黄羽翔 2024302061069

计算理论导引

2025 年 11 月 9 日

## 计算理论导引第三次作业

**Question 1.** 利用分配律 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ 和 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$，是否可在多项式时间内将合（析）取范式转换成析（合）取范式?

不可以。

$CNF - SAT$ 是 NP 完全问题，因为我们不得不用指数时间枚举所有变量的真假组合，用多项式时间验证。

$DNF - SAT$ 是 P 问题，因为我们只需要选择一个子句枚举变量得到使其为真的一个组合即可。

如果它们可以在多项式时间内转化，那我可以以多项式时间把 $CNF - SAT$ 转化为 $DNF - SAT$ 并以多项式时间解决，我就证明了 $P = NP$，我将解决千禧年难题并获得 100 万美元，这是不可能发生的。

至于能否把 $DNF - SAT$ 转化为 $CNF - SAT$，可以假定这是成立的，那么逆向转化只需要交换 $\vee$ 和 $\wedge$ 就可以实现，然而我们刚刚说明了逆向转化不成立，所以原转化也不成立。

**Question 2.** 证明 $\mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}} = 2 - \mathbf{EXP}$。

证明 $\mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}} \subseteq$ **2-EXP**：

构造一台 **2-EXP** 的确定图灵机 $\mathbb{M}'$，它通过暴力模拟 $\mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}}$ 的神谕图灵机 $\mathbb{M}^{\mathcal{O}}$ 的计算过程（包括询问神谕）来解决问题。

设 $L \in \mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}}$，$\mathbb{M}'$ 模拟 $\mathbb{M}^{\mathcal{O}}$ 判定 $L$ 的过程，其中当 $\mathbb{M}^{\mathcal{O}}$ 询问神谕 $y$ 的时候，$\mathbb{M}'$ 模拟 $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}$，以 $y$ 作为输入，并把模拟 $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}$ 的结果给自己继续使用。(这里 $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}$ 是以 **EXP** 时间完成神谕 $\mathcal{O}$ 功能的图灵机)。

$\mathbb{M}$ 最多运行 $O(2^{n^c})$ 步，所以最多进行 $O(2^{n^c})$ 次查询，且查询长度 $|y|$ 的最大值也是 $O(2^{n^c})$。

当 $\mathbb{M}'$ 模拟 $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}(y)$ 时，运行时间是 $O(2^{|y|^d}) = O(2^{2^{n^c}})$。

模拟 $\mathbb{M}$ 的时间是 $O(2^{n^c})$，进行所有查询的总时间是 $O(2^{2^{n^c}} \cdot 2^{n^c})$，所以总时间是 $O(2^{n^c} + 2^{2^{n^c}+n^c})$。

因此 $\mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}} \subseteq$ **2-EXP**。

证明 **2-EXP** $\subseteq \mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}}$：

设 $L \in$ **2-EXP**。这意味着存在一个 **2-EXP** 确定图灵机 $\mathbb{M}'$ 判定 $L$。

构造 **EXP** 图灵机 $\mathbb{M}$ 和神谕 $\mathcal{O}$。

$\mathcal{O}$ 接受的询问是 $\langle \mathbb{M}', \mathbf{x}, 1^N \rangle$，回答 $\mathbb{M}'$ 是否在$2^N$ 步内接受$\mathbf{x}$。输入 $y = \langle \mathbb{M}', \mathbf{x}, 1^N \rangle$，其长度 $m \approx N$。模拟 $\mathbb{M}'$ 的 $2^N$ 步，需要 $O(N \cdot 2^N) \approx O(m \cdot 2^m)$ 时间，所以神谕的时间是 **EXP**。

$\mathbb{M}$ 接收输入 $\mathbf{x}, |\mathbf{x}| = n$，$\mathbb{M}$ 计算 $N = 2^{n^k}$，在工作带上写下 $1^N$，需要 $O(2^{n^k})$ 时间。$\mathbb{M}$ 构造 $y$，这个过程需要 $O(2^m) \approx O(2^{n^k})$。$\mathbb{M}$ 询问神谕，花费 $O(1)$，最后返回预言机答案。

$\mathbb{M}$ 作为一台 **EXP** 机器，使用 **EXP** 的神谕 $\mathcal{O}$ 判定了 **2-EXP** 语言 $L$。因此 **2-EXP** $\subseteq \mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}}$。

.

**Question 3.** 证明 2SAT $\in P$。

这个简单，考虑有 $2n$ 个顶点的有向图，变量 $x$ 对应图中编号为 $x$ 和 $\neg x$ 的两个顶点。

对于子式 $a \vee b$，我们连边 $\neg a \to b$ 和 $\neg b \to a$，假设连了 $m$ 条边。

用 $tarjan$ 求这个图的强连通分量，复杂度 $O(n+m)$，由于 $m$ 取决于子式数量，所以仍然是多项式复杂度。

如果存在 $a$ 使得 $a$ 和 $\neg a$ 在同一个强连通分量，意味着 $a \wedge \neg a$，此时判定无解。

否则对每个结点的拓扑序 $dfn$，如果 $dfn(a) > dfn(\neg a)$，则 $a = false$，否则 $a = true$，一定会是一种合理的真值分配，这一步只需要 $O(n)$ 复杂度。

**Question 4.** 写一段对数空间程序，解决在 (1.16.1) 中定义的问题 MULP

```
 #define ll long long
 bool mulp(string a, string b, string c){
   ll carry = 0;
   for(ll k = 0; k < min(a.length() + b.length(), c.length()); ++k){
       ll partial = 0;
       for(ll i = 0; i <= k; ++i){
           ll j = k - i;
           if (i < a.length() && j < b.length()){
               if (a[i] == '1' && b[j] == '1'){
                   ++partial;
               }
           }
       }
       ll total = partial + carry;
       if (c[k] - 48 != (total & 1)) return false;
       carry = total >> 1;
   }
   for(ll k = a.length() + b.length(); k < c.length() - 1; ++k){
       if (c[k] != '0')return false;
   }
   if (carry)return false;
   return true;
}
```

**Question 5.** 证明定理 1.11。

为方便，我们把 $\mathbb{M}$ 所有工作带上用到的格子一律拼接在一条工作带上，把长度为 $m$ 的连续格子映射为一个符号，作为 $\mathbb{M}'$ 的唯一工作带上的一个格子。在 $\mathbb{M}'$ 上，我们不用考虑 $|\Gamma|$，只要能完成映射。

$\mathbb{M}'$ 仍然需要额外的一个空格子，用于状态的读写头的移动以实现其它格子的修改。

取 $m \to S(n)$，则 $\mathbb{M}'$ 能在 $\epsilon S(n) + 1$ 空间内判定 $L$。