24 春线性代数期末复习

June 2024

1 简介

众所周知，线性代数的知识包容万象，什么都事线性代数。由于时间关系，这里只为大家复习线性代数中最重要，考试也是最喜欢考的内容，希望对大家有所帮助。

2 基础知识

1. 矩阵乘法满足以下性质:

(1) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

(2) 分配律 $A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA$;

(3) 线性 $A(tB) = t(AB) = (tA)B$;

(4) 矩阵的伴随 $(AB)^* = B^*A^*$

其中 $t \in \mathbb{C}$ 和矩阵 A, B, C 是任意的, 前提是矩阵的行数和列数使运算有意义.

注：(1) 矩阵乘法不满足交换律!!

(2) 若 $AB = I$，则 $BA = I$，即 A，B 互为逆元（由左逆就可以推断出是逆元，这是矩阵论里面一个容易忽略的小知识），同理由 $BA = I$ 可推出 $AB = I$.

(3) 注意 A^* 的应用

(4) 行列式的计算

2. 基和维数

定义

设 S 为 F-向量空间 V 的子集.

(1) 如果 V 中每一个元素可以由 S 中有限多个元素线性表示, 则称 S 生成 V, 或称 S 为 V 的一族生成元, 或简称 S 为生成系.

(2) V 中的元素称为是线性相关的，若其可以被非零的 F-线性组合表示为 0, 否则称这些元素为线性无关的.

(3) 若 S 是线性无关的生成系, 则称 S 是 V 的一组基.

注：(1) 上述定义适合无穷维的向量空间，不过当维数有限时相应定义是熟知的。

(2) 线性空间的维数是确定的，亦即若 V 的维数为 n，则其任何一组基的元素个数为 n，由此可知任何 n+1 个元素是线性相关的。

(3)(矩阵的秩）设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 则矩阵 A 的秩定义为其行向量张成的线性空间的维数，也定义为其列向量张成的线性空间的维数（也等于所谓的极大线性无关组元素的个数），记作 rk(A)

3. 线性映射

定义

设 V 和 W 是 F-向量空间, 若映射 $\mathrm{T}: V \rightarrow W$ 满足:

$T(v1 + v2) = T(v1) + T(v2), \forall v_1, v_2 \in V,$

$T(tv) = tT(v), \forall t \in F, v \in V,$

则称 T 为线性映射, 在一些场合也称线性变换或线性算子.

4. 分块矩阵运算

这里需要注意的是分块矩阵的乘法可以直接当作元素的乘法来做，不过需要留意看作元素后乘法的合理性：即设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,$B \in M_{s\times t}(\mathbb{R})$, 则 AB 有定义必须满足 $n = s$。

例子：

将矩阵 $A \in M_{m\times n}(F)$ 按列 (或行) 分块 $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$

则对任意的 $Q \in M_{r\times m}(F)$, 有 $QA = \begin{bmatrix} Qv_1 & Qv_2 & \cdots & Qv_n \end{bmatrix}$，同理可得 AP 的表达式。

5. 对角化

这个问题的出发点是考虑 $Aa = ka$ 关于 $a \in \mathbb{C}^n$ 什么时候有非零的向量解，进而转化为 $kI - A$ 在什么时候不可逆，亦即求 $det(kI - A)$ 在什么时候为 0. 问题的形式也是一般给一个三阶或四阶的矩阵然后求其特征值和对应的特征向量以及变换矩阵。(具体问题具体分析)

6. 二次型和正交矩阵

这部分的重点是对一个二次型（对应于一个对称矩阵）进行标准化/正交对角化，这和上面“对角化”的内容有十分深刻的联系，具体而言，我们应对此类题目的方法为：通过求特征多项式 det(kI-A) 找出 A 的特征值 k → 找出特征值 k 对应的特征向量 → 将特征向量进行单位化和正交化，这些特征向量构成的矩阵就是变换的正交矩阵。

注：

1.**(定理)** 任何一个实对称矩阵的特征值都为实数，并且可以进行正交对角化。(证明对维数 n 归纳即可)

2. 如果该矩阵特征多项式有重根，那么对特征向量的选取要谨慎一些：同一个特征值取出来的特征向量还要求他们正交（这对于不同特征值的特征向量是自然成立的)，实在不行就取出同一个特征值的一组线性无关的特征向量对他们进行 Schmidt 正交化:

假设我们有一组线性无关的向量 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，我们可以使用 Schmidt 正交化方法得到一组正交基 $u_1, u_2, \ldots, u_n$：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1, \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1, \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2, \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.
\end{aligned}
$$

最后对 u_i 进行单位化即可。

3 习题选讲

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\max(i,j)$, 求行列式 $\det A$.

解:

对于 $i=2,3,\cdots,n$, 依次将第 i 行的-1 倍加到第 $i-1$ 行，得

$$
\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \\
= (-1)^{n-1} n.
\end{aligned}
$$

得证

2.计算$detA$, 其中 A=$\begin{pmatrix} 1+x & 2 & 3\cdots & n \\ 1 & 2+x & 3\cdots & n \\ & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3\cdots & n+x \end{pmatrix}$

解：注意公式$|\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - BA|$ 其中 $A \in M_{m\times n}(R)$,$B \in M_{n\times m}(R)$

$$故 \det A = \left|xI + \alpha^T\beta\right| = x^{n-1}\left(x + \beta\alpha^T\right)$$

$$其中\alpha = (1,1,\cdots,1)\,\beta = (1,2,\cdots,n)$$
$$故\det A = x^{n-1}(x + \tfrac{n(n+1)}{2})$$

3. 计算 A=$\begin{pmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{pmatrix}$的行列式.

技巧同上一题。

4. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，问当 t_1,t_2 满足什么条件时，$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$,$\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3$,$\cdots$,$\beta_{s-1} = t_1\alpha_{s-1} + t_2\alpha_s$ 线性无关?

解: 显然，如果 $t_1 = 0$ 且 $t_2 = 0$, 那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 都是零向量，当然线性相关. 下设 $t_1 \neq 0$ 或 $t_2 \neq 0$. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 之间有如下关系式 $\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}\right) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)T$, 其中，$T$ 为如下 $s\times(s-1)$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & t_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & t_2 \end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 T 的前 s-1 行和后 s-1 行构成的子式分别为 $\begin{vmatrix} t_1 & 0 \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 \ddots & \\ & \ddots \ddots & 0 \\ 0 & \cdots t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^{s-1}$, $\begin{vmatrix} t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & t_2 \end{vmatrix} = t_2^{s-1}$, 所以，当 $t_1 \neq 0$ 或 $t_2 \neq 0$ 时，$\operatorname{rank} T = s-1$.

设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1} = 0$, 则

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\, Tx = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1})\, x = 0$, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{s-1})^{\mathrm{T}}$. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，所以 $Tx = 0$, 从而 $x = 0$. 于是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ 线性无关。得证

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. 问 a, b 取何值时 A 与 B 相似？并求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$

解: 由于 A 与 B 相似，它们的特征多项式相同，所以 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b \end{vmatrix},$$

也即 $(\lambda+1)\left(\lambda^2 - (3+a)\lambda + 3a - 8\right) = (\lambda+1)^2(\lambda - b)$. 比较两边的系数，得 $a = 1, b = 5$.

进一步，容易求得 A 的特征值-1(二重),5 对应的特征向量依次为

$\xi_1 = (-1\ ,1\ ,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (-1\ ,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3 = (\ 1\ ,1\ ,1)^{\mathrm{T}}$.

从而得可逆矩阵$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 容易验证有 $P^-1AP=B$, 故 P 即为所求

6. 已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P, 使 $P^{\mathrm{T}}AP$ 成为对角矩阵。

[解] 易知 A 的特征值为 $\lambda_1=1($ 三重$),\lambda_2=-3$.

对于 $\lambda_1=1$, 可求得 A 的相应的 3 个线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)$

利用 Schmidt 正交化方法，得

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\,1,1,0,0\,)\,,\quad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\,1,\,-1,2,0\,)\,,\quad \xi_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(\,-1,1,1,3\,)\,.$$

对于 $\lambda_2=-3$, 可求得 A 的相应的一个线性无关的特征向量为 $\alpha_4=(1,-1,-1,1)$. 把它单位化，得 $\xi_4=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$.

于是，有 $P^{\mathrm{T}}AP$ =diag(1,1,1,-3), 其中正交矩阵 P 为

$$P=(\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

7. 设 A 为二阶方阵，且存在正整数 $k\geqslant 2$, 使得 $A^k=O$, 证明 $A^2=O$.

证: 因为 $A^k=O$, 所以 $|A|=0$, 故 $\operatorname{rank}A\leqslant 1$.

若 $\operatorname{rank}A=0$, 则 $A=O$, 结论显然成立.

若 $\operatorname{rank}A=1$, 则 A 的列向量成比例, 不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & ka\\ b & kb\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=$

$\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, $\beta\neq 0$, $A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(1,k)=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot$ 记 $c=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a+kb$, $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=c^{k-1}\boldsymbol{A}$, $c=0$, $A^2=(\alpha\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\alpha\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\alpha(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=cA=\boldsymbol{O}$.

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\5 & b & 3\\1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$, 行列式 $|A|=-1$, 又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0, 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 a,b,c 及 λ_0 的值.

解：因为 $AA^*=|A|E=-E, A^*\alpha=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 两边左乘 A, 得 $\lambda_0A\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$. 即

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a & -1 & c\\5 & b & 3\\1-c & 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

由此得

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1.\\\lambda_0(-5-b+3)=1.\\\lambda_0(-1+c-a)=-1.\end{cases}$$

由上式解得 $\lambda_0=1$. 代人得 $a=c, b=-3$. 由 $|A|=-1, a=c$ 和 $b=-3$, 有

$$\begin{vmatrix}a & -1 & c\\5 & b & 3\\1-c & 0 & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & -1 & a\\5 & -3 & 3\\1-a & 0 & -a\end{vmatrix}=a-3=-1,$$

故 $a=c=2$. 综合上述，得 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$.

9. 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 D, 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=D$;

(3) 求行列式 $\left|\left(\frac{2}{3}B^2\right)^{-1}+\frac{4}{9}B^*+B\right|$, 其中 B 是 $A-\frac{3}{2}E$ 的相似矩阵 ,B^* 为 B 的伴随矩阵.

解:(1) 因为 $A\alpha_1=\mathbf{0}=0\alpha_1,A\alpha_2=\mathbf{0}=0\alpha_2$, 所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 A 的二重特征值，α_1,α_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量；又 A 的各行元素之和均为 3, 所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

即 $\lambda_3=3$ 是 A 的一个特征值 ,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量

总之, A 的特征值为 0, 0,3, 属于特征值 0 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2(k_1,k_2$ 不全为零), 属于特征值 3 的所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3(k_3\neq 0)$.

(2) 先将 α_1,α_2 正交化. 令 $\xi_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,

$$\xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\frac{1}{2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

再将 ξ_1,ξ_2,α_3 单位化，得

$$\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则 Q 是正交矩阵，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=D$.

(3) 因为 B 相似于 $A-\frac{3}{2}E$, 而 $A-\frac{3}{2}E$ 相似于 $D-\frac{3}{2}E$, 所以 B 相似于 $D-\frac{3}{2}E$. 故 $|B|=\left|D-\frac{3}{2}E\right|=\left(-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{2}=\frac{27}{8}$. 故 $B^*=|B|B^{-1}=\frac{27}{8}B^{-1}$. 于是有

$$\left(\frac{2}{3}B^2\right)^{-1}+\frac{4}{9}B^*+B=B\left(\frac{3}{2}(B^{-1})^3+\frac{3}{2}(B^{-1})^2+E\right)=B\varphi(B^{-1}),$$

其中 $\varphi(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+1$. 因为 B^{-1} 的特征值为 $-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$, 所以 $\varphi(B^{-1})$ 的特征值为

$$\varphi\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{11}{9}(\text{二重}),$$

$$\varphi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{19}{9}.$$

故所求行列式的值为

$$d=|B||\varphi(B^{-1})|=\frac{27}{8}\times\frac{11}{9}\times\frac{11}{9}\times\frac{19}{9}=\frac{2299}{216}.$$

Good Luck!