# Design and Analysis of Algorithms

## Part IV: Graph Algorithms

## Lecture 25: Topological Sort

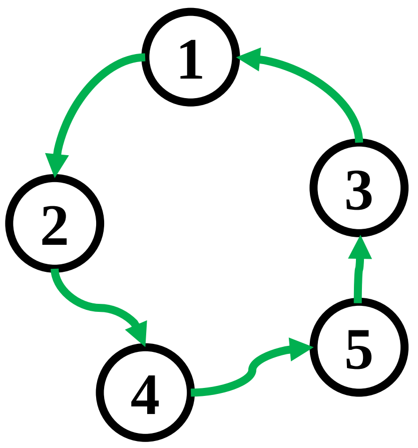
童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

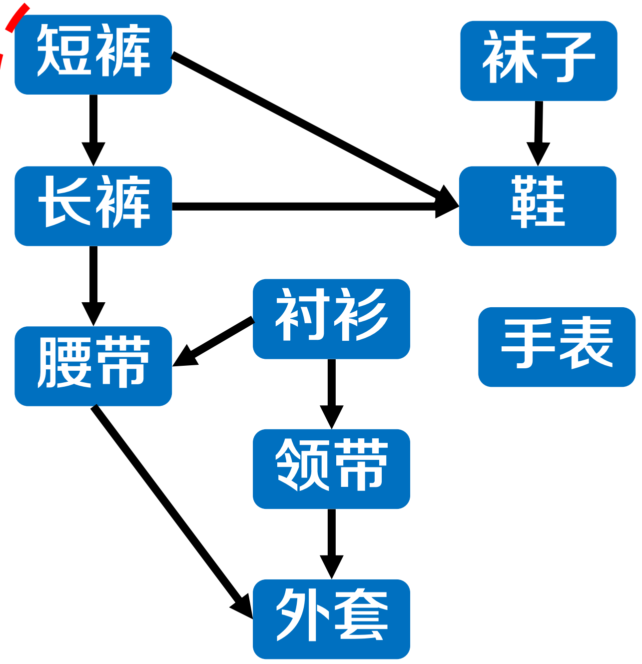
# 图算法篇概述

- 在算法课程第四部分“图算法”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Basic Concepts in Graph Algorithms（图算法的基本概念）
  - Breadth-First Search (BFS，广度优先搜索）
  - Depth-First Search (DFS，深度优先搜索）
  - Cycle Detection（环路检测）
  - Topological Sort （拓扑排序）
  - Strongly Connected Components（强连通分量）
  - Minimum Spanning Trees (最小生成树)
  - Single Source Shortest Path (单源最短路径)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有点对最短路径)
  - Bipartite Graph Matching（二分图匹配）
  - Maximum/Network Flows (最大流/网络流)

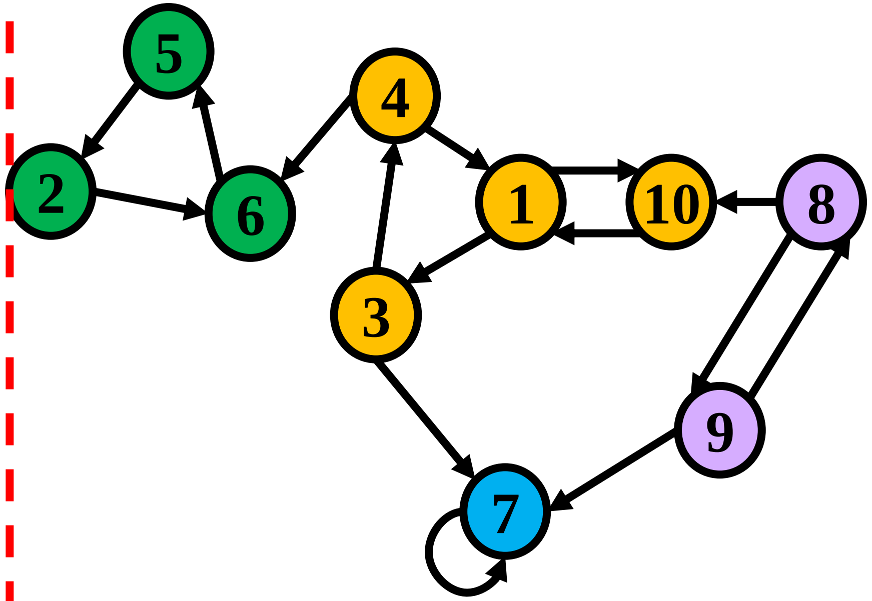
# 深度优先搜索应用




环路的存在性判断




拓扑排序




强连通分量

# 提纲

问题定义

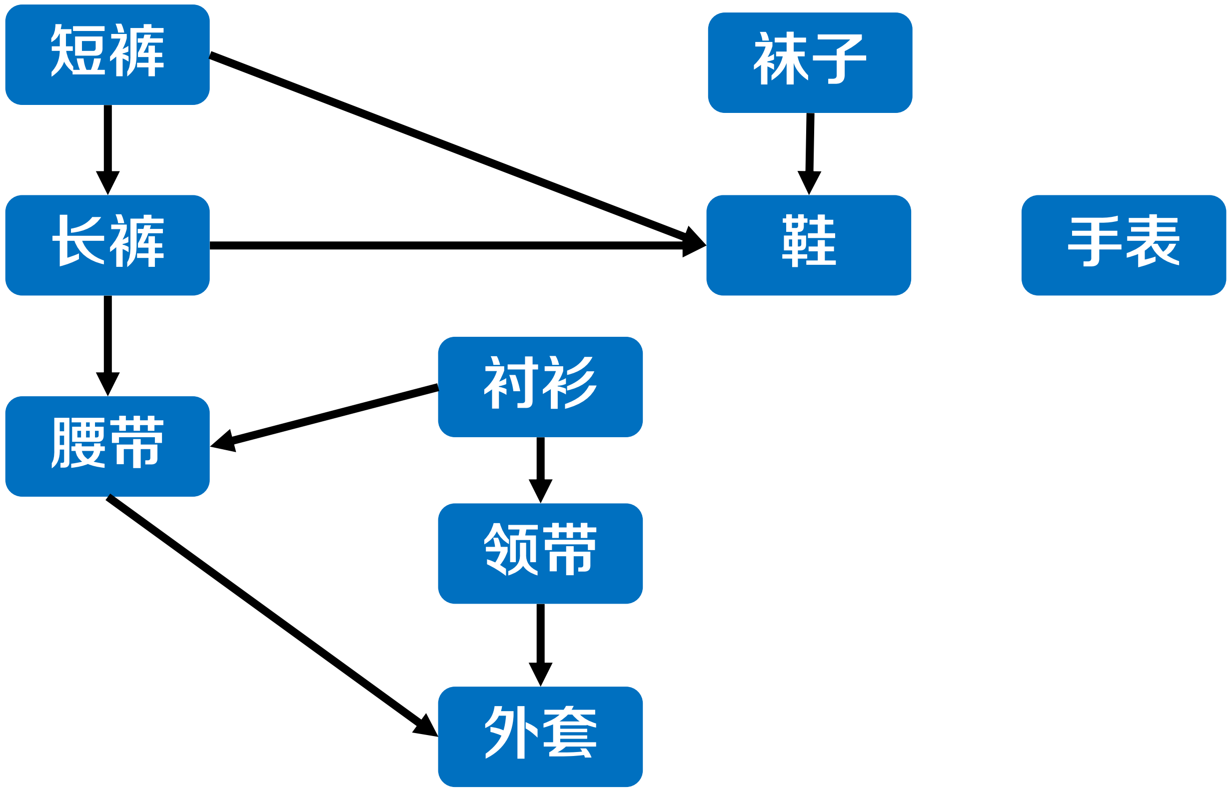
广度优先策略

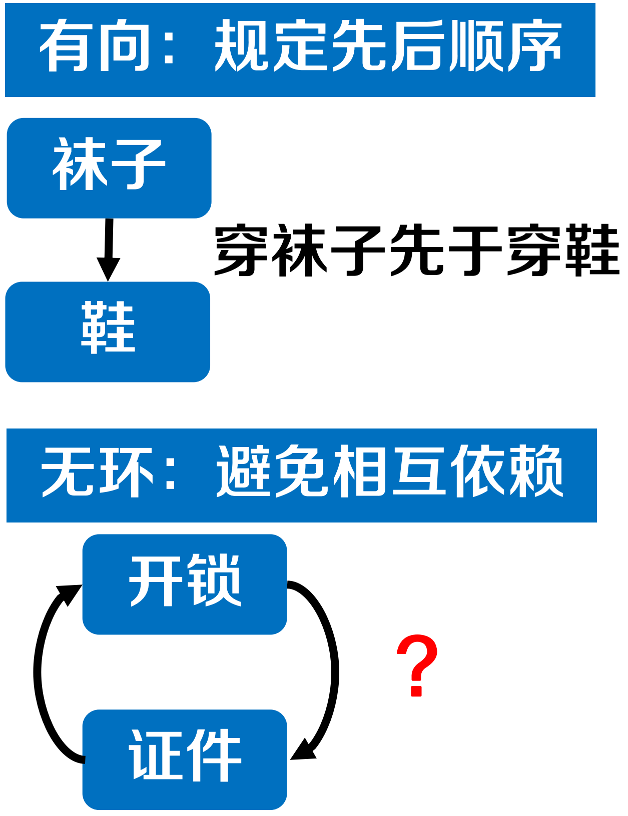
深度优先策略

算法分析

# 问题背景

- 穿衣步骤
  - 有向无环图（Directed Acyclic Graph，DAG）：表示事件发生的先后顺序

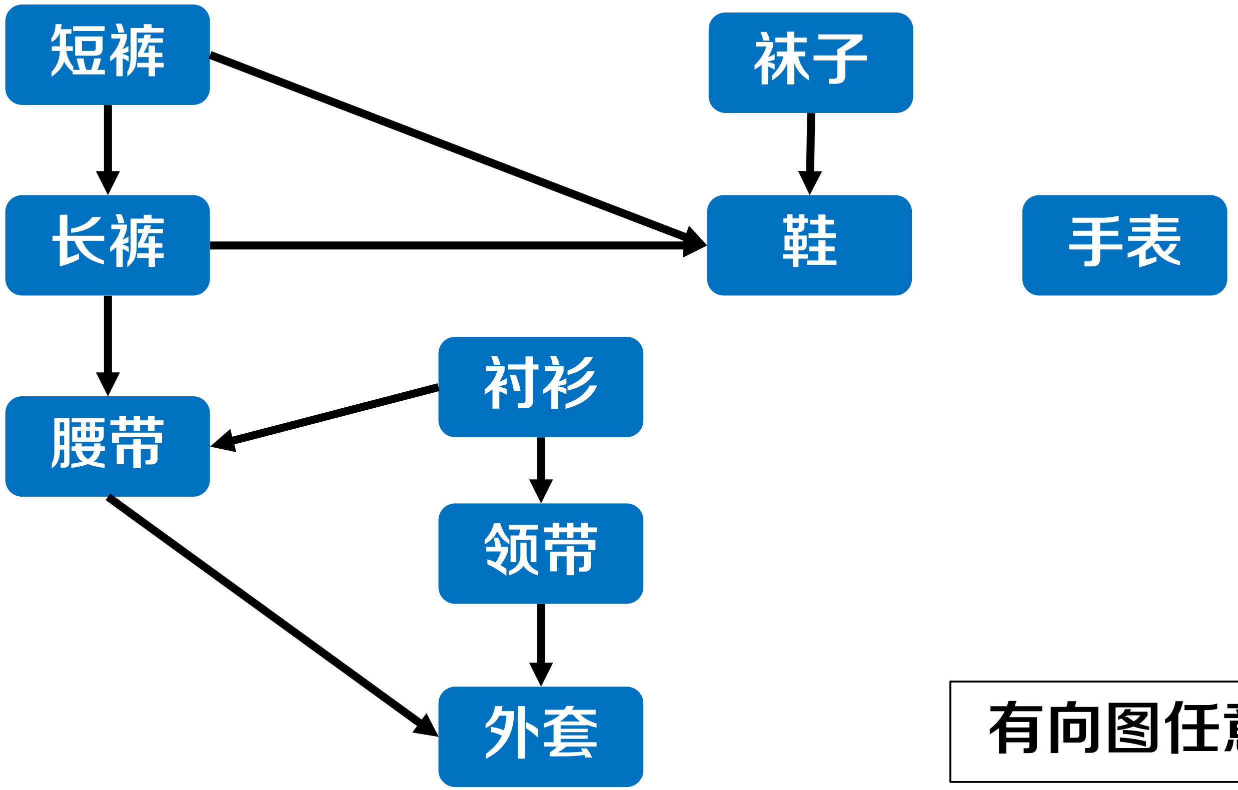


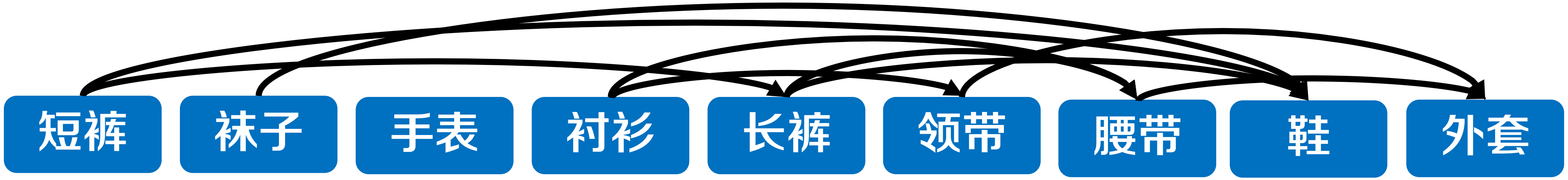

问题：如何确定一个可行的穿衣顺序?

# 问题背景

- 穿衣步骤
  - 有向无环图（Directed Acyclic Graph，DAG）：表示事件发生的先后顺序




有向图任意边的起点排在终点前面



# 问题定义

## 拓扑排序

Topological Sort

**输入**

- 有向无环图$G = < V, E >$

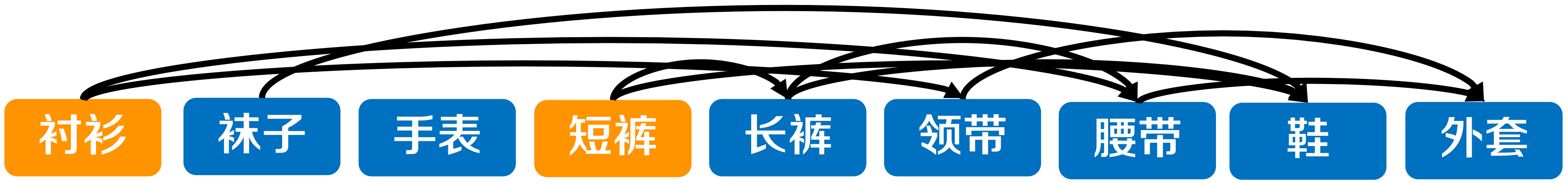
**输出**

- 图顶点$V$的拓扑序$S$，满足：

  对任意有向边$(u, v)$，排序后$u$在$v$之前

- 拓扑序不唯一

有向图任意边的起点排在终点前面



# 提纲

问题定义

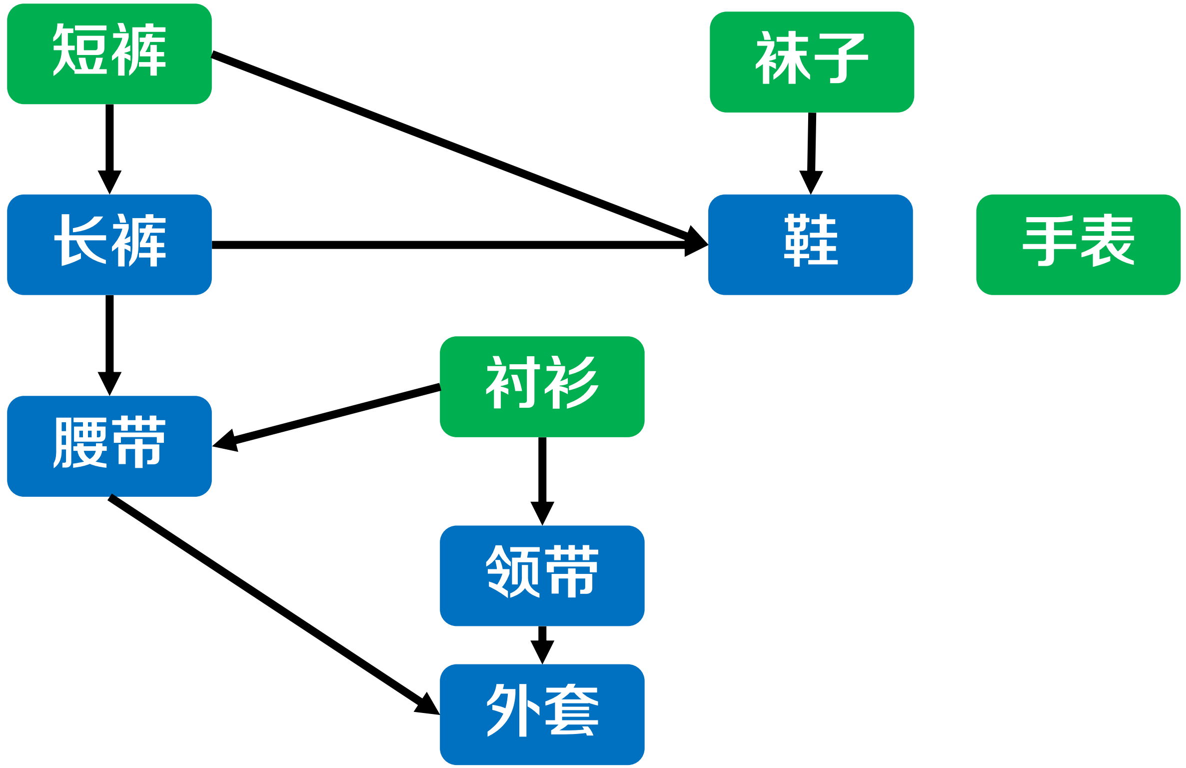
广度优先策略

深度优先策略

算法分析

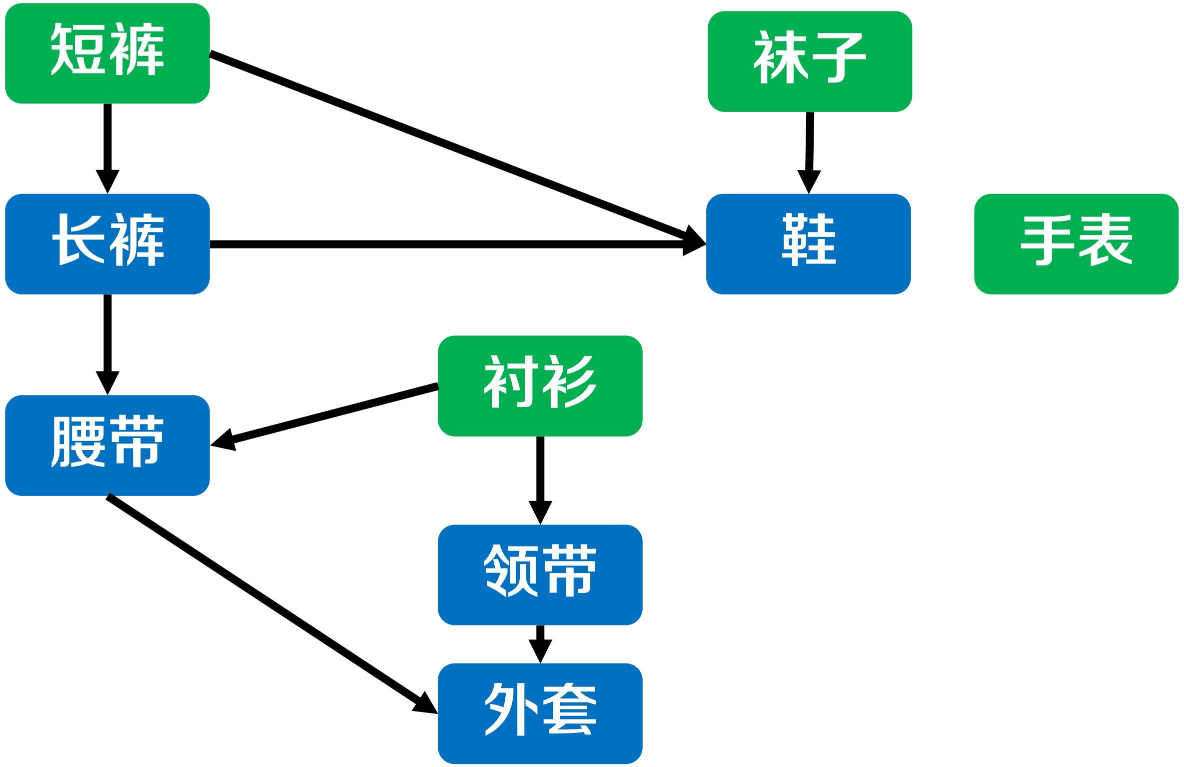
# 算法思想

- 有向图顶点的度分为入度和出度
  - 顶点$u$的入度：起点为$u$的边数
  - 顶点$u$的出度：终点为$u$的边数
- 若顶点入度为0
  - 所对应事件无制约，可直接完成



# 算法实例

- 算法思想
  - 完成入度为0点对应的事件
  - 删除完成事件，产生新的入度为0点，继续完成



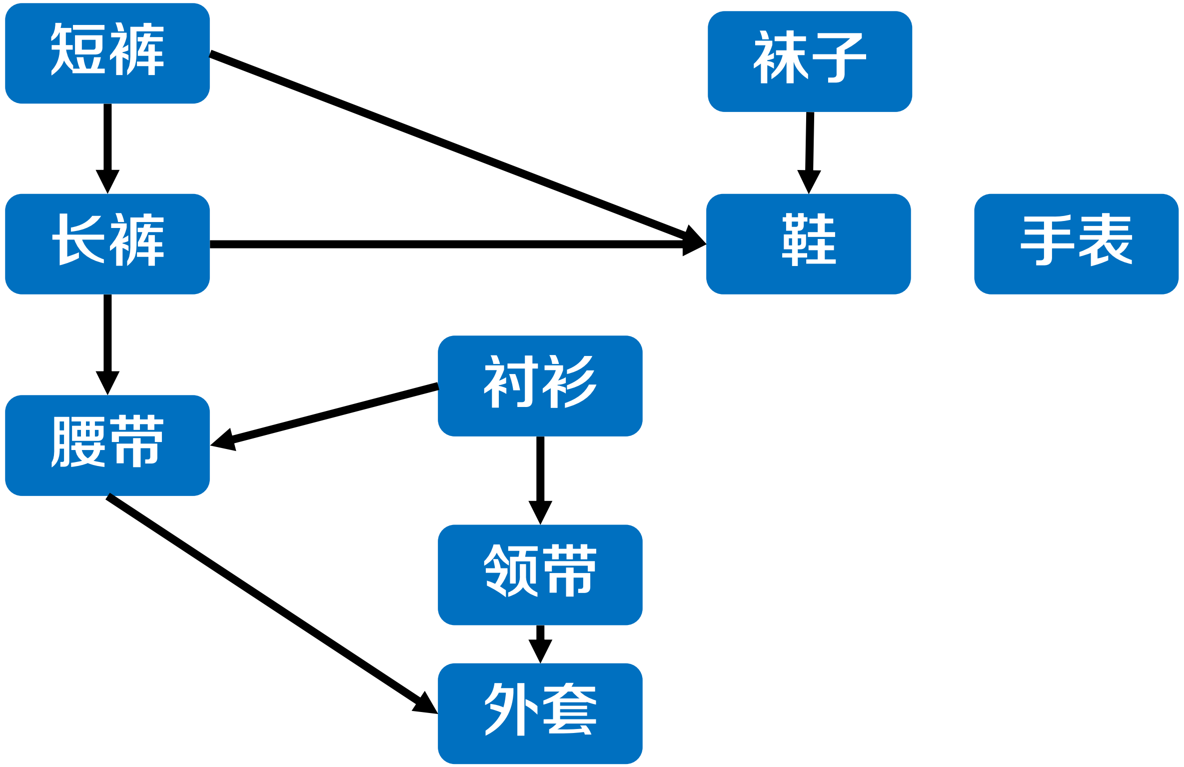

队列 记录入度为0度点

短裤 袜子 手表 衬衫

拓扑序 记录已完成事件

# 算法实例

- 算法思想
  - 完成入度为0点对应的事件
  - 删除完成事件，产生新的入度为0点，继续完成




队列　记录入度为0度点

| 短裤 | 袜子 | 手表 | 衬衫 |
|---|---|---|---|

拓扑序　记录已完成事件

# 算法实例

- 算法思想
  - 完成入度为0点对应的事件
  - 删除完成事件，产生新的入度为0点，继续完成

队列　记录入度为0度点

拓扑序　记录已完成事件

| 短裤 | 袜子 | 手表 | 衬衫 | 长裤 | 领带 | 鞋 | 腰带 | 外套 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

# 复杂度分析

- **Topological-Sort-BFS($G$)**

```
输入: 图G
输出: 顶点拓扑序
初始化空队列Q
for v ∈ V do
    if v.in_degree = 0 then
        Q.Enqueue(v)
    end
end
while not Q.is_empty() do
    u ← Q.Dequeue()
    print u
    for v ∈ G.Adj(u) do
        v.in_degree ← v.in_degree − 1
        if v.in_degree = 0 then
            Q.Enqueue(v)
        end
    end
end
```

$O(|V|)$

$\sum_{v\in V} deg(v) = O(|E|)$

$$O\left(\sum_{v\in V}(1+|Adj[v]|)\right) = O(|V|+|E|)$$

时间复杂度：$O(|V|+|E|)$

# 提纲

问题定义

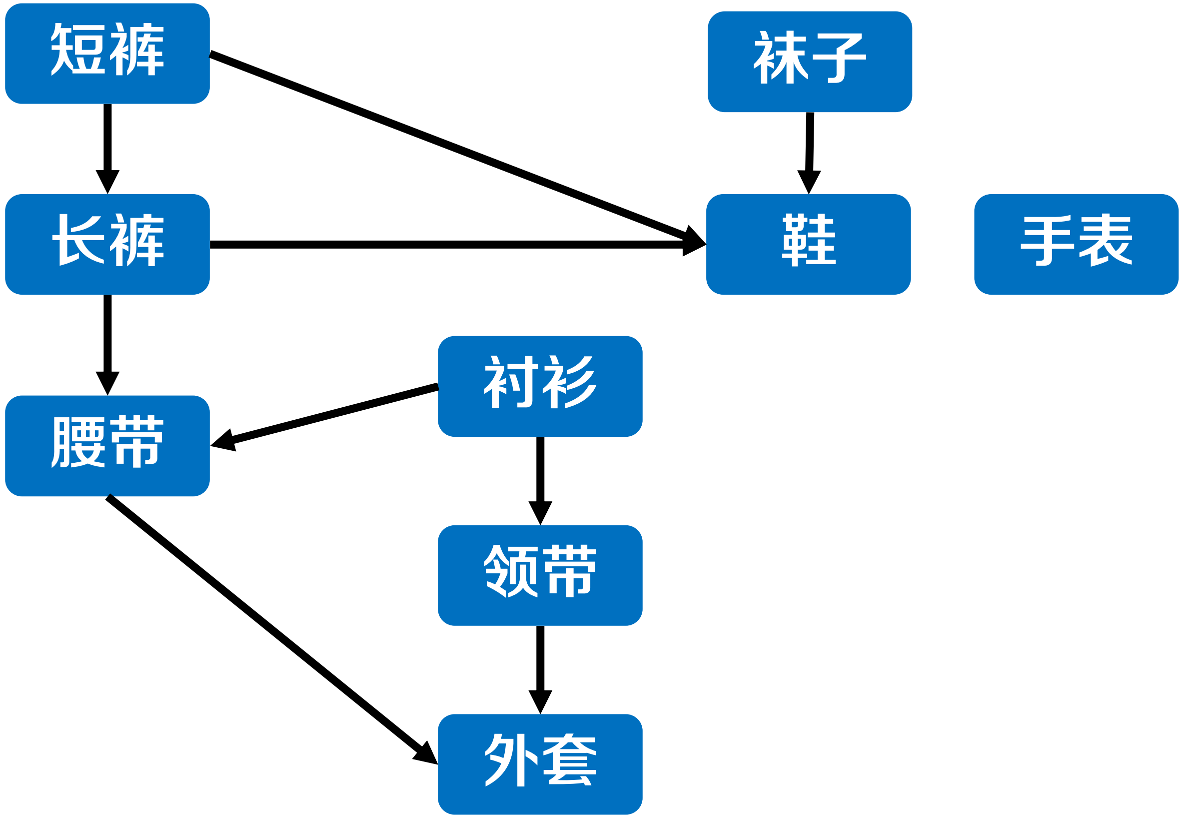
广度优先策略

深度优先策略

算法分析

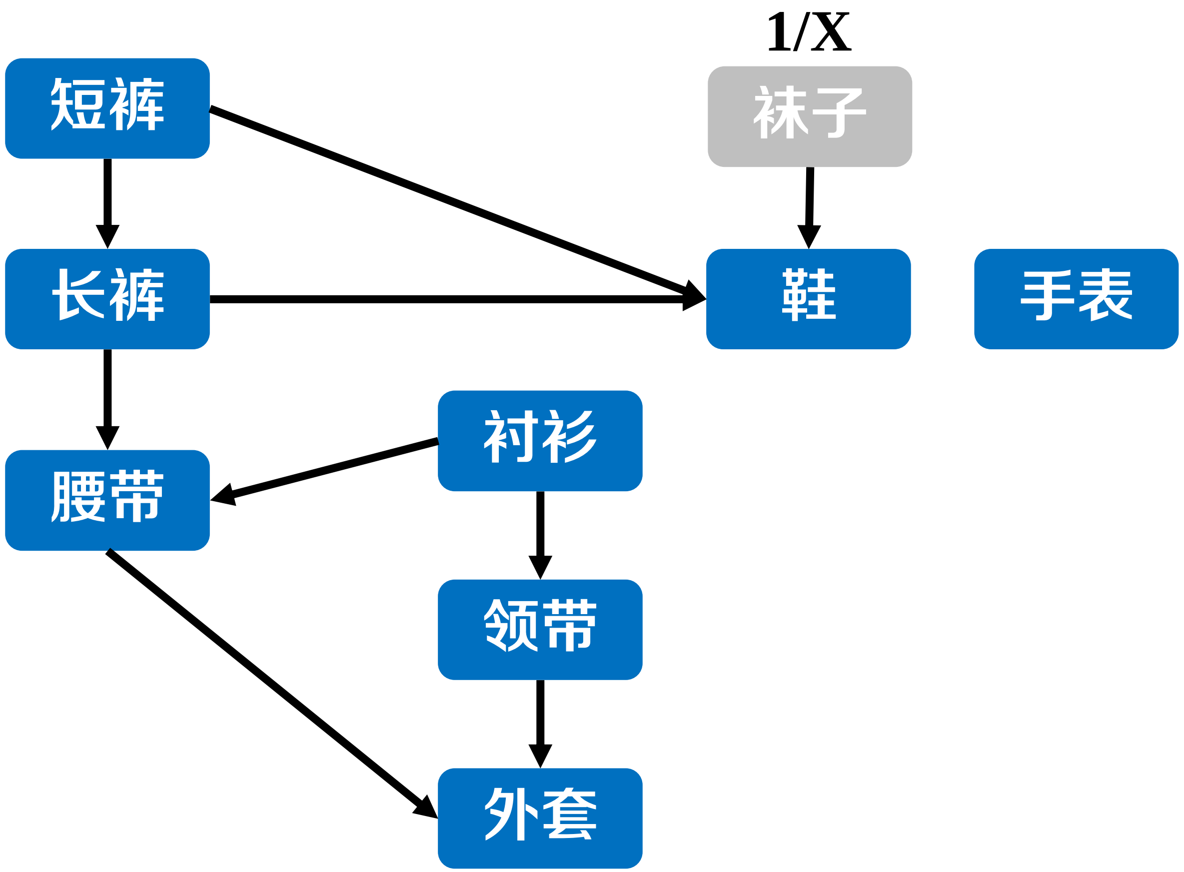
# 算法思想

- 从DFS的视角观察
  - 穿衣顺序和搜索深度有关：深度越深，顺序越靠后
  - 深度越深
    - 发现时刻越晚：按发现时刻顺序?
    - 完成时刻越早：按完成时刻逆序



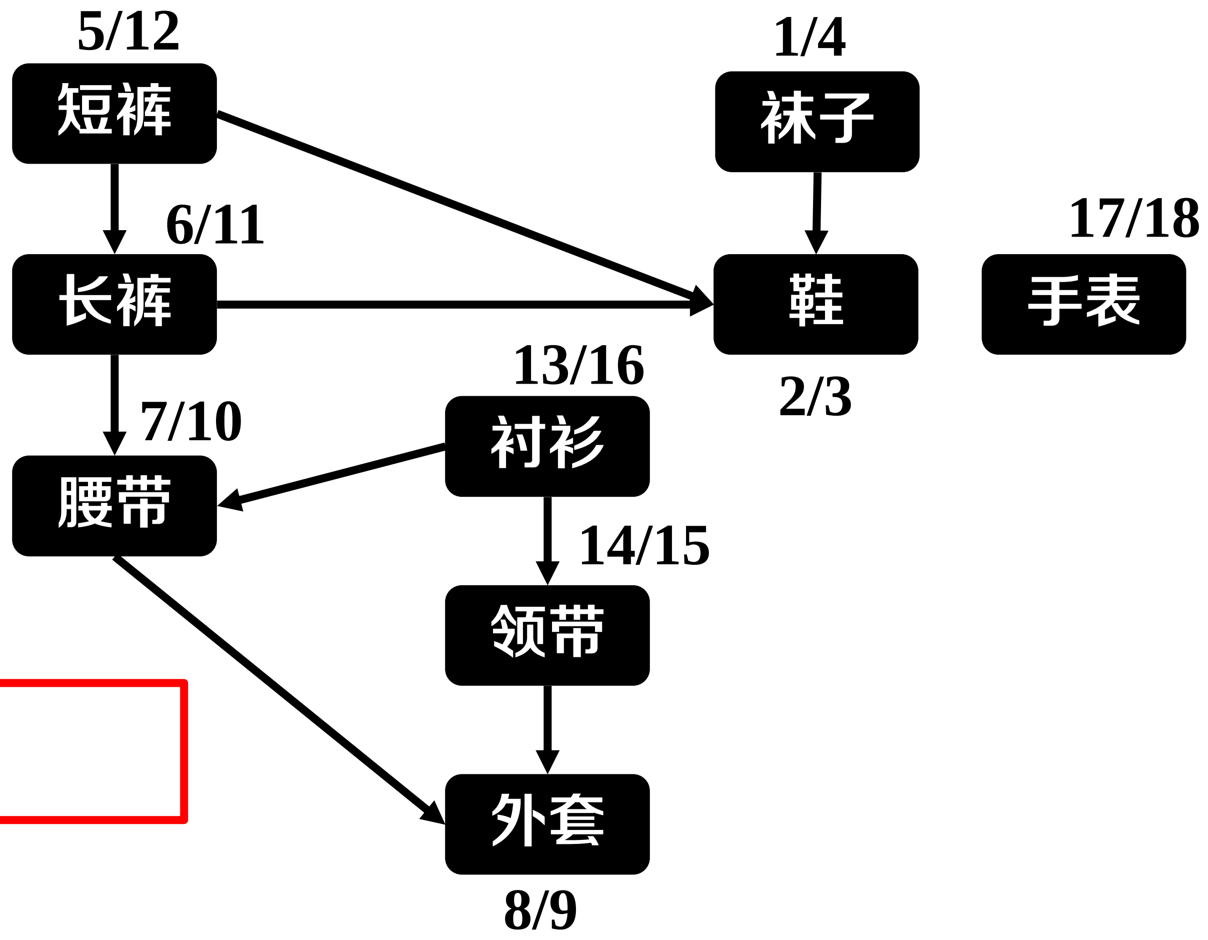
# 算法思想

- 从DFS的视角观察
  - 穿衣顺序和搜索深度有关：深度越深，顺序越靠后
  - 深度越深
    - 发现时刻越晚：按发现时刻顺序?
    - 完成时刻越早：按完成时刻逆序



# 算法思想

- 从DFS的视角观察
  - 穿衣顺序和搜索深度有关：深度越深，顺序越靠后
  - 深度越深
    - 发现时刻越晚：按发现时刻顺序
    - 完成时刻越早：按完成时刻逆序?




按完成时刻逆序是否正确?

完成时刻逆序排列

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 手表 | 衬衫 | 领带 | 短裤 | 长裤 | 腰带 | 外套 | 袜子 | 鞋 |

# 提纲

问题定义

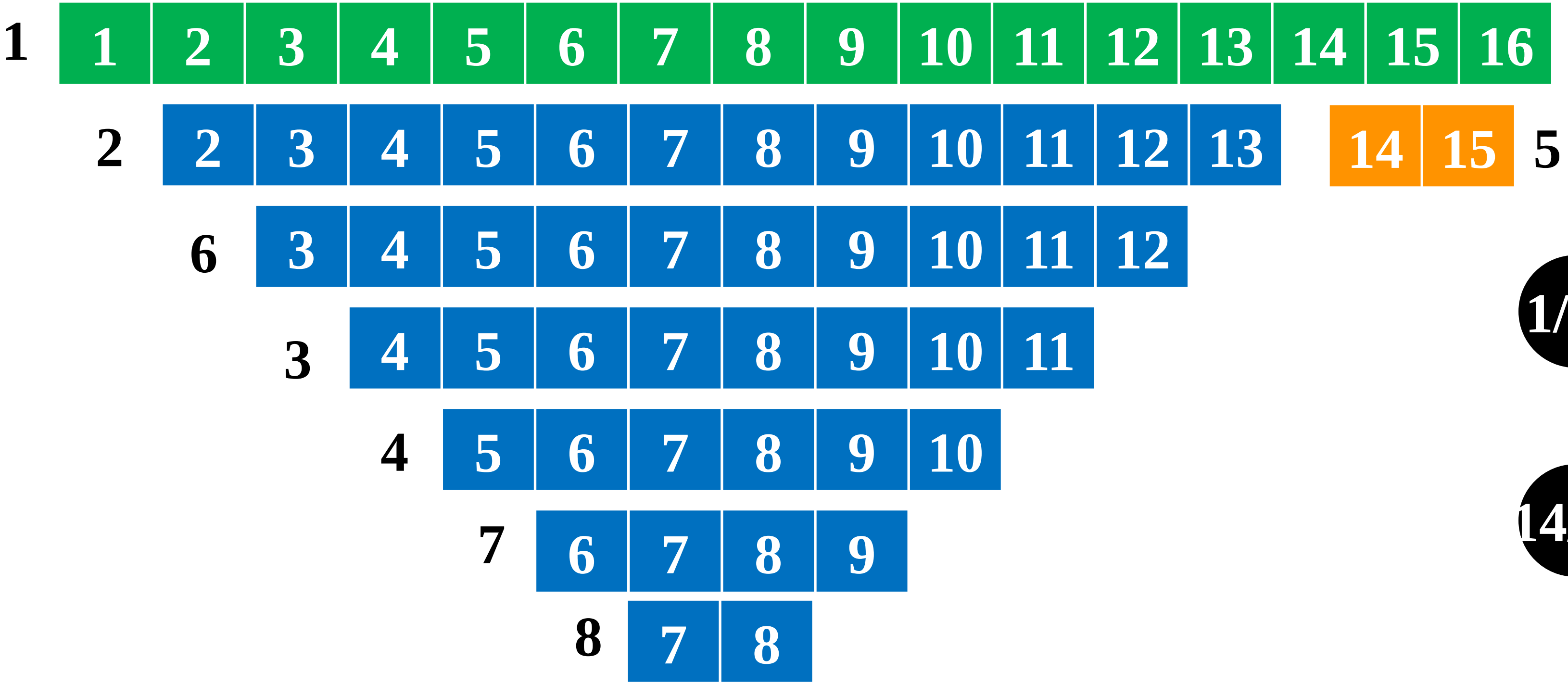
广度优先策略

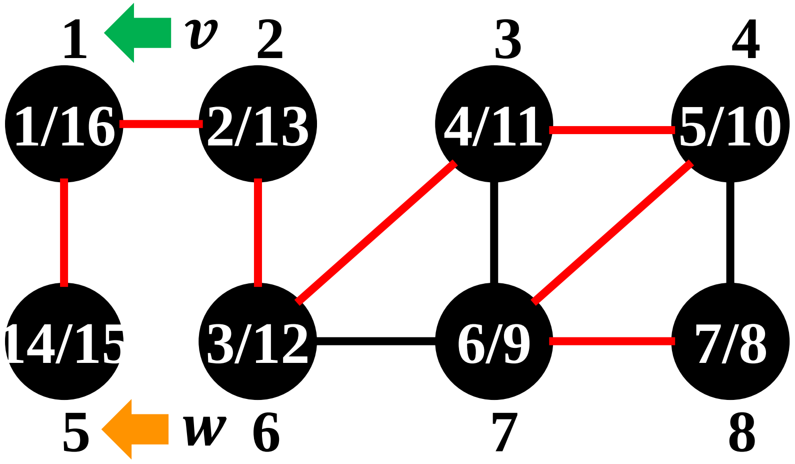
深度优先策略

算法分析

# 正确性证明

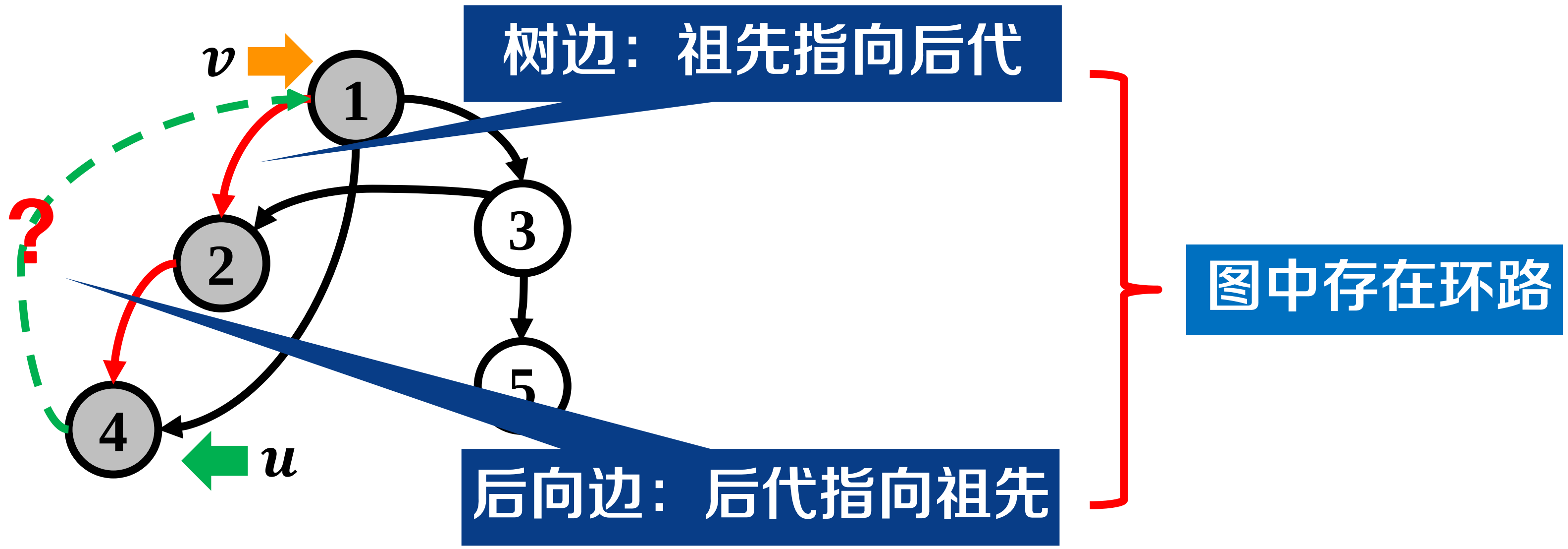
- 已知深度优先搜索确定的顺序：顶点完成时刻的逆序
- 已知拓扑序：对任意边$(u,v)$，$u$在$v$前面
- 对任意边$(u,v)$，完成时刻满足：$f(u) > f(v)$ ⟶ 算法正确
  - 证明：设当前顶点为$u$，搜索顶点$v$
    - 若$v$为白色，$v$是$u$的后代，$f(u) > f(v)$ （括号化定理）



# 正确性证明

- 已知深度优先搜索确定的顺序：顶点完成时刻的逆序
- 已知拓扑序：对任意边$(u,v)$，$u$在$v$前面
- 对任意边$(u,v)$，完成时刻满足：$f(u) > f(v)$ ⟶ 算法正确
  - 证明：设当前顶点为$u$，搜索顶点$v$
    - 若$v$为白色，$v$是$u$的后代，$f(u) > f(v)$ （括号化定理）
    - 若$v$为黑色，$v$已经完成，$u$尚未完成，$f(u) > f(v)$
    - 若$v$是灰色？不可能！因为有向无环图不存在后向边



# 正确性证明

- 已知深度优先搜索确定的顺序：顶点完成时刻的逆序
- 已知拓扑序：对任意边$(u,v)$，$u$在$v$前面
- 对任意边$(u,v)$，完成时刻满足：$f(u) > f(v)$ ⟶ 算法正确
  - 证明：设当前顶点为$u$，搜索顶点$v$
    - 若$v$为白色，$v$是$u$的后代，$f(u) > f(v)$ （括号化定理）
    - 若$v$为黑色，$v$已经完成，$u$尚未完成，$f(u) > f(v)$
    - 若$v$是灰色？不可能！因为有向无环图不存在后向边

# 伪代码

- **Topological-Sort-DFS(*G*)**

**输入:** 图$G$
**输出:** 顶点拓扑序
$L \leftarrow DFS(G)$
**return** $L.reverse()$

问题：如何在搜索过程中得到按完成时刻顺序排列的顶点?

# 伪代码

- **DFS($G$)**

```
输入: 图 G
新建数组 color[1..V], L[1..V]
for v ∈ V do
    color[v] ← WHITE
end
for v ∈ V do
    if color[v] = WHITE then
        L' ← DFS-Visit(G, v)
        向L结尾追加L'
    end
end
return L
```

- **DFS-Visit($G, v$)**

```
输入: 图 G, 顶点 v
输出: 按完成时刻从早到晚排列的顶点 L
color[v] ← GRAY
for w ∈ G.Adj[v] do
    if color[w] = WHITE then
        L ← DFS-Visit(G, w)
    end
end
color[v] ← BLACK
向L结尾追加顶点v
return L
```

顶点按完成时刻排列

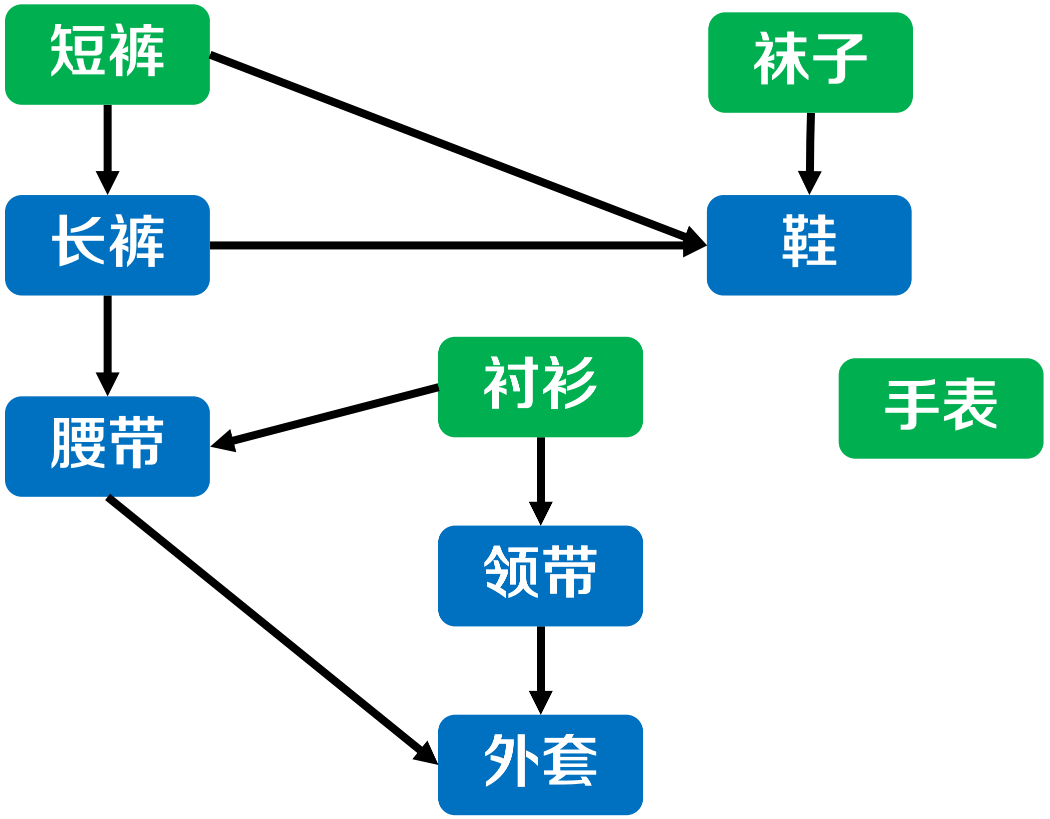
# 时间复杂度

- **Topological-Sort-DFS($G$)**

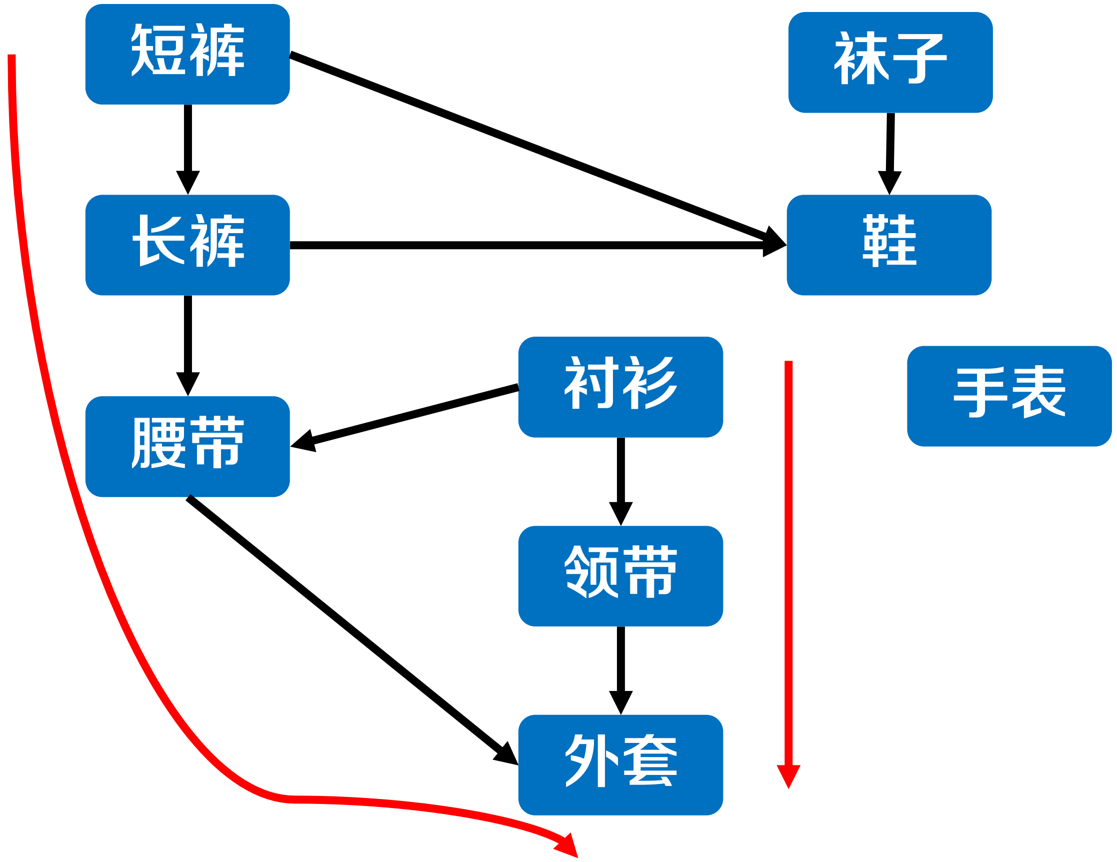
**输入:** 图$G$
**输出:** 顶点拓扑序
$L \leftarrow DFS(G)$
**return** $L.reverse()$

**时间复杂度：$O(|V| + |E|)$**

# 小结




广度优先
顺序思想：把容易完成的事优先完成




深度优先
逆序思想：把不易完成的事放到后面

# 谢谢

BDA

Beihang University