

2024-2015 高等数学 B2 期末考试题解

一、(8 分) 设 $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = k\vec{a} + \vec{b}$, 其中 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。问:

(1) k 为何值时 $\vec{p} \perp \vec{q}$? (2) k 为何值时以 \vec{p}, \vec{q} 为边的平行四边形面积为 6?

解: (1) $\vec{p} \cdot \vec{q} = (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k|\vec{a}| + |\vec{b}| = 2k + 2$,

$\vec{p} \perp \vec{q} \Leftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \Leftrightarrow k = -1$ 。 $k = -1$ 时 $\vec{p} \perp \vec{q}$ 。

(2) $6 = |\vec{p} \times \vec{q}| = |(2\vec{a} + \vec{b}) \times (k\vec{a} + \vec{b})| = |(2-k)(\vec{a} \times \vec{b})| = 2|2-k|$, $k = -1$ 或 $k = 5$ 时以 \vec{p}, \vec{q} 为边的平行四边形面积为 6。

二、(8 分) 求函数 $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 沿曲线

$x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$ 切方向 (t 增加方向) 的方向导数

解: 曲线在点 $M(1,2,-2)$ 的 $t = 1$ 。 $\vec{T} = \{1, 4t, -8t^3\}|_{t=1} = \{1, 4, -8\}$ 。 $|\vec{T}| = \sqrt{81} = 9$ 。

$\cos \alpha = \frac{1}{9}, \cos \beta = \frac{4}{9}, \cos \gamma = -\frac{8}{9}$ 。

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \{1, 4t, -8t^3\}|_{t=1} = \{1, 4, -8\}$

三、(6 分) 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = f(x + y + z)$ 所确定, 其中 f 二阶可导且

$f'(u) \neq 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

解: 把 z 看作 x, y 的隐函数, 恒等式 $z = f(x + y + z)$ 两边对 x 求导

$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x + y + z) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right)$

解出 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x + y + z)}{1 - f'(x + y + z)}$ 。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{f''(x+y+z) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) (1 - f'(x+y+z)) + f'(x+y+z) f''(x+y+z) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1 - f'(x+y+z))^2} \\
&= \frac{f''(x+y+z) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1 - f'(x+y+z))^2} = \frac{f''(x+y+z) \left(1 + \frac{f'(x+y+z)}{1 - f'(x+y+z)}\right)}{(1 - f'(x+y+z))^2} \\
&= \frac{f''(x+y+z)}{(1 - f'(x+y+z))^3}
\end{aligned}$$

四、(8分) 设 $u = f(x+y+z, xyz)$ 具有一阶连续偏导数, 其中 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + 2ze^{y^2} = \sin z \text{ 所确定, 求 } du.$$

解: 把 z 当作 x, y 的隐函数, 恒等式 $x^2 + 2ze^{y^2} = \sin z$ 两边求微分

$$2xdx + 2e^{y^2}dz + 4yze^{y^2}dy = \cos z dz \text{ 解出}$$

$$dz = \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}} dx + \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dy$$

$$du = f_1 \cdot (dx + dy + dz) + f_2 \cdot (yz dx + xz dy + xy dz)$$

$$= f_1 \cdot \left(dx + dy + \frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}} dx + \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dy \right)$$

$$+ f_2 \cdot \left[yz dx + xz dy + xy \left(\frac{2x}{\cos z - 2e^{y^2}} dx + \frac{4yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dy \right) \right]$$

$$= f_1 \cdot \frac{2x + \cos z - 2e^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dx + f_1 \cdot \frac{4yze^{y^2} + \cos z - 2e^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dy$$

$$+ f_2 \cdot \frac{2x^2 y + yz \cos z - 2yze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dx + f_2 \cdot \frac{4xy^2 ze^{y^2} + xz \cos z - 2xze^{y^2}}{\cos z - 2e^{y^2}} dy$$

$$= \frac{2xf_1 + f_1 \cos z - 2e^{y^2} f_1 + 2x^2 y f_2 + yz f_2 \cos z - 2yze^{y^2} f_2}{\cos z - 2e^{y^2}} dx$$

$$+ \frac{4yze^{y^2} f_1 + f_1 \cos z - 2e^{y^2} f_1 + 4xy^2 ze^{y^2} f_2 + xz f_2 \cos z - 2xze^{y^2} f_2}{\cos z - 2e^{y^2}} dy$$

五、(8分) 求曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $M(1, 2, 0)$ 处的切平面和法线方程。

$$\text{解: } F = z - e^z + 2xy - 3,$$

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \{F_x, F_y, F_z\}_M = \frac{1}{2} \{2y, 2x, 1 - e^z\}_M = \{2, 1, 0\}$$

切平面: $2(x-1) + y - 2 = 0$, 即 $2x + y = 4$ 。

$$\text{法线: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}.$$

六、(10分) 设 $z = x^3 + \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + \alpha\beta^{-1}(\gamma x + \beta y)$ 。试证: 当 $\alpha\beta \neq \gamma^2$ 时, 函数 z 有一个且仅有一个极值, 又若 $\beta < 0$, 则该极值必为极大值。

证: 解方程组
$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 2\alpha x + 2\gamma y + \alpha\beta^{-1}\gamma = 0 \\ z_y = 2\gamma x + 2\beta y + \alpha = 0 \end{cases}$$
 得两点解

$$\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right), \left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right).$$

$$A = z_{xx} = 6x + 2\alpha, B = z_{xy} = 2\gamma, C = z_{yy} = 2\beta. \quad \text{对于 } \left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right),$$

$$A = 2\alpha, B = 2\gamma, C = 2\beta, \Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 \neq 0.$$

$$\text{对于 } \left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right),$$

$$A = 4\gamma^2\beta^{-1} - 2\alpha, B = 2\gamma, C = 2\beta, \Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta \neq 0.$$

如果 $\alpha\beta > \gamma^2$, 则 $\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$ 的 $\Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 > 0$ 从而是极值点而

$\left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$ 的 $\Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta < 0$ 从而不是

极值点, 且当 $\beta < 0$ 时 $A = 2\alpha < 0$ 从而此极值点的极值是极大值。

如果 $\alpha\beta < \gamma^2$, 则 $\left(0, -\frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$ 的 $\Delta = 4\alpha\beta - 4\gamma^2 < 0$ 从而不是极值点而

$\left(\frac{2}{3}\gamma^2\beta^{-1} - \frac{2}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\gamma^3\beta^{-2} + \frac{2}{3}\alpha\gamma\beta^{-1} - \frac{1}{2}\alpha\beta^{-1}\right)$ 的 $\Delta = 4\gamma^2 - 4\alpha\beta > 0$ 从而是极

值点, 且当 $\beta < 0$ 时 $A = 4\gamma^2\beta^{-1} - 2\alpha < 0$ 从而此极值点的极值是极大值。

故, 函数 z 有一个且仅有一个极值, 又若 $\beta < 0$, 则该极值必为极大值。

七、(8分) 设 $f(x, y)$ 连续, 且满足 $f(x, y) = x\sqrt{y} + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 为曲

线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$ 。

解: 记常数 $c = \iint_D f(x, y) dx dy$, 则 $f(x, y) = x\sqrt{y} + c$ 。两边在 D 计算二重积分

$$c = \iint_D x\sqrt{y} dx dy + c \iint_D dx dy。$$

解 $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ 得 $(0, 0), (1, 1)$ 。

$$\iint_D x\sqrt{y} dx dy = \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 x \left(x^{\frac{3}{4}} - x^3 \right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{4}{11} x^{\frac{11}{4}} - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{11} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{55}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{解方程 } c = \frac{6}{55} + \frac{1}{3} c \text{ 得 } c = \frac{9}{55}。 f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{9}{55}。$$

八、(8分) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区

域, S 是 Ω 的整个边界的外侧, 求曲面积分 $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 。

解: $\oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \stackrel{\text{高斯}}{=} 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 2\pi R^3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2 - \sqrt{2}) \pi R^3$$

九、(10分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \Big/ \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right| = 1$, 收敛半径 $R = 1$ 。根据交错级数审敛

法, $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 都收敛。所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的收

敛域是 $[-1, 1]$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}。$$

设 $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 。则 $s_1(0) = 0$ 。

$$s_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \stackrel{-x^2=t}{=} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1+x^2}。两边从 0 到 x 积分得$$

$$s_1(x) = \arctan x。所以, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \arctan x \quad (x \in [-1, 1])。$$

十、(10 分) 确定常数 λ , 使得在右半平面 $x > 0$ 的单连通区域内, 曲线积分

$$\int_L 2xy(x^4 + y^2)^\lambda dx - x^2(x^4 + y^2)^\lambda dy = \int_L Pdx + Qdy$$

与路径无关, 并在上述条件下, 求积分 $\int_{(1,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy$ 之值。

$$解: P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1}$$

让 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 解得 $\lambda = -1$ 。此时所给曲线积分与路径无关。

$$\begin{aligned} \int_{(1,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy &= \int_{(1,0)}^{(3,0)} Pdx + Qdy + \int_{(3,0)}^{(3,3)} Pdx + Qdy \\ &= \int_1^3 0dx - \int_0^3 9(81 + y^2)^{-1} dy = -\frac{1}{9} \int_0^3 \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{9}\right)^2} dy \\ &= -\arctan \frac{1}{3} \end{aligned}$$

十一、(10 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 围成的立体。

解: 旋转面 $x^2 + y^2 = 4z$ 。 Ω 在 xy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4^2$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 (x^2 + y^2 + z) dz \\
&= \iint_{D_{xy}} \left[(x^2 + y^2) \left(4 - \frac{x^2 + y^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(16 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{16} \right) \right] dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left[\rho^2 \left(4 - \frac{\rho^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(16 - \frac{\rho^4}{16} \right) \right] \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^4 \left[4\rho^3 + 8\rho - \frac{9}{32} \rho^5 \right] d\rho = 2\pi \left[\rho^4 + 4\rho^2 - \frac{3}{64} \rho^6 \right]_0^4 \\
&= 4^4 \pi
\end{aligned}$$

十二、(6分) 设级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛, 证明: 当 $a_0 = a_1 = 0$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 收敛。}$$

证: 由于 $a_0 = a_1 = 0$, $f(x)$ 的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = a_2 x^2 + o(x^2)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a_2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\left| o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \right| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad (n \geq N)$, 此时

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq (1 + |a_2|) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad (n \geq N).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_2|) \left(\frac{1}{n}\right)^2 = (1 + |a_2|) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛

从而收敛。