一. 选择题

C　D　C　D　A　B

二、填空题（32 分，每题 4 分）

1. $P(B|\bar{A})=4/7$　　2. $f_Y(y)=\begin{cases}1/4\sqrt{y}, & 0<y<4,\\ 0 & 其\ 他\end{cases}$　　3. 74/85

4. $P(a<X\le b, a<Y\le b)=F(b,b)-F(a,b)-F(b,a)+F(a,a)$

5. $\text{cov}(X,Y)=0.1$　　6. $P(X_1=X_2)=0$　　7. $P(|X+Y|\ge 6)\le 11/12$

8. 1/2, 1/4, 2, 卡方　（1/2, 0, 1, 卡方）　（0, 1/4, 1, 卡方）

三、计算与应用题（每题 10 分，共 50 分）

1．解：令 A={抽出一球为白球}，　B_t={盒子中有 t 个白球}，$t=0,1,2,\cdots,5$ ．

由已知条件，$P(B_t)=\dfrac{1}{6}$，$P(A|B_t)=\dfrac{t}{5}$, $t=0,1,2,\cdots,5$，

由全概率公式，$P(A)=\sum\limits_{t=0}^{5}P(B_t)P(A|B_t)=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{t=0}^{5}\dfrac{t}{5}=\dfrac{1}{2}$，

由 Bayes 公式，$P(B_5|A)=\dfrac{P(B_5)P(A|B_5)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\sum\limits_{t=0}^{5}\frac{t}{5}}=\dfrac{1}{3}.$

2、　解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}cxdxdy=\dfrac{c}{3}=1\Rightarrow c=3.$

（1）$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3(1-y^2)}{2}, & 0<y<1;\\ 0, & 其他\end{cases}$ 。

（2）$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，X 与 Y 不独立。

（3）$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x+y>1\\0<y<x<1}}3xdxdy=\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-x}^{x}3xdy\right)dx=5/8$

3. 解：（1）设 X_i 为第 i 盒的价格，则总价 $X=\sum\limits_{i=1}^{300}X_i$，$\mu=E(X_i)=18$, $\sigma^2=D(X_i)=3$，

$$P(5350 \le X = \sum_{i=1}^{300} X_i \le 5450) = P(\frac{5350-300\times 18}{\sqrt{300\times 3}} \le \frac{X-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{5450-300\times 18}{\sqrt{300\times 3}})$$

$\approx 2\Phi(5/3)-1 = 2\Phi(1.67)-1$。

（2）设Y_i为第 i 盒的利润，$E(Y_i)=4.1,\quad D(Y_i)=0.49$，

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i > 1000) = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\times 4.1}{\sqrt{n\times 0.49}} > \frac{1000-n\times 4.1}{\sqrt{n\times 0.49}}) > 0.95 \Rightarrow \frac{1000-n\times 4.1}{\sqrt{n\times 0.49}} < -1.65,$$

，

$n\times 4.1 - 1.65\times 0.7\times\sqrt{n} - 1000 > 0,\qquad$ 得$n \ge 249$。

4. 解：（1） 矩估计：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\theta}^{\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \theta+1,$ 矩估计量 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}-1$。

似然函数为$L(\theta)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}\left(e^{-(x_i-\theta)}\right), & x_i \ge \theta, i=1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，似然函数为$\theta$的增函数， θ的最大似然估计量

$\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = X_{(1)}$。

（2）$\hat{E}(\hat{\theta}_1)=E(\bar{X}-1)=\theta$， 矩估计量$\hat{\theta}_1$为$\theta$的无偏估计；$\hat{E}(\hat{\theta}_2)=E(X_{(1)})=\frac{1}{n}+\theta\ne\theta$，最大似然估计量$\hat{\theta}_2$不是$\theta$的无偏估计。

5. 解：检验两个假设问题 $(1) H_0: \mu=30; \qquad H_1: \mu \ne 30 \qquad (2) H_0: \sigma \le 0.5 \quad H_1: \sigma > 0.5$

对（1），检验统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，拒绝域 $\{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$， $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.064$，

$|t|=\left|\frac{30.18-30}{0.6/\sqrt{25}}\right|=1.5<2.064$ ，没有落在拒绝域中，故接受原假设，可认为零件平均高度为 30 毫米。。

对（2），拒绝域为 $\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)\right\}$ ，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=34.56<\chi_\alpha^2(24)=36.42$，没有落在拒绝域中，故接受原假设。

可以认为包装机工作正常。