武汉大学 2022-2023 学年第一学期期末考试
线性代数 A 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号_____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_2+\cdots+C_n}{=}\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^n a_i & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^n a_i & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{C_2-a_2C_1\\ \vdots \\ C_n-a_nC_1}}{=}(x+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^n a_i)x^{n-1}$$

二、（10 分）**设** $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，**计算** $\boldsymbol{A}^{2022}$

解：记$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha^T\alpha=3$

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}=-\alpha\alpha^T$$

$$A^{2022}=\left(-\alpha\alpha^T\right)^{2022}=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)^{2021}\alpha^T=-3^{2021}A$$

三、（12 分）

已知$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$， $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=6, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$

证明： （1）$\boldsymbol{B}^k=6^{k-1}\boldsymbol{B}$ (2)$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$不可逆 (3)$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$都可逆

证明： （1）$\boldsymbol{B}^k=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right)^k=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right)^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T=6^{k-1}\boldsymbol{B}$

(2)$\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\right)^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+4\boldsymbol{B}$

$\left(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\right)=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}+4\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{I}=0$

所以$|\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}|=0$**或**$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$**,从而**$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$**或**$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$**不可逆。**

(3)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{I}$

所以$|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}|\neq 0, |\boldsymbol{A}|\neq 0$

即$\boldsymbol{A}$**及**$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$**都可逆**

四、（10 分）**求**$\boldsymbol{X}$**,使得**$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$**，其中**$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$**，**$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$**.**

解：若 $\boldsymbol{A}$ **可逆，则** $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$**.**

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}，\text{所以}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

五、（10 分）**设**$\boldsymbol{A}$**为**$\boldsymbol{n}$**阶方阵（**$\boldsymbol{n}\geq 2$**),** $\boldsymbol{A}^*$**是**$\boldsymbol{A}$**的伴随矩阵，证明**

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n},\\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}-\mathbf{1},\\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\leq\boldsymbol{n}-\mathbf{2}.\end{cases}$$

证明：当$R(A)=n, |A|\neq 0, AA^*=|A|E \Rightarrow |A^*|\neq 0 \Rightarrow R(A^*)=n$

当$R(A)=n-1$, A至少有一个$n-1$阶子式不为0，从而$A^*\neq 0$，有$R(A^*)\geq 1$.

另一方面由于$A^*A=|A|E=0$，得到$R(A^*)+R(A)\leq n$，所以$R(A^*)=1$.

当$R(A)\leq n-2$, A所有$n-1$阶子式都为0，从而$A^*=0$，有$R(A^*)=0$.

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+ax_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases},$$

问 a, b 取何值时，此方程组有唯一解、无解或无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix},$$

当$a\neq -4$, $R(A)=R(\overline{A})=3$,方程组有唯一解。

当$a=-4$, $b\neq 1$, $R(A)=2<R(\overline{A})=3$,方程组无解。

当$a=-4$, $b=1$, $R(A)=R(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多解，此时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的解为$x=\begin{pmatrix} 3 \\ -2-2c \\ c \end{pmatrix}$, $c\in R$.

七、（14 分） 求R^4的子空间$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$的基和维数，

并将W的基扩充为R^4 的基。

解：R^4的子空间$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$的基

即为线性方程组$x_1+x_2-x_3-x_4=0$的线性无关解，维数为线性无关解的个数。

$$W\text{的基}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\text{将}W\text{的基扩充为}R^4\text{ 的基}:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

八、（12 分）

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)^T$，$a_1\neq 0,A=\alpha\alpha^T$,(1) 证明 0是$A$的$n-1$重特征值；

（2）求A的非0特征值和非0特征值对应的特征向量。

(1) 证明：注意到A是n阶实对称矩阵，故A与对角阵$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$相似。

由于$R(A)=1$,即知Λ的对角元只有一个非0，即0是A的$n-1$重特征值。

(2)根据特征值的性质，n个特征值之和为$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

所以另一个非零特征值为$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

当$\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，对应的特征向量为$k\alpha,k\neq 0$。

九、（12 分）**已知二次型**

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

（1）写出二次型 f 的矩阵表达式；

（2）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；

解：(1) 二次型的矩阵形式为$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-3&0\\-2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$(2)\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4)$$

A的三个特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-3,\lambda_3=-4$。

由 $(2E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$

由 $(-3E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_2=-3$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

由 $(-4E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。

单位化，$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -3 & \\ & & -4\end{pmatrix}$。

经过正交变换 $x=Qy$,

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2$