

# 武汉大学数学与统计学院 2012–2013 第一学期

## 《线性代数 A》期末考试试题 72 学时 A 卷

学院\_\_\_\_\_ 专业\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

**注：**所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

1、(10) 已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $|A|$  和  $|A^T A^*|$ .

2、(15) 设  $A$  是一个 3 阶方阵，且特征值为 0, 1, 2，求秩  $r(A+I)$  和秩  $r(A)$ .

3、(15 分) 已知  $A$  可逆，且  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，若  $ABA^* + BA^* = 4I$ ，求矩阵  $B$ .

4、(15 分) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+4 & a+3 \\ -1 & a & 2a+1 \end{bmatrix}$ ，若存在 3 阶非零矩阵  $B$ ，使得  $AB=O$ .

1) 求  $a$  的值； 2) 求方程组  $AX = O$  的通解.

5、(15 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  的秩为 2.

- 1) 求参数  $c$  及此二次型对应的矩阵  $A$ ；
- 2) 求相似变换矩阵  $P$ ，把  $A$  对角化，并写出二次型  $f$  的标准型.

6、(15 分) 设  $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  是一个  $4 \times 3$  矩阵，且方程组

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ 的通解是 } X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

- 1) 求  $A$  的第二列  $\alpha_2$  和第三列  $\alpha_3$ ；
- 2) 对  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，求一个最大无关组.

7、(15 分) 试证：1,  $x-1$ ,  $x(x-1)(x-2)$  是  $P[x]_2$  中的一组基；并求向量  $1+x+x^2$  在该基下的坐标.

# 武汉大学数学与统计学院 2012–2013 第一学期

## 《线性代数 A》 72 学时 (A 卷答案)

1、 $|A|=5$ ,  $|A^T A^*|=5^4$

2、由于  $A$  的特征值为 0,1,2, 则  $(A+I)$  的特征值为 1,2,3, 从而  $|A+I|=6 \neq 0$

则  $(A+I)$  可逆,  $R(A+I)=3$ , 设  $A$  的特征值 0,1,2 所对应的特征向量分别为  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , 由于 0,1,2 各异, 则  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  线性无关, 即  $(X_1, X_2, X_3) = P$  为可逆阵。

于是有  $AP = \Lambda$ ,  $P^{-1}AP=\Lambda$ , 其中  $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ , 显然  $R(A)=R(\Lambda)=2$ 。

3、注意, 由条件  $|A|=\frac{1}{3}$ 。再由  $ABA^* + BA^* = 4I \Rightarrow A^{-1}(ABA^* + BA^*)A = 4A^{-1}IA \Rightarrow$

$$BA^*A + A^{-1}BA^*A = 4I \Rightarrow B|A|I + A^{-1}B|A|I = 4I \Rightarrow \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}A^{-1}B = 4I,$$

$$\text{即 } B = 12(I + A^{-1})^{-1}。而 (I + A^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, (I + A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } B = 12(I + A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}。$$

4、1)  $AX=O$  有非零解的充分必要条件是  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a+4 & a+3 \\ -1 & a & 2a+1 \end{vmatrix} = 0$ , 解得  $a=0$  或  $a=-2$ 。

2) 当  $a=0$  时,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 即  $R(A)=2$ ,  $AX=O$

的基础解系只有一个向量, 可取为  $(1, -1, 1)^T$ 。

则  $AX=O$  的通解  $X = k_1(1, -1, 1)^T$ , ( $k_1$  为任意常数);

当  $a=-2$  时,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 即  $R(A)=2$ ,  $AX=O$  的基础解系

只含一个向量，可取为  $(2, -1, 0)^T$ 。

则  $AX = O$  的通解  $X = k_2(2, -1, 0)^T$ , ( $k_2$  为任意常数)。

5、1)  $\because R(A) = 2$ ,  $\therefore |A| = 0$ , 求得  $c = 2$ 。二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

2) 由计算, 这儿  $A$  对应的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ ,

$$\text{对 } \lambda_1 = \lambda_2 = 3, (A - 3I) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

特征向量可取为  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \alpha_2 = (1, -1, 0)^T$ ,

$$\text{对 } \lambda_3 = 0, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特征向量可取为  $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ , 则所求相似变换阵为  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 二次型  $f$  的标准型

为  $f(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 3y_2^2$ 。

6、1)  $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2c \\ 1+c \end{bmatrix}, [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2c \\ 1+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, (1+2c)\alpha_2 + (1+c)\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ , 令

$c = -\frac{1}{2}$  和  $c = -1$ , 分别得  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ 。

2) 由于所给非齐次方程组所对应的齐次方程组的基础解系只含有一个解向量, 则  $R(A) = 3 - 1 = 2$ , 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的秩为 2, 注意  $\alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则最大无关组为  $\alpha_1, \alpha_2$  或  $\alpha_1, \alpha_3$ 。

7、注意  $P[x]_2$  是三维线性空间, 所以只需要证明  $1, x-1, (x-1)(x-2)$  线性无关即可。

令  $k_1 + k_2(x-1) + k_3(x-1)(x-2) = 0$ , 整理得:  $k_1 - k_2 + 2k_3 + (k_2 - 3k_3)x + k_3x^2 = 0$ ,

从而  $\begin{cases} k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_2 - 3k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$ , 其系数行列式  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , 故方程组只有零解, 即,

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , 即  $1, x-1, (x-1)(x-2)$  线性无关, 也即  $1, x-1, (x-1)(x-2)$  是  $P[x]_2$  中的一组基。设  $1+x+x^2$  在该基下的坐标为  $(a_1, a_2, a_3)^T$ , 则有

$$1+x+x^2 = a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)(x-2),$$

或:  $1+x+x^2 = a_1 - a_2 + 2a_3 + (a_2 - 3a_3)x + a_3x^2$ , 比较两边系数得:  $\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 1 \\ a_2 - 3a_3 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 1 \end{cases}$ , 即  $1+x+x^2$  在该基下的坐标为  $(3, 4, 1)^T$ 。

满绩小铺QQ: