Design and Analysis of Algorithms

Part IV: Graph Algorithms

Lecture 28: Minimum Spanning Trees: Kruskal

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

图算法篇概述

- 在算法课程第四部分“图算法”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Basic Concepts in Graph Algorithms（图算法的基本概念）
  - Breadth-First Search (BFS，广度优先搜索）
  - Depth-First Search (DFS，深度优先搜索）
  - Cycle Detection（环路检测）
  - Topological Sort （拓扑排序）
  - Strongly Connected Components（强连通分量）
  - Minimum Spanning Trees (最小生成树)
  - Single Source Shortest Path (单源最短路径)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有点对最短路径)
  - Bipartite Graph Matching（二分图匹配）
  - Maximum/Network Flows (最大流/网络流)

提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G=<V,E,W>$, 其中$w(u,v)\in W$表示边(u,v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T=<V_T,E_T>$

$$\min \sum_{e\in E_T} w(e)$$

优化目标

$$s.t.\quad V_T=V, E_T\subseteq E$$

约束条件

框架回顾：通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略？

Prim算法

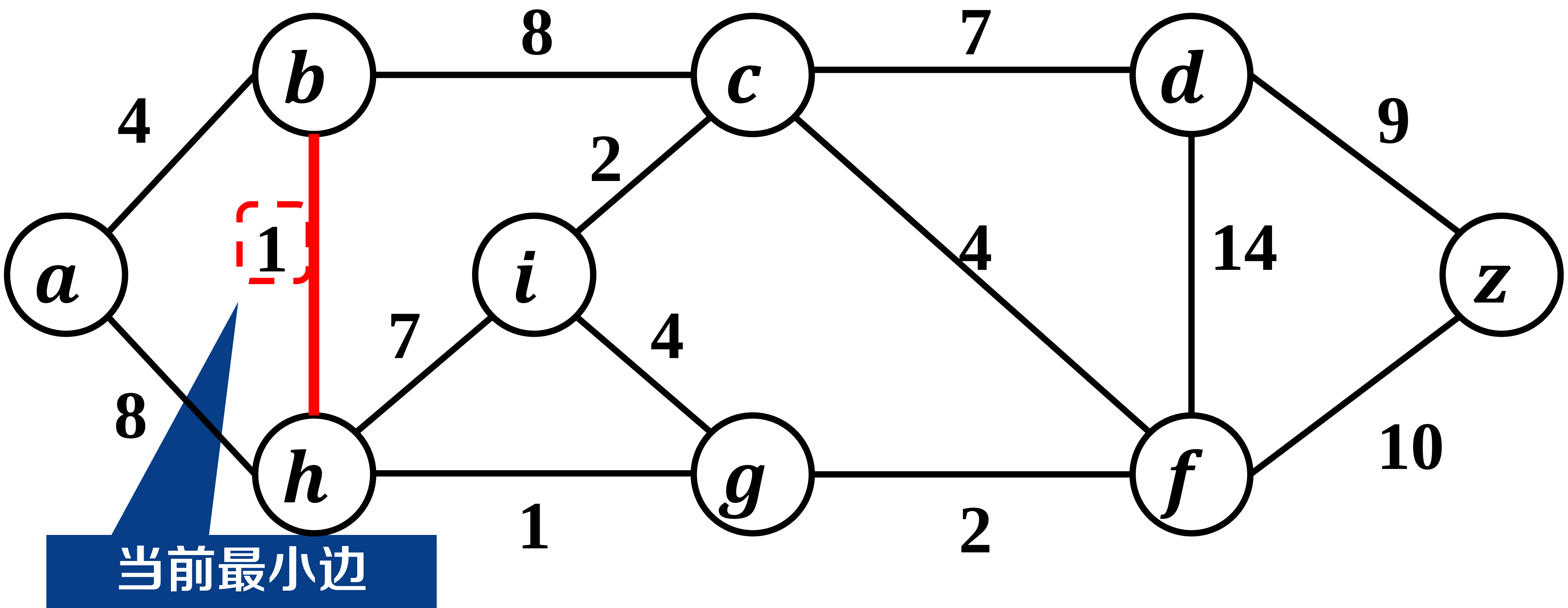
Kruskal算法

提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

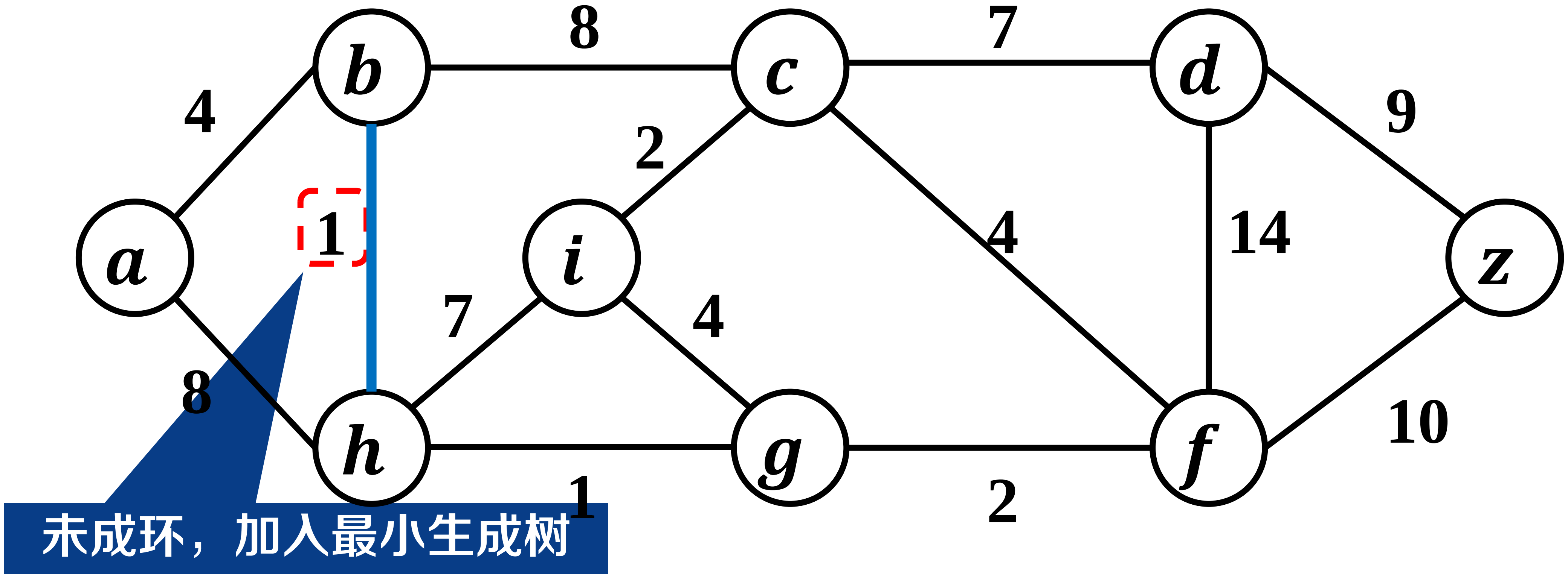
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



算法实例

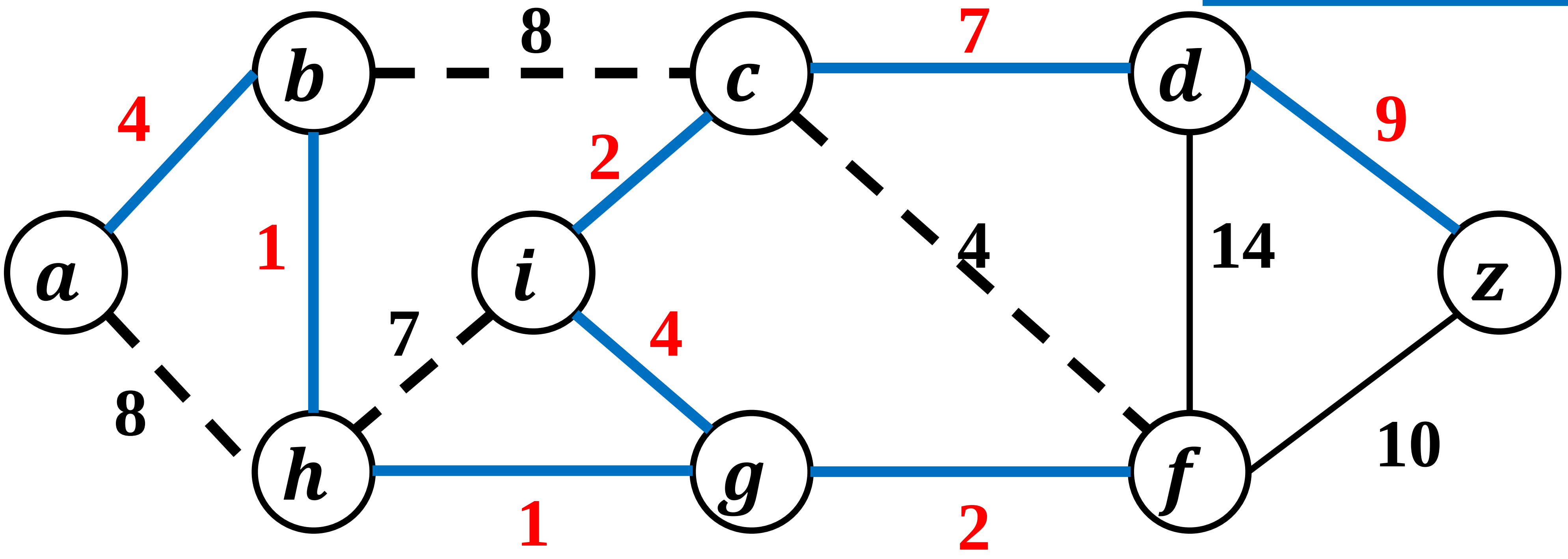
- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边

最小生成树权重：30



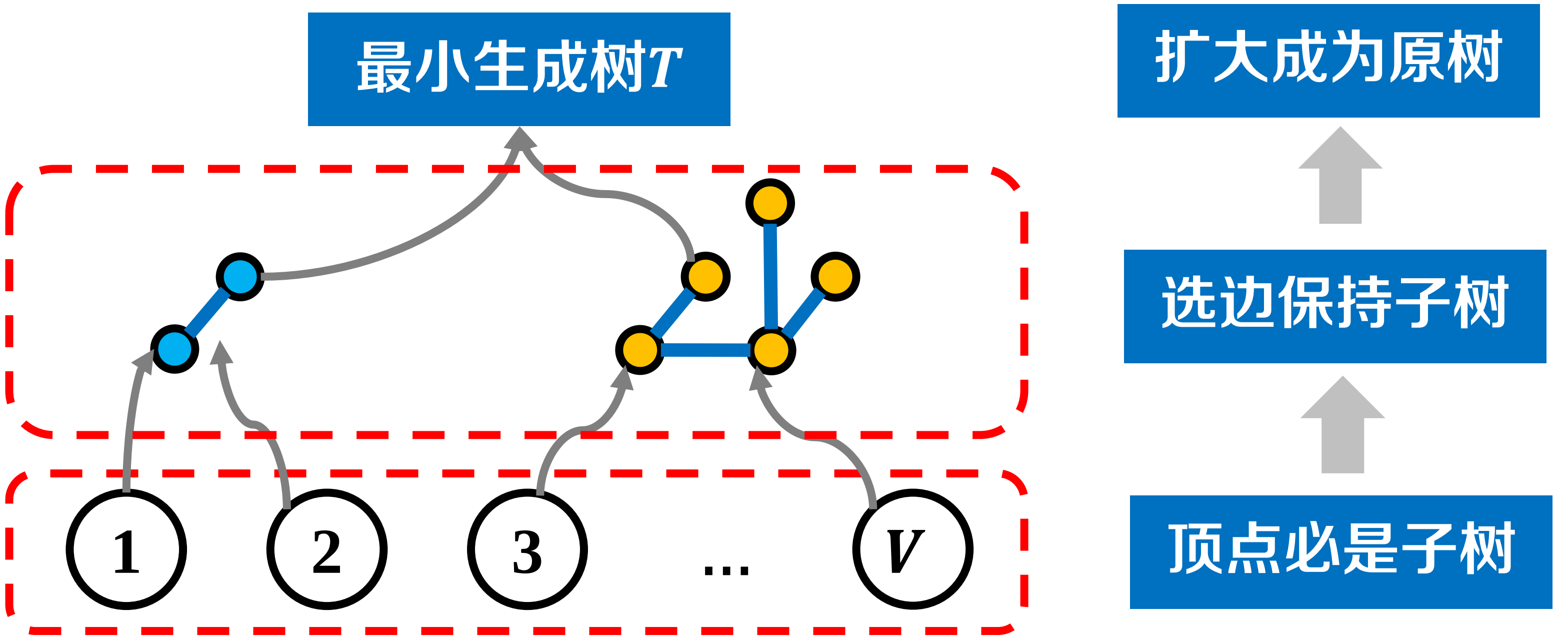
算法思想精炼

- **Generic-MST(G)**

```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

森林不断合并子树最终形成一棵树

不成环的最小边，是一种贪心策略



算法思想精炼

- **Generic-MST(G)**

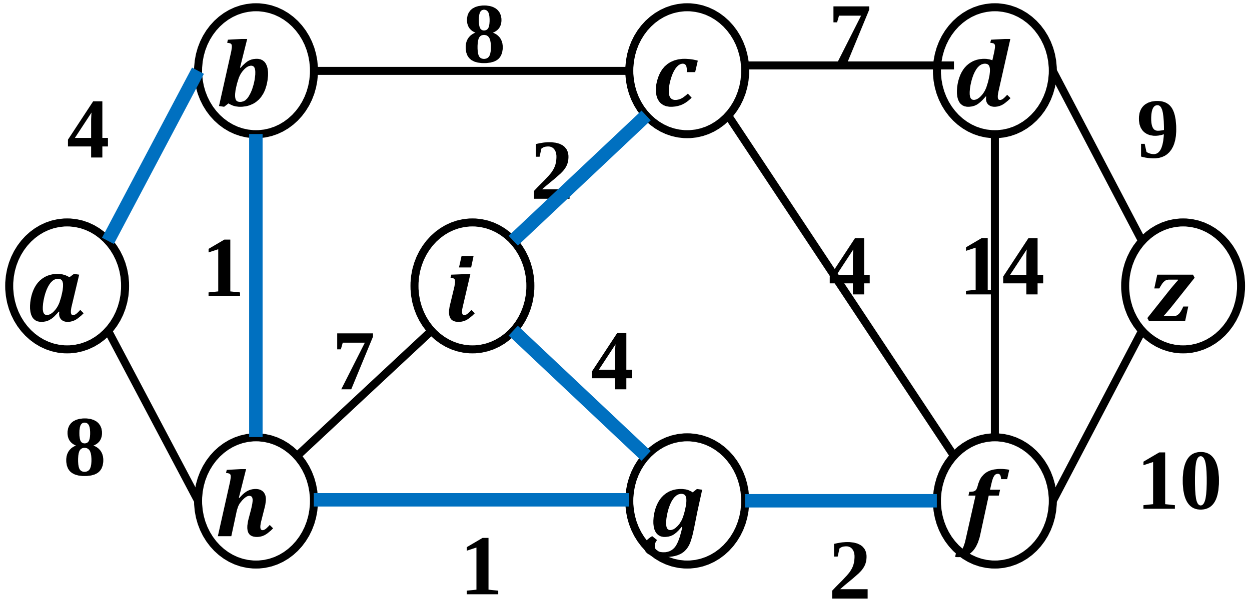
```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
  | 寻找A的安全边(u,v)
  | A ← A ∪ (u,v)
end
return A
```

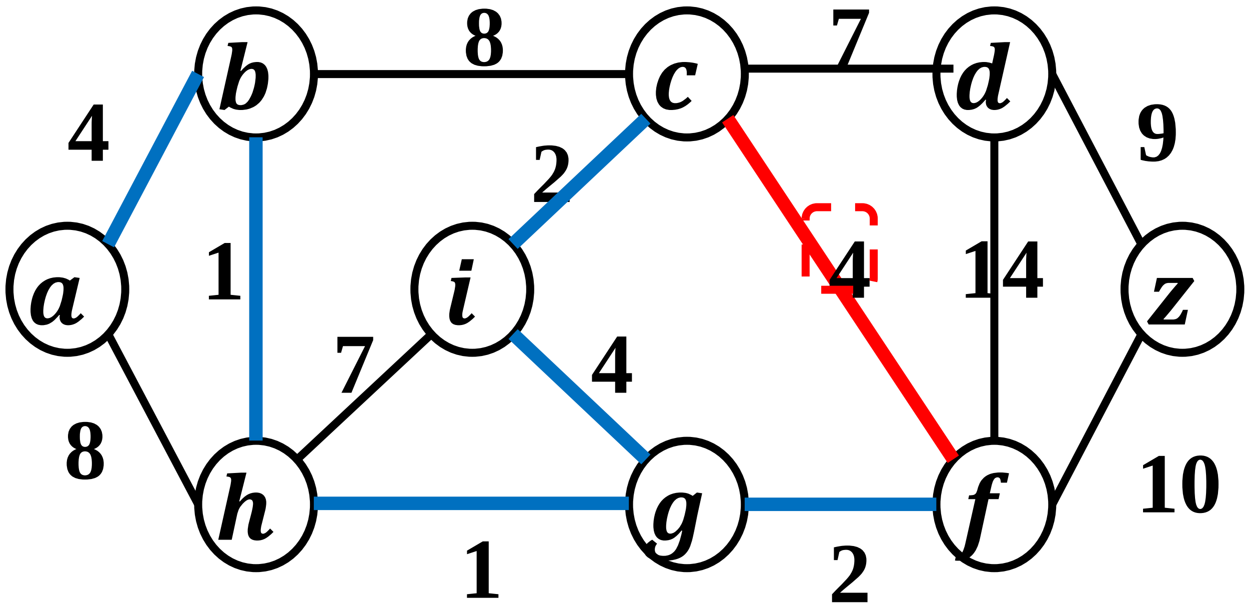
算法正确性的关键

森林不断合并子树最终形成一棵树

不成环的最小边，是一种贪心策略

判断所选边的顶点是否在一棵子树



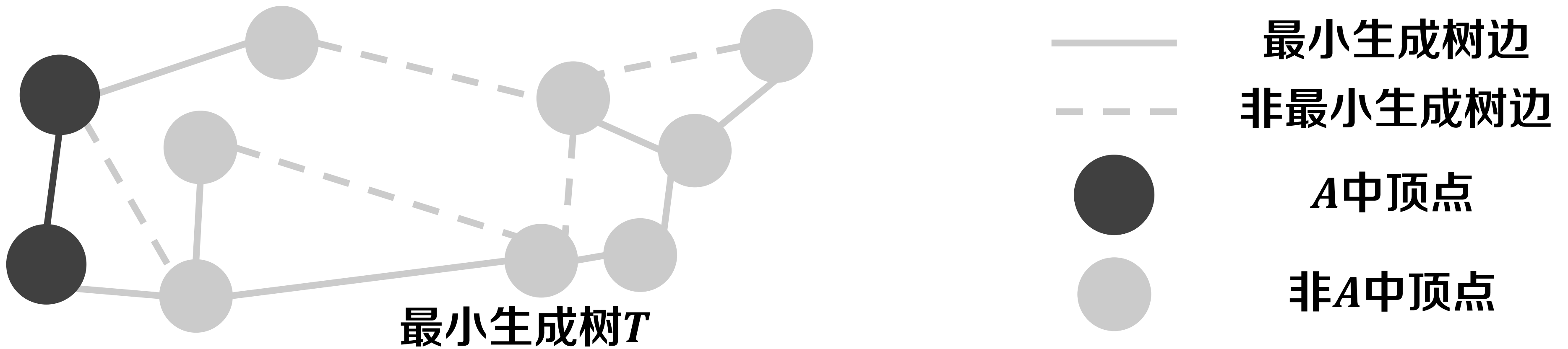


提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

贪心策略原理回顾

- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的**安全边**



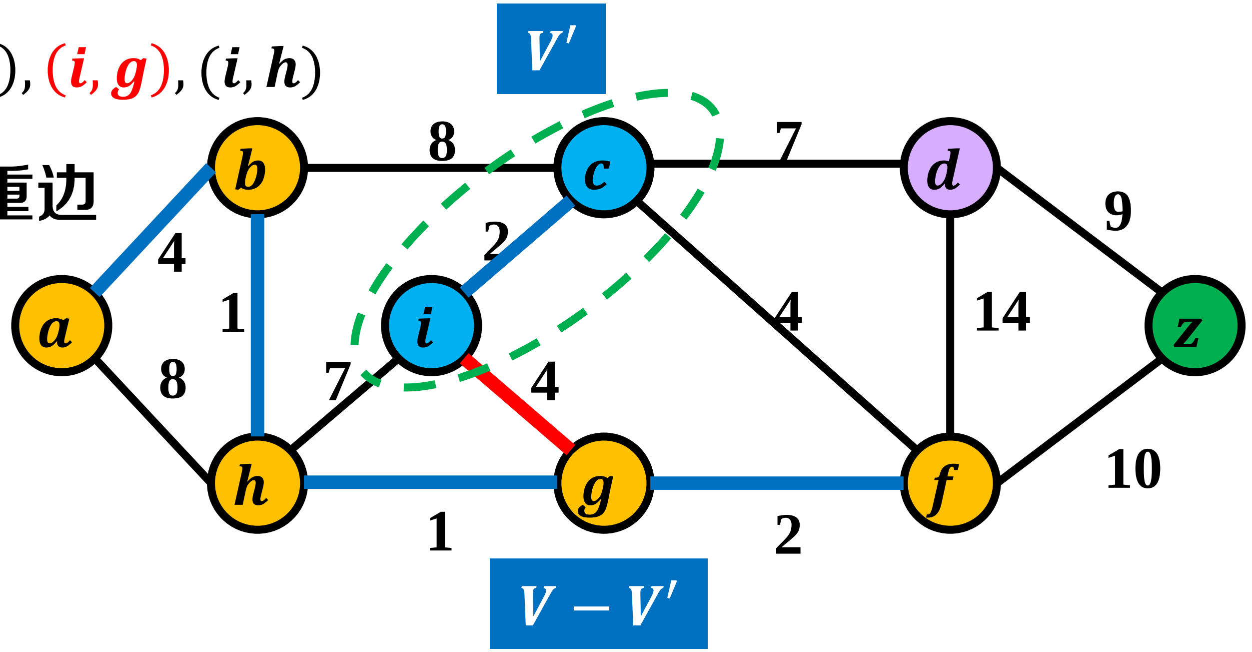
最小生成树T

若每次向边集A中新增安全边，可保证边集A是最小生成树的子集

问题：Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？

正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i,g)
  - 已选边集A把图分成为若干棵子树，其中(V',E')是包含顶点i的子树
  - 构造割$(V',V-V')$，割不妨害边集A，换言之A中的边不会横跨$(V',V-V')$
    - 边集A不包含横跨边$(b,c),(c,d),(c,f),(i,g),(i,h)$
  - (i,g)是横跨割$(V',V-V')$的最小权重边
  - (i,g)是关于割$(V',V-V')$轻边
  - 由于割$(V',V-V')$不妨害边集A
  - 轻边(i,g)为安全边



伪代码

- **MST-Kruskal(*G*)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if u, v 不在同一子树 then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        合并u, v所在子树
    end
end
return T
```

问题：如何高效判定和维护所选边的顶点是否在一棵子树？

提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

不相交集合

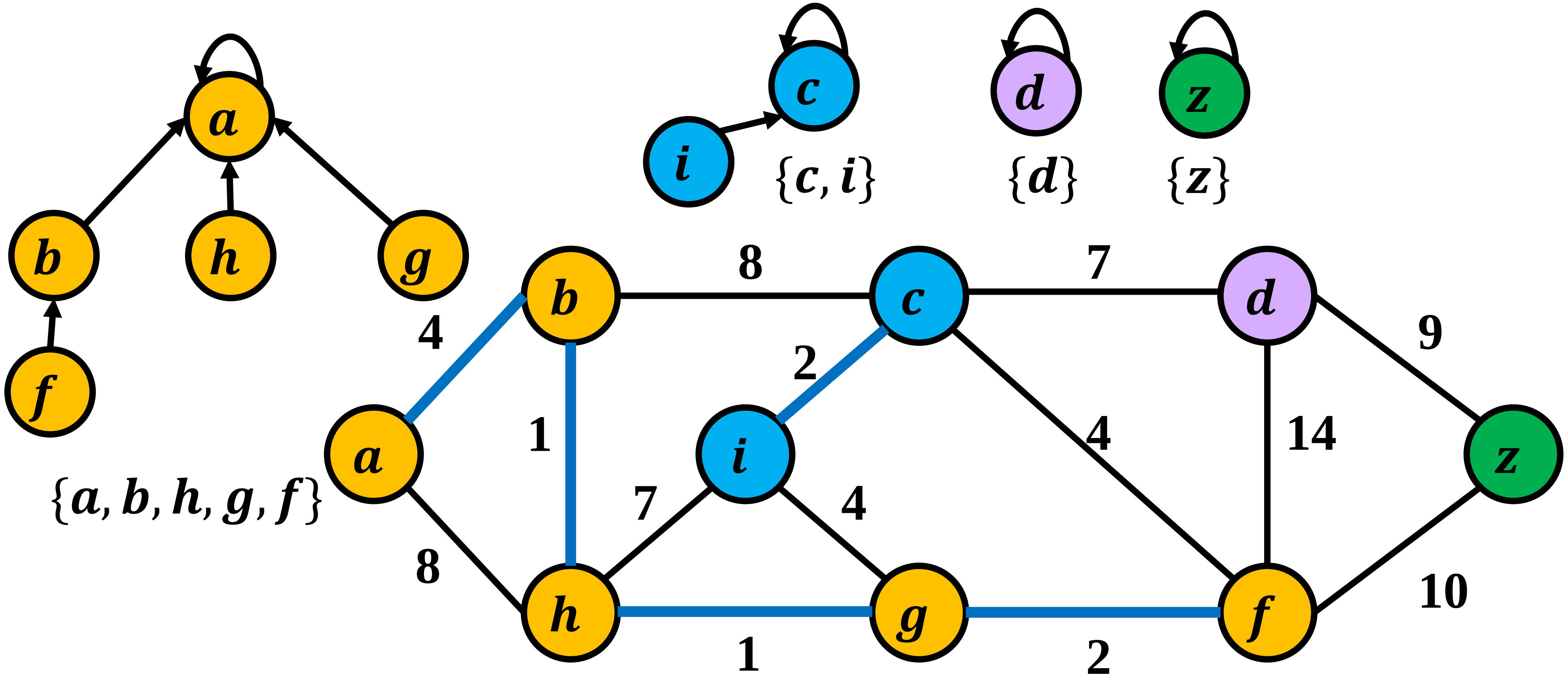
- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then** → 需要高效查找顶点所属子树
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树 → 需要高效合并顶点所在子树
  end
end
return T

同时高效完成两类操作需借助数据结构：不相交集合

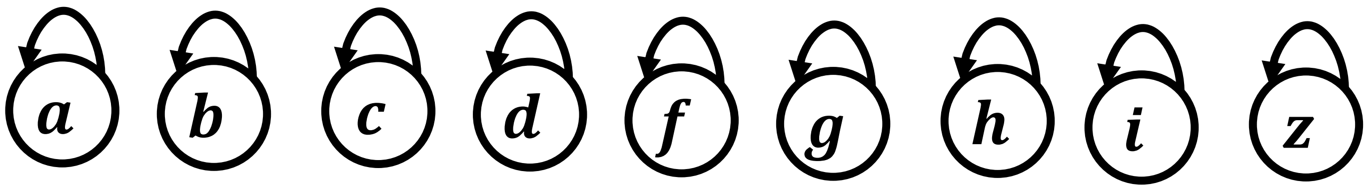
不相交集合

- 把每棵生成子树看作一个顶点集合
  - 每个集合表示为一棵有向树，多个不相交集合构成不相交集合森林
  - 集合元素表示为树结点
  - 树边由子结点指向父结点，根结点有一条指向自身的边

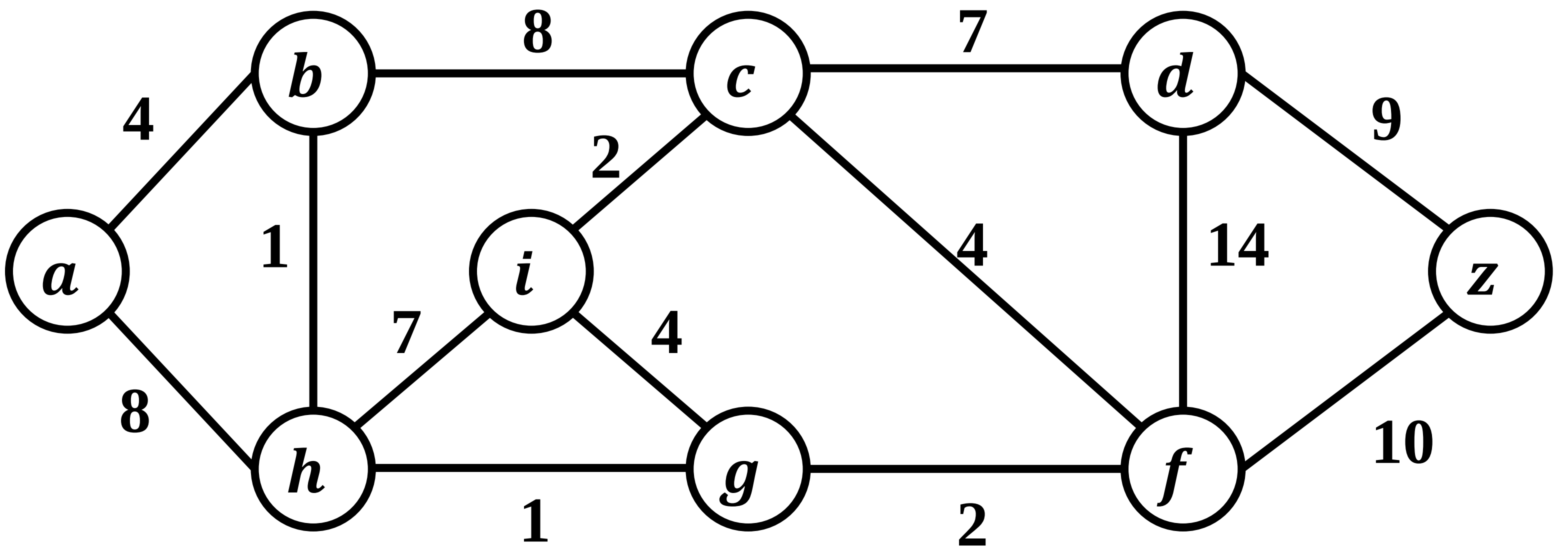


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边



$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{z\}$



不相交集合：伪代码

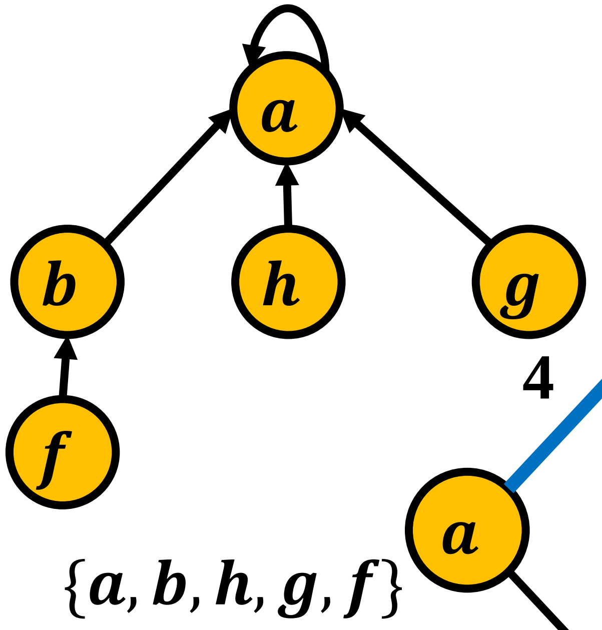
- **Create-Set(x)**

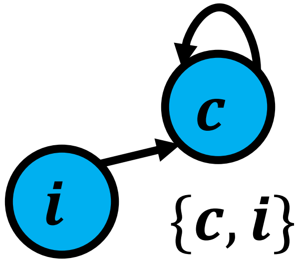
输入: 顶点 x
输出: 并查集
$x.parent \leftarrow x$
return x

自身为树根

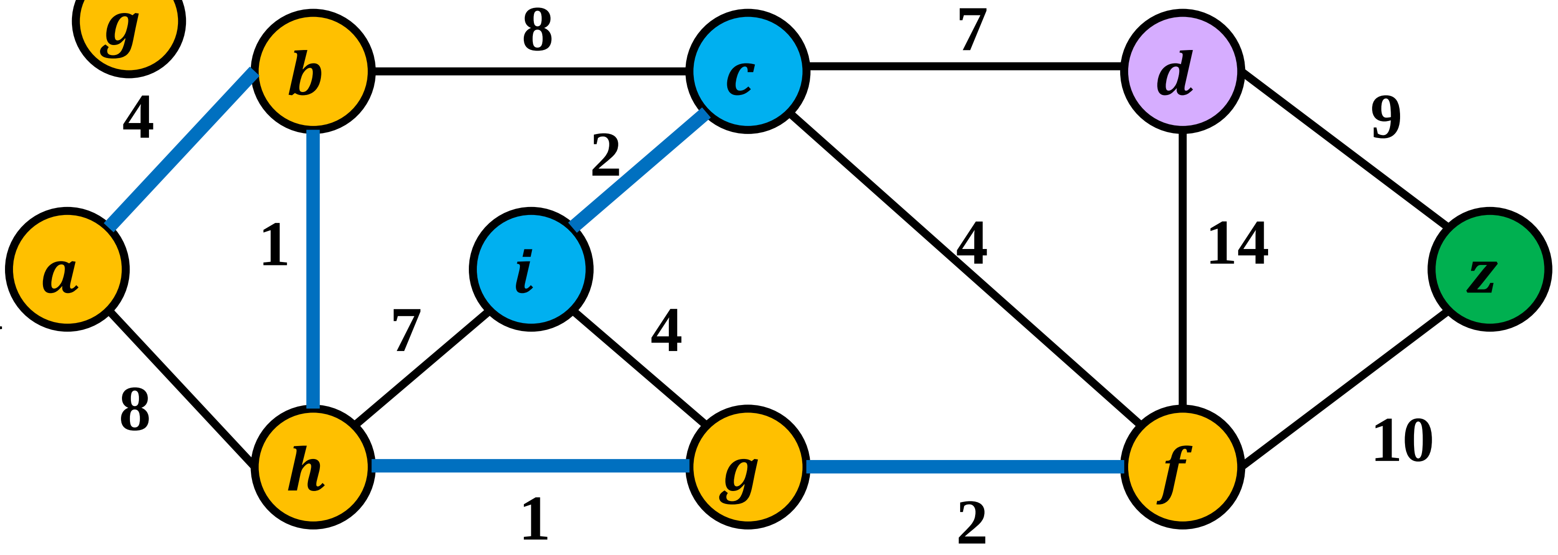
不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同





- 查找f的树根：a
- 查找g的树根：a
- f与g在同一集合
- 查找c的树根：c
- c与f, g不在同一集合



不相交集合：伪代码

- **Create-Set(x)**

输入: 顶点 x
输出: 不相交集合树
$x.parent \leftarrow x$
return x

- **Find-Set(x)**

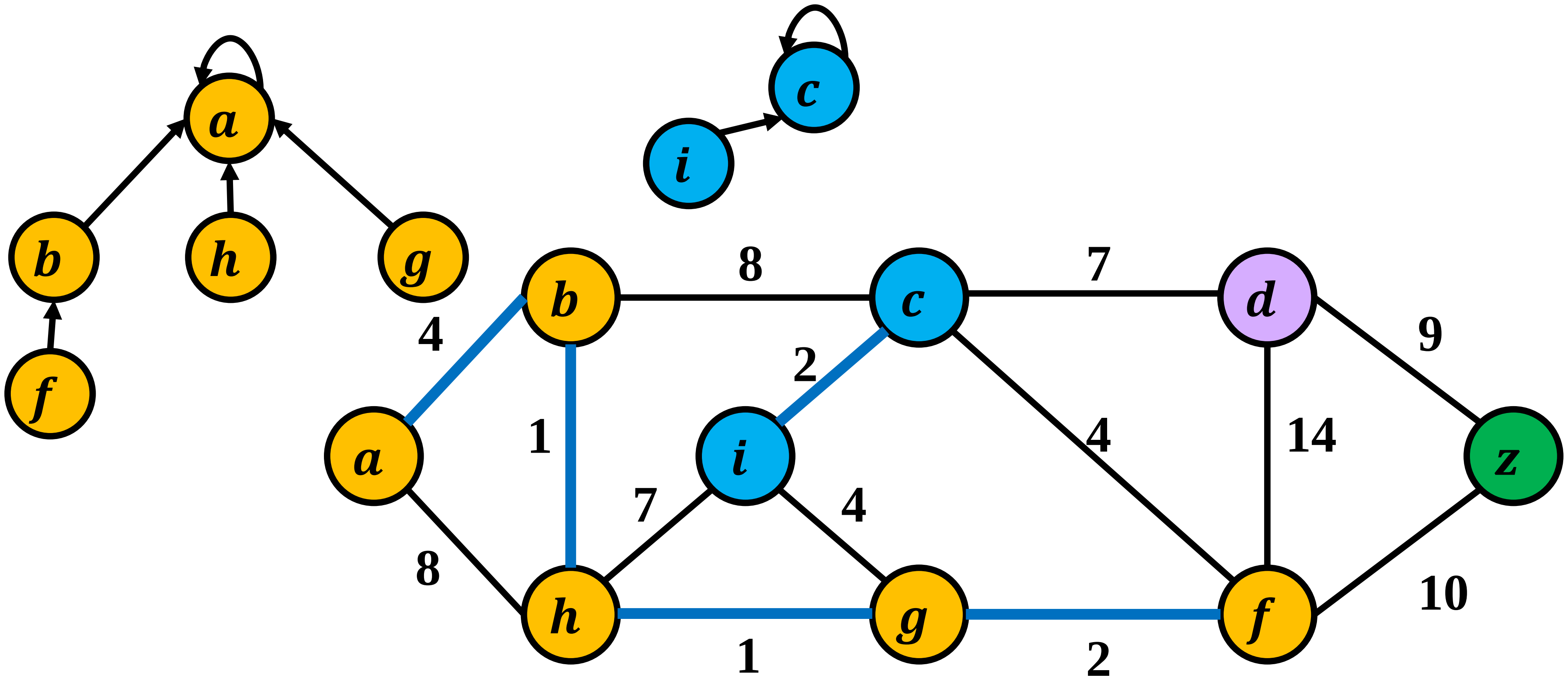
输入: 顶点 x
输出: 所属连通分量
while $x.parent \neq x$ **do**
  $x \leftarrow x.parent$
end
return x

回溯查找

不相交集合

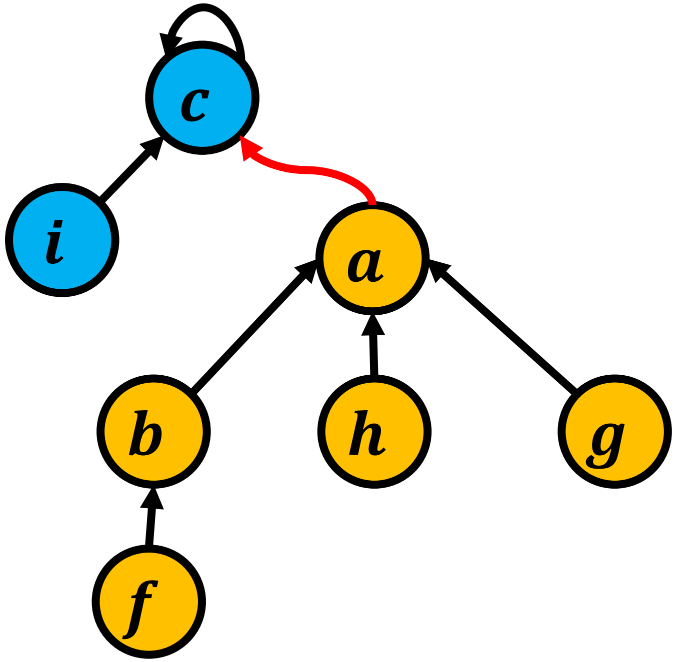
- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树

$\{a, b, h, g, f\} \cup \{c, i\}$

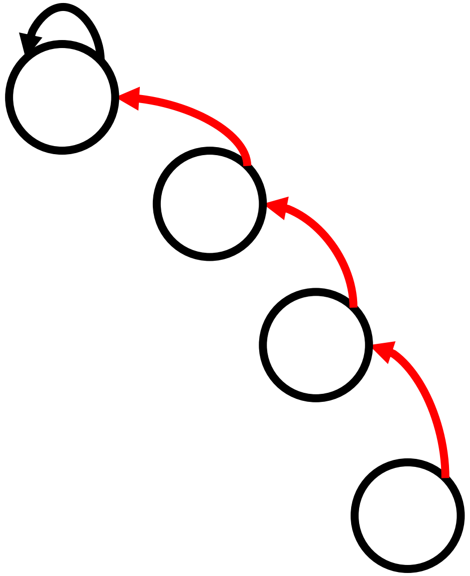


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



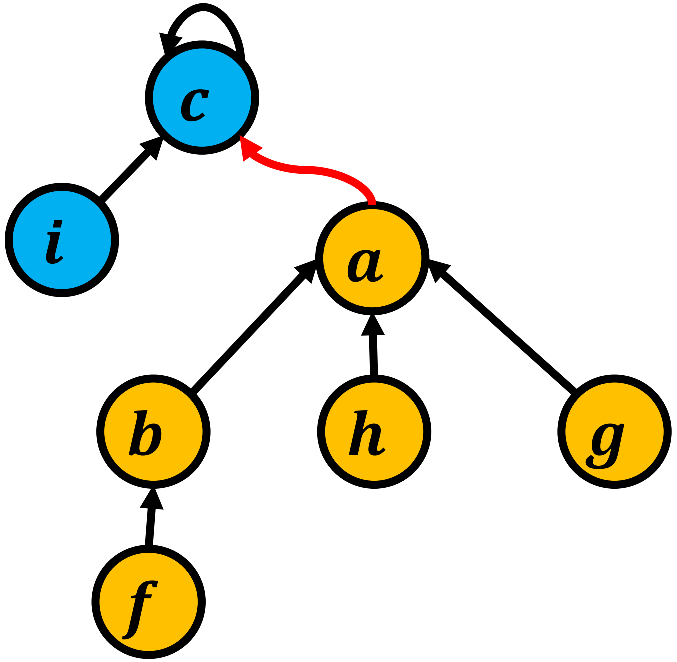
简单实现：找到两树根，任意连接两棵树



潜在问题：树深度过大，降低查找效率

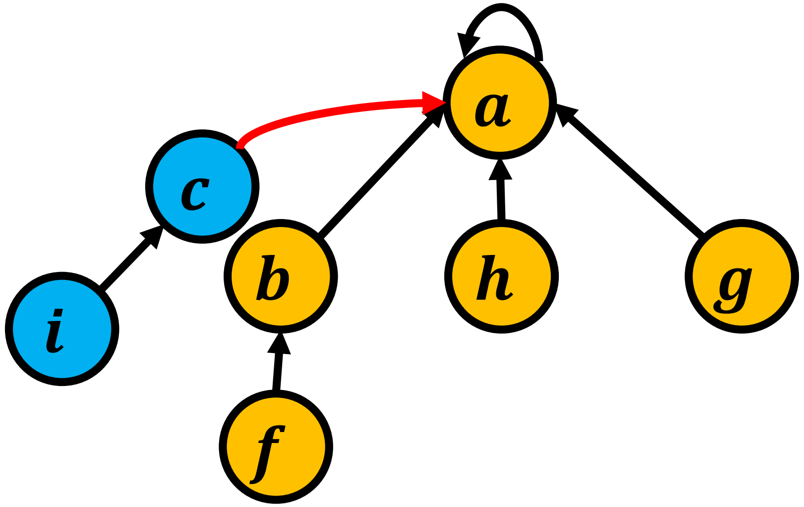
不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

尽可能降低树高度
提高树根查找效率



高效实现：树高小的树连接到树高大的树上

不相交集合：伪代码

- **Union-Set(x)**

输入: 顶点 x, y

$a \leftarrow$ Find-Set(x)

$b \leftarrow$ Find-Set(y)

if $a.height \le b.height$ **then**

    if $a.height = b.height$ **then**

        $b.height \leftarrow b.height + 1$

    end

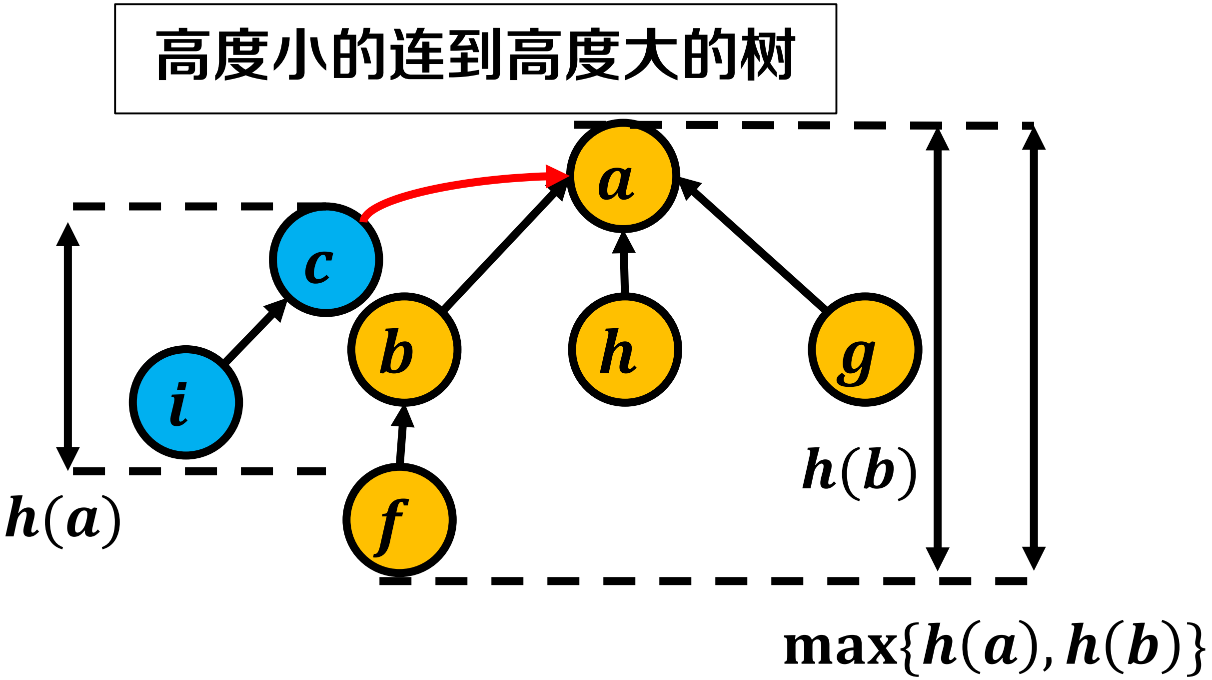
    $a.parent \leftarrow b$

end

else

    $b.parent \leftarrow a$

end



不相交集合：伪代码

- **Union-Set(x)**

输入: 顶点 $\boldsymbol{x, y}$

$a \leftarrow$ Find-Set(x)

$b \leftarrow$ Find-Set(y)

if $a.height \leq b.height$ **then**

  if $a.height = b.height$ **then**

    $b.height \leftarrow b.height + 1$

  end

  $a.parent \leftarrow b$

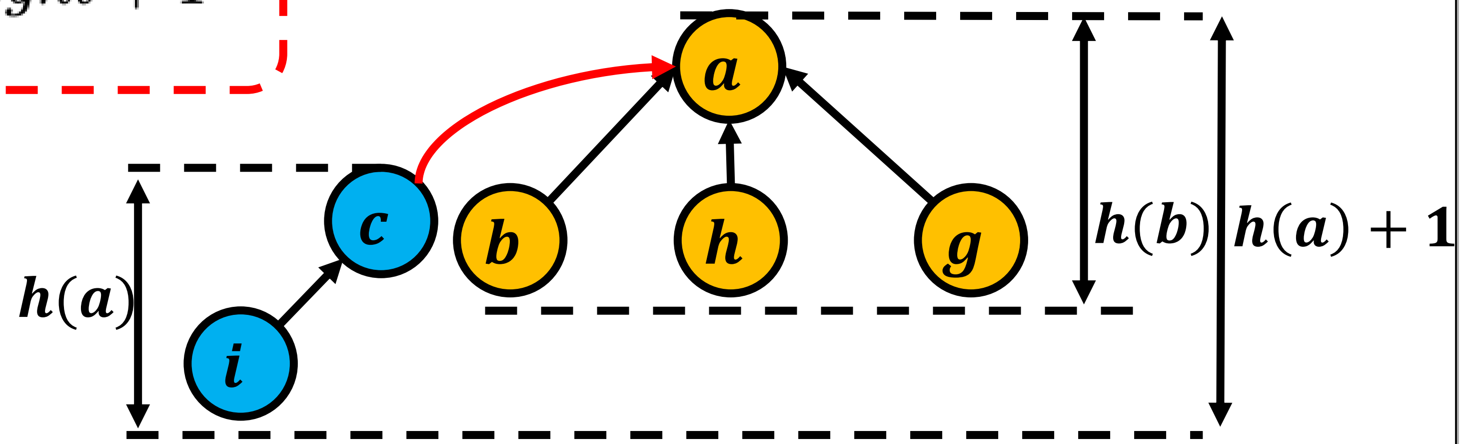
end

else

  $b.parent \leftarrow a$

end

高度相同，需要更新



不相交集合：时间复杂度

- **Create-Set(x)**

输入: 顶点 x
输出: 不相交集合树
$x.parent \leftarrow x$
return x

时间复杂度：$O(1)$

- **Find-Set(x)**

输入: 顶点 x
输出: 所属连通分量

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{while } x.parent \neq x \textbf{ do} \\ \quad x \leftarrow x.parent \\ \textbf{end}\end{array}\right\} O(h)$$

return x

h为树高

时间复杂度：$O(h)$

不相交集合：时间复杂度

- **Union-Set(x)**

输入: **顶点** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

$$\left.\begin{array}{l} a \leftarrow \text{Find-Set(x)} \\ b \leftarrow \text{Find-Set(y)} \end{array}\right\} \boldsymbol{O(h)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{if } a.height \leq b.height \textbf{ then} \\
\quad \textbf{if } a.height = b.height \textbf{ then} \\
\quad\quad b.height \leftarrow b.height + 1 \\
\quad \textbf{end} \\
\quad a.parent \leftarrow b \\
\textbf{end} \\
\textbf{else} \\
\quad b.parent \leftarrow a \\
\textbf{end}
\end{array}\right\} \boldsymbol{O(1)}$$

时间复杂度：$\boldsymbol{O(h)}$

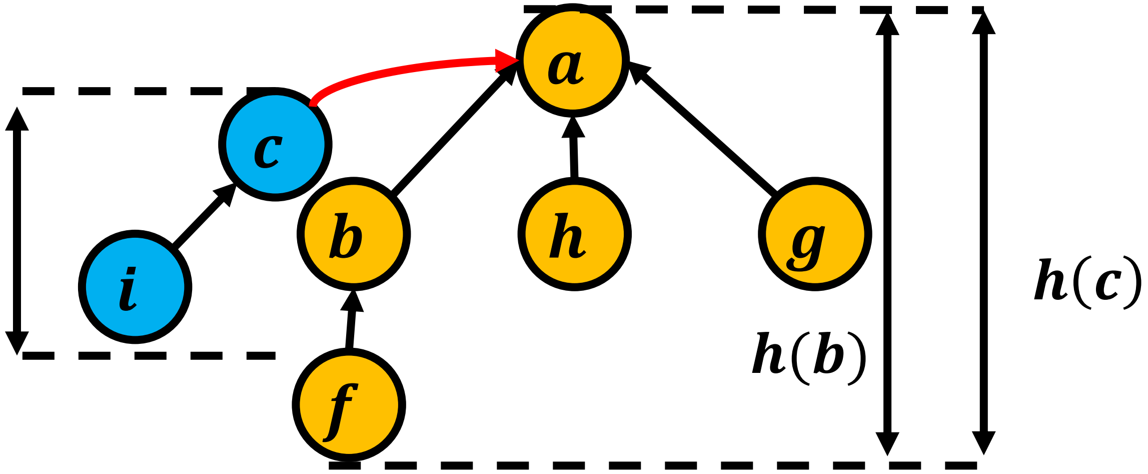
问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系?

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$

```
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

高度不同，新树高为原树中的较大者



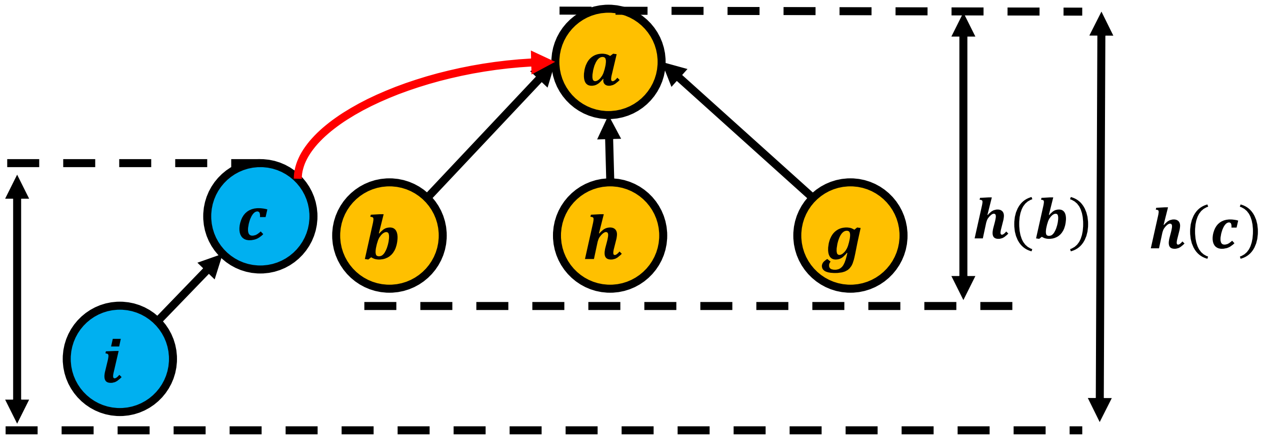
$h(c) = \max\{h(a), h(b)\}$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 $\longrightarrow$ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1} = 2^{h_c}$

```
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

高度相同，新树高为原树高+1



$h(c) = h(a) + 1$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 → $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明

初始化产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1} = 2^{h_c}$

合并产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

  - 综上，所有不相交集和都满足$|V| \geq 2^h$，即$h \leq \log|V|$
- Create-Set(x)：$O(1)$
- Find-Set(x)：$O(h) = O(\log|V|)$
- Union-Set(x)：$O(h) = O(\log|V|)$

伪代码

- **MST-Kruskal(*G*)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
    if u, v 不在同一子树 **then**
        $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
        合并u, v所在子树
    end
end
return T

问题：如何高效判定和维护顶点所在的子树?

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
为每个顶点建立不相交集
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        Union-Set(u, v)
    end
end
return T
```

创建不相交集

关系检查

合并不相交集

提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

复杂度分析

- MST-Kruskal(G)

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序                    ---------------- O(|E|log|E|)
为每个顶点建立不相交集                  ---------------- O(|V|)
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        Union-Set(u, v)
    end
end
return T
```

$O(\log|V|)$

$O(|E|\log|V|)$

假设$|E| = O(|V|^2)$

- 时间复杂度
  - $O(|E|\log|E| + |E|\log|V|) = O\left(|E|\log|V|^2 + |E|\log|V|\right) = O(|E|\log|V|)$

小结

- **Prim算法和Kruskal算法比较**

	Prim算法	Kruskal算法
核心思想	保持一棵树，不断扩展	子树森林，合并为一棵树
数据结构	优先队列	不相交集合
求解视角	微观视角，基于当前点选边	宏观视角，基于全局顺序选边
算法策略	都是采用贪心策略的图算法	

谢谢

BDA

Beihang University