

## 2002~2003 学年第二学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题：1、 $\frac{128}{3}\pi$ ；2、 $f(0,0)$ ；3、1；

二、选择题：1、D；2、B；3、A；

三、解：(1)  $I = \int_0^1 x dx \int_0^x dy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ；

(2)  $I = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{364}$

四、解：设  $F(x, y, z) = 4x^2 + 4z^2 - 17y^2 + 2y - 1$  故有  $F_x = 8x, F_y = -34y + 2, F_z = 8z$   
 $M_0$  点处的切平面的法向量为  $\vec{n}_2 = \{16, -32, 0\} = 16\{1, -2, 0\}$  故旋转曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $M_0(2, 1, 0)$  处的切平面方程为  $x - 2y = 0$

五、解：由  $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  消去  $z$ ，得投影柱面  $x^2 + y^2 = a^2$ ，因此它在  $xoy$  面上的

投影域为  $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ ，于是区域  $\Omega$  的体积：

$$V = \iint_D [2a - \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a}] dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a [2a - r - \frac{r^2}{a}] r dr = \frac{5}{6} \pi a^3$$

六、(1) 令  $P = x^2 y z^2, Q = \frac{1}{z} \arctan \frac{y}{z} - x y^2 z^2, R = \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{z} + z(1 + x y z)$ ，

故有  $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x y z^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{z})^2} - 2x y z^2, \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + (\frac{y}{z})^2} + (1 + 2x y z)$ ，

故有  $(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) = 1 + 2x y z$

所以  $\text{div} \vec{F} \big|_{(1,1,1)} = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) \big|_{(1,1,1)} = (1 + 2x y z) \big|_{(1,1,1)} = 3$

(2) 记  $\Omega$  为  $\Sigma$  所围区域，则有高斯公式得：

$$I = \iiint_{\Omega} (1 + 2x y z) dxdydz = \iiint_{\Omega} dxdydz + 2 \iiint_{\Omega} x y z dxdydz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{7}{3} a^3 (2 - \sqrt{2}) \pi$$

(由于  $\Omega$  关于  $xoz$  面对称， $xyz$  是域  $\Omega$  上的奇函数，故有  $\iiint_{\Omega} x y z dxdydz = 0$ )

七、解：由题设知， $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{\partial}{\partial y} [(x - \varphi(x)) \frac{y}{x}]$ ，故曲线积分

$I = \int_A^B (x - \varphi(x)) \frac{y}{x} dx + \varphi(x) dy$  与路径无关。

所以  $I = \int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} [x - (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x})] \frac{y}{x} dx + \frac{1}{2} (x - \frac{1}{x}) dy = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\pi - \frac{1}{\pi}) dy = \frac{1}{2} (\pi^2 - 1)$

八、解：由题设有  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，即  $d^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

令  $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy - z^2 + 1)$

$$\begin{cases} F_x = 2x + \lambda y = 0 \\ F_y = 2y + \lambda x = 0 \\ F_z = 2z - 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = xy - z^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ z = 0, \lambda = \frac{1}{2} \\ xy = z^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, \pm 1), \text{ 而}$$

$f(1, -1, 0) = f(-1, 1, 0) = 2, f(0, 0, \pm 1) = 1$  比较知，此曲面上离原点最近的点为  $(0, 0, \pm 1)$ 。

九、证明：将  $\Omega$  向  $x$  轴投影，得  $-1 \leq x \leq 1$ ，并用垂直于  $x$  轴的平面截  $\Omega$  得

$$D_x: x^2 + z^2 \leq 1 - x^2, \text{ 所以有 } \iiint_{\Omega} f(x) dx dy dz = \int_{-1}^1 f(x) dx \iint_{D_x} dy dz = \int_{-1}^1 f(x) \pi(1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) f(x) dx, \text{ 故命题得证。}$$

十、解：(1) 设  $\pi_1$  为过  $l$  且垂直于  $\pi$  的平面，由直线  $l$  的一般方程为  $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

所以过  $l$  的平面束方程为：  $x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0$ ，即  $x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (\lambda + 1) = 0$  其

法向量为  $\vec{n}_1 = \{1, \lambda - 1, \lambda\}$ ，平面  $\pi$  的法向量为  $\vec{n} = \{1, -1, 2\}$ ，因此为  $\pi_1$  与  $\pi$  垂直知，

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n} = 0$  所以有  $\lambda = -2$ ，于是  $\pi_1$  的方程为  $x - 3y - 2z + 1 = 0$ ，因此直线  $l_0$  的方程为

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 将 } l_0: \begin{cases} x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \text{ 化为参数方程 } \begin{cases} x = 2y \\ y = y \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1) \end{cases} \text{ 设 } P_0(x_0, y_0, z_0) \text{ 是 } l_0 \text{ 上一点，}$$

则有  $\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ z_0 = -\frac{1}{2}(y_0 - 1) \end{cases}$  若  $P(x, y, z)$  是由  $P_0$  旋转到达的另一点，由于  $y$  坐标不变且

$P_0, P$  到  $y$  轴的距离相等，则有  $y = y_0, x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2$  所以  $x^2 + z^2 = (2y_0)^2 +$

$[-\frac{1}{2}(y_0 - 1)]^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2$  即  $4x^2 + 4z^2 - 17y^2 + 2y - 1 = 0$  为所求旋转曲面方程。

一、解：(1) 由复合函数求导法则可得：  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \sin^2 y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x} \cos^2 y$$

$$= f''(u)e^{2x}, \text{ 故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}$$

(2) 由题设知：  $f''(u)e^{2x} = f(u)e^{2x}$ ，即  $f''(u) - f(u) = 0$ ，因此特征方程为  $r^2 - 1 = 0$ ，

有特征根为  $r_1 = 1, r_2 = -1$ ，故  $f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$  再由  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  得

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \text{ 所以 } f(u) = \frac{1}{2} e^u - \frac{1}{2} e^{-u} = \sinh u。$$