

武汉大学 2019-2020 第一学期线性代数期中试题

1、(10 分) 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

2、(10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, 求 A 的列向量组的一个最大无关组,

并用最大无关组线性表示出列向量组中其它向量。

3、(15 分) 设, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

求 $A^{-1}B'(CB^{-1} + E)' - [(C^{-1})'A]^{-1}$.

4、(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 试就 a, b 的各种情况,

讨论线性方程组 $AX = B$ 的解, 如果有解, 求其解.

5、(10 分) 设已知 n 阶矩 A 满足条件: $A^4 \neq 0, A^5 = 0$, B 也是已知的 n 阶矩阵, 试证明矩阵方程 $AX = B - X$ 存在唯一的解矩阵 X .

6、(10 分) 设 A 是 $m \times 4$ 矩阵且 A 的秩为 2, B 是 $m \times 1$ 的非零矩阵, $X = (x_1, \dots, x_4)$

若 a_1, a_2, a_3 是 $AX = B$ 的解向量, 且设 $a_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, a_1 + a_2 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T$,

$a_2 + a_3 = (1 \ 0 \ 4 \ 3)^T$ 求方程组 $AX = B$ 的通解。

7、(10 分) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 n 阶行列式 $|A|$ 中元素 a_{ik} 与 a_{ki} 是共轭复数, 试证明此行列式之值必为实数.

8、(10 分) 设 A 是 n 阶知阵, 满足 $AA' = E, |A| < 0$, 证明 $|A+E| = 0$.

9、(10 分) 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, 如果 $AB = E$ (E 是 n 阶单位矩阵), 证明: 矩阵 B 的列向量组线性无关。

武汉大学 2019-2020 第一学期线性代数期中试题解答

1、(10 分) 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

解 $D \xrightarrow{c_{n-1} - c_n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & -b_1 & a_1 \\ 0 & \cdots & -b_2 & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_n & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} b_1 b_2 \cdots b_n$

2、(10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, 求 A 的列向量组的一个最大无关组, 并用最大无关组线性表示出列向量组中其它向量。

解 设 A 的第 j 列为 $\alpha_j (j=1, \dots, 5)$, 对 A 作初等行变换: $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

故 α_1, α_2 是 A 的列向量组的一个最大无关组,

且有 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

3、(15 分) 设, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

求 $A^{-1}B'(CB^{-1} + E)' - [(C^{-1})'A]^{-1}$.

解 先化简, 有 $D = A^{-1}B'(CB^{-1} + E)' - [(C^{-1})'A]^{-1} = A^{-1}[(CB^{-1} + E)B]' - A^{-1}[(C^{-1})']^{-1}$
 $= A^{-1}[(C+B)' - C'] = A^{-1}B'$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = A^{-1}B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4、(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 试就 a, b 的各种情况, 讨论

线性方程组 $AX = B$ 的解, 如果有解, 求其解.

$$\text{解 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 1 \\ 0 & -3a & a-b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

当 $a=0$ 时，方程组无解；

当 $a \neq 0$ 且 $b \neq a$ 时，方程组有唯一解： $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, $x_2 = \frac{1}{a}$, $x_3 = 0$

当 $a \neq 0$ 且 $b=a$ 时，方程组有无穷多解 $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, $x_2 = x_3 + \frac{1}{a}$, $x_3 = x_3$ 为任意常数。

5、(10分) 设已知 n 阶矩 A 满足条件： $A^4 \neq 0$, $A^5 = 0$, B 也是已知的 n 阶矩阵，试证明矩阵方程 $AX = B - X$ 存在唯一的解矩阵 X 。

解 由 $XE = A^5 + E = (A+E)(A^4 - A^3 + A^2 - A + E)$ 知. $|A+E| \neq 0$, 故 $(A+E)^{-1}$ 存在，故 $(A+E)^{-1}(B - X) = X$ 有唯一解 $X = (A+E)^{-1}B$

6、(10分) 设 A 是 $m \times 4$ 矩阵且 A 的秩为 2, B 是 $m \times 1$ 的非零矩阵, $X = (x_1, \dots, x_4)$

若 a_1, a_2, a_3 是 $AX = B$ 的解向量，且设 $a_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, $a_1 + a_2 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T$, $a_2 + a_3 = (1 \ 0 \ 4 \ 3)^T$ 求方程组 $AX = B$ 的通解。

解 记 $b_1 = a_2 - a_1 = (a_1 + a_2) - 2a_1 = (-1, 0, 1, 2)$,

$$b_2 = a_3 - a_1 = (a_3 + a_2) - (a_1 + a_2) = (0, -2, 1, -1),$$

则 $Ab_1 = 0$, $Ab_2 = 0$, 且 b_1, b_2 线性无关。又 A 的秩为 2, 故 $AX = B$ 的通解为：

$$X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = k_1 b_1 + k_2 b_2 + a_1 = k_1 (-1 \ 0 \ 1 \ 2)^T + k_2 (0 \ -2 \ 1 \ -1)^T + (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, (k_1, k_2 \in R)$$

7、(10分) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 n 阶行列式 $|A|$ 中元素 a_{ik} 与 a_{ki} 是共轭复数，试证明此行列式之值必为实数。

$$\text{解 设 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x + iy, \text{ 将 } |A| \text{ 转置, 一方面 } |A'| = |A|$$

另一方面， $|A'|$ 中的各元素恰为 $|A|$ 中相应元素的共轭复数，进而 $|A'|$ 的值与 $|A|$ 值也互为共轭复数，则有 $|A'| = x + iy = x - iy$, 故得 $y = 0$, 即 $|A|$ 为实数。

8、(10分) 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA' = E$, $|A| < 0$, 证明 $|A+E| = 0$.

$$\text{解 } A+E = A+AA' = A(E+A') = A(E+A)' \quad |A+E| = |A|(E+A)' = |A||E+A| \\ (1-|A|)|E+A| = 0 \quad 1-|A| > 0, |E+A| = 0$$

9、(10分) 设 A 是 $n \times m$ 矩阵， B 是 $m \times n$ 矩阵，其中 $n < m$ ，如果 $AB = E$ (E 是 n 阶单位矩阵)，证明：矩阵 B 的列向量组线性无关。

解 设矩阵 B 按列分块为 $B = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]$, $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 即 $BX = 0$, 其中 $X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$, 于是 $ABX = 0$, 即 $X = 0$