# 武汉大学数学与统计学院 2019－2020 第一学期

## 《线性代数 A》 （A 卷）

一、（10 分）计算下列行列式：$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$；

二、（10 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ x_1-2x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+2x_3-3x_4=b_3 \end{cases}$有三个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}^T$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解（其中 $a_{ij},b_i,i=1,2,3;j=1,2,3,4$ 为已知常数）。

三、（10 分）设 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \qquad\cdots\cdots \\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是否同秩？证明你的结论。

四、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，$X$ 满足 $AX+I=A^2+X$，求 $a$ 和 $X$.

五、（10 分）讨论 $a,b$ 取何值时，方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$有解。

六、（10 分）已知 $A$ 为 3 阶矩阵，3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且满足：

$$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3{}^T,A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$$

求矩阵 $A$ 的特征值和特征向量。

七、（8 分）已知实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是半正定的，$k$ 为正实数，证明：$kE+A$ 是正定的。

八、（10 分）已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(2,2,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组；

（2）求生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

九（12 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=PY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$.

（1）判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 是否正定？（2）计算行列式 $|A|$ 的值；

（3）若 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，求矩阵 $A$.

十、（10 分）设 $\sigma$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换，且满足 $\sigma^{n-1}(\alpha)\neq\theta$，但 $\sigma^{n}(\alpha)=\theta$.

（1）证明 $\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^{2}(\alpha),\cdots,\sigma^{n-1}(\alpha)$ 是 $V$ 的基；

（2）线性变换 $\sigma$ 在该基下的矩阵 $A$；

（3）讨论 $A$ 能否与对角阵相似.

# 武汉大学数学与统计学院 2019－2020 第一学期

## 《线性代数 A》 （A 卷答案）

一、（10 分）计算下列行列式；$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$；

解 各列加到第一列，提出公因子，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}a_i-x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}x^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-x).$$

二、（10 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ x_1-2x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+2x_3-3x_4=b_3 \end{cases}$有三个解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}^T$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解（其中 $a_{ij},b_i,i=1,2,3;j=1,2,3,4$ 为已知常数）。

解 由题设条件知 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，因此

$$\xi_3-\xi_1=(2,1,6,1)^T,\xi_3-\xi_2=(1,3,3,1)^T$$

是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量，所以齐次线性方程组系数矩阵的秩 $r(A)\le 2$

又系数矩阵有二阶子式 $\begin{vmatrix}2 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$，所以 $r(A)\ge 2$ 因此有 $r(A)=2$

因此 $\xi_3-\xi_1=(2,1,6,1)^T,\xi_3-\xi_2=(1,3,3,1)^T$ 为齐次线性方程组的基础解系。因此非齐次线性方程组的通解为：$k_1(\xi_3-\xi_1)+k_2(\xi_3-\xi_2)+\xi_3=k_1(2,1,6,1)^T+k_2(1,3,3,1)^T+(3,2,4,2)^T$ 其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。

.

三、（10 分）设 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有关系

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m \\ \qquad\cdots\cdots \\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1} \end{cases}$$

问 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是否同秩？证明你的结论。

解 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 秩相等。下面证之：

由条件知 $(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)P$

其中 $P=\begin{pmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&1&\cdots&1\\1&1&0&1&\cdots&1\\1&1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\\1&1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$ $|P|=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&1&\cdots&1\\1&1&0&1&\cdots&1\\1&1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\\1&1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0$

所以 $m$ 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价，故秩相同。

四、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&a\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，$X$ 满足 $AX+I=A^2+X$，求 $a$ 和 $X$.

解 对 A 作初等变换，由 $r(A)=2$，可求得 $a=1$，再由 $AX+E=A^2+X$，得

$$(A-E)X=(A-E)(A+E)$$

由于 $|A-E|\neq 0$，因此 $A-E$ 可逆，且 $X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&6&2\end{pmatrix}$。

五、（10 分）讨论 $a,b$ 取何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$ 有解。

解: 由于系数行列式 $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=b(1-a)$，所以当 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，由克莱姆法则可知方程组有解。

当 $b=0$ 时，增广矩阵为 $\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，方程组无解。

当 $a=1$ 时，增广矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&1-2b\end{bmatrix}$ 故当 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时方程组有解，

当 $a=1,b\neq\frac{1}{2}$ 时方程组无解。

六、（10 分）已知 $A$ 为 3 阶矩阵，3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且满足：

$$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3, A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3{}^T, A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$$

求矩阵 $A$ 的特征值和特征向量。

解 由已知条件有 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix}$

令 $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，则 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $P_1$ 可逆

且 $P_1^{-1}AP_1=B$，故矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，所以矩阵 $A$ 的特征值就是矩阵 $B$ 的特征值。

而 $B$ 的特征值为：$|\lambda I-B|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，故矩阵 $A$ 的特征值为 $1,2,3$

又矩阵 $B$ 对应于特征值为 $1,2,3$ 的特征向量为：

$(I-B)x=0$ 得基础解系 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$(2I-B)x=0$ 得基础解系 $\beta_1=(2,3,3)^T$

$(3I-B)x=0$ 得基础解系 $\beta_1=(1,3,4)^T$

又有 $AP_1=P_1B$，故有 $AP_1\beta_i=P_1B\beta_i=\lambda_iP_1\beta_i$，所以矩阵 $A$ 对应于特征值 $1,2,3$ 的特征向量为：

$P_1\beta_1,P_1\beta_2,P_1\beta_3$，即 $k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，$k_2(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)$，$k_3(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)$

其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意非零实常数。

七、(8分) 已知实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是半正定的，$k$ 为正实数，证明：$kE+A$ 是正定的。

证：法一 $\because f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 半正定，所以对任意一组不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，

令 $X_0=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\neq 0,$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)=X_0'AX_0\geq 0$，由 A 实对称有 kE+A 实对称，

又 $X_0'(kE+A)X_0=kX_0'X_0+X_0'AX_0>k(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2)>0(\because k>0)$

$\therefore X_0'(kE+A)X_0>0,\therefore kE+A$ 正定。

法二 $\because f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 半正定，所以 $A$ 的全体特征值 $\lambda\geq 0$，由 $A$ 实对称，有 $kE+A$ 实对称，又 $kE+A$ 的全体特征值为 $\lambda+k>0$ $(\because k>0)$ $\quad\therefore kE+A$ 正定。

八、(10分) 已知 $\alpha_1=(-1,0,1)^T,\alpha_2=(2,2,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组；(2) 求生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

解 (1) 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作为列构造矩阵，再作初等行变换化矩阵为阶梯形：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任意两个都可为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组，不妨取 $\alpha_1,\alpha_2$

(2) 由 (1) 知，$\alpha_1,\alpha_2$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基，于是只需正交单位化即可。

正交化：令 $\beta_1=\alpha_1=(-1,0,1)^T$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\beta_1=(1,2,1)^T$

单位化：$e_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}),e_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{2\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6})^T$

$e_1,e_2$ 就是生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

九 (12分) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=PY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$.

（1）判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 是否正定？（2）计算行列式 $|A|$ 的值；

（3）若 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，求矩阵 $A$.

解 （1）由已知条件知矩阵 $A$ 的特征值为：$1,2,0$，所以二次型为半正定。

（2）$|A|=1\times 2\times 0=0$

（3）由已知 $Q^TAQ=diag(1,2,0)$

于是 $A=Qdiag(1,2,0)Q^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

十、（10 分）设 $\sigma$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换，且满足 $\sigma^{n-1}(\alpha)\neq\theta$，但 $\sigma^n(\alpha)=\theta$.

(1) 证明 $\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\cdots,\sigma^{n-1}(\alpha)$ 是 $V$ 的基；

(2) 求线性变换 $\sigma$ 在该基下的矩阵 $A$；

(3) 讨论 $A$ 能否与对角阵相似。

解 （1）作组合 $k\alpha+k_1\sigma(\alpha)+k_2\sigma^2(\alpha)+\cdots+k_{n-1}\sigma^{n-1}(\alpha)=0$，依次用 $\sigma^{n-1},\sigma^{n-2},\cdots,\sigma$ 作用于上式两边，即可得 $k=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$

所以 $\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\cdots,\sigma^{n-1}(\alpha)$ 是 $V$ 的基。(2)

$$\sigma(\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\cdots,\sigma^{n-2}(\alpha),\sigma^{n-1}(\alpha))=(\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\sigma^3(\alpha),\cdots,\sigma^{n-1}(\alpha),\theta)$$

$$=\sigma(\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\cdots,\sigma^{n-2}(\alpha),\sigma^{n-1}(\alpha))\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

线性变换 $\sigma$ 在该基下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$

(3) 由于 $A$ 只有零特征值（$n$ 重），而 $Ax=0$ 的基础解系仅含一个解向量，没有 $n$ 个线性无关的特征向量，故不能与对角阵相似.