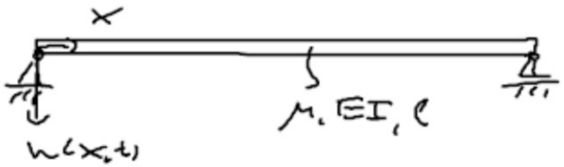
1.2.6 Rayleigh Quotient

Dient der Abschätzung von Eigenkreisfrequenzen.
Zuerst Betrachtung eines Falls, der analytisch (exakt) gelöst werden kann:



Balken: Schwingen in erster Eigenform

$$w(x,t) = \hat{w} \sin\pi\frac{x}{l} \sin\omega_1 t \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Jetzt Betrachtung der potentiellen Energie und der kinetischen Energie

Zustand 1

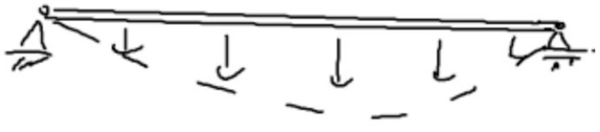
Max. Auslenkung $\qquad \sin(\omega_1 t) = 1$

Maximum potentieller Energie

$$U_1 = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} EI\, w''^2(x)\, dx \qquad T_1 = 0$$

für gezeichnete Lage

Zustand 2



$\dot{w}(x,t)$

Maximale Geschwindigkeit $\qquad \cos(\omega_1 t) = 1$

Maximum kinetischer Energie

$$U_2 = 0 \qquad T_2 = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} m\, \dot{w}^2(x,t)\, dx$$

für gezeichnete Lage / Geschw.

Erste Eigenform: $\quad W_1(x) = \hat{w} \sin \pi \frac{x}{\ell}$

Schwingung in erster Eigenform: $\quad w(x,t) = W_1(x) \sin \omega_1 t \qquad \dot{w}(x,t) = W_1(x)\, \omega_1 \cos \omega_1 t$

Damit $$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^l EI \underbrace{w_1''^2(x)}_{w''^2(x,t);\ \sin\omega_1 t = 1} dx \qquad T_2 = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \underbrace{w_1^2(x)}_{\dot{w}^2(x,t);\ \cos\omega_1 t = 1} \omega_1^2 \, dx$$

Energiesatz $$\cancel{T_1} + U_1 = T_2 + \cancel{U_2}.$$

Einsetzen und Auflösen nach ω_1^2

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI\, w_1''^2(x)\, dx}{\int_0^l \mu\, w_1^2(x)\, dx}$$

Nun Anwendung als Näherungsverfahren

Erinnerung an Randbedingungen: — geometr. RBen

— dyn. RBen

Betrachtet wird nun ein Randwertproblem (RWP) bestehend aus Feldgleichung, geometrischen und dynamischen RBen.

Funktionenklassen:

1. zulässige Funktionen: erfüllen die geometrischen Randbedingungen

2. Vergleichsfunktionen: ~ alle RBen

3. Eigenfunktionen: erfüllen alle RBen und die homogene Feldgleichung (keine Anregung)

Wählt man nun in

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^\ell EI\, w_1''^2(x)\, dx}{\int_0^\ell \mu\, w_1^2(x)\, dx}$$

statt der exakten Lösung $w_1(x)$ (Eigenfunktion) zulässige Funktionen $\tilde{w}_1(x)$, z. B. weil die Vergleichsfunktionen nicht bekannt sind, für die erste Eigenform, dann gilt

$$\omega_1^2 = \min_{\tilde{w}_1} \frac{\int_0^\ell EI\, \tilde{w}_1''^2(x)\, dx}{\int_0^\ell \mu\, \tilde{w}_1^2(x)\, dx}$$

Rayleighsch Prinzip (ohne Beweis)

Also ist

$$\boxed{\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^\ell EI\, \tilde{w}_1''^2(x)\, dx}{\int_0^\ell \mu\, \tilde{w}_1^2(x)\, dx}}$$

eine Näherung für ω_1^2.

$\tilde{w}_1(x)$ ist eine zulässige Funktion (erfüllt geometr. RBen)

Es gilt immer $\boxed{\tilde{\omega}_1^2 \geq \omega_1^2}$

Der Rayleigh-Quotient überschätzt immer die wirkliche Eigenkreisfrequenz. Setzt man die Eigenform ein, so ergibt sich die exakte Lösung.

Für andere Lastarten entsprechende Ausdrücke:

Längsschwingungen

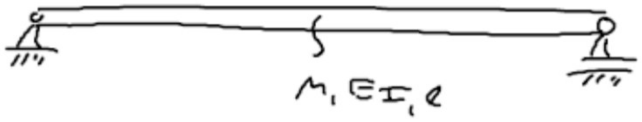
$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l EA\, \tilde{u}'^2(x)\, dx}{\int_0^l \mu\, \tilde{u}^2(x)\, dx}$$

Balken mit Vorspannung

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\, \tilde{w}''^2(x) + \overset{\swarrow\ \text{Zugkraft}}{F}\, \tilde{w}'^2(x) \right) dx}{\int_0^l \mu\, \tilde{w}^2(x)\, dx}$$

Bsp. 1.2.6.1

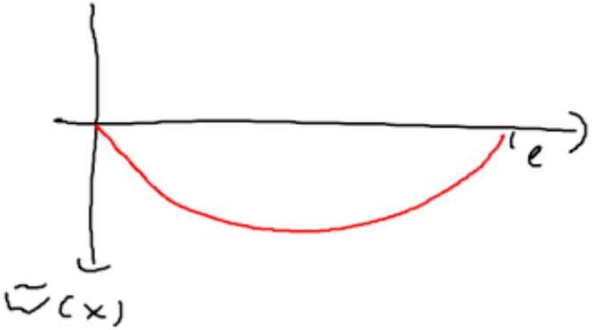
Erste Eigenkreisfrequenz des Euler-Bernoulli-Balkens



Geometr. RBen

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

Näherung der Eigenform durch Polynom



$$\tilde{w}_1(x) = \hat{w}\left(1 - 4\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

exakte Lösung $w_1(x) = \hat{w} \sin \pi \frac{x}{l}$

$$\tilde{w}_1''(x) = \hat{w}\,(-8)\,\frac{1}{l^2}$$

Im Rayleigh - Quotient

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l EI\, \hat{w}^2 \left((-8) \frac{1}{l^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \mu \hat{w}^2 \left(\left(1 - 4\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right) \right)^2 dx} = 120 \frac{EI}{l^4 \mu}$$

Exakte Lösung

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{l^4 \mu} = 97{,}4 \frac{EI}{l^4 \mu}$$

$\tilde{\omega}_1^2 > \omega_1^2$

wie behauptet.

Vergleich der exakten und der durch Polynom angenäherten 1. Eigenform:

```
W̃ = 1 - 4 * (x / l - 1 / 2) ^2;
ω̃ = Sqrt[EI / μ * Integrate[(D[W̃, x, x]) ^2, {x, 0, l}] / Integrate[W̃^2, {x, 0, l}]]
     Quadratwurzel integriere    leite ab                integriere
l = 1;
Plot[{Sin[π * x / l], 1 - 4 * (x / l - 1 / 2) ^2}, {x, 0, 1}]
stelle··· Sinus
Quit[]
beende Kernel
```

$$2\sqrt{30}\,\sqrt{\frac{EI}{l^4\,\mu}}$$