武汉大学数学与统计学院

2021-2022 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷

考试时间：2022 年 6 月 8 日 14:30-16:30

一、（9 分）已知$|\vec{a}|=\sqrt{13},|\vec{b}|=\sqrt{19},|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{24}$，计算$\vec{a}\cdot\vec{b}$以及$|\vec{a}-\vec{b}|$.

二、（9 分）设函数$u=\ln(x^2+y^2)$，计算：**1)** $\mathrm{d}u$； **2)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

三、（9 分）求曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=3,\\2x-y+z=1\end{cases}$ 在点$(1,1,0)$ 处的**切线方程**与**法平面方程**.

四、（8 分）求过直线$L:\begin{cases}2x+y-z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$且与平面$\pi: x+y-z-3=0$垂直的**平面方程**；并给出直线$L$在平面$\pi$上的**投影直线的方程**.

五、（8 分）设 $f(x)$ 为连续可微函数，且 $f(0)=0$，并令 $F(t)=\iiint_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$.

1) 用球坐标系把三重积分$\iiint_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$写成三次积分；

2) 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

六、（8 分）计算 $I=\iint_S\left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}S$，其中 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

七、（9 分）计算$I=\iint_{\Sigma}\left(2x+3z^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(x^3z^2+yz\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为曲面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$在$z=0$上方部分的下侧.

八、（8 分）设 L 为沿弧线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 从点 $A(-2,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的有向曲线段，计算 $I=\int_L 2y\,\mathrm{d}x-(x^2+1)\mathrm{d}y$.

九、（9 分）已知函数$f(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$.

1) 求函数f在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的梯度$\operatorname{grad} f\big|_{M_0}$；

2) 在第一卦限内找一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，使得曲面$f(x,y,z)=36$在点M_0处的切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求出切点M_0的坐标.

十、（8 分）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和.

十一、（10 分）将$f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$展开为$x-1$的幂级数，并指出收敛半径和收敛域.

十二（5 分）、设函数$f(x)$以2π为周期，且其在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}1+x, x\in[0,\pi)\\0, \quad x\in[-\pi,0)\end{cases}$. 若

$f(x)$的傅立叶级数展开式为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$，计算$a_n$以及$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.