

# 武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

## 《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、(10 分) 设  $\vec{a} = (1, -2, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ , 求  $m$  使得  $\vec{a} + m\vec{b}$  在  $\vec{b}$  上的投影为 0.

二、(10 分) 设曲面  $\Sigma: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$  及点  $P(1, 1, 1)$ :

1) 求点  $P(1, 1, 1)$  处曲面  $\Sigma$  的切平面方程;

2) 若  $\vec{n}$  是曲面  $\Sigma$  在点  $P(1, 1, 1)$  处指向内侧的法向量, 求  $\vec{n}$  的方向余弦.

三、(8 分) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)^2 z - \cos^2 y = x^3(z + \sin y)$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(0,0)}$ .

四、(10 分) 设  $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算二重积分  $\iint_D |y - x^2| dx dy$ .

五、(8 分) 计算对面积的曲面积分  $\iint_S (y+z) dS$ , 其中  $S$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  介于平面  $z=0$  及  $z=1$  之间的部分.

六、(8 分) 设有曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 = 3z, \end{cases}$  及曲线上一点  $M(2, 1, 1)$ :

1) 求曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的切线  $L$  的方程;

2) 验证  $\Gamma$  与  $L$  在  $zOx$  面上的投影在点  $M'(2, 0, 1)$  处相切.

七、(8 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n$  的和函数及收敛域.

八、(10 分) 1) 确定常数  $a$ , 使得对平面上任意分段光滑闭曲线  $L$ , 均有  $\oint_L (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy = 0$ .

2) 对于该常数, 求二元函数  $u(x, y)$ , 使得  $du(x, y) = (2xy - y^4 + 5) dx + (x^2 - axy^3) dy$ , 且  $u(0, 0) = 0$ .

九、(8 分) 计算曲面积分  $I = \iint_S (x^3 + 2zx) dy dz + (2y^3 + 3xy) dz dx + (3z^3 + 4yz) dx dy$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的内侧.

十、(8 分) 将函数  $f(x) = x \arctan x$  展开成  $x$  的幂级数, 并写出该幂级数的收敛域.

十一、(8分) 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y-x)x^4}{(y-x)^4 + x^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  考虑如下问题:

1) 计算该函数在点  $O(0, 0)$  处沿方向  $\vec{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向导数;

2) 证明该函数在点  $O(0, 0)$  处不连续.

十二、(4分) 阅读如下材料: 利用指数函数的幂级数展开式  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 可以拓展到复数域上的结论, 即

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  ( $z \in \mathbb{C}$ , 即  $z$  为复数). 并且对于复数  $z = a + ib$ , 依然有  $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$  以及  $(e^{a+ib})^n = e^{n(a+ib)}$ , 而

且有被称为欧拉公式的如下等式:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ .

问题: 若将函数  $e^x \cos x$  展开成幂级数  $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ), 试给出  $a_n$  的表达式.

# 武汉大学数学与统计学院

2019-2020 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷 参考解答

考试时间：2020 年 6 月 11 日 14:30-16:30

一、(10 分) 设  $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (1, 2, -2)$ , 求  $m$  使得  $\vec{a} + m\vec{b}$  在  $\vec{b}$  上的投影为 0.

解:  $\text{Prj}_{\vec{b}}(\vec{a} + m\vec{b}) = \frac{(\vec{a} + m\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + m\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$  5 分

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + m\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{5}{9}$$
 10 分

二、(10 分) 设曲面  $\Sigma: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$  及点  $P(1, 1, 1)$ :

1) 求点  $P(1, 1, 1)$  处曲面  $\Sigma$  的切平面方程;

2) 若  $\vec{n}$  是曲面  $\Sigma$  在点  $P(1, 1, 1)$  处指向内侧的法向量, 求  $\vec{n}$  的方向余弦.

解: 1) 令  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$ , 则  $F_x(1, 1, 1) = 2, F_y(1, 1, 1) = 4, F_z(1, 1, 1) = 6$ , 因此, 所求切平面方程为:  $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ , 即  $x + 2y + 3z = 6$ . 5 分

2) 由于  $\vec{n} \parallel \{F_x, F_y, F_z\}$ , 指向内侧, 可知  $\vec{n} = -\{1, 2, 3\}$ , 其单位化向量为  $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right\}$ , 因而  $\vec{n}$  的

方向余弦:  $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}$ . 10 分

三、(8 分) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)^2 z - \cos^2 y = x^3(z + \sin y)$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)}$ .

解: 将  $x=0, y=0$  代入方程得  $z=1$ ; 方程两边关于  $x$  求偏导数得:

$$2(x+1)z + (x+1)^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2(z + \sin y) + x^3 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (3.1)$$

代入  $x=0, y=0, z=1$ , 容易解得  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -2$ . 5 分

对方程(3.1)两边关于  $x$  求偏导数得:

$$2z + 4(x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + (x+1)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x(z + \sin y) + 6x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

代入  $x=0, y=0, z=1$ , 以及  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -2$ , 得  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 6$ . 8 分

四、(10分) 设  $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算二重积分  $\iint_D |y - x^2| dx dy$ .

解:  $\iint_D |y - x^2| dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy$  5分

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx + \int_{-1}^1 \left( \frac{1-x^4}{2} - x^2(1-x^2) \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x^2 + x^4 \right) dx = \frac{11}{15}. \end{aligned} \quad 10分$$

五、(8分) 计算对面积的曲面积分  $\iint_S (y+z) dS$ , 其中  $S$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  介于平面  $z=0$  及  $z=1$  之间的部分.

解: 由于曲面  $S$  关于  $y=0$  对称, 因此  $\iint_S y dS = 0$ . 4分

另一方面, 圆柱面上  $dS = 2\pi R dz$ , 因而有  $\iint_S z dS = \int_0^1 2\pi R z dz = \pi R$ .

所以  $\iint_S (y+z) dS = \pi R$ . 8分

六、(8分) 设有曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 - y^2 = 3z, \end{cases}$  及曲线上一点  $M(2,1,1)$ :

- 1) 求曲线  $\Gamma$  在点  $M$  处的切线  $L$  的方程;
- 2) 验证  $\Gamma$  与  $L$  在  $zOx$  面上的投影在点  $M'(2,0,1)$  处相切.

解: 1) 切线  $L$  的方程:  $\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 4x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ ; 4分

2)  $\Gamma$  与  $L$  在  $zOx$  平面上的投影方程分别为:  $\Gamma': \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 6 + 3z \\ y = 0 \end{cases}$  及  $L': \begin{cases} 8x - z = 15 \\ y = 0 \end{cases}$ ;

他们都过点  $M'(2,0,1)$ , 此处曲线上  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M'} = 8$ , 直线上  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M'} = 8$ , 因此  $\Gamma$  与  $L$  在  $zOx$  平面上的投影在点

$M'(2,0,1)$  处相切. 8分

七、(8分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n$  的和函数及收敛域.

解:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-3x)^n$ , 不妨考虑如下幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \tau^{n-1} d\tau = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n-1} d\tau = \int_0^t \frac{1}{1-\tau} d\tau = -\ln(1-\tau), \text{ 它的收敛域为 } [-1, 1). \quad 5分$$

因此,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} x^n = -\ln(1-2x) - \ln(1+3x)$ , 收敛域为  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ . 8分

八、(10分) 1) 确定常数  $a$ , 使得对平面上任意分段光滑闭曲线  $L$ , 均有  $\oint_L (2xy - y^4 + 5)dx + (x^2 - axy^3)dy = 0$ .

2) 对于该常数, 求二元函数  $u(x, y)$ , 使得  $du(x, y) = (2xy - y^4 + 5)dx + (x^2 - axy^3)dy$ , 且  $u(0, 0) = 0$ .

解: 1) 题设条件等价  $\frac{\partial(2xy - y^4 + 5)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x^2 - axy^3)}{\partial x}$ , 即有  $2x - 4y^3 \equiv 2x - ay^3$ , 因此  $a = 4$ . 5分

$$\begin{aligned} 2) \quad u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2xy - y^4 + 5)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_0^x 5dx + \int_0^y (x^2 - 4xy^3)dy = 5x + x^2y - xy^4. \end{aligned} \quad 10分$$

九、(8分) 计算曲面积分  $I = \iint_S (x^3 + 2zx)dydz + (2y^3 + 3xy)dzdx + (3z^3 + 4yz)dx dy$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的内侧.

解: 用  $\Omega$  表示球  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , 利用高斯公式可得:

$$I = -\iiint_{\Omega} (3x^2 + 2z + 6y^2 + 3x + 9z^2 + 4y)dx dy dz. \quad 4分$$

由对称性可知:  $\iiint_{\Omega} xdx dy dz = \iiint_{\Omega} ydx dy dz = \iiint_{\Omega} zdx dy dz = 0$ ;

$$\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz. \quad 6分$$

因此,  $I = -\iiint_{\Omega} (3 + 6 + 9)x^2 dx dy dz = -6\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dx dy dz$

$$= -6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 r^2 \sin\varphi dr = -\frac{24\pi}{5}. \quad 8分$$

十、(8分) 将函数  $f(x) = x \arctan x$  展开成  $x$  的幂级数, 并写出该幂级数的收敛域.

解: 由于  $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$ , 且  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  收敛半径为 1, 因此有

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad 5分$$

因此,  $f(x) = x \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$ , 收敛域为  $[-1, 1]$ . 8分

十一、(8分) 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y-x)x^4}{(y-x)^4 + x^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  考虑如下问题:

1) 计算该函数在点  $O(0, 0)$  处沿方向  $\vec{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向导数;

2) 证明该函数在点  $O(0, 0)$  处不连续.

$$\text{解: } 1) \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha) \cos^4 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^4 + t^2 \cos^6 \alpha}$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos^4 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^3}, & \sin \alpha \neq \cos \alpha \\ 0, & \sin \alpha = \cos \alpha \end{cases} \quad 4 \text{ 分}$$

2) 考虑动点沿曲线  $y = x + kx^2$  趋近于原点  $O(0,0)$ , 有

$f(x, x + kx^2) = \frac{kx^6}{k^4 x^8 + x^6} \rightarrow k \quad (x \rightarrow 0)$ , 因此  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  不存在, 所以该函数在点  $O(0,0)$  处不连续. 8 分

十二、(4 分) 阅读如下材料: 利用指数函数的幂级数展开式  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (x \in \mathbb{R})$  可以拓展到复数域上的结论, 即

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C}, \text{ 即 } z \text{ 为复数})$ . 并且对于复数  $z = a + ib$ , 依然有  $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$  以及  $(e^{a+ib})^n = e^{n(a+ib)}$ , 而

且有被称为欧拉公式的如下等式:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ .

问题: 若将函数  $e^x \cos x$  展开成幂级数  $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (x \in \mathbb{R})$ , 试给出  $a_n$  的表达式.

解: 由欧拉公式可得  $e^x \cos x = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$ , 利用  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C})$ , 有

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n, \quad e^{(1-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} x^n.$$

因此 
$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} + \frac{(1-i)^n}{n!} \right) x^n,$$

也就是  $a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} + \frac{(1-i)^n}{n!} \right)$ . 利用  $(1 \pm i)^n = \left( \sqrt{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\pm i\frac{n\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} \pm i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$  可得

$$a_n = \frac{1}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}. \quad 4 \text{ 分}$$