武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 A 期末试题 A

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C.$

3. （10 分）设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

4. （10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

5、（12 分）设 $P^{2\times 2}$ 是数域 P 上全体 2 阶方阵构成的线性空间。

（1）证明: $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $P^{2\times 2}$ 的一个基；

（2）求向量 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标；

6、(8 分) 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$，(1) 求矩阵 A 的秩. (2) 求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

7.（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都正交，证明：$\beta=0$.

8、（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1 \end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

9、（12 分）设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t=1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

10、（8 分）设 R^3 的线性变换 T 为:对于 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in R^3$，$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

试求 R^3 的一组基,使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵,并写出这个对角矩阵.

武汉大学 2017-2018 第一学期线性代数 A 期末试题 A 解答

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(x-k)$$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $(X-A)B=C$.

解 $$X-A=CB^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=CB^{-1}+A=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. （10 分）设 A 、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$，

已知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0$，求 A..

解　由所给关系得 $(A+2B)(A-B)-(A-B)=0$　　即 $(A+2B-E)(A-B)=0$　　由　$|A-B|\neq 0$

知：$A=E-2B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

4. （10 分）设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1。$B=A^3-A^2-4A^{-2}+5E$，求行列式 $|B|$ 的值。

解 记 $B=\varphi(A)$，且 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-4\lambda^{-2}+5$

由题设 A 的三个特征值分别为 2，-1, 1，所以 $\varphi(A)$ 的特征值为

$\varphi(2)=2^3-2^2-42^{-2}+5=8$，$\varphi(-1)=(-1)^3-(-1)^2-4(-1)^{-2}+5=-1$

$\varphi(-1)=(1)^3-(1)^2-4(1)^{-2}+5=1$　故　$|B|=\varphi(2)\varphi(-1)\varphi(1)=-8$

5.（8 分）设 $P^{2\times 2}$ 是数域 P 上全体 2 阶方阵构成的线性空间。

（1）证明：$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $P^{2\times 2}$ 的一个基；

（2）求向量 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 下的坐标；

解：（1） $P^{2\times2}$ 中任何 4 个线性无关的向量构成它的基.

令 $k_1A_1+\cdots+k_4A_4=0$ 得 $\begin{cases}k_1+k_3+k_4=0\\k_1-k_2-k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_1=0\end{cases}$，它有唯一解: $k_1=k_2=k_3=k_4=0$

故 $A_1,\cdots,A_4$ 线性无关, 可作为 $P^{2\times2}$ 的基。

（2）由 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\mathrm{k}_1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

知 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{k}_1+k_3+k_4&\mathrm{k}_1-k_2-k_3\\\mathrm{k}_1+k_2&\mathrm{k}_1\end{pmatrix}$ 即 $\begin{cases}\mathrm{k}_1+k_3+k_4=1\\\mathrm{k}_1-k_2-k_3=2\\\mathrm{k}_1+k_2=3\\\mathrm{k}_1=4\end{cases}$ 解之得 $\begin{pmatrix}\mathrm{k}_1\\\mathrm{k}_2\\\mathrm{k}_3\\\mathrm{k}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-7\end{pmatrix}$

所以向量 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}\mathrm{k}_1\\\mathrm{k}_2\\\mathrm{k}_3\\\mathrm{k}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-7\end{pmatrix}$.

6、(8 分) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\3&-7&2&0&1&4\\2&-5&2&4&6&1\\4&-9&2&-4&-4&7\end{bmatrix}$，（1）求矩阵 A 的秩.（2）求矩阵 A 列向量组的一个极大线性无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

解：（1）对 A 作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\0&-1&2&12&16&-5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故秩 $(A)=2$.

（2）分别记矩阵 A 的列向量分别为 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，α_6

由 $A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1&2&0&4&5&-3\\0&-1&2&12&16&-5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-4&-28&-37&13\\0&1&-2&-12&-16&5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

故 α_1，α_2 为矩阵 A 列向量组的一个极大无关组，且有

$\alpha_3=-4\alpha_1-2\alpha_2$，$\alpha_4=-28\alpha_1-12\alpha_2$，$\alpha_5=-37\alpha_1-16\alpha_2$，$\alpha_6=13\alpha_1+5\alpha_2$

7.（8 分）设 n 维向量 β 和 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都正交，证明：$\beta=0$.

解： 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。设 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$

两边与 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 作内积，得 $0=(b,\alpha_i)=k_1(\alpha_1,\alpha_i),(\alpha_1,\alpha_i)\neq0,$ 得 $k_i=0(i=1,\cdots,n)$

故 $\beta=0$.

8、（16 分）就 λ 的取值讨论方程组 $\begin{cases}\lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda\\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda\\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1\end{cases}$ 何时有唯一解，何时有无穷多解？在有无穷多解时，求出一般解.

解：$\because |A|=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda+1\\ \lambda & \lambda & \lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3\end{vmatrix}=2\lambda(-1)=-2\lambda$ $\therefore$ 当 $\lambda\neq 0$ 时，原方程组有唯一解

当 $\lambda=0$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&-1&0\\1&0&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore X=k\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

9、（12 分）设二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4tx_2x_3$

（1）t 取什么值时, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的；

（2）当 $t=1$ 时，利用正交变换将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵。

解：（1）$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2t\\0&2t&3\end{bmatrix}$ $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=6>0$

$\Delta_3=|A|=2(9-4t^2)>0\Rightarrow |t|<\dfrac{3}{2}$ 故当 $|t|<\dfrac{3}{2}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定。

（2）当 $t=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$

$e_1=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, $e_2=(1,0,0)^T$, $e_3=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

在正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ 之下，f 化成标准形：$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

10.（8 分）设 R^3 的线性变换 T 为:对于 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$，$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

试求 R^3 的一组基,使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵,并写出这个对角矩阵.

解 对于 $Z\in R^3, TZ=AZ$,其中 $A=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{bmatrix}$. A 有特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-3$.

相应的特征向量分别为: $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基, T 在此基下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$.