武汉大学 2013-2014 学年第一学期期末考试线性代数 A 解答

一、（8 分）在 n 阶行列式 D 中，如果把第一列移到最后一列，因而其余各列保持原来次序各向左移动了一列，得行列式 Δ，问行列式 Δ 与 D 有何关系？

解　$\Delta=(-1)^{n-1}D$

二、（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$,

（1）求 A^n.（n 为正整数）.（2）设 $A^2+AB-A=E$，求行列式 $|B|$ 的值.

解　（1）记 $B=\dfrac{1}{2}A$.则 B 为正交阵。由 $A^T=A$. 故 $B^T=B.A^2=A^TA=4B^TB=4E$

$A^3=A^2A=4A$，$A^4=(A^2)^2=16E$，$A^{2k-1}=2^{2k-2}A.$，$A^{2k}=2^{2k}E.$（k 为正整数）.

（2）$A^2=4E, A^{-1}=\dfrac{1}{4}A, AB=E+A-A^2=A-3E.$

$$B=E-3A^{-1}=E-\frac{3}{4}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&3&3\\3&1&3&3\\3&3&1&3\\3&3&3&1\end{pmatrix},\therefore |B|=\frac{10}{4^4}\begin{vmatrix}1&3&3&3\\1&1&3&3\\1&3&1&3\\1&3&3&1\end{vmatrix}=-\frac{5}{16}.$$

三、（12 分）求下列向量组的一个最大线性无关组，并用它线性表出向量组中的其它向量.

$$\alpha_1=(3,1,2,5),\alpha_2=(1,1,1,2),\alpha_3=(2,0,1,3),\alpha_4=(1,-1,0,1),\alpha_5=(4,2,3,7).$$

解　α_1,α_2 线性无关。又 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2$

故 α_1,α_2 是向量组的一个最大无关组。

四、（10 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为向量空间 V 的基，V 的线性变换 T 在此基下矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix},$$ $R(T)$ 为 T 的象空间, $Ker(T)$ 为 T 的核,求 $R(T)+Ker(T)$.

解　$R(T)$ 的基为: $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\alpha_2=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4.$

$Ker(T)$ 的基为: $\alpha_3=-4\varepsilon_1-3\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\alpha_4=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4.$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关　$R(T)+Ker(T)=V$

五、（12 分）用正交变换化二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形，并

写出所用正交变换及 f 的标准形。

解 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\ e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,\ e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

在正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ 之下。

f 化成标准形：$2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$

六、（16分）讨论 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}x+ay+a^2z=1\\ x+ay+abz=a\\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b\end{cases}$ 有唯一解?有无穷多解？无解？并在有解时求出其解.

解　当 $a(a-b)\neq 0$ 时有唯一解：$x=\dfrac{a^2(b-1)}{b-a},y=\dfrac{b(a^2-1)}{a(a-b)},z=\dfrac{a-1}{a(b-a)}$

当 $a=0$ 时，方程组无解.

当 $a=b\neq 1$ 时方程组无解.

当 $a=b=1$ 时，方程组有解：$\begin{cases}x=1-y-z\\ y=y\\ z=z\end{cases}$ （y,z 为任意常数）

七、（10分）设向量组（I）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_s$ 与向量组（II）$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_t$ 的秩相同，且向量组（I）可由向量组（II）线性表示，证明：（I）（II）为等价向量组。

证 只需证向量组（II）可由向量组（I）线性表示。设 $r(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_s)=r(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_t)=r$，且 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_r$ 为（I）的最大无关组，$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots\vec{b}_r$ 为（II）的最大无关组，$\because$（I）（II）等秩，且（I）可由向量组（II）线性表示 $\therefore r(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_s;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_t)=r$，从而 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots\vec{b}_r$ 均为（III）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_s;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_t$ 的最大无关组，进而 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots\vec{b}_r$ 等价。于是，由等价传递性知：（I）（II）为等价向量组。

八、（10分）设 $\overline{V}=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & a & b\\ c & b & a\end{pmatrix}\middle| a、b、c\in R\right\}$

（ⅰ）证明 $\overline{V}$ 对于矩阵的加法和数乘来说构成实数域 R 上的线性空间。

（ii）求 $\overline{V}$ 的一组基及维数。

（iii）求 A 在该基下的坐标。其中 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&3&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$。

解（i）有两种证法。①逐条验证。②用子空间的判定条件来证。

（ii） $E_1=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 线性无关，又任意矩阵

$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&b\\c&b&a\end{pmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3 \quad \therefore E_1,E_2,E_3$ 为的 $\overline{V}$ 的一个基，维数为 3。

(iii) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&3&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ 在基 E_1,E_2,E_3 下的坐标为 $(3,-2,1)$。

九、(10 分) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$， $\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，且 $\alpha^T\beta=2, A=\alpha\beta^T$，

（1）求 A 的特征值，（2）求可逆阵 P 及对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 设 $\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\neq 0$，故不妨设 $a_1b_1\neq 0$，因此 $r(A)=1$

故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 A 的两个特征值，又 $0+0+\lambda_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2$

所以 $\lambda_3=2$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量是方程 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$ 的基础解系为： $\xi_1=(b_2,-b_1,0)^T,\xi_2=(b_3,0,-b_1)^T$，又 $A\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=2\alpha$， $\xi_3=\alpha$

于是 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$