

武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、(10 分) 设 $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, 求 m 使得 $\vec{a} + m\vec{b}$ 在 \vec{b} 上的投影为 0.

二、(10 分) 设曲面 Σ : $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 及点 $P(1, 1, 1)$:

1) 求点 $P(1, 1, 1)$ 处曲面 Σ 的切平面方程;

2) 若 \vec{n} 是曲面 Σ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处指向内侧的法向量, 求 \vec{n} 的方向余弦.

三、(8 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)^2 z - \cos^2 y = x^3(z + \sin y)$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}$.

四、(10 分) 设 $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D |y - x^2| dx dy$.

五、(8 分) 计算对面积的曲面积分 $\iint_S (y+z) dS$, 其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

六、(8 分) 设有曲线 Γ : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 = 3z, \end{cases}$ 及曲线上一点 $M(2, 1, 1)$:

1) 求曲线 Γ 在点 M 处的切线 L 的方程;

2) 验证 Γ 与 L 在 zOx 面上的投影在点 $M'(2, 0, 1)$ 处相切.

七、(8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n$ 的和函数及收敛域.

八、(10 分) 1) 确定常数 a , 使得对平面上任意分段光滑闭曲线 L , 均有 $\oint_L (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy = 0$.

2) 对于该常数, 求二元函数 $u(x, y)$, 使得 $du(x, y) = (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy$, 且 $u(0, 0) = 0$.

九、(8 分) 计算曲面积分 $I = \iint_S (x^3 + 2zx) dy dz + (2y^3 + 3xy) dz dx + (3z^3 + 4yz) dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧.

十、(8 分) 将函数 $f(x) = x \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并写出该幂级数的收敛域.

十一、(8分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(y-x)x^4}{(y-x)^4+x^6}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 考虑如下问题:

1) 计算该函数在点 $O(0,0)$ 处沿方向 $\vec{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数;

2) 证明该函数在点 $O(0,0)$ 处不连续.

十二、(4分) 阅读如下材料: 利用指数函数的幂级数展开式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$) 可以拓展到复数域上的结论, 即

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ($z \in \mathbb{C}$, 即 z 为复数). 并且对于复数 $z = a + ib$, 依然有 $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ 以及 $(e^{a+ib})^n = e^{n(a+ib)}$, 而

且有被称为欧拉公式的如下等式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

问题: 若将函数 $e^x \cos x$ 展开成幂级数 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ($x \in \mathbb{R}$), 试给出 a_n 的表达式.

武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷 参考解答

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、(10 分) 设 $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2)$, 求 m 使得 $\vec{a} + m\vec{b}$ 在 \vec{b} 上的投影为 0.

解: $\text{Prj}_{\vec{b}}(\vec{a} + m\vec{b}) = \frac{(\vec{a} + m\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + m\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ 5 分

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + m\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = -\frac{5}{9}$$
 10 分

二、(10 分) 设曲面 Σ : $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 及点 $P(1, 1, 1)$:

1) 求点 $P(1, 1, 1)$ 处曲面 Σ 的切平面方程;

2) 若 \vec{n} 是曲面 Σ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处指向内侧的法向量, 求 \vec{n} 的方向余弦.

解: 1) 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$, 则 $F_x(1, 1, 1) = 2$, $F_y(1, 1, 1) = 4$, $F_z(1, 1, 1) = 6$, 因此, 所求切平面方程为: $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$, 即 $x + 2y + 3z = 6$. 5 分

2) 由于 $\vec{n} \parallel \{F_x, F_y, F_z\}$, 指向内侧, 可知 $\vec{n} = -\{1, 2, 3\}$, 其单位化向量为 $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right\}$, 因而 \vec{n} 的方向余弦: $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}$, $\cos \gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}$. 10 分

三、(8 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)^2 z - \cos^2 y = x^3(z + \sin y)$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)}$.

解: 将 $x = 0, y = 0$ 代入方程得 $z = 1$; 方程两边关于 x 求偏导数得:

$$2(x+1)z + (x+1)^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2(z + \sin y) + x^3 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (3.1)$$

代入 $x = 0, y = 0, z = 1$, 容易解得 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -2$. 5 分

对方程(3.1)两边关于 x 求偏导数得:

$$2z + 4(x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + (x+1)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x(z + \sin y) + 6x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

代入 $x = 0, y = 0, z = 1$, 以及 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -2$, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 6$. 8 分

四、(10分) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D |y - x^2| dx dy$.

解:
$$\iint_D |y - x^2| dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy$$
 5分

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx + \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x^4}{2} - x^2(1-x^2)\right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + x^4\right) dx = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$
 10分

五、(8分) 计算对面积的曲面积分 $\iint_S (y+z) dS$, 其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

解: 由于曲面 S 关于 $y=0$ 对称, 因此 $\iint_S y dS = 0$. 4分

另一方面, 圆柱面上 $dS = 2\pi R dz$, 因而有 $\iint_S z dS = \int_0^1 2\pi R z dz = \pi R$.

所以 $\iint_S (y+z) dS = \pi R$. 8分

六、(8分) 设有曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 = 3z, \end{cases}$ 及曲线上一点 $M(2,1,1)$:

- 1) 求曲线 Γ 在点 M 处的切线 L 的方程;
- 2) 验证 Γ 与 L 在 zOx 平面上的投影在点 $M'(2,0,1)$ 处相切.

解: 1) 切线 L 的方程:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 4x - 2y - 3z = 3 \end{cases};$$
 4分

2) Γ 与 L 在 zOx 平面上的投影方程分别为: $\Gamma': \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 6 + 3z \\ y = 0 \end{cases}$ 及 $L': \begin{cases} 8x - z = 15 \\ y = 0 \end{cases}$;

他们都过点 $M'(2,0,1)$, 此处曲线上 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M'} = 8$, 直线上 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M'} = 8$, 因此 Γ 与 L 在 zOx 平面上的投影在点

$M'(2,0,1)$ 处相切. 8分

七、(8分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n$ 的和函数及收敛域.

解:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-3x)^n$$
, 不妨考虑如下幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \tau^{n-1} d\tau = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n-1} d\tau = \int_0^t \frac{1}{1-\tau} d\tau = -\ln(1-\tau), \text{ 它的收敛域为 } [-1, 1].$$
 5分

因此,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n = -\ln(1-2x) - \ln(1+3x), \text{ 收敛域为 } (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$
 8分

八、(10分) 1) 确定常数 a , 使得对平面上任意分段光滑闭曲线 L , 均有 $\oint_L (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy = 0$.

2) 对于该常数, 求二元函数 $u(x, y)$, 使得 $du(x, y) = (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy$, 且 $u(0, 0) = 0$.

解: 1) 题设条件等价 $\frac{\partial(2xy - y^4 + 5)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x^2 - axy^3)}{\partial x}$, 即有 $2x - 4y^3 \equiv 2x - ay^3$, 因此 $a = 4$. 5分

$$2) \quad u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - 4xy^3) dy \\ = \int_0^x 5 dx + \int_0^y (x^2 - 4xy^3) dy = 5x + x^2 y - xy^4.$$
10分

九、(8分) 计算曲面积分 $I = \iint_S (x^3 + 2zx) dy dz + (2y^3 + 3xy) dz dx + (3z^3 + 4yz) dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧.

解: 用 Ω 表示球 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 利用高斯公式可得:

$$I = - \iiint_{\Omega} (3x^2 + 2z + 6y^2 + 3x + 9z^2 + 4y) dx dy dz. \quad 4分$$

由对称性可知: $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 0$;

$$\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz. \quad 6分$$

因此, $I = - \iiint_{\Omega} (3+6+9)x^2 dx dy dz = -6 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ = -6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^2 r^2 \sin \varphi dr = -\frac{24\pi}{5}. \quad 8分$

十、(8分) 将函数 $f(x) = x \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并写出该幂级数的收敛域.

解: 由于 $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$, 且 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ 收敛半径为 1, 因此有

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad 5分$$

因此, $f(x) = x \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$, 收敛域为 $[-1, 1]$. 8分

十一、(8分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y-x)x^4}{(y-x)^4 + x^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 考虑如下问题:

1) 计算该函数在点 $O(0, 0)$ 处沿方向 $\vec{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数;

2) 证明该函数在点 $O(0, 0)$ 处不连续.

解: 1) $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha) \cos^4 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^4 + t^2 \cos^6 \alpha}$

$$= \begin{cases} \frac{\cos^4 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^3}, & \sin \alpha \neq \cos \alpha \\ 0, & \sin \alpha = \cos \alpha \end{cases} \quad 4 \text{ 分}$$

2) 考虑动点沿曲线 $y = x + kx^2$ 趋近于原点 $O(0,0)$, 有

$f(x, x+kx^2) = \frac{kx^6}{k^4 x^8 + x^6} \rightarrow k \quad (x \rightarrow 0),$ 因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在, 所以该函数在点 $O(0,0)$ 处不连续. 8 分

十二、(4分) 阅读如下材料: 利用指数函数的幂级数展开式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (x \in \mathbb{R})$ 可以拓展到复数域上的结论, 即

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C},$ 即 z 为复数). 并且对于复数 $z = a + ib$, 依然有 $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ 以及 $(e^{a+ib})^n = e^{n(a+ib)}$, 而

且有被称为欧拉公式的如下等式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

问题: 若将函数 $e^x \cos x$ 展开成幂级数 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ($x \in \mathbb{R}$), 试给出 a_n 的表达式.

解: 由欧拉公式可得 $e^x \cos x = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$, 利用 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C})$, 有

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n, \quad e^{(1-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} x^n.$$

因此 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} + \frac{(1-i)^n}{n!} \right) x^n,$

也就是 $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} + \frac{(1-i)^n}{n!} \right)$. 利用 $(1 \pm i)^n = \left(\sqrt{2} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\pm \frac{inx}{4}} = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} \pm i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$ 可得

$$a_n = \frac{1}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}. \quad 4 \text{ 分}$$