线性代数 A 期中测验解答

1.设 $a_1a_2a_3\cdots a_n \neq 0$，试证明：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

证 $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

（第 i 行 $\times\frac{-1}{a_i}$ 加入第一行，$i=2,3,\cdots n$） $$= \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_2a_3a_4\cdots a_nb$$

式中 $b=1+a_1+a_1(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+L+\frac{1}{a_n})=a_1(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_1})$ 　　原式 $=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^*$，求 X .

解：由 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^*$ 知 $AX=2X+|A|B$，而 $|A|=4$，所以

$$X=4(A-2I)^{-1}B$$

$$\because A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \therefore (A-2I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故而， $$X=4\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，证明：A 的秩为零或 1 的充要条件是存在 $m+n$ 个数 $a_1,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$，使 $a_{ij}=a_ib_j(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$.

证 充分性：若 $a_{ij}=a_ib_j$ 成立 $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$. A 的秩为 0 或 1 显然成立

必要性：若 A 的秩为 0，取 $a_i=0(i=1,\cdots,m),b_j$ 任意。即可得 $a_{ij}=a_ib_j$

若 A 的秩为 1，则 A 中必有一非零行向量，设为 $(a_{11},\cdots,a_{1n})$, 任意一行向量与它线性相关.

即 $(a_{i1},\cdots,a_{in})=a_i(a_{11},\cdots,a_{1n})(i=1,\cdots,m)$

记 $a_{1j}=b_j(j=1,\cdots,n)$ 即得 $a_{ij}=a_ib_j$。

4. 设 $A=\begin{bmatrix}0&-2&4&3\\1&1&1&1\\3&5&-1&a\\2&1&4&b\end{bmatrix}$, 就 a,b 的取值情况, 讨论方程组 $AX=0$ 的一般解, 并求出相应的一般解.

解 $A=\begin{bmatrix}0&-2&4&3\\1&1&1&1\\3&5&-1&a\\2&1&4&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&4&3\\0&0&0&a\\0&0&0&2b-7\end{bmatrix}$

(1) 当 $a=0$ 且 $b=\dfrac{7}{2}$ 时, $R(A)=2$, 此时

$$A\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-\dfrac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&\dfrac{5}{2}\\0&1&-2&-\dfrac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\therefore X=k_1\begin{bmatrix}-3\\2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-5\\3\\0\\2\end{bmatrix}$$

(2) 当 $a\neq 0$ 或 $b\neq\dfrac{7}{2}$ 时, $R(A)=3$, 此时 $A\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&4&3\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$\therefore X=k\begin{bmatrix}-3\\2\\1\\0\end{bmatrix}$$

5. 设 A 为 n 阶方阵，证明：若 $A^2=I$，那么 $r(A+I)+r(A-I)=n$，其中 I 为 n 阶单位阵。

证 $r(A+I)+r(A-I)\ge r(A+I+A-I)=r(A)$ 由 $A^2=I\Rightarrow |A|\ne 0\Rightarrow r(A)=n$

故 $r(A+I)+r(A-I)\ge n$，又 $(A-I)(A+I)=A^2+A-A-I=0$

所以 $n\ge r(A+I)+r(A-I)$，故 $r(A+I)+r(A-I)=n$

6. 设有三个不共面的向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3),\beta=(b_1,b_2,b_3),\gamma=(c_1,c_2,c_3)$

证明：存在唯一一个向量 x，使 $x\cdot\alpha=1,x\cdot\beta=2,x\cdot\gamma=3.$

证 设 $x=\{x_1,x_2,x_3\}$ 则 $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=1\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=2\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=3\end{cases}$

由 α、β、γ 不共面，故 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\ne 0$ 所以有唯一解 $[x_1,x_2,x_3]$.

7. 设 A 是 3×3 的矩阵，且 A 的秩 $R(A)=2.$ 若已知方程组 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.（$a,b,c$ 不全为零）

其两个解向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. 试求方程组 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. 的通解.

解 记 $\xi=\eta_2-\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, 则 $A\xi=0$

又 $R(A)=2$，故方程 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ 的通解为：$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\xi(k\ne 0)$

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. 的通解为：$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

8. 设列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，列向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，证明：（1）$\alpha_1$一定可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示；（2）$\alpha_4$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

证明：（1）由向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，得$\alpha_2,\alpha_3$线性无关，
又由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，得$\alpha_1$一定可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

（2）假设α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，

由（1）得α_1可由α_2,α_3线性表示，

则α_4可由α_2,α_3线性表示，得$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，

与题设矛盾。所以假设不成立。所以α_4不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。