武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 A（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

1

考	生	学	号									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

二、填空题：

(1) __________ (2) __________ (3) __________ (4) __________

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，则______.

(A) $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵. (B) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵. (C) $\det(\boldsymbol{A})=1$. (D) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&8&0\\2&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{pmatrix}$，则 a 等于______.

(A) 0. (B) 2. (C) -2. (D) 6.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，则______.

(A) $a=b\neq 0$. (B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$. (C) $a+2b\neq 0$. (D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

(4) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $\left\{\begin{pmatrix}a+b&a\\0&b\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ 的维数是______.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则常数 $t=$______.

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\4&5&1&0\\0&0&6&8\end{pmatrix}$，则 $\det(\boldsymbol{A})=$______.

(3) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 为 3 维向量，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$______.

(4) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则向量组 $\beta_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t_1\boldsymbol{\alpha}_2$，$\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的充要条件是：常数 t_1,t_2 满足条件______________.

三、(12 分) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆； (2) 当 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{A}$.

四、（13 分） a，b 取何值时，线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时，求出方程组的通解.

五、（12 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，而且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等价.

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 A（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

1

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

考生学号												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

六、（12 分）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$，求方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值及 $\det(\boldsymbol{B}^{-1})$.

七、（13 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数 λ 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 。

八、（8 分）设 $\mathbb{R}^4$ 的子空间 V 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,2)^{\mathrm{T}}$ 生成，求 V 的基与维数.

九、（6 分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵. 证明：关于 λ 的方程 $\det(\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$ 的根全大于零.