

武汉大学 2010-2011 学年第二学期

《高等数学 B2》考试试卷 (A 卷)

一、 计算题：(每题 7 分，共 63 分)

1. 设一平面过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 求此平面的方程.
2. 设 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=2$ 处取得极值 $g(2)=1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=2, y=1}$.
3. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(y)dy$.
5. 设 $f(u)$ 具有连续导数, 求 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dxdydz$.
6. 计算曲面积分 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的表面外侧.
7. 将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数.
8. 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.
9. 求方程 $(1+e^y)dx + e^y(1-\frac{x}{y})dy = 0$ 的通解。

二、(8 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 的收敛性, 若收敛, 请指出是条件收敛还是绝对收敛。

三、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内从 (a, b) 到 (c, d) 的有向分段光滑曲线. 记 $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$.

(1) 证明: 曲线积分 I 与路径 L 无关。 (2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值。

四、(9 分) 求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ ($|x| < 1$) 的和函数 $f(x)$ 及其极值。

五、(10 分) 在变力 $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 问当 x_0, y_0, z_0 取何值时, 力 \vec{F} 所作的功最大, 并求出最大值。

武汉大学 2010-2011 学年第二学期

《高等数学 B2》考试 (A 卷) 标准答案

一、 计算题：(每题 7 分，共 63 分)

1. 平面方程为 $x + y - \frac{3}{2}z = 0$

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=2, y=1} = 2f''_{11}(2,1) + f''_{12}(2,1) + f'_1(2,1)$

3. 先求出使得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 的点为 $(9, 3, 3)$ 和 $(-9, -3, -3)$ ，然后验证 $(9, 3)$ 是 $z(x, y)$ 的极小值点，极小值为 3， $(-9, -3)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点，极大值为 -3。

4. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}A^2$

5. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dxdydz = \begin{cases} f'(0), & \text{若 } f(0) = 0 \\ \infty, & \text{若 } f(0) \neq 0 \end{cases}$

6. 6π

7. $f(x) \sim \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-1, 1].$

8. $\frac{\pi}{2} \ln 2$ (其中利用到 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是奇函数)

9. 方程是全微分方程，所以 $u(x, y) = x + ye^y - 1 = C$ 为通解。

二、 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \right| > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, 以及 Leibniz 法则判断原级数收敛，所以为条件收敛

三、 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

四、 收敛半径为 1, $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) (|x| < 1)$, 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=1$.

五、 做功为 $W = x_0 y_0 z_0$, 利用 Lagrange 乘子法可得 $W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$