# 武汉大学数学与统计学院

2021-2022 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试 A 卷 参考解答

考试时间：2022 年 6 月 8 日 14:30-16:30

一、（9 分）已知 $|\vec{a}|=\sqrt{13},|\vec{b}|=\sqrt{19},|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{24}$，计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 以及 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

解：由于 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$，代入条件解得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$； 4 分

因 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$，代入条件以及 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 可得 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. 9 分

二、（9 分）设函数 $u=\ln(x^2+y^2)$，计算：1） $\mathrm{d}u$； 2） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解：1） $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$； 4 分

2） 由 1）可知 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}$； 7 分

由对称性可知 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x^2+y^2}-\dfrac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}$；因此 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 9 分

三、（9 分）求曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=3,\\2x-y+z=1\end{cases}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切线方程与法平面方程.

解：解法一：点 $(1,1,0)$ 处曲面 $x^2+2y^2+z^2=3$ 的切平面为：$x+2y=3$，由此可知曲线 $C$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切线方程为：$L:\begin{cases}x+2y=3,\\2x-y+z=1\end{cases}$. 此外，$\vec{s}=\{1,2,0\}\times\{2,-1,1\}=\{2,-1,-5\}$ 可得

切线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-5}$； 5 分

法平面为 $\pi:2(x-1)-(y-1)-5z=0$，即 $\pi:2x-y-5z-1=0$. 9 分

解法二：令 $F=x^2+2y^2+z^2-3,G=2x-y+z-1$，切向量为

$$\vec{s}=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}_{(1,1,0)}=2\{2,-1,-5\},$$

所求的切线为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-0}{-5}$,　　5分

法平面为 $\pi:2(x-1)-(y-1)-5z=0$，即 $\pi:2x-y-5z-1=0$.　　9分

四、(8分) 求过直线 $L:\begin{cases}2x+y-z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi:x+y-z-3=0$ 垂直的平面方程；并给出直线 $L$ 在平面 $\pi$ 上的投影直线的方程.

解：过直线 $L$ 的平面族方程：$(2+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(-1+\lambda)z=0$　　3分

与平面 $\pi$ 垂直可知：$(2+\lambda)+(1+2\lambda)-(-1+\lambda)=0$，即得 $\lambda=-2$，代入可得所求平面方程：

$y+z=0$；　　6分

直线 $L$ 在平面 $\pi$ 上的投影直线的方程 $L_1:\begin{cases}y+z=0\\x+y-z-3=0\end{cases}$　　8分

五、(8分) 设 $f(x)$ 为连续可微函数，且 $f(0)=0$，并令 $F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$.

1) 用球坐标系把三重积分 $\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$ 写成三次积分；

2) 求极限 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{F(t)}{t^5}$

解：1) 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\varphi\end{cases}$ 则

$$\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r.\qquad 4分$$

2) 由 1) 可知 $F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r=2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r$,　　6分

因此 $$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^5}=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r}{t^5}=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to0}\frac{t^2f\left(t^2\right)}{5t^4}$$

$$=\frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to0}\frac{f\left(t^2\right)-f(0)}{t^2}=\frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f'(0).\qquad 8分$$

六、(8分) 计算 $I=\iint_S\left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}S$，其中 $S$ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

解：曲面 $S:z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $xOy$ 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\leqslant1$,

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma$，（$z_x'=\frac{x}{z}$，$z_y'=\frac{y}{z}$），则 4 分

$$I=\iint_S\left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_D\left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left(r^2+r\right)\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{2}\pi}{6}.$$ 8 分

七、（9 分）计算 $I=\iint_\Sigma\left(2x+3z^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(x^3z^2+yz\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0$ 上方部分的下侧.

解：令 $\Sigma_0: z=0, x^2+y^2\leqslant 4$，取上侧，则

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}\right)\left(2x+3z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^3z^2+yz\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 3 分

由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}\left(2x+3z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^3z^2+yz\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_\Omega(2-z)\mathrm{d}v$$ 5 分

$$=-\int_0^2(2-z)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le(2-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi\int_0^2(2-z)^3\mathrm{d}z=-4\pi,$$ 7 分

又 $\iint_{\Sigma_0}\left(2x+3z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^3z^2+yz\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以 $I=-4\pi$． 9 分

八、（8 分）设 $L$ 为沿弧线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 从点 $A(-2,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的有向曲线段，计算 $I=\int_L 2y\,\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y$.

解：方法一：$I=\int_L 2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{BA}}2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}}2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y$，3 分

令区域 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$，由格林公式可得

$$\oint_{L+\overline{AB}}2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y=-\iint_D(-2x-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi,$$ 6 分

并且 $\int_{\overline{BA}}2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y=\int_0^2 2\times 0\mathrm{d}x=0$,

故 $\int_L 2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y=4\pi$.

8 分

为法二：圆弧 $L: x^2+y^2=2^2(y\ge 0)$，其参数形式为 $L:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}$，起点 $t=\pi$，终点 $t=0$ ），则

$$\int_L 2y\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y=\int_\pi^0\left(4\sin t\cdot(-2\sin t)-(4\cos^2 t+1)\cdot 2\cos t\right)\mathrm{d}t$$ 4 分

$$=2\int_0^\pi\left(4\sin^2 t+4\cos^3 t+\cos t\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\pi}4\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}(2-\cos 2t)\mathrm{d}t=4\pi$$ 8 分

九、(9 分) 已知函数 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$. 1) 求函数 $f$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\, f|_{M_0}$;

2) 在第一卦限内找一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 使得曲面 $f(x,y,z)=36$ 在点 $M_0$ 处的切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求出切点 $M_0$ 的坐标.

解: 1) $\mathrm{grad}\, f|_{M_0}=\{2x_0,8y_0,18z_0\}=2\{x_0,4y_0,9z_0\}$. 3 分

2) 点 $M_0$ 处的切平面方程: $x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+9z_0(z-z_0)=0$,

即 $x_0x+4y_0y+9z_0z=36$.

写成截距式方程: $\dfrac{x}{\frac{36}{x_0}}+\dfrac{y}{\frac{9}{y_0}}+\dfrac{z}{\frac{4}{z_0}}=1$, 切平面与三坐标面所围成的四面体 $V=\dfrac{6^3}{x_0y_0z_0}$. 5 分

构造拉格朗日函数: $L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{6^3}{xyz}+\lambda\left(x^2+4y^2+9z^2-36\right)$. 7 分

分别对 $x,y,z,\lambda$ 求偏导并令其为 0, 得

$$\begin{cases} L_x'=-\dfrac{6^3}{x^2yz}+2\lambda x=0,\\ L_y'=-\dfrac{6^3}{xy^2z}+8\lambda y=0,\\ L_z'=-\dfrac{6^3}{xyz^2}+18\lambda z=0\\ L_\lambda'=x^2+4y^2+9z^2-36=0\end{cases}$$

得 $x=2\sqrt{3},y=\sqrt{3},z=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 此点为唯一的可能极值点, 故 $(2\sqrt{3},\sqrt{3},\dfrac{2}{\sqrt{3}})$ 即为点 $M_0$ 的坐标. 9 分

十、(8 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

解: 方法一: 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, 显然该级数的收敛半径为 $R=1$; 当 $x=\pm1$ 时, 级数发散, 故该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

2 分

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$ 6 分

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=2$. 8分

方法二：令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$，可得

$$S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}-\frac{n}{2^n}$$ 6分

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2^{-n}}{1-2^{-1}}-\frac{n}{2^n}\right)=2$ 8分

十一、（10分）将 $f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出收敛半径和收敛域.

解：$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}+\frac{1}{1-(x-1)}\right)$, 2分

由于 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$，因此 4分

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n(x-1)^n, \qquad \frac{1}{1-(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$ 6分

所以，$f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+1\right)(x-1)^n$ 8分

由于 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+1\right)=1$，所以收敛半径为1，收敛域 $(0,2)$. 10分

十二（5分）、设函数 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期，且其在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1+x, x\in[0,\pi)\\ 0, \quad x\in[-\pi,0)\end{cases}$.

若 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，计算 $a_n$ 以及 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

解：$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\mathrm{d}x=1+\frac{\pi}{2}$, 1分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\left((1+x)\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{-1+\left(-1\right)^{n}}{\pi n^{2}}=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi n^{2}}, n\text{为奇数}\\ 0,\quad n\text{为偶数}\end{cases}.$$ 3 分

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$ 5 分