武汉大学数学与统计学院

2020-2021 学年第二学期

《高等数学 B2》期末考试试题 A 卷 **参考解答**

考试时间：2021 年 6 月 16 日 14:30-16:30

一、（10 分）设 $\vec{a}=(2,-1,2),\vec{b}=(1,2,-2)$，求 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 以及 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.

解：$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2-2-4}{3\cdot 3}=-\frac{4}{9}$$ 5 分

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{4}{3}$$ 10 分

二、（10 分）设曲面 Σ： $z=x^2+4y^2+3$ 以及平面 $\pi:2x+4y-z=0$：

1）在曲面 Σ 找一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 使得在此点处曲面 Σ 的切平面与平面 π 平行；

2）求该点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π 的距离.

解：1） 令 $F(x,y,z)=x^2+4y^2+3-z$，则 $F_x(x_0,y_0,z_0)=2x_0,F_y(x_0,y_0,z_0)=8y_0,F_z(x_0,y_0,z_0)=-1$. 曲面 Σ 的切平面与平面 π 平行只需：$\{2x_0,8y_0,-1\}//\{2,4,-1\}$，即 $x_0=1,y_0=\dfrac{1}{2},z_0=5$.

即点 $P(1,\dfrac{1}{2},5)$ 为所求. 6 分

2） $P(1,\dfrac{1}{2},5)$ 到平面距离 $d=\dfrac{|2x_0+4y_0-z_0|}{\sqrt{2^2+4^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. 10 分

三、（8 分）设函数 $z=f(x+y,y\mathrm{e}^x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'y\mathrm{e}^x,$$ 5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+f_2'y\mathrm{e}^x\right)$$

$$=f_{11}''+f_{12}''\mathrm{e}^x+f_2'\mathrm{e}^x+\left(f_{21}''+f_{22}''\mathrm{e}^x\right)y\mathrm{e}^x$$ 8 分

$$=f_{11}''+(f_2'+(1+y)f_{12}'')\mathrm{e}^x+yf_{22}''\mathrm{e}^{2x}$$

四、（10 分）已知曲线Γ为圆柱面$y^2+z^2-4z=0$与抛物柱面$4x=y^2$的交线：

1）给出曲线Γ的参数方程；

2）计算对弧长的曲线积分$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{16+y^2(z-2)^2}}$.

解： 1） 由于$y^2+z^2-4z=y^2+(z-2)^2-4=0$，因此曲线$\Gamma$的参数方程可写为：

$$x=\sin^2 t,\ y=2\sin t,\quad z=2+2\cos t,\quad t\in[0,2\pi]$$ 5 分

2）对弧长的曲线积分

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{16+y^2(z-2)^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{16+16\sin^2 t\cos^2 t}}\sqrt{4\sin^2 t\cos^2 t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=\pi.$$ 10 分

五、（8 分）计算二重积分$I=\iint_D (y+\sqrt{4-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解：由于D关于$y=0$对称，因此 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$， 4 分

利用极坐标： $I=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2\right)=2\sqrt{3}\pi.$$ 8 分

六、（8 分） 求原点$O(0,0,0)$到曲面$z^2+xy=9$的距离，即在条件$z^2+xy=9$下计算函数$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的最小值.

解：1） 显然d取最小值当且仅当d^2取最小值，因而设拉格朗日函数：

$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2+xy-9)$，分别对$x,y,z,\lambda$求偏导并令其为 0，得

$$\begin{cases}F_x=2x+\lambda y=0\\ F_y=2y+\lambda x=0\\ F_z=2(1+\lambda)z=0\\ F_\lambda=z^2+xy-9=0\end{cases}$$ 5 分

当$\lambda^2=4$时，得$x^2=y^2=9, z=0$，此时$d^2=18$，当$\lambda=-1$时，得$x=y=0, z^2=9$，此时$d^2=9$. 由于x,y,z中任意变量趋于无穷大时d趋于正无穷，显然此问题有最小值，因此原点$O(0,0,0)$到曲面$z^2+xy=9$的距离为3. 8 分

七、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}x^n$ 的和函数及收敛域.

解：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t \qquad 4 分$$

$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln(1-x)\,. \qquad 6 分$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1$，因此收敛半径为1，且 $|x|=1$ 时级数发散，因此收敛域为 $(-1,1)$. 8 分

八、（8 分）计算曲面积分 $I=\iint_S(x^2+2zx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+3xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 满足 $z\geq 0$ 的部分取上侧.

解：用 S_1 表示圆盘 $\left\{(x,y,0)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$ 取下侧，利用高斯公式可得：

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2z+2y+3x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{S_1}0^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(5x+2y+4z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \qquad 4 分$$

其中区域 Ω 是有旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 与坐标平面 xOy 所围成的区域.

由与区域 Ω 关于 $x=0$ 对称，也关于 $y=0$ 对称，所以：$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$；因此，

$$I=4\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\int_0^1 z\pi(1-z)\,\mathrm{d}z\,. \qquad 6 分$$

$$=\frac{2\pi}{3} \qquad 8 分$$

九、（8 分）将函数 $f(x)=\frac{1}{(2-x)(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并写出该幂级数的收敛域.

解：由于 $f(x)=\frac{1}{(2-x)(1-x)^2}=\frac{1}{2-x}+\frac{x}{(1-x)^2}$，且 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛半径为 1，因此有

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\text{（上式两边求导）以及}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \qquad 5 分$$

因此，$f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$，收敛域为 $(-1,1)$. 8 分

十、（8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$，考虑如下问题：

1）计算 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数 $f_x(0,0),\ f_y(0,0)$；

2）证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

解：1）显然 $f(x,0)=f(0,y)=0$，因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 4 分

2）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，即 $f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

也就是： $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=0$， 6 分

但是 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$， 当取 $y=kx$ 时，得 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3k^2)}{(x^2+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k^2}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$，

与 k 有关，因此 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}$ 不存在，与 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=0$ 矛盾，因而 $f(x,y)$

在 $(0,0)$ 点处不可微. 8 分

十一、（8 分）验证如下方程为全微分方程，并求方程的通解：

$$\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}\,x+\left(6x^2y+6y^2\right)\mathrm{d}\,y=0.$$

解：$P(x,y)=\left(3x^2+6xy^2\right), Q(x,y)=\left(6x^2y+6y^2\right)$，显然 $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因此，此微分方程是全微分方程. 4 分

由于 $P(x,y), Q(x,y)$ 在全平面上连续可微，因此

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}\,x+\left(6x^2y+6y^2\right)\mathrm{d}\,y=\int_0^x 3x^2\,\mathrm{d}\,x+\int_0^y\left(6x^2y+6y^2\right)\mathrm{d}\,y$$ 6 分

$$=x^3+3x^2y^2+2y^3,$$

因而此微分方程的通解为：$x^3+3x^2y^2+2y^3=C$. 8 分

十二、（6 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 考虑如下问题：

1）证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$，即 $f(x,y)$ 关于变量 x 连续，关于变量 y 也连续；

2）证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；

3）结合上述内容，**分析如下材料中的错误**.

“某同学认为：若函数 $g(x,y)$ 关于变量 x 连续，关于变量 y 也连续，则函数 $g(x,y)$ 连续.

他还给了如下证明：因为$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|\le|g(x,y)-g(x_0,y)|+|g(x_0,y)-g(x_0,y_0)|$，对任意$\varepsilon>0$，由满足$g(x,y)$关于变量$x$连续，故存在$\delta_1>0$使得当$|x-x_0|<\delta_1$时$|g(x,y)-g(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$；由满足$g(x,y)$关于变量$y$连续，故存在$\delta_2>0$使得当$|y-y_0|<\delta_2$时$|g(x_0,y)-g(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 所以，当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\min(\delta_1,\delta_2)$时，有$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$成立. 因此函数$g(x,y)$连续.”

解：1） 当$y_0\ne 0$时，$f(x,y_0)=\dfrac{xy_0}{x^2+y_0^2}$是在$(-\infty,+\infty)$上有定义的初等函数，因而连续，即有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$；当$y_0=0$时$f(x,y_0)=0$显然连续，因此对任意$y_0$都有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$；由对称性可知$\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$，即$f(x,y)$关于变量$x$连续，关于变量$y$也连续. 2 分

2）当取$y=kx$时，得$\lim\limits_{\rho\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xkx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$与$k$有关，因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在，因而$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续. 4 分

3） 由上述函数$f(x,y)$可知，函数$g(x,y)$关于变量x连续，且关于变量y连续，不能推出函数$g(x,y)$连续. 取$g(x,y)=f(x,y), x_0=y_0=0, \varepsilon=\dfrac{1}{4}$，则

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(0,y)|+|f(0,y)-f(0,0)|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|+|0-0|,$$

要想$|g(x,y)-g(x_0,y)|=\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}-0\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{1}{8}$，当$y\ne 0$是，也就是需要$\dfrac{\left|\frac{x}{y}\right|}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{1}{8}$，因此“存在$\delta_1>0$使得当$|x-x_0|<\delta_1$时$|g(x,y)-g(x_0,y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$”中的$\delta_1$必定与$y$有关，譬如取$\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{2}|y|$，但$|x-x_0|<\delta_1$并**不包含点$(0,0)$的任何邻域**，也就不能得出“$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\min(\delta_1,\delta_2)$时，有$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$成立”. 事实上，对任意$\delta\in(0,1)$，取$x=y=\dfrac{\delta}{2}$，虽有$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$，但$\dfrac{\left|\frac{y}{x}\right|}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{4}$，也就是$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$不成立. 6 分