武汉大学 2013-2014 学年第二学期期末考试

高等数学 B2 试题解答

一、（8 分）利用二重积分的性质，比较积分 $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 $D: e\le x^2+y^2\le 2e$.

解 $\because 1\le \ln(x^2+y^2)\le 1+\ln 2,$ ……4 分

$\ln(x^2+y^2)\le\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2, \therefore I_1<I_2$ ……4 分

二、（8 分）设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$， ……4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……4 分

三、（8 分）求过点 $M(1,-2,3)$ 的平面，使它与平面 $\pi: x+y-z-3=0$ 垂直，且与直线 $L: x=y=z$ 平行.

解 因为已知直线与已知平面不平行，故所求平面得法向量为

$\vec{n}=(1,1,-1)\times(1,1,1)=(2,-2,0)$， ……4 分

故平面方程为 $(x-1)-(y+2)=0$，即 $x-y-3=0$。 ……4 分

四、 （8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz=\arctan(x+y+z)$ 所确定的隐函数，求全微分 dz 在点 $(0,1,-1)$ 处的值..

解 $yzdx+xzdy+xydz=\dfrac{dx+dy+dz}{1+(x+y+z)^2}$ ， ……4 分

$\mathrm{d}z=\dfrac{yz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dx+\dfrac{xz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dy$，故 $dz\big|_{(0,1,-1)}=-2dx-dy$ ……4 分

五、（10 分）计算曲线积分 $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ ，式中 L 是从原点 $O(0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ （$a>0$）到点 $A(2\pi a,0)$ 的弧段.

解 $O(0,0)$ 对应 $t=0$， $A(2\pi a,0)$ 对应 $t=2\pi$ 。

原式 $=\int_0^{2\pi} a\ (1+\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t+a(t-\sin t)a\sin t\,\mathrm{d}t$ ……6 分

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos^2 t-\sin^2 t+t\sin t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi} t\ \sin t\,dt=-2\pi a^2$$ ……4 分

六、（10 分）设 Ω 是由曲面 $z^2=x^2+y^2, z=2$ 所围的闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$.

解 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV=\int_0^2 z^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} dxdy$ ……6 分

$=\int_0^2 \pi z^4 dz=\frac{32}{5}\pi$ ……4 分

七、（10 分）计算曲面积分 $\iint_S (x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 添加平面 $S_1: x^2+y^2\le 1 (z=0)$ 的下侧，记 $S+S_1$ 所围的区域为 V，则利用高斯公式得,

原式 $=3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dV-\iint\limits_{S_1} y^2 dxdy-0$ ……6 分

$=3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^3\sin^2\theta d\rho=\frac{29}{20}\pi$ ……4 分

八、（8 分）求曲线 $x=\sin^2 t$， $y=\sin t\cos t$， $z=\cos^2 t$ 在对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点处的切线和法平面方程.

解 点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, $\vec{\tau}=(x',y',z')\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=(1,0,-1)$。……4 分

切线 $\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$, 法平面, $x-z=0$ ……4 分

九、（8 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi,\end{cases}$,

将它展开成 Fourier 级数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

解 所给函数在点 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 处不连续，在其他点处连续，所以由收敛定理可知 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛，在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 处级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$，当 $x\ne k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 时收敛于 $f(x)$.

计算 Fourier 系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos nx dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin nx dx=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$ ， ……5 分

因此 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x (x\ne k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ ，取 $x=\frac{\pi}{2}$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$。……3 分

十、（9 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数并利用其求 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。

解 由 $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in[-1,1)$ 因此当 $x\neq 0$ 时，有

$\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$， ……5 分

当 $x=0$ 时，$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-1=f(0)$，所以 $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$，$x\in[-1,1]$

$\int_0^x f(t)dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\quad x\in[-1,1]$ ……4 分

十一、（6 分）设 $a_n\geq 0(n=1,2,\ldots)$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

证明：因为数列 $\{na_n\}$ 有界，则 $\exists M>0$，使得 $0\leq na_n\leq M$，因此 $0\leq a_n\leq\frac{M}{n}$， ……3 分

于是 $0\leq a_n^2\leq\frac{M^2}{n^2}$，由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。 ……3 分

十二、（7 分）求二元函数 $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$ 在限制条件 $x-y=\frac{\pi}{4}$ 下的极值.

解 设 $F(x,y,\lambda)=\cos^2 x+\cos^2 y+\lambda(x-y-\frac{\pi}{4})$，求驻点。由 $F_x=-2\sin x\cos x+\lambda=0$,

$F_y=-2\sin y\cos y-\lambda=0,\ x-y=\frac{\pi}{4}$ 可得驻点为 $(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})$。 ……4 分

极大值为 $z(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为偶数；极小值为 $z(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为奇数。

……3 分