

# 武汉大学 2010-2011 学年第二学期

## 《高等数学 B2》考试试卷 (A 卷)

一、 计算题: (每题 7 分, 共 63 分)

1. 设一平面过原点及点  $(6, -3, 2)$ , 且与平面  $4x - y + 2z = 8$  垂直, 求此平面的方程.

2. 设  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中  $f$  具有连续二阶偏导数, 函数  $g(x)$  可导且在  $x = 2$  处取得极值  $g(2) = 1$ . 求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=2, y=1}.$$

3. 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值.

4. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 并设  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(y) dy$ .

5. 设  $f(u)$  具有连续导数, 求  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$ .

6. 计算曲面积分  $\oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $S$  为立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的表面外侧.

7. 将函数  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 展成以 2 为周期的傅里叶级数.

8. 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

9. 求方程  $(1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y}) dy = 0$  的通解.

二、(8 分) 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$  的收敛性, 若收敛, 请指出是条件收敛还是绝对收敛.

三、(10 分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数,  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内从  $(a, b)$  到  $(c, d)$  的有向分段

光滑曲线, 记  $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$ .

(1) 证明: 曲线积分  $I$  与路径  $L$  无关. (2) 当  $ab = cd$  时, 求  $I$  的值.

四、(9 分) 求幂级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$  ( $|x| < 1$ ) 的和函数  $f(x)$  及其极值.

五、(10 分) 在变力  $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$  的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上第一卦限

的点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 问当  $x_0, y_0, z_0$  取何值时, 力  $\vec{F}$  所作的功最大, 并求出最大值.

# 武汉大学 2010-2011 学年第二学期

## 《高等数学 B2》考试 (A 卷) 标准答案

一、 计算题: (每题 7 分, 共 63 分)

1. 平面方程为  $x + y - \frac{3}{2}z = 0$

2.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=2, y=1} = 2f_{11}''(2,1) + f_{12}''(2,1) + f_1'(2,1)$

3. 先求出使得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  的点为  $(9, 3, 3)$  和  $(-9, -3, -3)$ , 然后验证  $(9, 3)$  是  $z(x, y)$  的极小值点, 极小值为 3,

$(-9, -3)$  是  $z(x, y)$  的极大值点, 极大值为  $-3$ 。

4.  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}A^2$

5.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz = \begin{cases} f'(0), & \text{若 } f(0) = 0 \\ \infty, & \text{若 } f(0) \neq 0 \end{cases}$

6.  $6\pi$

7.  $f(x) \sim \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-1, 1]$ 。

8.  $\frac{\pi}{2} \ln 2$  (其中利用到  $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$  是奇函数)

9. 方程是全微分方程, 所以  $u(x, y) = x + ye^y - 1 = C$  为通解。

二、  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \right| > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 以及 Leibniz 法则判断原级数收敛, 所以为条件收敛

三、  $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

四、收敛半径为 1,  $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) (|x| < 1)$ , 在  $x=0$  处取得极大值  $f(0) = 1$ 。

五、做功为  $W = x_0 y_0 z_0$ , 利用 Lagrange 乘子法可得  $W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$