2003～2004 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题（每小题 2 分，共 8 分）：

（1）解：由高斯公式知，所求积分：

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(1-\sin y)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\mathrm{d}v-\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sin y\mathrm{d}v=\frac{4}{3}\pi$$

（由 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sin y\mathrm{d}v=0$）；(2) $\frac{2}{9}\{1,2,-2\}$ 或 $\frac{2}{9}i+\frac{4}{9}j-\frac{4}{9}k$；$\frac{2}{9}$；(3) 1；(4) $z^2-2y^2=\frac{x^2}{h^2}$；

二、选择题（每小题 2 分，共 8 分）：（1）A；（2）B；（3）A；（4）C;

三、(每小题 7 分，共 28 分)

解：（1）设 $\begin{cases}x+y=v\\ y=u\end{cases}$ 即　则 D 变成 $D'=\left\{(u,v)\mid \begin{array}{l}0\le v\le 1\\ 0\le u\le v\end{array}\right\}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-1$，

$$I=\iint\limits_{D'}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=\int_0^1 v(e-1)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(e-1)；$$

（2）$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t f(r)r^2dr$，故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(r)r^2dr}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2f(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=f'(0)=1$$

（3）在 $z+xy=f(xz,yz)$ 两边同时对 x 求导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}+y=f_1'(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+f_2'y\frac{\partial z}{\partial x}$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'z-y}{1-f_1'x-f_2'y}$

（4）由题设方程的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，解出 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1$，故齐次微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$。其中 C_1,C_2 为任意常数。

设题给方程的一个特解为 $y^*=Axe^{-2x}$，得

$(y^*)'=\mathrm{A}\mathrm{e}^{-2x}-2Axe^{-2x}$，$(y^*)''=-2\mathrm{A}\mathrm{e}^{-2x}-(2Ae^{-2x}-4Axe^{-2x})$

代入题给方程得 $-4Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}+3Ae^{-2x}-6Axe^{-2x}+2Axe^{-2x}=4e^{-2x}$，

即 $-Ae^{-2x}=4e^{-2x}$，得 $A=-4$，即特解为 $y^*=-4xe^{-2x}$。

由此得题给方程的通解为 $y=-4xe^{-2x}+C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$。

四、(10 分)

解：当 $x^2+y^2\ne 0$ 时，显然 $f(x,y)$ 连续。

在点 $(0,0)$ 附近，因为 $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续。

在点 $(0,0)$ 处，按定义，

有 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处有一阶偏导数。

但因 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\Delta f-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{1}{2}$，

故函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微分。

五、(10 分)

解：由题设知需有：$\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}[(\sin x-\varphi(x))\dfrac{y}{x}]$，

故得方程： $\varphi'(x)+\dfrac{1}{x}\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

其通解为：$\varphi(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\dfrac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$

由 $\varphi(\pi)=1$，知 $C=\pi-1$，故 $\varphi(x)=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$

所以有：$I=\int_A^B\left(\sin x-\varphi(x)\right)\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$

$$=\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}(\sin x-\frac{\pi-1-\cos x}{x})\frac{y}{x}dx+\frac{\pi-1-\cos x}{x}dy=\int_0^{\pi}dy=\pi$$

六、(10 分)

解：若设 D 为 xoy 平面上的圆域：$x^2+y^2\le 25$，那么曲面 Σ 的方程为 $z=5-y,(x,y)\in D$

Σ 曲面上的面积微元 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由：$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

我们有：$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}s=\iint\limits_D(x+y+5-y)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=125\sqrt{2}\pi$

七、(10 分)

解：法（1）化为无条件极值问题，设 $P(x,y,z)$ 为交线上的一点，则 P 到原点的距离的平方为：$x^2+y^2+z^2=1-y^2=f(y),(\because x^2+z^2=1-2y^2)$

将 $x=1-2y$ 代入 $x^2+2y^2+z^2=1$ 得：$(y-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{z^2}{6}=\dfrac{1}{9}$

显然 $(x-\dfrac{1}{3})^2\le\dfrac{1}{9}$ 即 $0\le y\le\dfrac{2}{3}$ 因此 $y_{\max}=\dfrac{4}{9}$ 此时

$x=-\dfrac{1}{3}$ $y=\dfrac{2}{3}$ $z=0$ $d^2=x^2+y^2+z^2\ge d^2{}_{\min}=\dfrac{5}{9}$

故交线上距离原点最近的点为：$P(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},0)$

法（2）由题设有 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，即 $d^2=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

令 $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+2y-1)+\lambda_2(x^2+2y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases}F_x=2x+\lambda_1+2x\lambda_2=0\\F_y=2y+2\lambda_1+4y\lambda_2=0\\F_z=2z+2\lambda_2 z=0\\F_{\lambda_1}=x+2y-1=0\\F_{\lambda_2}=x^2+2y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=0\\\lambda_1=0\\\lambda_2=-1\end{cases}\text{与}\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=0\\\lambda_1=0\\\lambda_2=-1\end{cases}$$

故交线上距离原点最近的点为：$P(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$

八、（6 分）

解：记 $D=[a,b]\times[a,b]$，$0\le\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\mathrm{a}}^b [f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_D f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D [f(y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

$$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2$$，故不等式成立，

显然由上述过程知等号成立的充要条件是 $\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 由 $[f(x)-f(y)]^2$ 连续，所以 $\iint\limits_D [f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 由的充要条件是 $f(x)-f(y)=0,\forall x,y\in[a,b]$ 即 $f(x)$ 为常数。

九、（10 分）**方法 1**　过点 M 且垂直于已知直线的平面方程为

$$3(x-2)+2(x-1)-(z-3)=0$$，即 $3x+2y-z-5=0$，

设它与已知直线的交点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则：

$$x_1=-1+3t_1,\quad y_1=1+2t_1,\quad z_1=-t_1,$$

将之代入上述平面方程，得 $t_1=\frac{3}{7}$，从而 $M_1\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$，

因点 M 与 M_1 都在所求直线上，所以不妨取所求直线的方向向量为 $S=\boldsymbol{M_1M}=\frac{6}{7}\{2,-1,4\}$，故所求直线方程为：$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$。

方法 2　设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{S}=\{m,n,p\}$，已知直线过点 $N(-1,1,0)$，其方向为 $\boldsymbol{S}=\{3,2,-1\}$，则由所求直线与已知直线垂直知：$\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}=3m+2n-p=0$，又由这两条直线相交知，三向量 $\boldsymbol{NM},\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}_1$ 共面。从而有

$$(\boldsymbol{NM}\times\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}3&0&3\\3&2&-1\\m&n&p\end{vmatrix}=0$$，即 $m-2n-p=0$，

解上述两式，得 $m:n:p=2:(-1):4$，故所求直线方程为：$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$。

方法 3　已知直线过点 $N(-1,1,0)$　$\overrightarrow{NM}=\{3,0,3\}$，过点 M 与已知直线 l 的平面 π 方程法向量为 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&-1\\3&0&3\end{vmatrix}$ 或 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=\{2,-4,2\}$，不妨取 $\vec{n}=\{1,-2,1\}$

所以平面 π 方程为：$x-2y-z+3=0$　　　（1）

过点 M 与已知直线 l 垂直的平面方程为：$3x+2y-z-5=0$　　　（2）

由（1）、（2）得所求的直线方程为：$\begin{cases}x-2y-z+3=0\\3x+2y-z-5=0\end{cases}$