

### 武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 A2 试题 (A)

1、(9 分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 - 2z = f(y^2 - 2z)$  所确定的隐函数, 其中  $f$  可微, 求证

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

2、(9 分) 设  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ , 计算二重积分  $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$ .

3、(9 分) 设  $C$  为圆周曲线  $x^2 + y^2 = 1$ , 计算曲线积分  $\int_C (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1) ds$ .

4、(9 分) 已知  $A(1, 0, 0), B(0, 2, 1)$ , 试在  $z$  轴上求一点  $C$ , 使  $\Delta ABC$  的面积最小。

5、(8 分) 3、设  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , 求  $f''_{xy}(0, 0)$  和  $f''_{yx}(0, 0)$

6、(9 分) 求过直线  $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$  并在  $y$  轴和  $x$  轴上有相同的非零截距的平面方程。

7、(8 分) 设  $f$  是任意二阶可导函数, 并设  $z = f(ay + x)$  满足方程  $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ,

试确定  $a$  的值。

8、(8 分) 在椭球面  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \tan z^2$  在该点沿曲线  $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$  在点  $(1, -1, -2)$  处的切线方向的方向导数最大。

9、(9 分) 计算曲线积分  $\int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x) dy + y dx$ , 其中有向曲线弧  $L: y = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$ , 方向从点  $B(5, 0)$  到点  $A(1, 0)$ .

10、(8 分) 已知  $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx, (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1}$  收敛, 并求其和。

11、(8 分) 求  $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + x^2 dx dy$ , 其中曲面  $\Sigma$  是由空间曲线  $\begin{cases} y = \sqrt{1 + z^2} \\ x = 0 \end{cases}$ ,  $1 \leq z \leq 2$  绕  $z$

轴旋转而成的旋转曲面, 其法向量与  $z$  轴正向的夹角为锐角。

12、(6 分) 设  $a, b$  为任意常数,  $f(x)$  在  $x = 0$  的邻域内具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad f''(x) \geq m > 0$$

试讨论级数  $af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \dots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}}) + \dots$  的敛散性。

## 武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 A2 试题 (A) 参考解答

1、(9 分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 - 2z = f(y^2 - 2z)$  所确定的隐函数, 其中  $f$  可微, 求证

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

解 令  $F(x, y, z) = x^2 - 2z - f(y^2 - 2z)$  则  $F_x = 2x, F_y = -2yf', F_z = -2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-x}{f' - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{yf'}{f' - 1} \quad \text{则 } y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

2、(9 分) 设  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ , 计算二重积分  $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$ .

$$\text{解 } \iint_D (x+1)y^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} y^2 dx dy = 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = 4 \int_0^1 y^2 (1-y) dy = \frac{1}{3}$$

3、(9 分) 设  $C$  为圆周曲线  $x^2 + y^2 = 1$ , 计算曲线积分  $\int_C (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1) ds$ .

$$\text{解 } \int_C (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1) ds = \int_C [(x^2 + y^2)^2 + 1] ds = 2 \int_C ds = 4\pi$$

4、(9 分) 已知  $A(1,0,0), B(0,2,1)$ , 试在  $z$  轴上求一点  $C$ , 使  $\Delta ABC$  的面积最小。

$$\text{解: 设 } C(0,0,z), \quad S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}$$

由  $(5z^2 - 2z + 5)' = 10z - 2 = 0$ , 当  $z = \frac{1}{5}$  时  $\Delta ABC$  的面积最小。

$$5、(8 分) \text{ 设 } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \text{ 求 } f''_{xy}(0,0) \text{ 和 } f''_{yx}(0,0)$$

$$\text{解. } f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{df(x,0)}{dx} \right|_{x=0}) = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{df(0,y)}{dy} \right|_{y=0}) = 0.$$

当  $y \neq 0$  时,

$$f'_x(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right|_{x=0}) = -y.$$

当  $x \neq 0$  时,

$$f'_y(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right|_{y=0}) = x.$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{d}{dy} f'_x(0,y) \right|_{y=0}) = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{d}{dx} f'_y(x,0) \right|_{x=0}) = 1.$$

6、(9分) 求过直线  $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$  并在  $y$  轴和  $x$  轴上有相同的非零截距的平面方程。

解 设经过直线的所有平面方程为:  $\lambda(2x - y - 2z + 1) + \mu(x + y + 4z - 2) = 0$

$$\text{即 } (2\lambda + \mu)x + (\mu - \lambda)y + (4\mu - 2\lambda)z = 2\mu - \lambda,$$

有题设知点  $(0, a, 0), (0, 0, a)$  在所求平面上 ( $a$  为非零实数), 故有

$$(\mu - \lambda)a = 2\mu - \lambda = (4\mu - 2\lambda)a \text{ 从而有 } \lambda = 3\mu$$

故所求平面方程为:  $7x - 2y - 2z + 1 = 0$

7、(8分) 设  $f$  是任意二阶可导函数, 并设  $z = f(ay + x)$  满足方程  $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ,

试确定  $a$  的值.

解: 令  $u = ax + y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot a$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot a$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot a^2, \text{ 代入 } 6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ 得 } 6f''(u) + af''(u) - a^2 f''(u) = 0,$$

$$\text{即 } a^2 - a - 6 = 0, \text{ 解得 } a = 3 \text{ 或 } a = -2.$$

8、(8分) 在椭球面  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \tan z^2$  在该点沿曲线  $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$  在点  $(1, -1, -2)$  处的切线方向的方向导数最大。

解: 由曲线  $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$  在点  $(1, -1, -2)$  处的法线方向向量为:

$$\{2t, -2, 3t^2 - 3\}|_{t=1} = 2\{1, -1, 0\} \text{ 其单位向量为: } \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1, 0\}$$

函数  $f(x, y, z)$  的方向导数的表达式为  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ .

$$\text{其中 } \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 2\{x, y, z \sec^2 z^2\} \quad \text{因此 } \frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}(x - y).$$

于是, 按照题意, 即求函数  $\sqrt{2}(x - y)$  在条件  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  下的最大值。设

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \text{解之得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4\lambda} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \\ z = 0 \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } S \text{ 上的点为 } (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0), \text{ 此时 } \frac{\partial f}{\partial l} = -\sqrt{3}$$

$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得 S 上的点为  $(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ , 此时  $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{3}$ ,

所以, 所求的 S 上的点为  $(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$

9、(9 分) 计算曲线积分  $\int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x) dy + y dx$ , 其中有向曲线弧  $L$ :  $y = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$ , 方向从点  $B(5, 0)$  到点  $A(1, 0)$ .

解 添加直线段  $\overline{BA}$ , 构成闭合曲线  $L + \overline{BA}$ , 使用格林公式. 记  $L + \overline{BA}$  所围域为  $D$

$$P = y, Q = \sqrt[3]{\sin y} - x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x) dy + y dx &= \left( \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} \right) [y dx + (\sqrt[3]{\sin y} - x) dy] \\ &= \iint_D (-2) dx dy - \int_1^1 0 dx = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = -2\pi \end{aligned}$$

10、(8 分) 已知  $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1}$  收敛, 并求其和.

解 由  $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 而  $\left| \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} \right| = \frac{1}{\pi n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$

由比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n(n+1)}$  收敛

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{且 } S_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \text{ 所以级数的和 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\pi}.$$

11、(8 分) 求  $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + x^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  夹在两平面  $z = 1$  与  $z = 2$  之间的部分, 其法向量与  $z$  轴正向的夹角为锐角。

解 解法一. 曲面  $\Sigma$ :  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ,  $1 \leq z \leq 2$ ,

在  $yoz$  平面上的投影为  $D_{yz} = \{(y, z) \mid -\sqrt{1+z^2} \leq y \leq \sqrt{1+z^2}, 1 \leq z \leq 2\}$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz = - \iint_{D_{yz}} z^2 \sqrt{1-y^2+z^2} dy dz + \iint_{D_{yz}} z^2 \left( -\sqrt{1-y^2+z^2} \right) dy dz \\ &= -2 \int_1^2 z^2 dz \int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \sqrt{1-y^2+z^2} dy \quad (5 \text{ 分}) = -\frac{128\pi}{15}. \end{aligned}$$

因  $\Sigma$  在  $xoy$  平面上的投影为  $D_{xy} = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$ , 所以

$$I_2 = \iint_{\Sigma} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \frac{21\pi}{4}.$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 = -\frac{197\pi}{60}.$$

解法二. 取  $\Sigma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ z = 2, \end{cases}$  法线向量与  $z$  轴正方向相反;

取  $\Sigma_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ z = 1, \end{cases}$  法线向量与  $z$  轴正方向相同。由高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} xz^2 dy dz + x^2 dx dy = - \iiint_{\Omega} z^2 dV = - \int_1^2 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = - \frac{128\pi}{15}.$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} xz^2 dy dz + x^2 dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 5} x^2 dx dy = \frac{25\pi}{4}.$$

$$\iint_{\Sigma_2} xz^2 dy dz + x^2 dx dy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} x^2 dx dy = -\pi.$$

$$\text{故 } I = -\frac{128\pi}{15} + \frac{25\pi}{4} - \pi = -\frac{197\pi}{60}.$$

12、(6分) 设  $a, b$  为任意常数,  $f(x)$  在  $x=0$  的邻域内具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad f''(x) \geq m > 0, \quad \text{试讨论级数:}$$

$af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}}) + \cdots$  的敛散性。

解 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  得:  $f(0) = f'(0) = 0$ , 再由  $f''(x) \geq m > 0$  知: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ,  $f(x)$

是单调增函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 故  $f(\frac{1}{\sqrt{n}})$  单调减且趋于 0, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(\frac{1}{\sqrt{n}})$  收敛。

当  $a = b$  时, 级数  $= a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ , 收敛。

$$\text{当 } a \neq b \text{ 时, } S_{2n} = af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})$$

$$= a[f(\frac{1}{\sqrt{1}}) - f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \cdots + f(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - f(\frac{1}{\sqrt{2n}})]$$

$$+ (a-b)[f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + f(\frac{1}{\sqrt{2n}})] = a\sigma_{2n} + (a-b)\delta_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2n}})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x^2} = \frac{f''(0)}{4} > \frac{m}{4} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \text{ 不存在,}$$

由 (1) 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n}$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$  不存在, 级数发散。