武汉大学 2023-2024 学年第一学期期末考试
线性代数 A 参考答案（A 卷）

姓名____________ 学号____________

（符号说明：E 表示单位阵，方阵 A 的伴随矩阵记为 A^*）

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解：将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D_n=\begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \cdots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)x\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^n$$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 A^{2024}

解：

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\lambda & \lambda^2\\0 & 1 & 2\lambda\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1 & 3\lambda & 3\lambda^2\\0 & 1 & 3\lambda\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{2024}=\begin{pmatrix}1 & 2024\lambda & \dfrac{2023\times2024}{2}\lambda^2\\0 & 1 & 2024\lambda\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

三、（12 分）设 A 为 3 阶方阵，其伴随矩阵为 A^*，且 $|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-A^*\right|$

解：

$\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}=3A^{-1}$

$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$

$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-A^*\right|=\left|3A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left(\frac{5}{2}\right)^3\frac{1}{|A|}=\frac{625}{4}$

四、（10 分）设有线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

解：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\1 & \lambda & 1 & -2\\1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & -2\\0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\0 & 0 & (\lambda-1)(2+\lambda) & 3-3\lambda\end{pmatrix}$,

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，方程组无解；

(3) 当 $\lambda=1$ 时，$R(A)=R(B)=2,$，此时方程组有无限多个解。

由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$x_1+x_2+x_3=-2$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$，$(k_1,\ k_2\in R)$

五、（10 分）设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的三个解向量，且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\0\\3\\5\end{pmatrix}$，求方程组的通解。

解：设4元非齐次线性方程组$Ax=b$.

已知$A\boldsymbol{\alpha}_1=b, A\boldsymbol{\alpha}_2=b$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=b$

$A(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=b+b-2b=0$,得到$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$是$Ax=0$的解。

又$R(A)=3, n-R(A)=4-3=1$.

所以$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$为$Ax=0$的一个基础解系。

则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为$x=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$c$为任意实数。

六、（10 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，设向量组

$\beta_1=(m-1)\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+(m+1)\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=-\alpha_1-(m+1)\alpha_2+(m-1)\alpha_3$，

试讨论：（1）当 m 取何值时可使得向量组 β_1,β_2,β_3 线性相关？（2）当 m 取何值时可使得向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关？

解：设有常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=0$ 成立，整理可得：

$$\left[(m-1)k_1+k_2-k_3\right]\boldsymbol{\alpha}_1+\left[3k_1+(m+1)k_2-(m+1)k_3\right]\boldsymbol{\alpha}_2+\left[k_1+k_2+(m-1)k_3\right]\boldsymbol{\alpha}_3=0$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，必有$\begin{cases}(m-1)k_1+k_2-k_3=0\\3k_1+(m+1)k_2-(m+1)k_3=0\\k_1+k_2+(m-1)k_3=0\end{cases}$，方程组的系数行列式 $D=m(m^2-4)$。于是：

当 $m\neq 0, m\neq \pm 2$ 时，方程组仅有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，此时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关。

当 $m=0$，或 $m=\pm 2$ 时，方程组有非零解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关。

七、（14 分）在四维实向量构成的向量空间 R^4 中, 已知：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

（1）已知 $\gamma=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，求 γ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标；

（2）试问参数 a 如何取值可使 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 R^4 的基；

（3）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 P。

解：（1）γ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

（2）$a\neq 1$；

（3）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$， 则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\-1&0&1&0\\a&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},$$

设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，

则 $$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\-1&0&1&0\\a&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\-1-a&-1&1&0\\a-1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

或通过求解线性方程组得到

八、（12分）已知1，1，－1 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，向量 $\alpha=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量，

（1）能否求得 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量？若能，试求出该特征向量，若不能，则说明理由。

（2）能否由此求得实对称阵 A ？若能，试求之，若不能则说明理由。

解：能。属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，对称阵不同特征值对应的特征向量正交。则由

$(x,\alpha)=0,\quad (x,\beta)=0$, 知 $x=(x_1,x_2,x_3)^T=\left(-1,1,0\right)^T$。

（2）能。$P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&2\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

注：也可以先将向量正交化单位化，利用正交矩阵求出A

九、（12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$，

（1）写出二次型对应的矩阵；

（2）用正交变换把二次型f化为标准形，并写出相应的正交矩阵。

解：

（1）二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6)$

A 的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$。

由 $(1E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

由 $(6E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_2=6$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$

由 $(-6E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_3=-6$ 的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。

单位化，$\eta_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\end{pmatrix}$，，$\eta_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

令 $Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 6 & \\ & & -6\end{pmatrix}$。

正交变换 $x=Qy$，标准形： $f=y_1{}^2+6y_2{}^2-6y_3{}^2$