Design and Analysis of Algorithms

Part III: Greedy Algorithms

Lecture 18: Huffman Coding

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

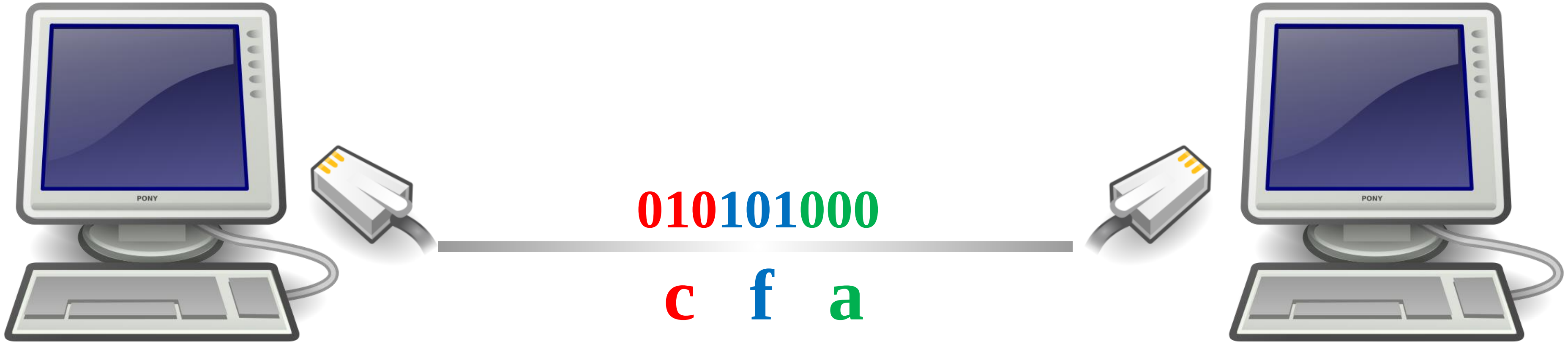
贪心策略篇概述

- 在算法课程第三部分“贪心策略”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Fractional Knapsack Problem (部分背包问题)
  - Huffman Coding Problem (赫夫曼编码问题)
  - Activity Selection Problem (活动选择问题)

问题背景：字符编码

- 在计算机中，常用二进制串对不同字符进行编码

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
编码方式	000	001	010	011	100	101



问题：哪些编码方式是可行的？

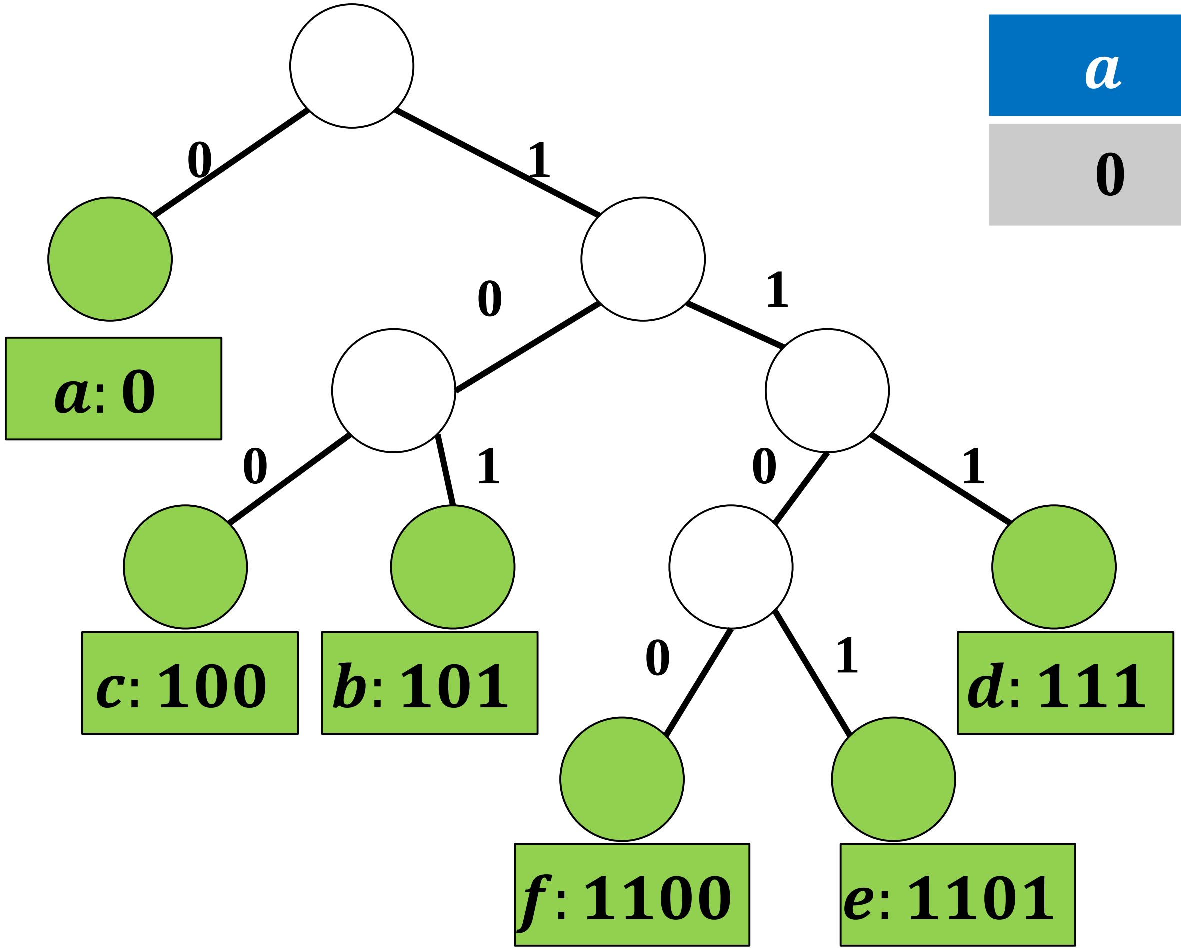
问题背景：字符编码

	a	b	c	d	e	f
编码方式1	0	101	100	111	1101	1100

- 编码方式1：对"cfa"编码
  - 编码：cfa →10011000
  - 解码： 10011000 →？

问题背景：字符编码

- 编码树
  - 顶点到左结点的边标记0，到右结点的边标记1，通过编码方案构造编码树
  - 每条根到叶子的路径对应每个字符的二进制串

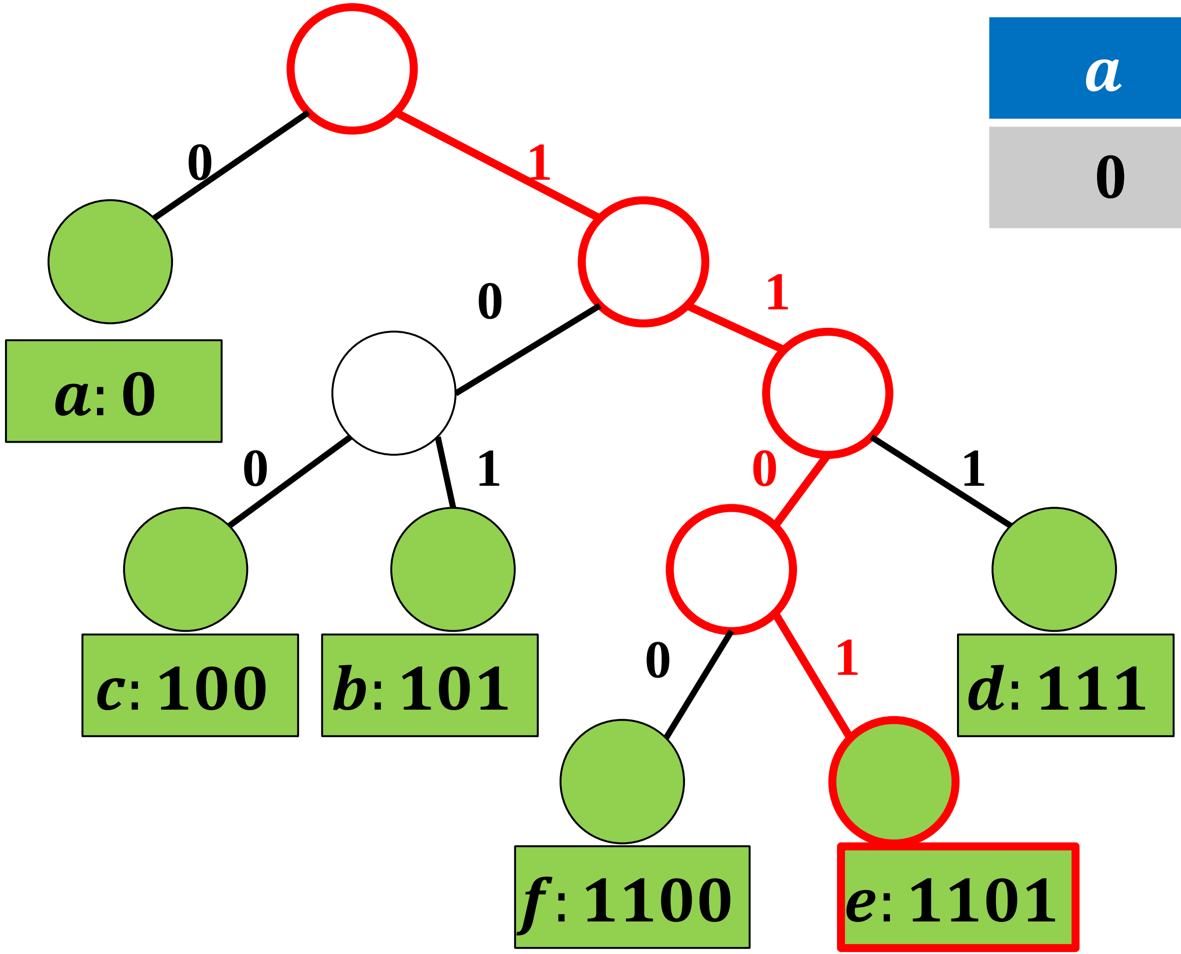


a	b	c	d	e	f
0	101	100	111	1101	1100

解析1101

问题背景：字符编码

- 编码树
  - 顶点到左结点的边标记0，到右结点的边标记1，通过编码方案构造编码树
  - 每条根到叶子的路径对应每个字符的二进制串



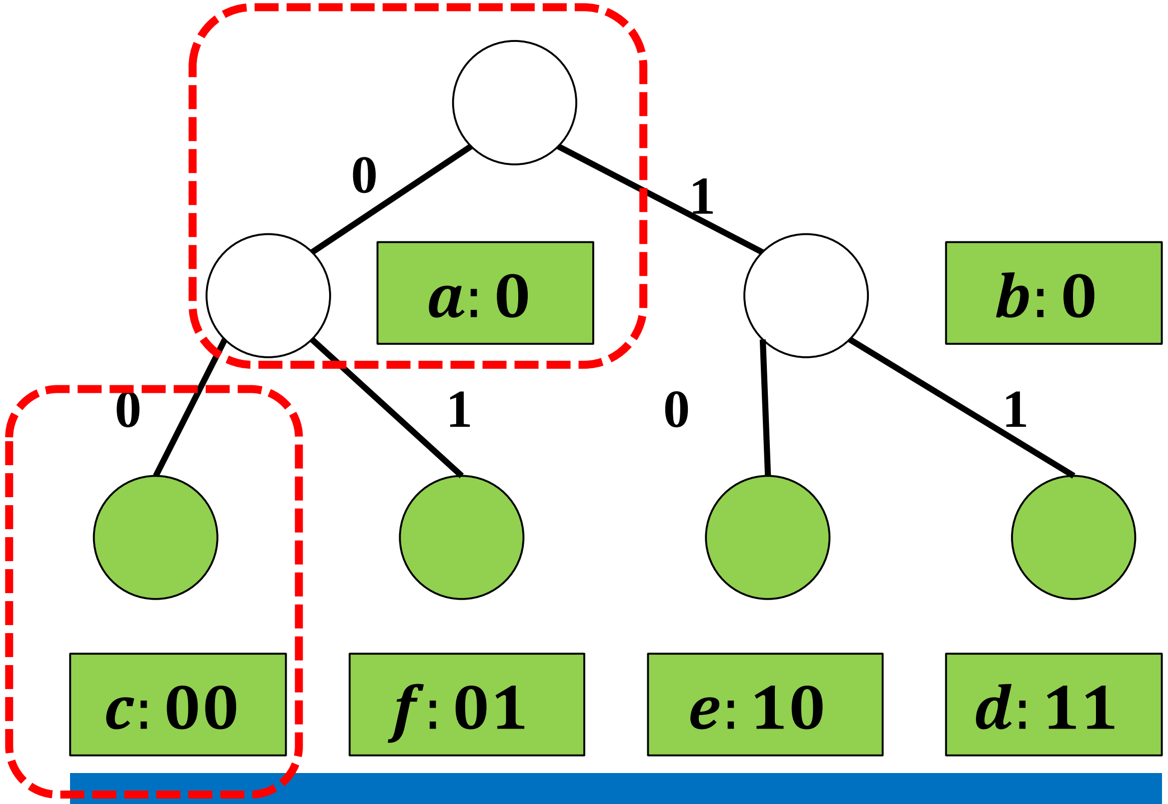
a	b	c	d	e	f
0	101	100	111	1101	1100

1101解析结果为e

问题背景：字符编码

	a	b	c	d	e	f
编码方式1	0	101	100	111	1101	1100
编码方式2	0	1	00	01	10	11

- 编码方式1：对"cfa"编码
  - 编码：$cfa \rightarrow 10011000$
  - 解码：$10011000 \rightarrow cfa$
- 编码方式2：对"cfa"编码
  - 编码：$cfa \rightarrow 00110$
  - 解码： $00110 \rightarrow aabba$
  - 解码： $00110 \rightarrow cfa$

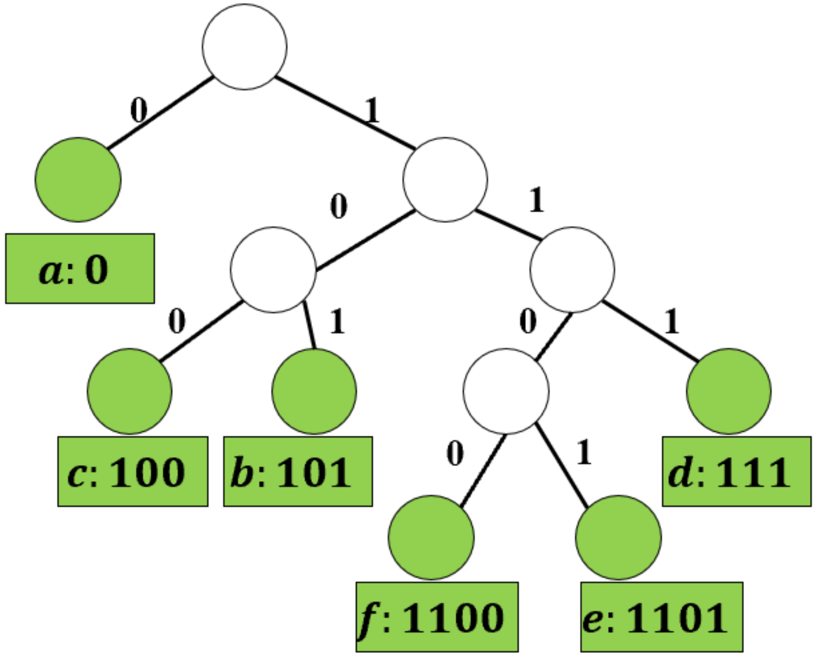


解码结果不唯一

问题背景：字符编码

	a	b	c	d	e	f
编码方式1	0	101	100	111	1101	1100
编码方式2	0	1	00	01	10	11

- 前缀码：编码的任意前缀不是其他编码

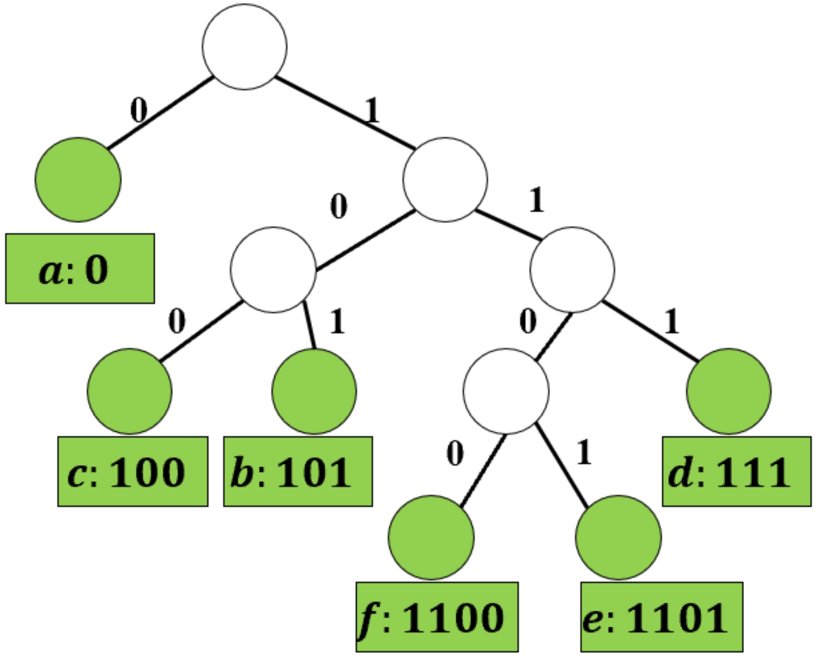


解码结果唯一，编码方式可行

问题背景：字符编码

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
编码方式1	0	101	100	111	1101	1100
编码方式2	0	1	00	01	10	11

- 前缀码：编码的任意前缀不是其他编码



问题：如何比较前缀码之间的优劣？

问题背景：字符编码

	a	b	c	d	e	f
频数（千次）	45	13	12	16	9	5
前缀码1	0	101	100	111	1101	1100
前缀码2	1100	1101	111	100	101	0

- 比较编码后二进制串的总长，其依赖于待编码字符的频数
  - 使用前缀码1编码
    - $(45 \times 1 + 13 \times 3 + 12 \times 3 + 16 \times 3 + 9 \times 4 + 5 \times 4) \times 1000 = 224\,000$
  - 使用前缀码2编码
    - $(45 \times 4 + 13 \times 4 + 12 \times 3 + 16 \times 3 + 9 \times 3 + 5 \times 1) \times 1000 = 348\,000$

问题：如何求得编码后二进制串总长最短的前缀码？

问题定义

- 形式化定义

最优前缀码问题

Optimal Prefix Code Problem

输入

- 字符数n以及各个字符的频数$F=<f_1, f_2, \dots, f_n>$

输出

- 解析结果唯一的二进制编码方案$C=<c_1, \dots, c_n>$，令

$$\min \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot f_i$$

优化目标

$|c_i|$为字符i的编码二进制串长度

贪心策略：一般步骤

提出贪心策略

观察问题特征，构造贪心选择

证明策略正确

假设最优方案，通过替换证明

贪心策略：观察问题特征

	a	b	c	d	e	f
频数（千次）	45	13	12	16	9	5
前缀码1	0	101	100	111	1101	1100
前缀码2	1100	1101	111	100	101	0

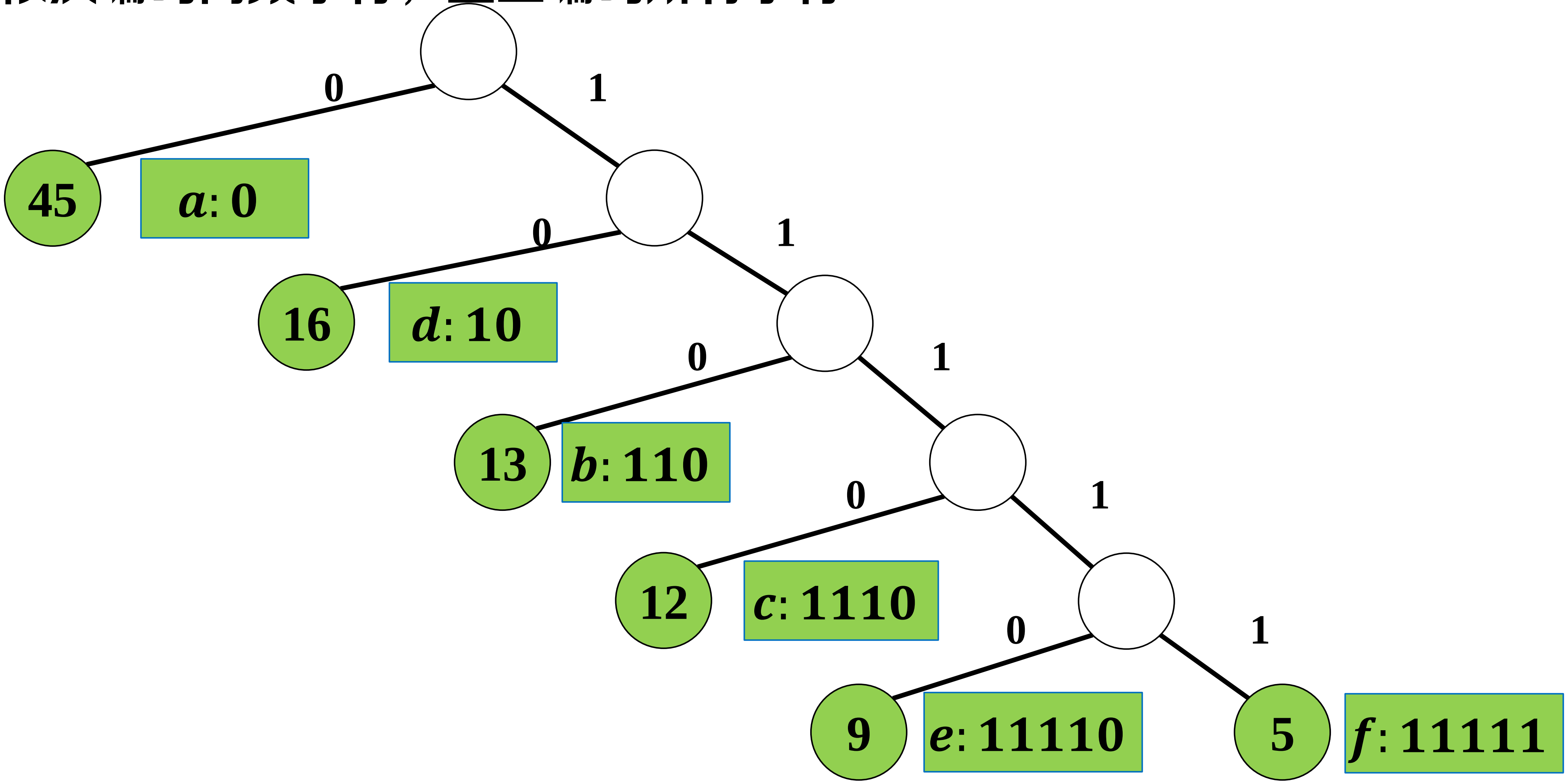
- 比较编码后二进制串的总长，其依赖于待编码字符的频数
  - 使用前缀码1编码
    - $(45 \times 1 + 13 \times 3 + 12 \times 3 + 16 \times 3 + 9 \times 4 + 5 \times 4) \times 1000 = 224\,000$
  - 使用前缀码2编码
    - $(45 \times 4 + 13 \times 4 + 12 \times 3 + 16 \times 3 + 9 \times 3 + 5 \times 1) \times 1000 = 348\,000$

最优解

编码方案适应频数大小，短二进制串编码高频字符

贪心策略1

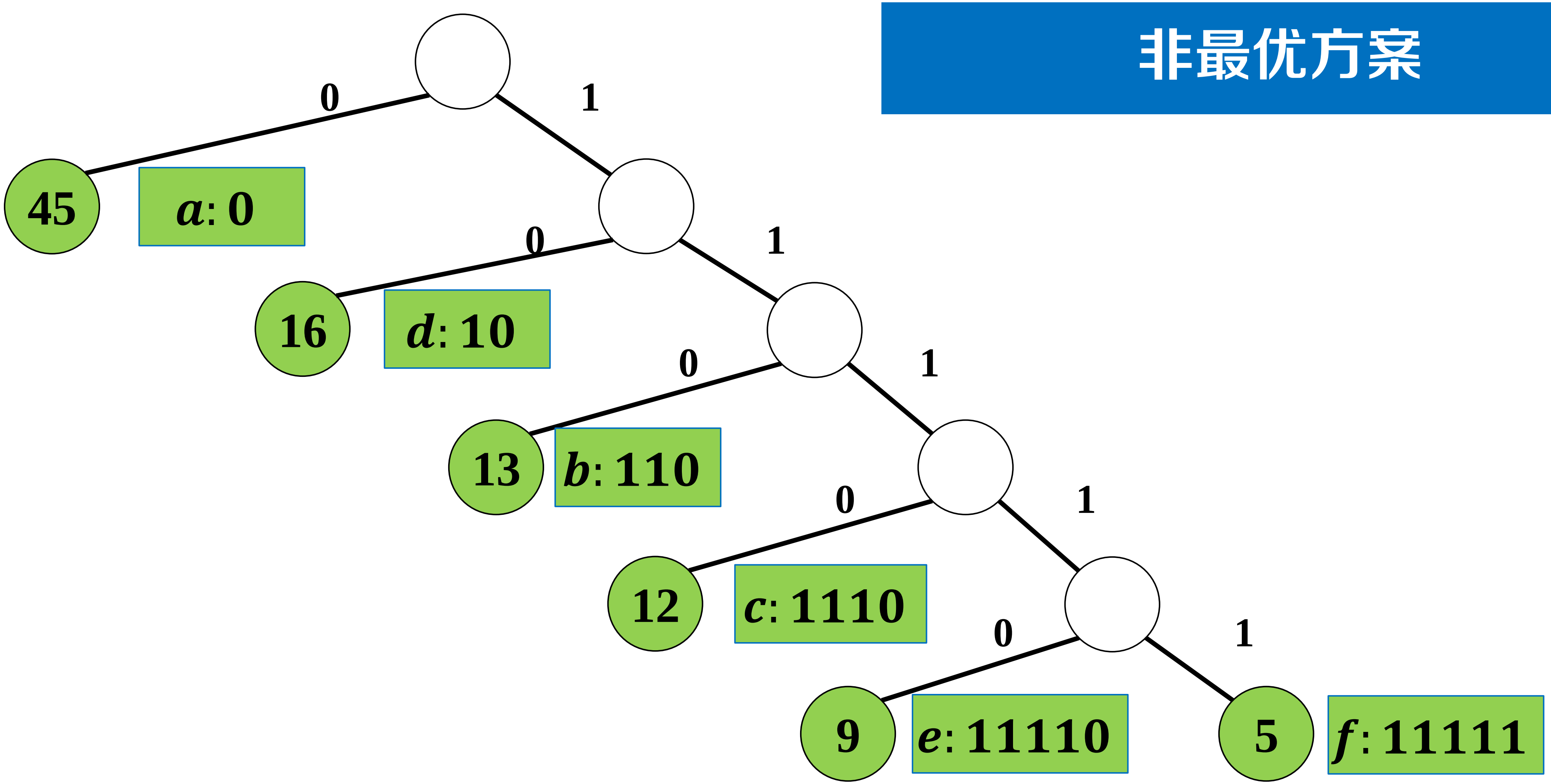
- 优先处理高频字符
  - 将字符频数从大到小排序 $F=<f_1,f_2,\ldots,f_n>$ $(f_1\geq f_2\geq\cdots\geq f_n)$
  - 依次编码高频字符，直至编码所有字符



贪心策略1

- 优先处理高频字符
  - $45 \times 1 + 16 \times 2 + 13 \times 3 + 12 \times 4 + 9 \times 5 + 5 \times 5 = \color{red}{234 > 224}$

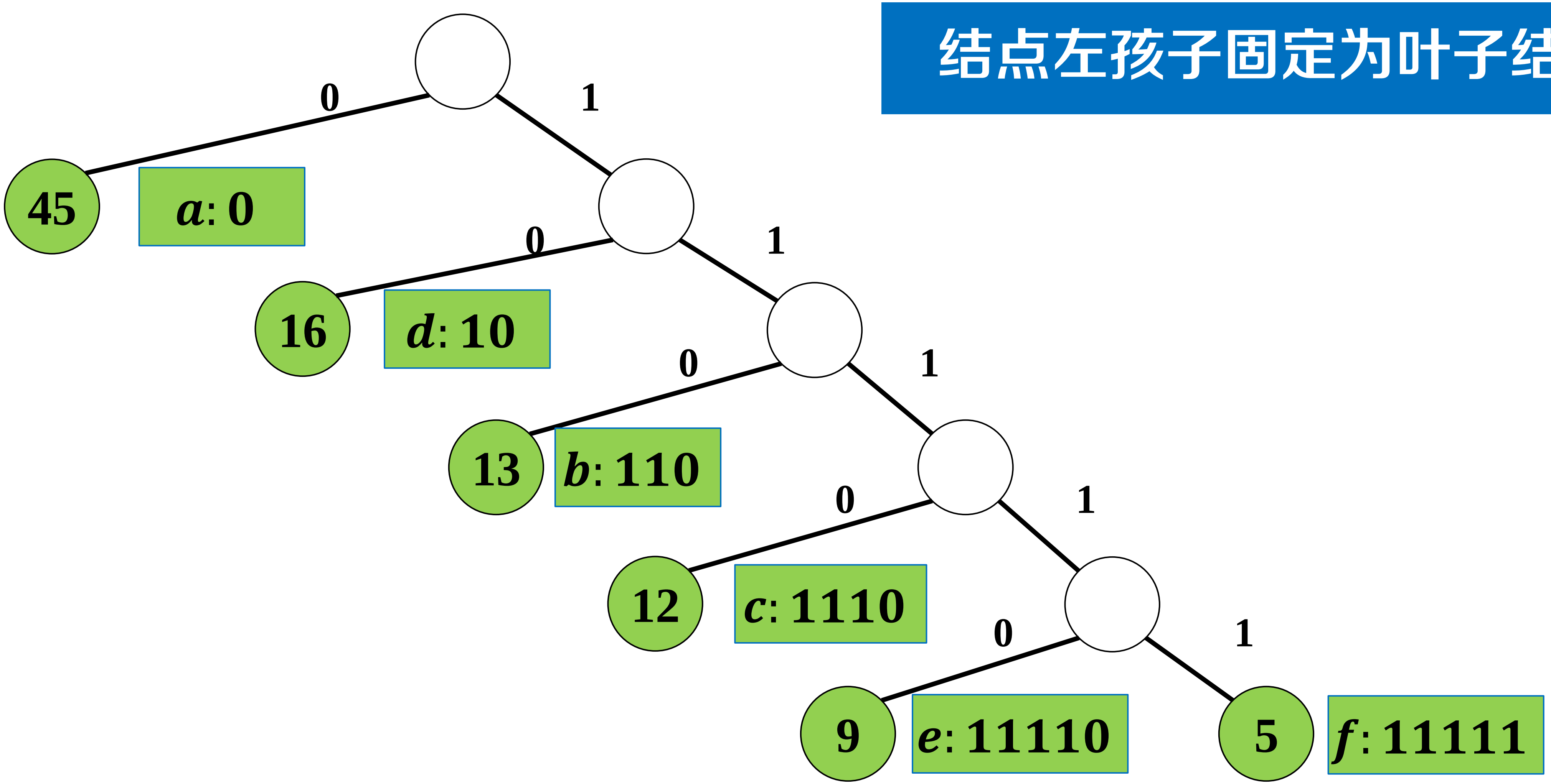
非最优方案



贪心策略1

- 优先处理高频字符
  - $45\times 1+16\times 2+13\times 3+12\times 4+9\times 5+5\times 5=234>224$

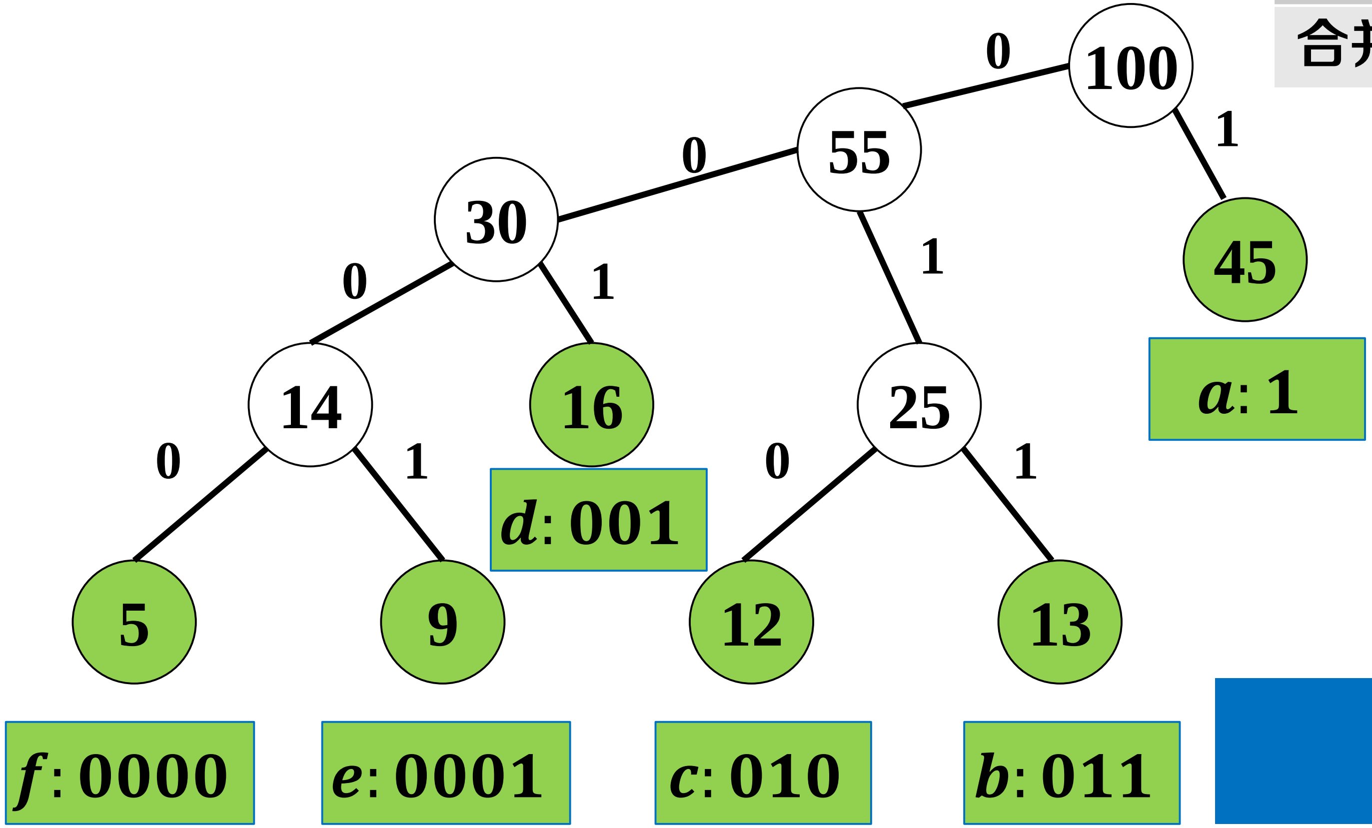
结点左孩子固定为叶子结点



贪心策略2

- 优先处理低频字符
  - 将字符频数从小到大排序 $F = < f_1, f_2, \ldots, f_n >$ $(f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n)$
  - 选择两个最小的频数f_1, f_2，合并为$f' = f_1 + f_2$
  - 在$F' = < f', f_3, \ldots, f_n >$ 中重复选择合并过程

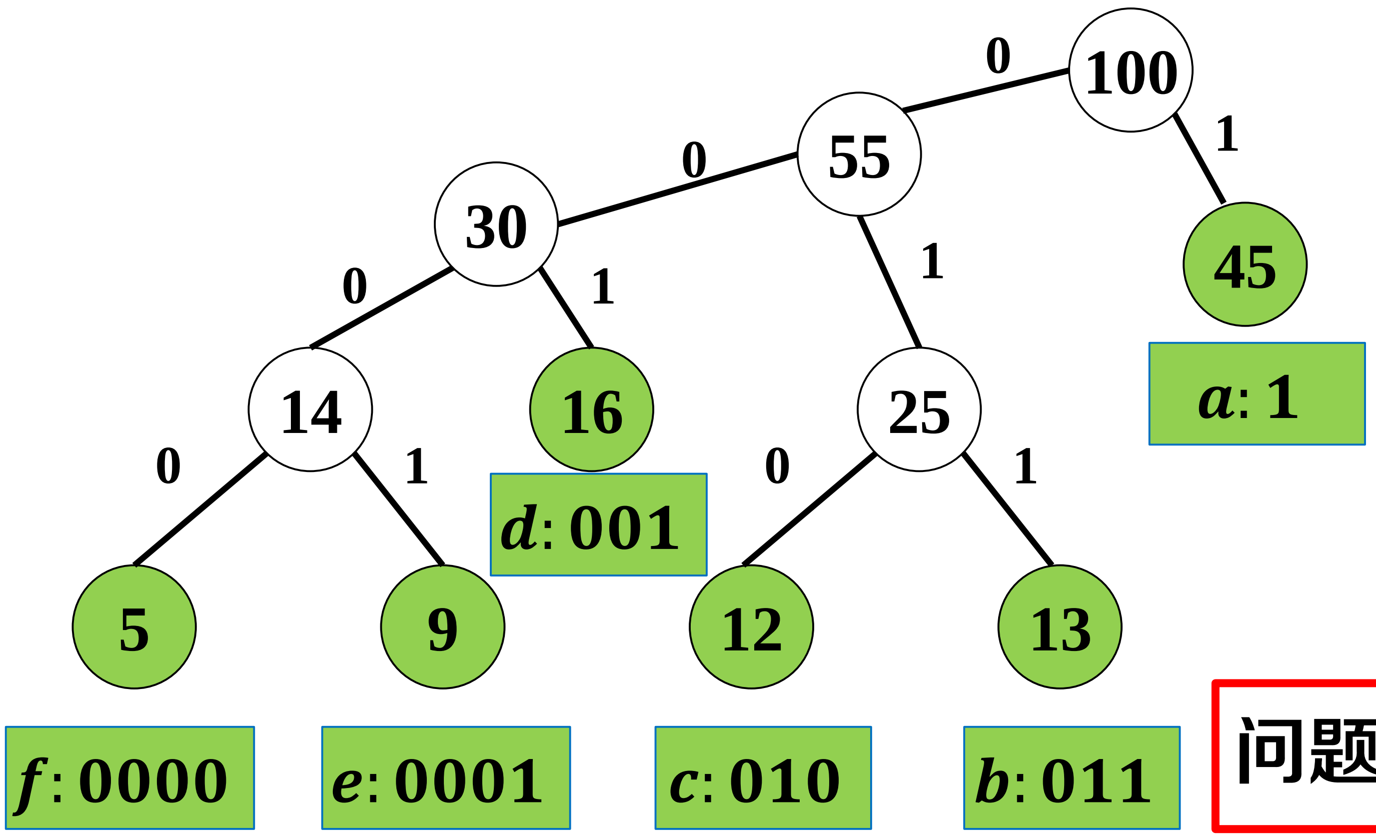
叶子频数						
合并频数					100	



霍夫曼编码

贪心策略2

- 优先处理低频字符
  - $45+55+25+30+12+13+14+16+9+5=224$(千次)



问题：是否为最优编码方案?

贪心策略：一般步骤

提出贪心策略

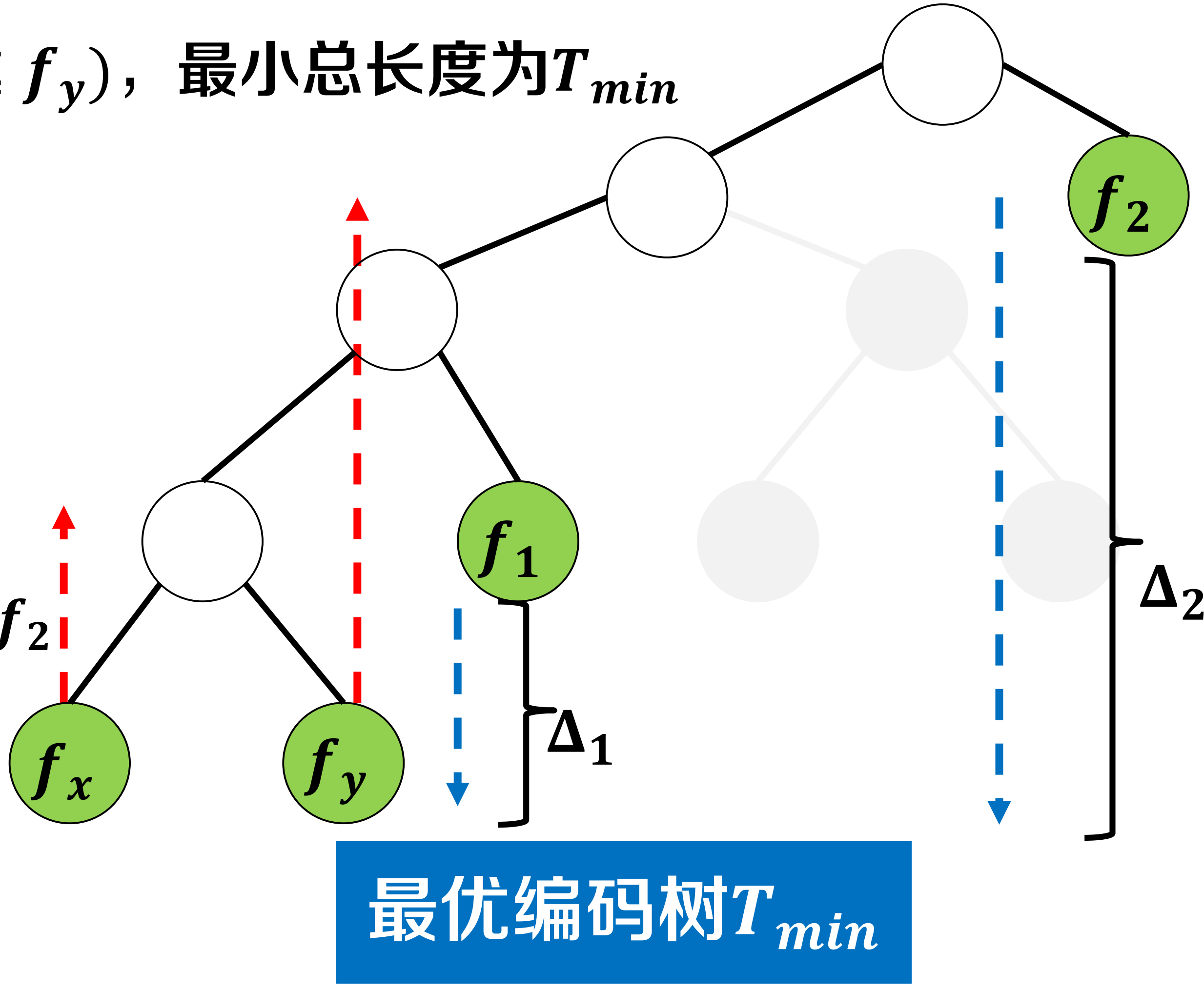
观察问题特征，构造贪心选择

证明策略正确

假设最优方案，通过替换证明

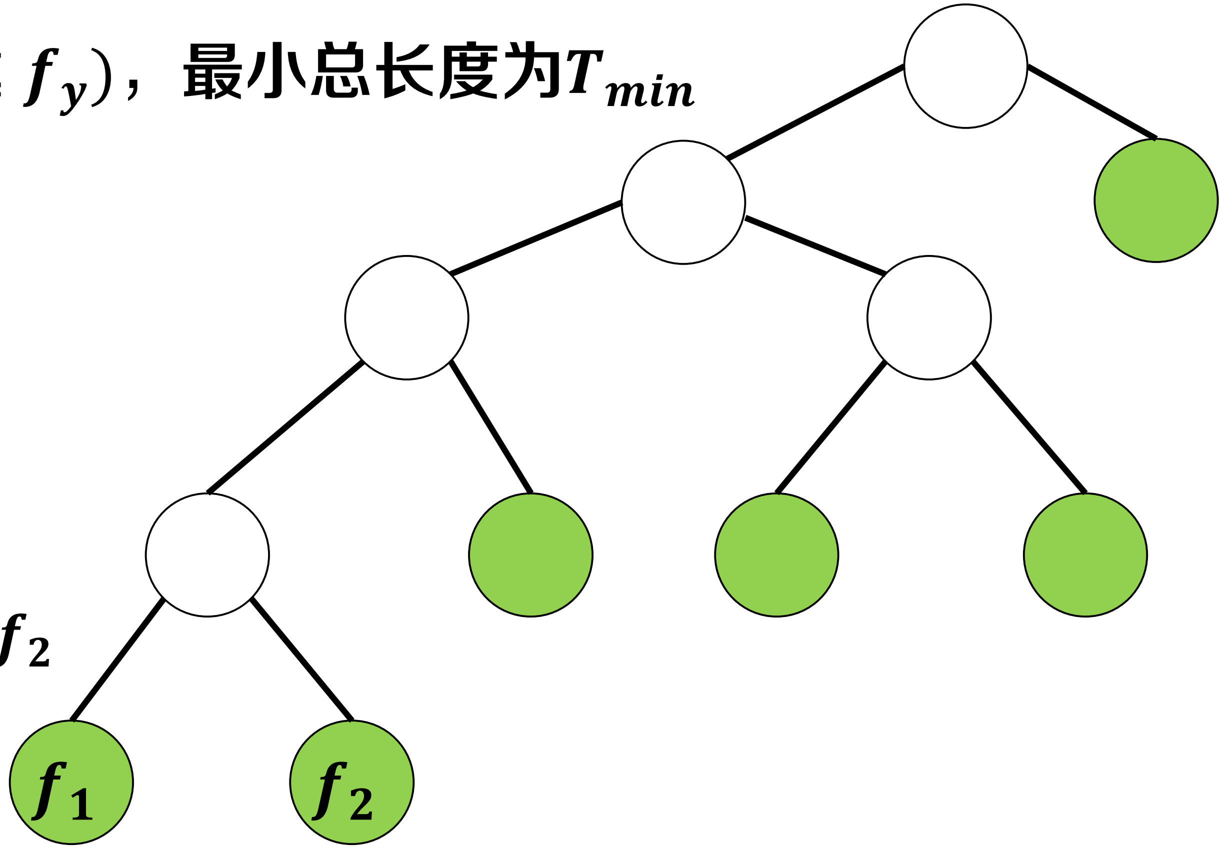
正确性证明

- 从小到大排序后，频数$F =< f_1, f_2, \dots, f_n >$ （$f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n$）
- 证明：存在最优方案，使得 f_1, f_2在编码树最底层
  - 最优方案最底层两结点是f_x, f_y（$f_x \le f_y$），最小总长度为T_{min}
  - 根据原始条件有
    - $f_1 \le f_x, f_2 \le f_y$
    - $\Delta_1 = d_T(f_x) - d_T(f_1) \ge 0$
    - $\Delta_2 = d_T(f_y) - d_T(f_2) \ge 0$
  - 交换f_1与f_x，f_2与f_y可得
    - $T = T_{min} - \Delta_1 f_x - \Delta_2 f_y + \Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2$
      $= T_{min} - \Delta_1(f_x - f_1) - \Delta_2(f_y - f_2)$
      $\le T_{min}$



正确性证明

- 从小到大排序后，频数$F = < f_1, f_2, \ldots, f_n >$ （$f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n$）
- 证明：存在最优方案，使得 f_1, f_2在编码树最底层
  - 最优方案最底层两结点是f_x, f_y（$f_x \le f_y$），最小总长度为T_{min}
  - 根据原始条件有
    - $f_1 \le f_x, f_2 \le f_y$
    - $\Delta_1 = d_T(f_x) - d_T(f_1) \ge 0$
    - $\Delta_2 = d_T(f_y) - d_T(f_2) \ge 0$
  - 交换f_1与f_x，f_2与f_y可得
    - $T = T_{min} - \Delta_1 f_x - \Delta_2 f_y + \Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2$
      $= T_{min} - \Delta_1(f_x - f_1) - \Delta_2(f_y - f_2)$
      $\le T_{min}$
- 存在最优方案，使得 f_1, f_2在编码树最底层

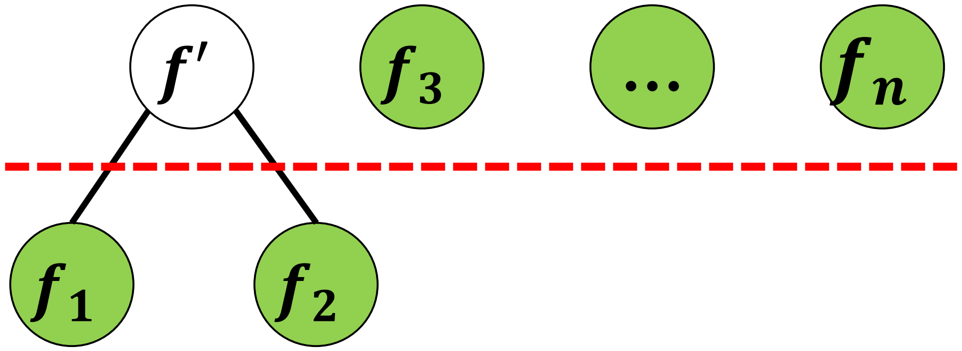


最优编码树T_{min}

正确性证明

- $F =< f_1, f_2, \dots, f_n >$存在最优方案，使 f_1, f_2在编码树最底层
- $F' =< f', f_3, \dots, f_n >$ $(f' = f_1 + f_2)$中，再寻最优方案

$F' =< f', f_3, \dots, f_n >$中选择最小两频数



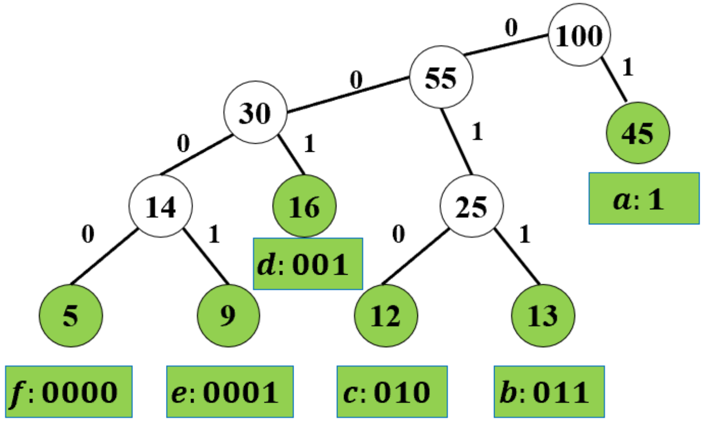
此过程即为霍夫曼编码，贪心正确性得证

伪代码

- **Huffman(F, n)**

```
输入: 字符数n,各字符频数F
输出: 霍夫曼编码树
//预处理
将F递增排序
新建结点数组P[1..n]和Q[1..n]
for i ← 1 to n do
    P[i].freq ← F[i]
    P[i].left ← NULL
    P[i].right ← NULL
end
Q ← ∅
for i ← 1 to n − 1 do
    新建结点z
    x ← ExtractMin(P, Q)
    y ← ExtractMin(P, Q)
    z.freq ← x.freq + y.freq
    z.left ← x
    z.right ← y
    Q.Add(z)
end
return ExtractMin(P, Q)
```

叶子频数						
合并频数					100	



复杂度分析

- **Huffman(F, n)**

输入: 字符数n,各字符频数F
输出: 霍夫曼编码树
//预处理
将F递增排序 — — — — — — $O(n\log n)$
新建结点数组$P[1..n]$和$Q[1..n]$
for $i \leftarrow 1$ *to* n **do**
    $P[i].freq \leftarrow F[i]$
    $P[i].left \leftarrow NULL$
    $P[i].right \leftarrow NULL$
end
$Q \leftarrow \emptyset$
$O(n)$
for $i \leftarrow 1$ *to* $n-1$ **do**
    新建结点z
    $x \leftarrow \mathrm{ExtractMin}(P, Q)$
    $y \leftarrow \mathrm{ExtractMin}(P, Q)$
    $z.freq \leftarrow x.freq + y.freq$
    $z.left \leftarrow x$
    $z.right \leftarrow y$
    $Q.Add(z)$
end
return $\mathrm{ExtractMin}(P, Q)$
$O(n)$

时间复杂度: $O(n\log n)$

谢谢

BDA

Beihang University