2002～2003学年第二学期《高等数学》期末考试试题A卷（216学时）

专业班级____________________学号________________ 姓名__________

一、填空题（每小题4分，共12分）

（1）设 S 为: $x^2+y^2+z^2=4$，则 $\oiint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________。

（2）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le \rho^2\}$，$f$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________。

（3）周期为2的函数 $f(x)$；设它在一个周期 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，它的傅立叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(-5)=$________。

二、选择题（每小题4分，共12分）

（1）微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应有形式（式中 a,b 为常数）

A. ae^x+b　　B. axe^x+bx　　C. ae^x+bx　　D. axe^x+b

（2）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 2 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 无定义　　B. 连续　　C. 有极限但不连续　　D. 无极限

（3）设 L 是 $|y|=1-x^2\ (-1\le x\le 1)$ 表示的围线的正向，则 $\oint_L \dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}$ 之值等于

A. 0　　B. 2π　　C. -2π　　D. $4\ln 2$

三、(12分)计算下列积分:

(1) $I=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$。

(2) $I=\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy, y=x, x=1$ 及 $z=0$ 围成的闭区域。

四、(8分）求曲面 $4x^2+4z^2-17y^2+2y-1=0$ 在点 $M_0(2,1,0)$ 处的切平面方程。

五、(8分）设 Ω 为旋转抛物面 $x^2+y^2=az$ 与锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$ 所围成的空间闭区域，求 Ω 的体积。

六、（12 分）设有向量场 $\vec{F}=\left\{x^2yz^2,\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)\right\}$，

（1）计算 $div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}$ 的值。

（2）设空间区域 Ω 由锥面 $y^2+z^2=x^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所围成 $(x>0)$，其中 a 为正常数，记 Ω 表面的外侧为 Σ，计算积分

$$I=\oiint_{\Sigma}x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

七、（8 分）已知 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，试证曲线积分 $I=\int_A^B(x-\varphi(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并求当 A,B 两点分别为 $(1,0)$ 及 (π,π) 时这个积分的值。

八、（7 分）求曲面 $xy-z^2+1=0$ 上离原点最近的点。

九、（5 分）证明：设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 则

$$\iiint_{\Omega}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}f(x)(1-x^2)\mathrm{d}x$$

十、（8 分）设有空间直线 l：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 和平面 π： $x-y+2z-1=0$，求：

（1）直线 l 在平面 π 上的投影直线 l_0 的方程；

（2）投影直线 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程 $F(x,y,z)=0$。

十一、（8 分）设 $z=f(e^x\sin y)$， $f(u)$ 具有二阶连续导数，

（1）求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2）若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求 $f(u)$。