Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik

WS 23/24

Projekt Wärmeleitung

2. Hausaufgabe

Abgabe: 23.01.2024

Abbildung (1) zeigt das diskretisierte Rechengebiet aus der letzten Hausaufgabe. In dieser Hausaufgabe sollen allerdings nicht alle Randvolumen über Dirichlet-Randbedingungen beschrieben werden. Stattdessen werden nur die Kontrollvolumen zu den diskreten Rechenpunkten T_i mit $i = 9, 13, 14$ als Dirichlet-Randbedingungen und T_{10} weiterhin als innere Dirichlet-Randbedingung beschrieben. Bei einer Verfeinerung des Gebiets werden die Randbedingungen analog zur letzten Hausaufgabe behandelt, sodass der rechte obere Quadrant stets aus Kupfer besteht und eine konstante Temperatur von $100C$ besitzt. Die übrigen Randvolumen, die in Abbildung 1 grün gekennzeichnet sind, werden über Cauchy-Randbedingungen beschrieben. Die Umgebungstemperatur soll der Raumtemperatur, also $T_\infty = 21C = 294,15K$, entsprechen. Der Wärmeübergangskoeffizient von PVC zur Umgebung ist durch $h_{PVC} = 23\frac{W}{mK}$ definiert. Alle sonstigen Parameter sind aus der ersten Hausaufgabe zu übernehmen.

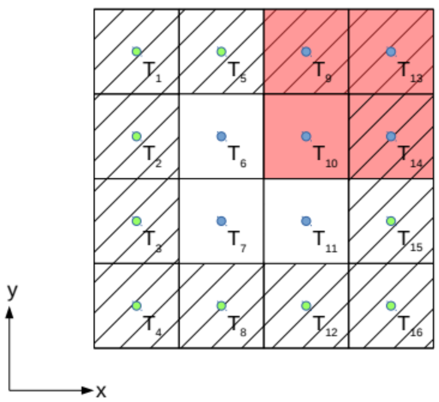

Abbildung 1: diskretisiertes Rechengebiet mit 4x4 Gitterzellen

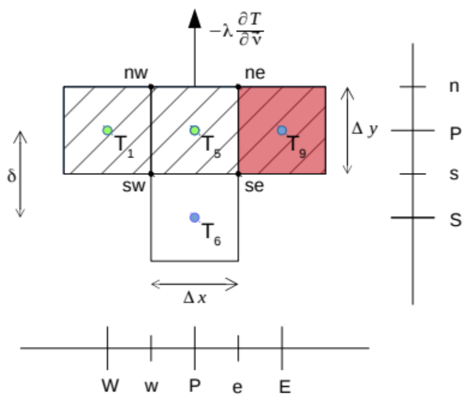

Abbildung 2: Randvolumen zu Rechenpunkt T_5

Aufgabe 1 Theorie-Aufgabe

a) Leitet die allgemeine Randvolumengleichung in zusammengefasster (implementierfertiger) Schreibweise analog zur inneren Kontrollvolumengleichung aus dem Skript für die **Neumann-Randbedingung** her. Bei den Neumann-Randbedingungen wird ein konstanter Wärmestrom $-\dot{q}_B = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$ vorgegeben. Zeigt das Vorgehen anschließend exemplarisch für das Randvolumen zum Rechenpunkt T_5 (siehe Abbildung 2). Startet ausgehend von Gleichung (1) (im Skript (8.36)), die mathematisch noch exakt ist:

$$0 = \int_{se}^{ne} \lambda\frac{\partial T}{\partial x}dy + \int_{ne}^{nw} \lambda\frac{\partial T}{\partial y}dx - \int_{nw}^{sw} \lambda\frac{\partial T}{\partial x}dy - \int_{sw}^{se} \lambda\frac{\partial T}{\partial y}dx + \int_{w}^{e}\int_{s}^{n} \pi dydx. \tag{1}$$

Setzt in Gleichung (1) den durch die Randbedingung vorgegebenen Wärmefluss direkt ein. Approximiert anschließend die Integrale, sowie die nicht vorgegebenen Flüsse (Ableitungen). Wie verändern sich die Systemmatrix A und der Vektor $\vec{S}$?

Hinweis: Diese Aufgabe soll lediglich eine Überprüfung eures Verständnisses für die Rechenschritte im Skript darstellen. Die Randbedingungen der grün markierten Kontrollvolumen sollen in der Programmieraufgabe weiterhin durch Cauchy-RB implementiert werden.

b) Führt analog zu a) die Herleitung der Kontrollvolumengleichung für das Randvolumen T_1 aus Abbildung 1 durch, wobei die Randbedingungen nach Norden und Westen durch **Cauchy-Randbedingungen** definiert sind. Wie verändern sich die Systemmatrix A und der Vektor $\vec{S}$?

Aufgabe 2 Programmieraufgabe

a) Implementiert die Cauchy-Randbedingungen wie im ersten Absatz beschrieben und in Abbildung 1 dargestellt in euren bestehenden Code aus der letzten Hausaufgabe. Beachtet, dass die Diskretisierung und die Maße des Gebiets beliebig variiert werden können. *Hinweis:* Die Quellterme sollen auch in diesem Beispiel weiterhin über die Dirichlet-Randbedingungen beschrieben werden.

b) Führt für euer Programm aus Aufgabe 2 a) eine Gitteranalyse durch: Wählt dafür 5 repräsentative Punkte im Gebiet aus (keine Punkte, die durch eine Dirichlet-Randbedingung beschrieben werden). Berechnet anschließend für verschieden feine Diskretisierungen die Temperaturen dieser Punkte. Achtet darauf, dass sich die Punkte durch die feineren Diskretisierungen in unterschiedlichen Kontrollvolumen befinden. Berechnet nun den absoluten oder relativen Fehler, wobei als richtiges Ergebnis die feinste Diskretisierung gewählt werden kann. Stellt den Fehler anschließend grafisch dar. Stellt diesem Graphen die Rechenzeit des Verfahrens für die verschiedenen Diskretisierungen gegenüber. In Abbildung 3 ist ein Beispiel für die Form des Plots dargestellt. Die Initialisierung der Achsen ist natürlich von euren Ergebnissen abhängig. Diskutiert anschließend eure Ergebnisse und wählt die für euch optimale Diskretisierung. Begründet diese Wahl ausreichend.

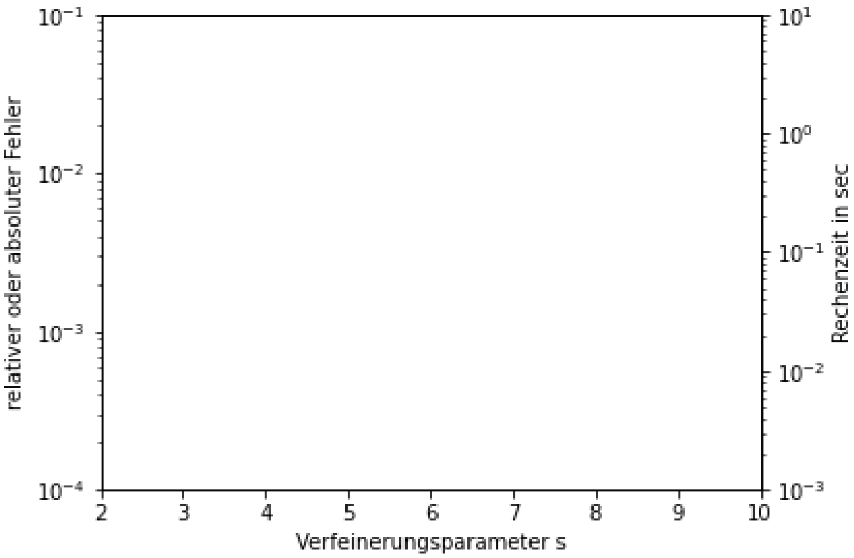

Abbildung 3: Beispiel für die Grafik der Gitteranalyse