黄羽翔 2024302061069

计算理论导引

2025 年 11 月 3 日

计算理论导引第二次作业

Question 1. 设 $T(n)$,$T'(n)$ 为时间可构造. 证明 $T(n)+T'(n)$、$T(n)\cdot T'(n)$、$T(n)^{T'(n)}$ 均为时间可构造. 能证明 $T(n)/T'(n)$ 是时间可构造吗?$\log T(n)$ 呢?

假设确定性图灵机 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{M}'$, 存在常数 c, c', n 使 $\mathbb{M}$ 在 $cT(n)$ 步内停机并写出 1^n,$\mathbb{M}'$ 在 $c'T(n)$ 步内停机并写出 1^n. 构造确定性图灵机 $\mathbb{N}$.

证明 $T(n)+T'(n)$ 时间可构造:

$\mathbb{N}$ 在输入 1^n 上按照 $\mathbb{M}$ 运行,再把读写头移动到适合 $\mathbb{M}'$ 工作的位置,在另一输入 1^n 上按照 $\mathbb{M}'$ 运行. 最后输出带连续包含分别两次运行得到的 $\llcorner T(n)\lrcorner$ 和 $\llcorner T'(n)\lrcorner$.

$\mathbb{N}$ 的时间函数 $T_{\mathbb{N}}(n)=cT(n)+c'T'(n)+n\sim T(n)+T'(n)$,所以 $\mathbb{N}$ 在 $O(T(n)+T'(n))$ 时间内计算函数 $1^{2n}\mapsto \llcorner T(n)+T'(n)\lrcorner$,故 $T(n)+T'(n))$ 是时间可构造的.

证明 $T(n)T'(n)$ 时间可构造:

$\mathbb{N}$ 按照 $\mathbb{M}'$ 运行,在工作带 O 上写入 $\llcorner T'(n)\lrcorner$. 再在工作带 A 上生成 $1^{T'(n)}$.

接着对工作带 A 上每个 1,$\mathbb{N}$ 按照 $\mathbb{M}$ 运行,并在工作带 B 上写入 $\llcorner T(n)\lrcorner$.

最后对这 $T'(n)$ 个 $\llcorner T(n)\lrcorner$ 做二进制加法,写入输出带.

可以得到 $T_{\mathbb{N}}(n)=T'(n)+2^{\log(T'(n)+1)}+cT(n)T'(n)+O(T'(n)\times\log(T(n)+1)\sim T(n)T'(n)$.(这里我觉得 $|\llcorner T(n)\lrcorner|=\log(T(n)+1)$.

证明 $T(n)^{T'(n)}$ 时间可构造:

与上一问类似的方法,$\mathbb{N}$ 在工作带 A 上写入 $1^{\llcorner T(n)\lrcorner}$,工作带 B 上写入 $1^{\llcorner T'(n)\lrcorner}$.

对于 B 带的每个 1,记上一个工作带为 C(初始时 C 带就是 A 带),在新工作带 D 上,对于 A 带的每个 1,复刻一次 C 带内容,以此类推.

最后把最后一条带 F 转为二进制写入输出带.

$T_{\mathbb{N}}(n)=cT(n)+c'T'(n)+\frac{T(n)^{T'(n)}-1}{T(n)-1}+O(T(n)^{T'(n)})\sim T(n)^{T'(n)}$.

$\frac{T(n)}{T'(n)}$ 和 $\log T(n)$ 不一定是时间可构造的,取 $T(n)=n$ 和 $T'(n)=2^n$ 即可.

Question 2. 如果在定理 1.2 的证明中, 我们让 $|R_i|=2\cdot 2^{i^2}$. 证明在哪一步会出问题? 如果没有问题的话, 我们会得到一个更高效的通用图灵机!

看样子没有问题,因为这个修改减少了会触及到的块数,具体来说从 $\log T(n)$ 变为 $\sqrt{\log T(n)}$.

带子的移动至多为 T 次,那么对区间 R_i 的操作不超过 $\frac{T}{\sum_{j=0}^{i-1}2^{j^2}}$ 次。最远对区间 R_i 进行操作时,$\mathbb{U}$ 需要扫描 L_i 至 R_i 的范围常数次,耗时 $O(|\alpha|^c 2^{i^2})$。而 $i\in[1,\sqrt{\log(T(n))}]$,那么 $\mathbb{U}$ 的计算时间是

$$O(|\alpha|^c\sum_{i=1}^{\sqrt{\log T(n)}}(\frac{T(n)}{\sum_{j=0}^{i-1}2^{j^2}}2^{i^2}))$$

分母在 i 很大的时候由 $2^{(i-1)^2}$ 主导,所以上式可化为

$$O(|\alpha|^c T(n)\sum_{i=1}^{\sqrt{\log T(n)}}2^{2i+1})=O(|\alpha|^c T(n)2^{2\sqrt{\log T(n)}})$$

这个复杂度恐怕不是很梦幻,我觉得它在 $O(|\alpha^c|T(n)\log T(n))$ 和 $O(|\alpha|^c T(n)^2)$ 之间.

.

Question 3. 证明: 设图灵机 $\mathbb{M}$ 在 $T(n)=\omega(n)$ 步内判定 L. 对任意 $\varepsilon>0$, 有图灵机 $\mathbb{M}'$,$\mathbb{M}'$ 能在 $\varepsilon T(n)$ 步内判定 L.

也就是证明 $n+2+\frac{6}{m}T(n)\leq\epsilon T(n)=aT(n)+bT(n)$

首先证明 $6\leq am$，由于 m 是任取的，这个证明很显然.

证明 $n+2\leq bT(n)$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{T(n)}=0$，得证.

Question 4. 说明: 若忽略不终止性, 在第 28 页上定义的非确定的"通用"图灵机是正确的.

如果 $\mathbb{N}_\alpha$ 存在一条长度为 $T(n)$ 的接受路径，那么 $\mathbb{V}$ 也必然存在一条计算路径，该路径完美地模拟了 $\mathbb{N}$ 的那条接受路径。

这条 $\mathbb{V}$ 上的路径会花费 $O(c\cdot T(n))$ 的时间，并最终进入接受状态。

只要 $\mathbb{V}$ 存在至少一条接受路径，$\mathbb{V}$ 就会接受，因此不终止的那条路径就被忽略了。