武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试
线性代数 A（A 卷解答）

一、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 1，2，3，试计算 $A_{11}+A_{22}+A_{33}$ 的值。

解　设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

由 $|A^{-1}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$　$|A|=\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}=\dfrac{1}{6}$　$\lambda_i^*=\lambda_i|A|$ $(i=1,2,3)$　　6 分

$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^*=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^{-1}=\dfrac{1}{6}(1+2+3)=1$　　10 分

二、（10 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$ $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$

，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组

线性表示。

解：设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$　　4 分

先对 A 施行行初等变换化为行最简形矩阵 $A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　8 分

知向量组的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(A)=2$，易知 1、2 两列即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组。

且有 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$．　　10 分

三、（15 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

矩阵 B 满足 $A^{-1}BA+3I=2A^{-1}BC$．求 B．

解（1）　因为

$A(A^{-1}BA+3A^{-1}A)A^{-1}=2AA^{-1}BCA^{-1}\Rightarrow B(2CA^{-1}-I)=3I\Rightarrow B$ 可逆　　5 分

而，$|A^*|=|A|^3\Rightarrow|A|=\sqrt[3]{|A^*|}=\sqrt[3]{8}=2$，$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$　因此有 $B(CA^*-I)=3I$

又 $CA^*-I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-2&1&0\\1&7&-2&1\end{pmatrix}$ 10 分

所以 $B(2CA^{-1}-I)=3I\Rightarrow B=3(CA^*-I)^{-1}$

由 $(CA^*-I\vdots I)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\-1&1&0&0&0&1&0&0\\0&-2&1&0&0&0&1&0\\1&7&-2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&2&2&1&0\\0&0&0&1&-4&-3&2&1\end{pmatrix}$

故 $B=3(CA^*-I)^{-1}=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&2&1&0\\-4&-3&2&1\end{pmatrix}$ 15 分

四、（15 分）当 a 为何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a-3\\x_1+ax_2+x_3=-2\\x_1+x_2+ax_3=-2,\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解？在有解时，求出方程组的解。

解: 对方程组的增广矩阵施以初等行变换：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}a&1&1&\vdots&a-3\\1&a&1&\vdots&-2\\1&1&a&\vdots&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&0&-(a+2)(a-1)&3(a-1)\end{bmatrix}.$$ 5 分

（1）当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，$R(\overline{A})=R(A)=3,$ 从而方程组有惟一解.

（2）当 $a=-2$ 时，$R(A)=2,R(\overline{A})=3,$ 由于 $R(A)\neq R(\overline{A}),$ 方程组无解.

（3）当 $a=1$ 时，有 $\overline{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 可见 $R(A)=R(\overline{A})=1<3,$ 故方程组有无穷多组解. 11 分

又由此可得与原方程组同解的方程组为 $x_1=-2-x_2-x_3.$ 令 $x_2=x_3=0,$ 得其特解 $u_0=(-2,0,0)^T$.

与原方程组的导出组同解的方程组为：$x_1=-x_2-x_3.$ 由此可得基础解系为

$$v_1=(-1,1,0)^T,v_2=(-1,0,1)^T.$$

于是，原方程组的全部解为 $x=u_0+c_1v_1+c_2v_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$ 其中 c_1,c_2 是任意常数。15 分

五、（16 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_3x_1$

（1）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上的最大值和最小值.

解：（1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 2 分

其特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$

由 $|A-\lambda E|=0$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$ 6 分

当 $\lambda_1=1,$ 时，解方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=0$，可得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{o}$，可得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，解方程组 $(A-4E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，可得其基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

令 $P=(\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,

即为所求之正交阵。且在正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$ 之下，原二次型 f 化为标准形

$$f=x_1'^2+2x_2'^2+4x_3'^2$$ 10 分

（2）注意到，正交变换不改变向量的长度，故 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\Leftrightarrow x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=1$，

于是 $\max f(x_1,x_2,x_3)=\max f(x_1'^2,x_2'^2,x_3'^2)=\max(x_1'^2+2x_2'^2+4x_3'^2)\le 4\max(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)=4$

另一方面，取 $(x_1',x_2',x_3')^{\mathrm T}=(0,0,1)^{\mathrm T}$，则 f 在此点的值为 4，于是，f 在单位球面上的最大值是 4。类似地，$\max f(x_1,x_2,x_3)=\max f(x_1'^2,x_2'^2,x_3'^2)=\max(x_1'^2+2x_2'^2+4x_3'^2)\ge\max(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)=1$，$f$ 在单位球面上的最小值是 1，如取 $(x_1',x_2',x_3')^{\mathrm T}=(0,0,1)^{\mathrm T}$ 16 分

六、（16 分）设 n 阶矩阵 A,B 满足条件 $A+B=AB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，且 $a_1=(1,0,1)$

$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，1、求矩阵 A；2、求秩 $r(A^*B^*)$，其中 A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵；3、设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求 β_1,β_2,β_3；4、设线性变换 T 为：$T(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3)$，求 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的变换矩阵 C.

1）由题设有 $A(B-I)=B$，而 $|B-I|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$ 可逆　　3 分

2）易算得：$(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　6 分

因而有 $A=B(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　9 分

2）由 A,B 均可逆，故 A^*,B^* 也均可逆，所以 $r(A^*B^*)=3$；　　13 分

3）$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=(5,2,1),\boldsymbol{\beta}_2=-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3),\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,2)$　14 分

4）由 $T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,3)$，可得：$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$

故 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的变换矩阵为：$C=B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　16 分

七、（10 分）设 A、B 均是同阶方阵，B 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证明 A、A^2+B^2 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

证　因为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2\neq 0$

所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而 A 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。　　5 分

注意 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$，$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right|=\left|-\boldsymbol{AB}\right|=\left|-\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$，因而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆。

注意 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})BB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，

$$\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|(A+B)\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 A、B、$A+B$ 均可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0,|\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$

所以有 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。　　10 分

八、（8 分）设 B 是 $m\times n$ 阶矩阵，其 m 个行向量是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：对任一 m 阶可逆矩阵 C，CB 的行向量组也是 $Ax=0$ 的基础解系。

解　有题意，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A\alpha}_i=0$

设 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{CB}=\mathrm{C}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ 6 分

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，$\boldsymbol{CB}$ 的行向量组线性无关。而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})^{T}=\boldsymbol{AP}^{T}=\boldsymbol{A}(\alpha_1^{T},\alpha_2^{T},\cdots,\alpha_m^{T})\boldsymbol{C}^{T}=0$

故 $\boldsymbol{CB}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解向量，从而也是基础解系。 8 分