

武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 A (A 卷)

姓名_____ 学号_____

一、(10 分) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 A^{2022}

三、(12 分)

已知 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\alpha^T \beta = 6$, $B = \alpha \beta^T$, $A = I - B$

证明: (1) $B^k = 6^{k-1} B$ (2) $A + 5I$ 或 $A - I$ 不可逆 (3) A 及 $A + 4I$ 都可逆

四、(10 分) 求 X , 使得 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

五、(10 分) 设 A 为 n 阶方阵 ($n \geq 2$), A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n, \\ 1, & R(A) = n-1, \\ 0, & R(A) \leq n-2. \end{cases}$$

六、(10 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases},$$

问 a, b 取何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多个解? 并在有无穷多解时求其通解。

七、(14 分) 求 R^4 的子空间 $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ 的基和维数,

并将 W 的基扩充为 R^4 的基。

八、(12 分)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $a_1 \neq 0$, $A = \alpha\alpha^T$, (1) 证明 0 是 A 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 A 的非 0 特征值和非 0 特征值对应的特征向量。

九、(12 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵;