

计算理论导引第五次作业

Question 1. 证明 $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}} = \text{PSPACE}$

证明 $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}} \subseteq \text{PSPACE}$:

考虑神谕 $O \in \text{PSPACE}$, 图灵机 $M \in \text{PSPACE}$, 我们要证明 M 模拟 M^O 需要多项式空间:

调用神谕以外 M 的操作和 M^O 一样;

调用神谕时 M 保存当前格局, 开辟一个多项式空间来模拟 O 的计算, 因为 $O \in \text{PSPACE}$, 所以这个模拟是可行的, 再用 P 空间存神谕的结果, 根据结果选择进入状态 q_{yes} 或 q_{no} , 继续按照这个策略模拟下去.

因为 M 开辟的空间可以复用, 所以整体空间还是多项式级的, 就有 $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}} \subseteq \text{PSPACE}$.

证明 $\text{PSPACE} \subseteq \text{PSPACE}^{\text{PSPACE}}$:

前者是后者不询问神谕的情况, 所以包含关系成立.

Question 2. 设 $A \in \text{NPC}$ 和 $B \in \text{P}$. 证明: 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A \cup B \in \text{NPC}$.

$A \in \text{NPC} \Rightarrow A \in \text{NP}$.

$B \in \text{P} \Rightarrow B \in \text{NP}$.

所以 $A \cup B \in \text{NP}$, 接下来只需证明 A 可以多项式时间归约到 $A \cup B$.

构造 $f = \begin{cases} x, & \text{if } x \notin B \\ c, & \text{if } x \in B \end{cases}$, 其中 $c \notin A \cup B$.

判断 $x \in B$ 只需要多项式时间计算, 所以这个归约是多项式的.

$\forall x \in A, A \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin B \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow f(x) \in A \cup B$.

$\forall x \notin A \wedge x \notin B, f(x) = x \Rightarrow f(x) \notin A \cup B$.

$\forall x \notin A \wedge x \in B, f(x) = c \Rightarrow f(x) \notin A \cup B$.

综上 f 是一个有效的卡普归约, 使 $A \leq_K A \cup B$ 成立, 所以 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \text{NPC}$

Question 3. 证明 $\{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\} \in \text{NPC}$, 并且 $\{\psi 01^{2^{|\psi|}} | \psi \in \text{SAT}\} \in \text{P}$

设 $L_1 = \psi 01^{|\psi|^c}$, $N_1 = |L_1|$, $L_2 = \psi 01^{2^{|\psi|}}$, $N_2 = |L_2|$.

验证器 M_{L_1} 可以在 $O(N_1)$ 时间内定位分隔符 0 并识别出公式 ψ , 验证 ψ 的时间是 $O(2^{|\psi|}) = O(N_1^{\frac{1}{c}})$, 所以 $\{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\} \in \text{NP}$.

考虑 $f : \text{SAT} \rightarrow \{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\}$, $f(\psi) = \psi 01^{|\psi|^c}$, 这个归约显然是 $|\psi|$ 的多项式时间, 所以有 $\psi \in \text{SAT} \Leftrightarrow f(\psi) \in \{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\}$ 即 $\text{SAT} \leq_K \{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\}$, 所以 $\{\psi 01^{|\psi|^c} | \psi \in \text{SAT}\} \in \text{NPC}$.

同样地, 验证器 M_{L_2} 验证 ψ 的时间是 $O(2^{|\psi|}) = O(2^{\log N_2}) = O(N_2)$, 在庞大的 1 串的影响下, $\{\psi 01^{2^{|\psi|}} | \psi \in \text{SAT}\} \in \text{P}$ 是成立的.