武汉大学 2018-2019 第一学期线性代数 A 期末试题 A

1.（10 分）计算行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix}$ $(a-i\neq 0, i=1,2,\cdots,n-1)$.

2. （10 分）设$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB=A^{-1}-B$，求矩阵$B^{-1}-A$.

3.（10 分）考虑向量$\alpha_1=(1\quad 3\quad 2\quad 0)^T,\alpha_2=(7\quad 0\quad 14\quad 3)^T,\alpha_3=(2\quad -1\quad 0\quad 1)^T$,
$\alpha_4=(5\quad 1\quad 6\quad 2)^T,\alpha_5=(2\quad -1\quad 4\quad 1)^T$ （1） 求向量组的秩；（2） 求此向量组的一个极大线性无关组,并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

4.（10 分）已知向量组$\beta_1=(1\quad 0\quad 2)^T,\beta_2=(1\quad \lambda\quad 0)^T,\beta_3=(1\quad 1\quad \mu)^T$与向量组$\alpha_1=(1\quad 1\quad 1)^T$
$\alpha_2=(1\quad 2\quad 3)^T$有相同的秩，并且$\beta_3$ 可由 α_1,α_2线性表示，求m,n 的值。

5、（16 分）问a,b为何值时,线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解（用对应齐次方程组的基础解系表示通解）。

6.（8 分）若三阶方阵A与对角方阵$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$相似，求行列式$\left|6A^{-1}+A^*+3A-2I\right|$ （其中A^*为矩阵A的伴随矩阵）的值。

7、（8 分）$P[x]_2$表示次数小于等于 2 的多项式连同零组成的线性空间，定义

$$\sigma(p(x))=x\frac{dp(x)}{dx}-p(x)$$

（1）证明σ是$p[x]_2$上的线性变换；（2）求σ在基 1，$x-1,x^2-1$下的矩阵。

8、（12 分）设有矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$（1）写出矩阵$A$的二次型$f$；（2）求一个正交相似变换矩阵$P$，将$A$化为对角矩阵；（3）判断$f$是否是正定二次型。

9、(8 分) 设P为 3 阶可逆矩阵，$A=(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)$为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2$，$B$为 3 阶矩阵，且$PB=A$，求线性方程组 $Bx=0$的通解。

10、（8 分）设A是n阶方阵，E是n阶单位矩阵，$A+E$可逆，且$f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$，
证明（1） $(E+f(A))(E+A)=2E$；（2） $f(f(A))=A$

武汉大学2018-2019第一学期线性代数A期末试题A解答

1. （10分）计算行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & a & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & a \end{vmatrix}$ $(a-i\neq 0, i=1,2,\cdots,n-1)$.

解 原式$=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1-a & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-a & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\dfrac{a-1}{a-i} & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & a-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-(n-1) \end{vmatrix}$

$=(a+\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\dfrac{a-1}{a-i})\prod\limits_{i=2}^{n-1}(a-i)$　　　10分

2. （10分）设$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$AB=A^{-1}-B$，求矩阵$B^{-1}-A$.

解　$\because AB=A^{-1}-B$　$\therefore (A+E)B=A^{-1}$，$A+E=A^{-1}B^{-1}$　$\therefore A(A+E)=B^{-1}$（4分）

则$B^{-1}=A(A+E)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　8分

故　$B^{-1}-A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　　10分

3. （10分）考虑向量$\alpha_1=(1\ \ 3\ \ 2\ \ 0)^T,\alpha_2=(7\ \ 0\ \ 14\ \ 3)^T,\alpha_3=(2\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$，$\alpha_4=(5\ \ 1\ \ 6\ \ 2)^T,\alpha_5=(2\ \ -1\ \ 4\ \ 1)^T$　(1)　求向量组的秩；(2)　求此向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

解　$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，向量组的秩为3，　　　7分

极大线性无关组为α_1、α_2、α_3　　$\alpha_4=\dfrac{2}{3}\alpha_1+\dfrac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$　　$\alpha_5=-\dfrac{1}{3}\alpha_1+\dfrac{1}{3}\alpha_2$　　　10分

4.（10分）已知向量组$\beta_1=(1\ \ 0\ \ 2)^T,\beta_2=(1\ \ \lambda\ \ 0)^T,\beta_3=(1\ \ 1\ \ \mu)^T$与向量组$\alpha_1=(1\ \ 1\ \ 1)^T$

$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$ 有相同的秩，并且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，求 m,n 的值。

解 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，即 β_3 ，α_1,α_2 线性相关

所以 $|\beta_3,\alpha_1,\alpha_2|=0$，解得 n =1 . 5 分

又由 β_1,β_2,β_3 与 α_1,α_2 有相同的秩，即 β_1,β_2,β_3 的秩为 2

所以 $|\beta_3,\beta_1,\beta_2|=0$ ，解得 m=2 . 10 分

5、（16 分）8、（16 分）问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解（用导出组的基础解系表示通解）。

解：方法一：$B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0\end{bmatrix}$ 5 分

(1) 当 $r(A)=4\Leftrightarrow a\neq 1$ 时，方程组有唯一解；(2) 当 $a=1$ 时，方程组无解或无穷多解，此时

$$B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}.$$

①当 $b=-1$ 时，$r(A)=r(B)=2<4$，方程组有无穷多解；此时 $B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$

方程组的通解为 $X=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数；12 分

②当 $b\neq -1$ 时，$r(A)=2, r(B)=3$，方程组无解 14 分

综上可得：(1) 当 $a\neq 1$ 时，方程组有惟一解；(2) 当 $a=1,b=-1$ 时，方程组有无穷多解；

(3) 当 $a=1,b\neq -1$ 时，方程组无解 16 分

方法二：方程组的系数行列式 $|A|=(a-1)^2$. (1) 当 $|A|=(a-1)^2\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1$ 时，方程组有唯一解； (2) 以下同方法一.

6.（8 分）若三阶方阵 A 与对角方阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ 相似，求行列式 $\left|6A^{-1}+A^*+3A-2I\right|$ 的值（其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵）。

解: 因为 $|A|=1\times2\times(-3)=-6\neq0$，当 A 的特征值为 λ，则 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$， A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$，4 分

又 $\frac{6}{\lambda}+\frac{|A|}{\lambda}+3\lambda-2$ 是 $6A^{-1}+A^*+3A-2I$ 的特征值，因为 3 阶方阵 **A** 的特征值为 1,、2、-3，

所以 3 阶方阵 $6A^{-1}+A^*+3A-2I$ 的特征值为:1、4、-11，

则 $\left|6A^{-1}+A^*+3A-2I\right|=1\times4\times(-11)=-44$ 8 分

7、(8 分) $P[x]_2$ 表示次数小于等于 2 的多项式连同零组成的线性空间，定义 $\sigma(p(x))=xp'(x)-p(x)$

（1）证明 σ 是 $p[x]_2$ 上的线性变换。（2）求 σ 在基 1， $x-1,x^2-1$ 下的矩阵。

解 （1）取 $p_1(x),p_2(x)\in P_2[x]$，

$$\sigma(p_1(x)+p_2(x))=x(p_1(x)+p_2(x))'-[p_1(x)+p_2(x)]=[xp_1'(x)-p_1(x)]+[xp_2'(x)-p_2(x)]$$
$$=\sigma(p_1(x))+\sigma(p_2(x))$$

$\sigma(kp_1(x))=x(kp_1(x))'-kp_1(x)=k(xp_1'(x)-p_1(x))=k\ \sigma(p_1(x))$ 故 σ 是 $p[x]_2$ 上的线性变换。3 分

（2）由 $\sigma(1,x,x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， σ 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

而 $(1,x-1,x^2-1)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\sigma(1,x-1,x^2-1)=\sigma(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\sigma(1,x-1,x^2-1)=\sigma(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$=(1,x-1,x^2-1)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 σ 在基 1， $x-1,x^2-1$ 下的矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ 8 分

8、(12 分) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.（1）写出矩阵 A 的二次型 f；（2）求一个正交相似变换矩阵 P，将 A 化为对角矩阵；（3）判断 f 是否是正定二次型。

解: （1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 2 分

(2) $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda)-4]=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

可得特征值: $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 5 分

相应的特征向量为: 对于 $\lambda_1=1$ ，解齐次线性方程组 $(A-E)\vec{x}=\vec{o}$

$$(A-E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\quad 得基础解系\quad \vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(A-2E)\vec{x}=\vec{o}$，$(A-2E)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，对于 $\lambda_3=5$，解齐次线性方程组 $(A-5E)\vec{x}=\vec{o}$

$$(A-5E)=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad 得基础解系\quad \vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

实对称矩阵 A 三个特征不相同，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 必两两正交，对 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 单位化

$$\vec{p}_1=\frac{\vec{\xi}_1}{\|\vec{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}；\quad \vec{p}_2=\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}；\quad \vec{p}_3=\frac{\vec{\xi}_3}{\|\vec{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\quad P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$ 10 分

（3）因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都为正，所以 f 是正定二次型。 12 分

9、（8 分）设 P 为 3 阶可逆矩阵，$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2$，$PB=A$.求线性方程组 $Bx=0$ 的通解。

解 由 P 为 3 阶可逆矩阵，且 $PB=A$，故线性方程组 $Bx=0$ 与线性方程组 $Ax=0$ 同解， 3 分

又 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2$，即 $0=\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)\begin{pmatrix}1&-3&1\end{pmatrix}^T$，

$A\begin{pmatrix}1&-3&1\end{pmatrix}^T=0$，也就是 $r(A)=2$，所以 $x=k\begin{pmatrix}1&-3&1\end{pmatrix}^T$ 为线性方程组 $Bx=0$ 的通解。8 分

10、（8 分）设 A 是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，$A+E$ 可逆，且 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$，

证明（1） $(E+f(A))(E+A)=2E$；（2） $f(f(A))=A$

解 （1） 由 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$ 所以有

$(E+f(A))(E+A)=(E+A)+(E-A)(E+A)^{-1}(E+A)=(E+A)+(E-A)=2E$ 4 分

（2）由 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$，故 $f(f(A))=(E-f(A))(E+f(A))^{-1}$

有（1）知，$(E+f(A))^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$ 且由已知 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$ 故有

$f(f(A))=(E-f(A))(E+f(A))^{-1}=[E-(E-A)(E+A)^{-1}]\frac{1}{2}(E+A)=[\frac{1}{2}(E+A)-\frac{1}{2}(E-A)=A$，8 分