武汉大学 2012-2013 学年第二学期期末考试

高等数学 B2（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

考生学号												
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

注意事项

1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（9 分）已知三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，其中 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$，又 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$，求 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

二、（9 分）求 A,B，使平面 $\pi: Ax+By+6z-7=0$ 与直线 $l:\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$ 垂直。

三、（9 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-y^2=2[z-\varphi(x+y-z)]$ 所确定的函数，

其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq-1$，求（1）$\mathrm{d}z$；（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$。

四、（9 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.。

五、（9 分）求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z\,dv$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=2$ 与三个坐标平面围成的区域。

六、（9 分）已知 $\int_C \varphi(x)y\,\mathrm{d}y+xy^2[\varphi(x)+1]\,\mathrm{d}x$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，并当 C 是起点在 $(0,0)$，终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时，该曲线积分值为 $1/2$，试求函数 $\varphi(x)$.

七、（9 分）计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma (xy+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分。

八、（7 分）试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}$的收敛域及和函数$S(x)$.

九、（9 分）求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$上平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面方程。

十、（7 分）设函数 $u=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4+z^3-3z$，求向量场$\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{grad}\,u$穿过曲面$S$流向外侧的通量，

其中S是曲面$z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$的上侧。

十一、（8 分）试在曲面$S:2x^2+y^2+z^2=1$上求一点，使得函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 A(1,1,1) 到点 B(2,0,1)的方向导数具有最大值。

十二、（6 分）设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？ 并说明理由。

武汉大学数学与统计学院

2012-2013 学年二学期《高等数学 B2》期末试卷(A 卷)参考解答

一、(9 分)解：首先$|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin(\widehat{\vec a,\vec b})=\dfrac{\sqrt3}{2}$，而$\vec a\perp\vec c,\vec b\perp\vec c$可知$\vec c\parallel\vec a\times\vec b$，所以$\vec c$与$\vec a\times\vec b$的夹角为 0 或$\pi$，所以$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=|\vec a\times\vec b||\vec c|\cos(\widehat{\vec a\times\vec b,\vec c})=\dfrac{\sqrt3}{2}\times3\times(\pm1)=\pm\dfrac{3\sqrt3}{2}$

二、(9 分)解 π 法向量为$\vec n=\{A,B,6\}$，l方向向量为$\vec S=\{2,-4,3\}$，l与π 垂直，$\vec n//\vec S$，故$\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{-4}=\dfrac{6}{3}$，解得：$A=4,\qquad B=-8$

三、(9 分)解 (1) $xdx-ydy=dz-\varphi'(x+y-z)\cdot(dx+dy-dz)$，$\quad dz=\dfrac{(x+\varphi')dx+(\varphi'-y)dy}{\varphi'+1}$,

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+y}{1+\varphi'(x+y-z)}$，$\quad u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\varphi''(1+\frac{\partial z}{\partial x})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1+\frac{x+\varphi'}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1+x+2\varphi')}{(1+\varphi')^3}$$

四、(9 分)解：因为$\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2,x\ge y\\ y^2,x\le y\end{cases},(x,y)\in D$，于是用$y=x$将区域分成两块：

$$I=\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2}e^{y^2}dxdy=2\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy=2\int_0^1dx\int_0^xe^{x^2}dy=2\int_0^1xe^{x^2}dx=e-1$$

五、(9 分) $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^2dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}zdz=\dfrac{2}{3}$

六、(9 分)解 由$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得$\varphi'(x)y=2xy[\varphi(x)+1]$，$\quad\ln[\varphi(x)+1]=x^2+C_1$，

即$\varphi(x)=e^{x^2+C_1}-1=Ce^{x^2}-1$，所以有 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\dfrac12$

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\int_0^1(Ce-1)ydy=\dfrac12(Ce-1)$. 故有$(Ce-1)=1$，即$C=\dfrac{2}{e}$

所以有 $\varphi(x)=2e^{x^2-1}-1$

七、(9 分)解： $dS=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt2dxdy$，因为积分区域关于$xoz$平面对称，$xy$关于$y$是奇函数，所以

$$I=\iint_{\Sigma}(xy+z)dS=\iint_{\Sigma}zdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt2dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=2\sqrt2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac83\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt2}{9}$$

八、(7 分)解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot4^n}{(n+1)\cdot4^{n+1}}=\dfrac14$，$\therefore$收敛半径为$R=4$，当$x=-4$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac4n$发散;

当 $x=4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4}{n}$ 收敛，收敛域为 $(-4,4]$，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$

$$=x\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot 4^n}]'dt=\frac{x}{4}\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{t}{4})^{n-1}]dt=\frac{x}{4}\int_0^x\frac{1}{1+\frac{t}{4}}dt=x\ln(1+\frac{x}{4}),\ x\in(-4,4]$$

九、（9 分）解：设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$，由已知条件得：$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}:=\lambda$，得到

$x_0=\frac{1}{2}\lambda, y_0=\lambda, z_0=\lambda,$ 代入曲面方程解得 $\lambda=\pm 2,\quad x_0=\pm 1, y_0=\pm 2, z_0=\pm 2.$ 切平面方程为 $(x\pm 1)+4(y\pm 2)+6(z\pm 2)=0$，即 $x+4y+6z=\pm 21$

十、（7 分）解：$\iint\limits_S 2x^3\,dy\,dz+2y^3\,dz\,dx+3(z^2-1)\,dx\,dy,\ S: z=1-x^2-y^2\quad (z\ge 0)$ 不封闭

补充 S_1：$z=0\ \ (x^2+y^2\le 1)$ 下侧，则 $S+S_1$ 封闭，取外侧.

$$I=\iint\limits_S 2x^3\,dy\,dz+2y^3\,dz\,dx+3(z^2-1)\,dx\,dy=(\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1})[2x^3\,dy\,dz+2y^3\,dz\,dx+3(z^2-1)\,dx\,dy]$$

由高斯公式，得 $\oiint\limits_{S+S_1}2x^3\,dy\,dz+2y^3\,dz\,dx+3(z^2-1)\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\,dx\,dy\,dz$

$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\,dz=2\pi$ 而 $\iint\limits_{S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)dxdy=3\pi$

因此 $I=2\pi-3\pi=-\pi$

十一、（8 分）解：由曲面 S 的方程为 $2x^2+y^2+z^2=1$，给定的方向 $\vec{l}^{\,0}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

方向导数函数 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y)$

设 $L=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$，令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-\sqrt{2}+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2\lambda z=0\\ 2x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{4\lambda}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\\ z=0\end{cases}$

$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{3}$

$\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{3}$，所以，所求的 S 上的点为 $(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$

十二、（6 分）解：因为 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ge 0.$ 若 $a=0,$ 由莱布尼茨法则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与假设矛盾，所以 $a>0.$ 因此由根值判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\frac{1}{a+1}<1,$ 所以原级数收敛。