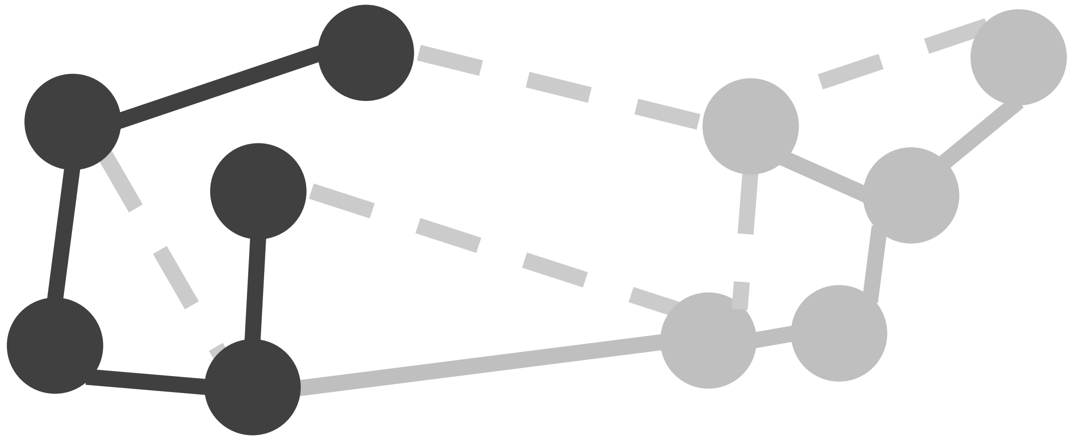
- **MST-Prim-PriQueue(G)**

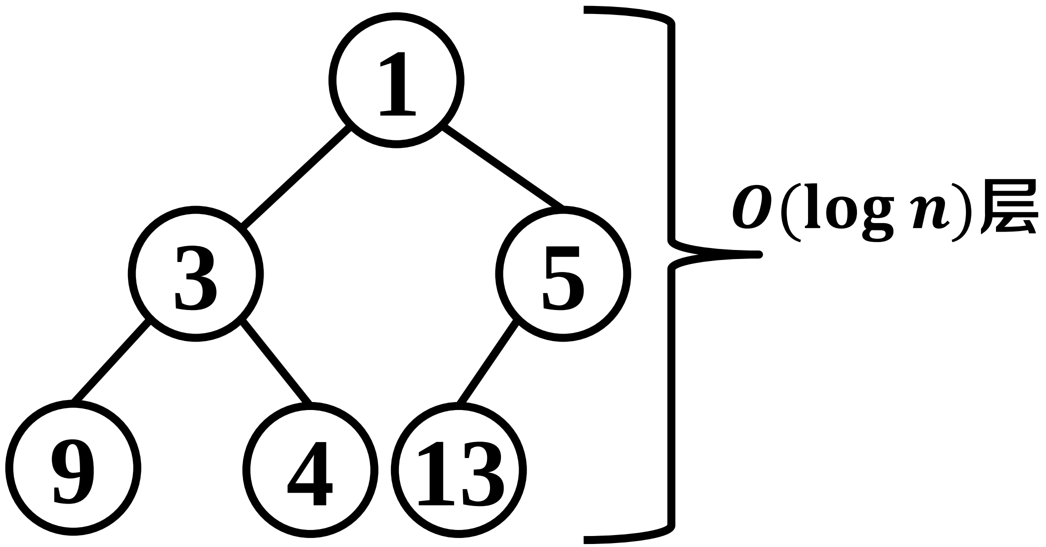
```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

$O(|E| \cdot \log|V|)$

小结

通用框架	Prim算法
判断是否成环	保持树的结构
高效寻找轻边	使用优先队列





谢谢

BDA

Beihang University