

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 A2 试题 (A)

1、(9 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 - 2z = f(y^2 - 2z)$ 所确定的隐函数, 其中 f 可微, 求证 $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

2、(9 分) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$.

3、(9 分) 设 C 为圆周曲线 $x^2 + y^2 = 1$, 计算曲线积分 $\int_C (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + 1) ds$.

4、(9 分) 已知 $A(1, 0, 0), B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

5、(8 分) 3、设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0, 0)$ 和 $f''_{yx}(0, 0)$

6、(9 分) 求过直线 $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$ 并在 y 轴和 x 轴上有相同的非零截距的平面方程.

7、(8 分) 设 f 是任意二阶可导函数, 并设 $z = f(ay + x)$ 满足方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

试确定 a 的值.

8、(8 分) 在椭球面 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \tan z^2$ 在该点沿曲线 $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$ 在点 $(1, -1, -2)$ 处的切线方向的方向导数最大.

9、(9 分) 计算曲线积分 $\int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x) dy + y dx$, 其中有向曲线弧 $L: y = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$, 方向从点 $B(5, 0)$ 到点 $A(1, 0)$.

10、(8 分) 已知 $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx, (n = 1, 2, 3, \dots)$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1}$ 收敛, 并求其和.

11、(8 分) 求 $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + x^2 dx dy$, 其中曲面 Σ 是由空间曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1 + z^2} \\ x = 0 \end{cases}, 1 \leq z \leq 2$ 绕 z

轴旋转而成的旋转曲面, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

12、(6 分) 设 a, b 为任意常数, $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(x) \geq m > 0$$

试讨论级数 $af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \dots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}}) + \dots$ 的敛散性.

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 A2 试题 (A) 参考解答

1、(9 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 - 2z = f(y^2 - 2z)$ 所确定的隐函数, 其中 f 可微, 求证 $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 - 2z - f(y^2 - 2z)$ 则 $F_x = 2x, F_y = -2yf', F_z = -2 + 2f'$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-x}{f'-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{yf'}{f'-1} \quad \text{则} \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

2、(9 分) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$.

$$\text{解} \quad \iint_D (x+1)y^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} y^2 dx dy = 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = 4 \int_0^1 y^2 (1-y) dy = \frac{1}{3}$$

3、(9 分) 设 C 为圆周曲线 $x^2 + y^2 = 1$, 计算曲线积分 $\int_C (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + 1) ds$.

$$\text{解} \quad \int_C (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + 1) ds = \int_C [(x^2 + y^2)^2 + 1] ds = 2 \int_C ds = 4\pi$$

4、(9 分) 已知 $A(1,0,0), B(0,2,1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小。

$$\text{解: 设 } C(0,0,z), \quad S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}$$

由 $(5z^2 - 2z + 5)' = 10z - 2 = 0$, 当 $z = \frac{1}{5}$ 时 $\triangle ABC$ 的面积最小。

5、(8 分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

$$\text{解. } f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{df(x,0)}{dx} \right|_{x=0}) = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{df(0,y)}{dy} \right|_{y=0}) = 0.$$

当 $y \neq 0$ 时,

$$f'_x(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right|_{x=0}) = -y.$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_y(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right|_{y=0}) = x.$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} \quad (\text{或 } \left. \frac{d}{dy} f'_x(0,y) \right|_{y=0}) = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} \quad (\text{或 } \left. \frac{d}{dx} f'_y(x,0) \right|_{x=0}) = 1.$$

6、(9分) 求过直线 $\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$ 并在 y 轴和 x 轴上有相同的非零截距的平面方程。

解 设经过直线的所有平面方程为: $\lambda(2x - y - 2z + 1) + \mu(x + y + 4z - 2) = 0$

即 $(2\lambda + \mu)x + (\mu - \lambda)y + (4\mu - 2\lambda)z = 2\mu - \lambda$,

有题设知点 $(0, a, 0), (0, 0, a)$ 在所求平面上 (a 为非零实数), 故有

$$(\mu - \lambda)a = 2\mu - \lambda = (4\mu - 2\lambda)a \quad \text{从而有 } \lambda = 3\mu$$

故所求平面方程为: $7x - 2y - 2z + 1 = 0$

7、(8分) 设 f 是任意二阶可导函数, 并设 $z = f(ay + x)$ 满足方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

试确定 a 的值.

解: 令 $u = ax + y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot a$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot a$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot a^2, \quad \text{代入 } 6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ 得 } 6f''(u) + af''(u) - a^2 f''(u) = 0,$$

即 $a^2 - a - 6 = 0$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -2$.

8、(8分) 在椭球面 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \tan z^2$ 在该点沿曲线 $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$ 在点 $(1, -1, -2)$ 处的切线方向的方向导数最大。

解: 由曲线 $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$ 在点 $(1, -1, -2)$ 处的法线方向向量为:

$$\{2t, -2, 3t^2 - 3\} \Big|_{t=1} = 2\{1, -1, 0\} \text{ 其单位向量为: } \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1, 0\}$$

函数 $f(x, y, z)$ 的方向导数的表达式为 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ 。

其中 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 2\{x, y, z \sec^2 z^2\}$ 因此 $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}(x - y)$ 。

于是, 按照题意, 即求函数 $\sqrt{2}(x - y)$ 在条件 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值。设

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解之得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4\lambda} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 S 上的点为 $(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$, 此时 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\sqrt{3}$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } S \text{ 上的点为 } (\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0), \text{ 此时 } \frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以, 所求的 } S \text{ 上的点为 } (\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$$

9、(9 分) 计算曲线积分 $\int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x)dy + ydx$, 其中有向曲线弧 $L: y = \sqrt{4 - (x-3)^2}$, 方向从点 $B(5,0)$ 到点 $A(1,0)$.

解 添加直线段 \overline{BA} , 构成闭合曲线 $L + \overline{BA}$, 使用格林公式. 记 $L + \overline{BA}$ 所围域为 D

$$P = y, Q = \sqrt[3]{\sin y} - x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} \int_L (\sqrt[3]{\sin y} - x)dy + ydx &= \left(\oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} \right) [ydx + (\sqrt[3]{\sin y} - x)dy] \\ &= \iint_D (-2)dx dy - \int_1^{-1} 0dx = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = -2\pi \end{aligned}$$

10、(8 分) 已知 $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx, (n=1,2,3,\dots)$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1}$ 收敛, 并求其和。

$$\text{解 由 } b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} (n=1,2,3,\dots), \text{ 而 } \left| \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} \right| = \frac{1}{\pi n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

$$\text{由比较判别法知, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n(n+1)} \text{ 收敛}$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{且 } S_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \text{ 所以级数的和 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\pi}.$$

11、(8 分) 求 $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dydz + x^2 dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 夹在两平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角。

解 解法一. 曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 1, 1 \leq z \leq 2$,

$$\text{在 } yoz \text{ 平面上的投影为 } D_{yz} = \left\{ (y, z) \mid -\sqrt{1+z^2} \leq y \leq \sqrt{1+z^2}, 1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma} xz^2 dydz = - \iint_{D_{yz}} z^2 \sqrt{1-y^2+z^2} dydz + \iint_{D_{yz}} z^2 \left(-\sqrt{1-y^2+z^2} \right) dydz \\ &= -2 \int_1^2 z^2 dz \int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \sqrt{1-y^2+z^2} dy \quad (5 \text{ 分}) = -\frac{128\pi}{15}. \end{aligned}$$

因 Σ 在 xoy 平面上的投影为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$, 所以

$$I_2 = \iint_{\Sigma} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \frac{21\pi}{4}.$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 = -\frac{197\pi}{60}.$$

解法二. 取 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ z = 2, \end{cases}$ 法线向量与 z 轴正方向相反;

取 $\Sigma_2: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ z = 1, \end{cases}$ 法线向量与 z 轴正方向相同。由高斯公式, 得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xz^2 dydz + x^2 dx dy = - \iiint_{\Omega} z^2 dV = - \int_1^2 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = - \frac{128\pi}{15}.$$

$$\text{而} \quad \iint_{\Sigma_1} xz^2 dydz + x^2 dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 5} x^2 dx dy = \frac{25\pi}{4}.$$

$$\iint_{\Sigma_2} xz^2 dydz + x^2 dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 2} x^2 dx dy = -\pi.$$

$$\text{故} \quad I = -\frac{128\pi}{15} + \frac{25\pi}{4} - \pi = -\frac{197\pi}{60}.$$

12、(6 分) 设 a, b 为任意常数, $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶连续导数, 且

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(x) \geq m > 0$, 试讨论级数:

$af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}}) + \cdots$ 的敛散性。

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 得: $f(0) = f'(0) = 0$, 再由 $f''(x) \geq m > 0$ 知: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0, f(x)$

是单调增函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 故 $f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调减且趋于 0, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 收敛。

当 $a = b$ 时, 级数 $= a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(\frac{1}{\sqrt{n}})$, 收敛。

当 $a \neq b$ 时, $S_{2n} = af(\frac{1}{\sqrt{1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2}}) + af(\frac{1}{\sqrt{3}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})$

$$= a[f(\frac{1}{\sqrt{1}}) - f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \cdots + f(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) - f(\frac{1}{\sqrt{2n}})]$$

$$+ (a-b)[f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots + f(\frac{1}{\sqrt{2n}})] = a\sigma_{2n} + (a-b)\delta_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2n}})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x^2} = \frac{f''(0)}{4} > \frac{m}{4} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \text{ 不存在,}$$

由 (1) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n}$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 不存在, 级数发散。