武汉大学 2011-2012 学年第二学期期末考试

高等数学 B2（A 卷答题卡）

姓名		班级		考生学号

填涂样例：正确填涂 ! 错误填涂 # $ %

注意事项：
1.答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.选择题必须使用 2B 铅笔填涂；解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、(8’) 已知 $\vec{a}=\vec{i}, b=\vec{j}-2\vec{k}, c=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，求一单位向量 $\vec{m}$，使 $\vec{m}\perp\vec{c}$，且 $\vec{m}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面。

二、(11’) 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$，问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点: (1) 是否连续？(2)偏导数是否存在？(3) 是否可微？

三、(8’) 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} y=f(x,t) \\ t=F(x,y) \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ (假定隐函数定理条件满足)。

四、(8’) 设 $z=u(x,y)e^{ax+by}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, 试确定常数 a,b 使 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

五、(10’) 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $a_1x+a_2y+a_3z=1\ (a_i>0, i=1,2,3)$ 下的最小值。

六、(8’) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^3y^2z\,dV$，$\Omega$ 为马鞍面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1, z=0$ 所包围的空间区域。

七、(8’) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2^n}+(-2)^n](x+1)^n$ 的收敛域。

八、(8’) 求二重积分 $I=\iint_D|x^2+y^2-4|\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$.

九、(10’) 计算曲面积分 $\iint_S(2x+z)dydz+zdxdy$,其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

十、(11’)已知 L 是第一象限中从点 $O(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $A(2,0)$, 再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $B(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

.

十一、(10’) 将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

武汉大学 2011-2012 学年第二学期

《高等数学 B2》（A 卷）标准答案

一、(8 分)(每个划线部分 2 分)解：设 $\vec{m}=(x,y,z)$, 则 $\vec{m}\perp\vec{c}$ 意味着 $\underline{2x-2y+z=0}$， $\vec{m}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面意味着 $\underline{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=0$ 得 $z=-2y$, 单位向量 $\vec{m}$意味着 $\underline{x^2+y^2+z^2=1}$, 解上述三个方程得 $\underline{\vec{m}=\pm(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}$。

二、(11 分)解： $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0} f(x,y)=f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，......4 分

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y(0,0)$，所以偏导数存在，......4 分

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}(\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$， 取 $\Delta y=k\Delta x$ 求该极限，可知极限不存在，

所以不可微。......3 分

三、(8 分) 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+aue^{ax+by}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bue^{ax+by}$， ......4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{ax+by}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abue^{ax+by}=b\dfrac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abue^{ax+by}$, ...2 分

而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u=0$， 由

$u=F(x)+G(y)(F,G$ 任意）可知只有系数 $a=1,b=1$. ......2 分

四、(8 分) 在 $y=f(x,F(x,y(x))$ 两边同时关于 x 求导， 可得 $\dfrac{dy}{dx}=f_x+f_t(\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx})$， ......5 分

整理得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_x+f_tF_x}{1-f_tF_y}$ ......3 分

五、(10 分) 解：做 Lagrange 函数 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(a_1x+a_2y+a_3z-1)$，求导得

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda)=2x-a_1\lambda=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda)=2y-a_2\lambda=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda)=2z-a_3\lambda=0 \\ a_1x+a_2y+a_3z=1 \end{cases}$$ ....5 分

$\lambda=\dfrac{2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $x=\dfrac{a_1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $y=\dfrac{a_2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $z=\dfrac{a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$， ......4 分

所以 $F_{\min}=\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ 。。。。。。 1 分

六、(8 分) 解： 原式$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2zdz$......4分 $=\dfrac{1}{110}$......4分

七、(8 分) 解： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛半径为 $R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n(x+1)^n$ 的收敛半径为

$R_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2}$。......4’

故原级数的的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}=\dfrac{1}{2}$，收敛区间则为 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$， ......2’

当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，级数发散，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，级数发散，所以收敛域为 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$。......2’

八、(8 分) 解： $I=\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4(4-r^2)rdr$......6分 $=80\pi$......2分

九、(10 分) 解一：补充平面 $S_1:z=1$，法向量向下，形成封闭区域 Ω，由 Gauss 公式得

$\iint\limits_S(2x+z)dydz+zdxdy=-3\iiint_\Omega dxdydz=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-\dfrac{3}{2}\pi$， ......5’

再计算平面 $z=1$ 上的曲面积分 $\iint\limits_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}dxdy=\pi$， ......4’

综合得 $I=-\dfrac{\pi}{2}$。......1’

解二：用投影法求解，这里 $z_x{}'=2x, z_y{}'=2y$。......2’

原式 $=\iint\limits_S[(2x+z)(-2x)+z]dxdy=-\iint\limits_S(z-2xz-4x^2)dxdy=\iint\limits_D(x^2+y^2-2x(x^2+y^2)-4x^2)dxdy$ ......3’

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2-2r^3\cos\theta-4r^2\cos^2\theta)rdr=-\dfrac{\pi}{2}$ ......5’

十、(11’) 解：① $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+1-3x^2)=1$， ......2’

②曲线 L 不封闭，添加辅助线 L_1：沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$，

$\int\limits_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\int\limits_{L_1}Q(0,y)dy=\int_2^0-2ydy=4$， ......3’

③在封闭区域上运用 Green 公式，可得

$\int\limits_{L\cup L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\iint\limits_D 1dxdy=\dfrac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\dfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{2}$, ...4’

因此 $I=\int\limits_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\dfrac{\pi}{2}-4$ ......2’

十一、(10′) $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nxdx-\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\right)$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}$，......4′ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2(1-\frac{\pi^2}{3})$，......2′

所以$1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$, ...2′

取 $x=0$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ ......2′