

2002~2003 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题: 1、 $\frac{128}{3}\pi$; 2、 $f(0,0)$; 3、1;

二、选择题: 1、D; 2、B; 3、A;

三、解: (1) $I = \int_0^1 x dx \int_0^x dy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$;

(2) $I = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{364}$

四、解: 设 $F(x, y, z) = 4x^2 + 4z^2 - 17y^2 + 2y - 1$ 故有 $F_x = 8x, F_y = -34y + 2, F_z = 8z$
 M_0 点处的切平面的法向量为 $\vec{n}_2 = \{16, -32, 0\} = 16\{1, -2, 0\}$ 故旋转曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $M_0(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 $x - 2y = 0$

五、解: 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 消去 z , 得投影柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, 因此它在 xoy 面上的投影域为 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, 于是区域 Ω 的体积:

$$V = \iint_D [2a - \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a}] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a [2a - r - \frac{r^2}{a}] r dr = \frac{5}{6}\pi a^3$$

六、(1) 令 $P = x^2 y z^2, Q = \frac{1}{z} \arctan \frac{y}{z} - x y^2 z^2, R = \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{z} + z(1 + x y z)$,

故有 $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xyz^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{z})^2} - 2xyz^2, \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{z})^2} + (1 + 2xyz),$

故有 $(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) = 1 + 2xyz$

所以 $\operatorname{div} \vec{F} |_{(1,1,1)} = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) |_{(1,1,1)} = (1 + 2xyz) |_{(1,1,1)} = 3$

(2) 记 Ω 为 Σ 所围区域, 则有高斯公式得:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (1 + 2xyz) dx dy dz = \iiint_{\Omega} dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{7}{3} a^3 (2 - \sqrt{2}) \pi \end{aligned}$$

(由于 Ω 关于 xoz 面对称, xyz 是域 Ω 上的奇函数, 故有 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz = 0$)

七、解: 由题设知, $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{\partial}{\partial y}[(x - \varphi(x)) \frac{y}{x}]$, 故曲线积分

$I = \int_A^B (x - \varphi(x)) \frac{y}{x} dx + \varphi(x) dy$ 与路径无关。

所以 $I = \int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} [x - (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x})] \frac{y}{x} dx + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) dy = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{\pi}) dy = \frac{1}{2}(\pi^2 - 1)$

八、解：由题设有 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，即 $d^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

令 $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy - z^2 + 1)$

$$\begin{cases} F_x = 2x + \lambda y = 0 \\ F_y = 2y + \lambda x = 0 \\ F_z = 2z - 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = xy - z^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ z = 0, \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{驻点 } (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, \pm 1), \text{ 而} \\ xy = z^2 - 1 \end{cases}$$

$f(1, -1, 0) = f(-1, 1, 0) = 2, f(0, 0, \pm 1) = 1$ 比较知，此曲面上离原点最近的点为 $(0, 0, \pm 1)$ 。

九、证明：将 Ω 向 x 轴投影，得 $-1 \leq x \leq 1$ ，并用垂直于 x 轴的平面截 Ω 得

$$D_x: x^2 + z^2 \leq 1 - x^2, \text{ 所以有 } \iiint_{\Omega} f(x) dx dy dz = \int_{-1}^1 f(x) dx \iint_{D_x} dy dz = \int_{-1}^1 f(x) \pi(1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) f(x) dx, \text{ 故命题得证。}$$

十、解：(1) 设 π_1 为过 l 且垂直于 π 的平面，由直线 l 的一般方程为 $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

所以过 l 的平面束方程为： $x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0$ ，即 $x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (\lambda + 1) = 0$ 其法向量为 $\vec{n}_1 = \{1, \lambda - 1, \lambda\}$ ，平面 π 的法向量为 $\vec{n} = \{1, -1, 2\}$ ，因此为 π_1 与 π 垂直知，

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n} = 0$ 所以有 $\lambda = -2$ ，于是 π_1 的方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$ ，因此直线 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 将 } l_0: \begin{cases} x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \text{ 化为参数方程} \begin{cases} x = 2y \\ y = y \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1) \end{cases} \text{ 设 } P_0(x_0, y_0, z_0) \text{ 是 } l_0 \text{ 上一}$$

点，则有 $\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ z_0 = -\frac{1}{2}(y_0 - 1) \end{cases}$ 若 $P(x, y, z)$ 是由 P_0 旋转到达的另一点，由于 y 坐标不变且

P_0, P 到 y 轴的距离相等，则有 $y = y_0, x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2$ 所以 $x^2 + z^2 = (2y_0)^2 + [-\frac{1}{2}(y_0 - 1)]^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2$ 即 $4x^2 + 4z^2 - 17y^2 + 2y - 1 = 0$ 为所求旋转曲面方程。

一、解：(1) 由复合函数求导法则可得： $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \sin^2 y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y$$

$$= f''(u)e^{2x}, \text{ 故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}$$

(2) 由题设知： $f''(u)e^{2x} = f(u)e^{2x}$ ，即 $f''(u) - f(u) = 0$ ，因此特征方程为 $r^2 - 1 = 0$ ，有特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -1$ ，故 $f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$ 再由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 得

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \text{ 所以 } f(u) = \frac{1}{2}e^u - \frac{1}{2}e^{-u} = shu.$$