

武汉大学数学与统计学院

2021--2022 学年第一学期线性代数 A 期末考试试卷(A 卷)

符号说明: $\det(\mathbf{A})$ 指方阵 \mathbf{A} 的行列式; \mathbf{A}^* 指方阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵; \mathbf{A}^T 指矩阵 \mathbf{A} 的转置矩阵;
 $R(\mathbf{A})$ 指矩阵 \mathbf{A} 的秩; \mathbf{E} 为单位矩阵.

一、单项选择题 (每小题 3 分共 12 分):

- (1) 设 \mathbf{A} , \mathbf{B} 为同阶可逆方阵, 则_____.
- (A) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. (B) 存在可逆阵 \mathbf{P} , 使有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{B}$.
(C) 存在可逆阵 \mathbf{P} , 使有 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \mathbf{B}$. (D) 存在可逆阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} , 使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$.
- (2) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中, 线性无关的是_____.
- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$
(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$
(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$
- (3) 设 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的导出组, 则下列结论正确的是_____.
- (A) 当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 仅有零解时, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解;
(B) 当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解时, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解;
(C) 当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解时, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 仅有零解;
(D) 当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解时, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解.
- (4) n 阶方阵 \mathbf{A} 具有 n 个不同的特征值是 \mathbf{A} 与对角阵相似的_____.
- (A) 充分必要条件 (B) 充分而非必要条件
(C) 必要而非充分条件 (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题 (每小题 3 分共 12 分):

- (1) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵, $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = -3$, 则 $|2\mathbf{A}^*\mathbf{B}^{-1}| =$ _____.
- (2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的 3 个解向量, 且 $R(\mathbf{A}) = 3$, $\alpha_1 = (0, 1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, c 表任意常数, 则线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为 $\mathbf{x} =$ _____.
- (3) 设 3 维向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, 2, 1)^T$, 则 β 关于基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2$ 下的坐标为_____.
- (4) 设 3 阶矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 1, -1, 2, 求 $|\mathbf{A}^{-1} + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{E}|$ 的值为_____.

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1 \end{vmatrix},$$

四、(12 分)设有向量组(A): $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, 及向量 $\beta = (1, b, -1)^T$, 问 a, b 为何值时:

- (1) 向量 β 能由向量组(A)线性表示, 且表示式唯一;
- (2) 向量 β 不能由向量组(A)线性表示;
- (3) 向量 β 能由向量组(A)线性表示, 且表示式不唯一, 并求一般表示式.

五、(12 分)求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, 3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, -2, -1, b)^T$, $\alpha_4 = (-2, 6, 10, a)^T$, $\alpha_5 = (4, -1, 6, 10)^T$ 的秩和一个极大无关组.

六、(12 分)设(I)和(II)都是 3 元非齐次线性方程组,

(I)的通解为: $\xi_1 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$, k_1, k_2 为任意常数;

(II)的通解为: $\xi_2 + k\beta$, 其中 $\xi_2 = (0, 1, 2)^T$, $\beta = (1, 1, 2)^T$, k 为任意实数.
求(I)和(II)的公共解.

七、(12 分)试利用正交变换将二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$ 化为标准形, 判定其正定性, 并求 $f(x, y, z)$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值.

八、(9 分)判断下列命题是否正确, 并说明理由:

- (1) 若 $A \sim B$, 则对任意实数 t , 有 $tE - A \sim tE - B$;
- (2) 设 $A \sim B$, 则它们一定相似于同一对角矩阵;
- (3) 设 A 为 4 阶方阵, $R(A) = 3$, $\lambda = 0$ 是 A 的 3 重特征值, 则 A 一定不能相似于对角矩阵.

九、(9 分)在线性空间 $P[x]_3$ 中, 设基(I): $1, x, x^2, x^3$; 基(II): $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$.

- (1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵;
- (2) 已知 $g(x)$ 在(I)下的坐标为 $(1, 0, -2, 5)^T$, $f(x)$ 在基(II)下的坐标为 $(7, 0, 8, -2)^T$, 求 $f(x) + g(x)$ 分别在基(I)和基(II)下的坐标.

武汉大学数学与统计学院

2021--2022 学年第一学期线性代数 A 期末考试试卷(A 卷)

一、单项选择题 (每小题 3 分共 12 分):

- (1) (D). (2) (C) (3) (D). (4) (B).

二、填空题 (每小题 3 分共 12 分):

- (1) $-\frac{2^{2n-1}}{3}$. (2) $c(2,1,0,-1)^T + (0,1,2,3)^T$, c 为任意实数.
(3) $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})^T$. (4) -54 .

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - r_1]{i=2,3,\dots,n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)(a-2)\cdots(a-n+1).$$

四、(12 分) 设有向量组(A): $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, 及向量 $\beta = (1, b, -1)^T$, 问 a, b 为何值时:

- (1) 向量 β 能由向量组(A)线性表示, 且表示式唯一;
(2) 向量 β 不能由向量组(A)线性表示;
(3) 向量 β 能由向量组(A)线性表示, 且表示式不唯一, 并求一般表示式.

解 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 相当于对应的非齐次方程组

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解的问题, 可转换为方程组求解的情形进行讨论.

方法 1: 设有一组数 x_1, x_2, x_3 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 该方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -a-4,$$

故

(1) 当 $a \neq -4$ 时, $|\mathbf{A}| \neq 0$, 方程组有唯一解, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一.

(2) 当 $a = -4$ 时, 对增广矩阵作行初等变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 5r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-5b \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3b \end{array} \right), \end{aligned}$$

此时若 $b \neq 0$, 则方程组无解, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

若 $b = 0$, $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 进一步对上面矩阵进行初等行变换, 可得:

$$\beta = k\alpha_1 - (2k+1)\alpha_2 + \alpha_3, \quad k \text{ 为任意实数.}$$

方法 2: 直接对下面矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 - 5r_1 \\ r_2 - \frac{a}{2}r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 - \frac{a}{2} & -1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 - 5b \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_3 \cdot (-1) \\ r_2 + (1 + \frac{a}{2})r_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 - \frac{a}{2} & 0 & 1 - \frac{ab}{2} + (1 + 5b)(1 + \frac{a}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 5b \end{array} \right), \end{aligned}$$

故当 $-2 - \frac{a}{2} \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 向量 β 能由向量组 (A) 线性表示, 且表示式唯一;

当 $-2 - \frac{a}{2} = 0$, 即 $a = -4$ 时, 进一步有

$$\bar{\mathbf{A}} \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 5b \end{array} \right),$$

从而当 $b = 0$ 时, 方程组有无穷多解, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 (表示法略去);

$b \neq 0$ 时, 则方程组无解, 即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

五、(12 分) 求向量组 $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, 5, 1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, -1, b)^T$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 6, 10, a)^T$, $\mathbf{a}_5 = (4, -1, 6, 10)^T$ 的秩和一个极大无关组.

解 对下列矩阵作初等行变换,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & b & a & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & b-9 & a+6 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & b-11 & a-2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-(b-11)r_3]{r_3 \div (-7)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 3-b \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

故

- (1) 当 $a=2, b=3$ 时, 向量组的秩为 3, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (或 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5$) 为一个极大无关组;
- (2) 当 $a \neq 2$ 时, 向量组的秩为 4, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 为一个极大无关组;
- (3) 当 $b \neq 3$ 时, 向量组的秩为 4, 且 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ 为一个极大无关组.

六、(12 分) 设 (I) 和 (II) 都是 3 元非齐次线性方程组,

(I) 的通解为: $\xi_1 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$, k_1, k_2 为任意常数;

(II) 的通解为: $\xi_2 + k\beta$, 其中 $\xi_2 = (0, 1, 2)^T$, $\beta = (1, 1, 2)^T$, k 为任意实数.

求 (I) 和 (II) 的公共解.

解 因公共解具有 $\xi_2 + k\beta$ 的形式, 即它也是 (I) 的解, 从而存在 k_1, k_2 使得

$$\xi_2 + k\beta = \xi_1 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2.$$

于是 $\xi_2 + k\beta - \xi_1$ 可用 α_1, α_2 线性表示, 即

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \xi_2 + k\beta - \xi_1) = R(\alpha_1, \alpha_2),$$

对下面矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \xi_2 + k\beta - \xi_1)$ 进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & k+1 \\ 0 & 1 & 2k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix},$$

得 $k = \frac{1}{2}$, 从而 (I) 和 (II) 有公共解:

$$\xi_2 + k\beta = \xi_2 + \frac{1}{2}\beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)^T.$$

七、(12 分) 试利用正交变换将二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$ 化为标准形, 判定其正定性, 并求 $f(x, y, z)$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值.

解 二次型对应的矩阵为: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 由 \mathbf{A} 的特征方程

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4) = 0,$$

得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -4$.

由 $(5\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $\mathbf{x}_1 = (1, -2, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (4, 2, -5)^T$, 即属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 的特征向量.

由 $(-4\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $\mathbf{x}_3 = (2, 1, 2)^T$, 即属于 $\lambda_3 = -4$ 的特征向量.

对于实对称矩阵, 不同特征值对应的特征向量正交, 上面同一特征值对应的特征向量已经正交化, 故只须单位化, 令

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{经正交变换} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{二次型化为标准形}$$

$$f(x, y, z) = x'^2 + 4y'^2 + z'^2 - 4xy' - 8xz' - 4yz' = 5x'^2 + 5y'^2 - 4z'^2.$$

由其标准形易知该二次型不是正定二次型, 且 $f = 5x'^2 + 5y'^2 - 4z'^2 \leq 5$, 最大值为 5.

八、(9 分)判断下列命题是否正确, 并说明理由:

(1) 若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 则对任意实数 t , 有 $t\mathbf{E} - \mathbf{A} \sim t\mathbf{E} - \mathbf{B}$;

(2) 设 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 则它们一定相似于同一对角矩阵;

(3) 设 \mathbf{A} 为 4 阶矩阵, $R(\mathbf{A}) = 3$, $\lambda = 0$ 是 \mathbf{A} 的 3 重特征值, 则 \mathbf{A} 一定不能相似于对角矩阵.

解 (1) 正确. 若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 即存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$, 从而对任意的实数 t , 有 $t\mathbf{E} - \mathbf{B} = t\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}(t\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{P}$, 故 $t\mathbf{E} - \mathbf{A} \sim t\mathbf{E} - \mathbf{B}$.

(2) 错误. 任一矩阵 \mathbf{A} 一定相似于它自身, 但 \mathbf{A} 不一定相似于对角矩阵, 只有当 \mathbf{A} 存在 n 个线性无关的特征向量时才相似于对角矩阵.

(3) 正确. 由 $R(\mathbf{A}) = 3$ 可知 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系仅有 1 个解向量, 即 $\lambda = 0$ 仅有 1 个线性无关的特征向量, 从而 \mathbf{A} 不存在 4 个线性无关的特征向量, \mathbf{A} 不能对角化.

九、(9 分)在线性空间 $\mathbf{P}[x]_3$ 中, 设基(I): $1, x, x^2, x^3$; 基(II): $1, 1+x, 1+x+x^2$,

$$1 + x + x^2 + x^3.$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵;

(2) 已知 $g(x)$ 在 (I) 下的坐标为 $(1, 0, -2, 5)^T$, $f(x)$ 在基 (II) 下的坐标为 $(7, 0, 8, -2)^T$, 求 $f(x) + g(x)$ 分别在基 (I) 和基 (II) 下的坐标.

解 (1) 依题意, 直接可得

$$(1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故从基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 依题设条件, 设 $\mathbf{a} = (1, 0, -2, 5)^T$, $\mathbf{b} = (7, 0, 8, -2)^T$, 则有

$$f(x) = (1, x, x^2, x^3)\mathbf{a}, \quad g(x) = (1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3)\mathbf{b},$$

从而

$$f(x) + g(x) = (1, x, x^2, x^3)\mathbf{a} + (1, x, x^2, x^3)\mathbf{Kb} = (1, x, x^2, x^3)(\mathbf{a} + \mathbf{Kb}),$$

即 $f(x) + g(x)$ 在基 (I) 下的坐标为:

$$\mathbf{a} + \mathbf{Kb} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

又

$$f(x) + g(x) = (1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3)(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

即 $f(x) + g(x)$ 在基 (II) 下的坐标为:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

在基 (I) 下的坐标为 $(14, 6, 4, 3)^T$, 在基 (II) 下的坐标为 $(8, 2, 1, 3)^T$.