

2004~2005 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 (180 学时)

专业班级_____ 学号_____ 姓名_____

一、填空题 (本大题满分 24 分, 每小题 4 分)

1、设 $f(x)$ 于 \mathbb{R} 上连续, $F(u, v) = (v+u) \int_v^u f(t) dt$, 则 $\frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、已知 L : $x^2 + y^2 = r^2$, 逆时针方向, $I = \oint_L \frac{bydx + axdy}{x^2 + y^2}$ (a, b 为常数), 则积分 I 非零的充要条件是: $a \neq b$ _____。

3、设 Ω_1 : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, Ω_2 : $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, Σ 是 Ω 的边界, 则第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (z^2 \sqrt{x^2 + y^2} + x + y) z ds = 0 \quad (\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dv = 0)$$

4、设 $I = \int_{-1}^0 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{-x} dy$, 则交换积分顺序后 $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} dx$, 其积分值为 $\frac{\pi - 2}{4}$ _____。

5、设 $f(x) = \cos x(1 + \sin x)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x = -\pi$ 处收敛到 -1 _____;

其傅里叶系数 $a_0 = 0$ _____, $a_1 = 1$ _____; $b_2 = 0.5$ _____。

6、设 $y_1 = x + e^{2x}$, $y_2 = x + e^{-x}$, $y_3 = x + e^{2x} + e^{-x}$ 是某个二阶线性非齐次微分方程的三个解, 则此微分方程为 $y'' - y' - 2y = -2e^x$ _____, 且其通解是 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x$ _____。

二、计算下列各题（本大题满分 40 分，每题 10 分）

1、设 $u = f(x, z)$ ，而 $z(x, y)$ 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所确的函数， f 、 z 及 φ 均可微， $y\varphi'(z) - 1 \neq 0$ ，求 du 。

2、计算 $\iint_D \frac{\sin x + \sin y + x^2 + y^2}{1+x^2+y^2} dx dy$ 。其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 。

3、计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$ 。其中 Ω 表示球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 及 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ 的公共部分。

4、设空间流动的流体，其密度 $\mu(x, y, z) = 1$ 。已知流速函数 $\vec{V} = xz^2 \vec{i} + yx^2 \vec{j} + zy^2 \vec{k}$ ，求流体在单位时间内经曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 由内侧流向外侧的流量。

三、解答下列各题（本大题满分 36 分，每题 12 分）

1、求曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{k}$ ($x > 0, y > 0, z > 0, k > 0$) 上点 (a, b, c) 处的切平面方程及其与三个坐标平面所围成四面体体积之最小值。

2、对函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，讨论下列问题：

1)、 $f(x, y)$ 在原点是否可微？给出理由。

2)、 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处沿 $\vec{l} = (1, 1)$ 之方向导数是否存在？其理由是何？

3、已知 φ 具二阶连续导数，且 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 2$ ，试确定 $\varphi(x)$ ，使

$$2(\varphi(x) + \varphi'(x)y - y^2)dx + (x\varphi'(x) - 4xy - 2y^2)dy = 0$$

为全微分方程，并求出此方程的通解。