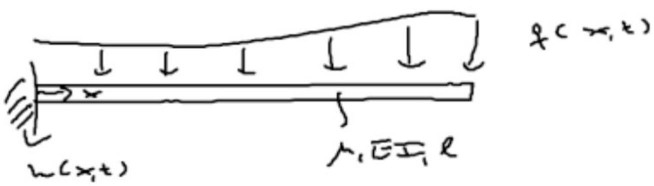
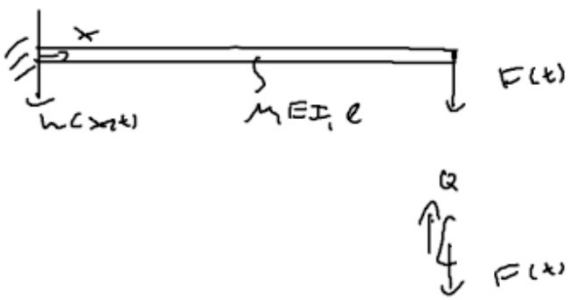
1.2.7 Erzwungene Schwingungen des Euler-Bernoulli-Balkens



Feldgl.: $\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} = q(x,t)$ Anregung in Feldgl.

RBen: $w(0)=0$, $w'(0)=0$

$w''(l)=0$, $w'''(l)=0$



Feldgl.: $\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} = 0$

RBen: $w(0)=0$, $w'(0)=0$

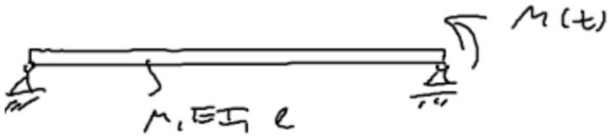
$w''(l)=0$ $F(t) = Q(l,t) = -EI\, w'''(l,t)$

Anregung in RB

Exakte Lösungen sind leider nur in Einzelfällen einfach zu berechnen.

Hier harmonische Anregung mit Kreisfrequenz Ω.

Bsp. 1.2.7.1



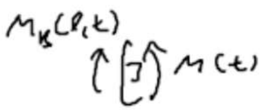
$$M(t) = M_0 \cos \Omega t$$

Gesucht ist eine stationäre Partikulärlösung $w_p(x,t)$

Feldgleichung: $\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} = 0$

geometr. RBen: $w(0,t) = w(\ell,t) = 0$

dyn. RBen: $w''(0,t) = 0$ (li. kein Moment)



$$M_B(\ell,t) = \underbrace{-EI\, w''(\ell,t) = M(t) = M_0 \cos \Omega t}_{\text{dyn. RB}}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite $w_p(x,t) = W(x) \cos \Omega t$

In Feldgleichung

$$-\mu \Omega^2 w(x) \cancel{\cos \Omega t} + EI\, w^{IV}(x) \cancel{\cos \Omega t} = 0$$

$$\underline{w^{IV}(x) - \lambda^4 w(x) = 0} \quad (*) \qquad \lambda^4 = \frac{\mu \Omega^2}{EI}$$

geometr. RBed mit Ansatz : $\underline{w(0) = w(\ell) = 0}$

dyn. RBed " " : $\underline{w''(0) = 0}$

$$-EI\, w''(\ell, t) = M_0 \cos \Omega t \quad \rightarrow \quad -EI\, w''(\ell) \cancel{\cos \Omega t} = M_0 \cancel{\cos \Omega t}$$

Zu lösen!

$$\underline{w''(\ell) = -\frac{M_0}{EI}}$$

Allgemeine Lösung der Dgl. (*)

$$w(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x$$

$$w''(x) = -\lambda^2 A \sin \lambda x - B \lambda^2 \cos \lambda x + C \lambda^2 \sinh \lambda x + D \lambda^2 \cosh \lambda x$$

$$\left.\begin{array}{lll} w(0) = 0 & \Rightarrow & B + D = 0 \\ w''(0) = 0 & \Rightarrow & \lambda^2(-B + D) = 0 \end{array}\right\} \quad B = D = 0$$

$$w''(\ell): \quad -\lambda^2 A \sin\lambda\ell + C\lambda^2 \sinh\lambda\ell = -\frac{M_0}{EI} \qquad (1)$$

$$w(\ell): \quad A \sin\lambda\ell + C \sinh\lambda\ell = 0 \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$C = -\frac{1}{2}\frac{M_0}{EI\lambda^2 \sinh\lambda\ell} \quad ; \quad A = \frac{1}{2} M_0 \frac{1}{EI\lambda^2 \sin\lambda\ell}$$

Also
$$\underline{w(x) = \frac{1}{2}\frac{M_0}{EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda\ell} - \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda\ell}\right)} \qquad \lambda^4 = \frac{\mu\Omega^2}{EI}$$

$w(x) \to \infty$ wenn $\sin\lambda\ell = 0$, d. h. $\Omega = \omega_k$, $k = 1, 2, \dots$, $\Rightarrow$ <u>Resonanz</u>

Erregerkreisfr. k-te Eigenkreisfr.

Nähert sich λ einem Wert $k \cdot \pi$ an:

- die Amplitude steigt stark an
- $w(x)$ entspricht nahezu der k-ten Eigenform
- Phasensprung bei Durchlaufen von ω_k

1.2.8 Galerkin-Verfahren

Hier nur ansatzweise eingeführt.

Näherungsverfahren, wenn keine exakte Lösung gefunden wird. Gilt für freie **und** erzwungene Schwingungen.
Hier für Transversalschwingungen $w(x,t)$:

gemischter Ritz-Ansatz

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, p_i(t)}$$

wird vorgegeben

$F_i(x)$ sind Vergleichsfunktionen, d.h. sie erfüllen mindestens die geometrischen **und** die dynamischen Randbedingungen; $p_i(t)$ ist unbekannt.

Für $F_i(x)$ eignen sich bei erzwungenen Schwingungen z.B. die Eigenformen des Systems.

Gezeigt am Beispiel von Balkenschwingungen:

$\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} = q(x,t)$ beliebige RBen, die durch $F_i(x)$ erfüllt werden

Ansatz $w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, p_i(t)$ einsetzen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mu F_i(x)\, \ddot{p}_i(t) + EI\, F_i^{IV}(x)\, p_i(t) \right) - q(x,t) = e \leftarrow \text{Fehler}$$

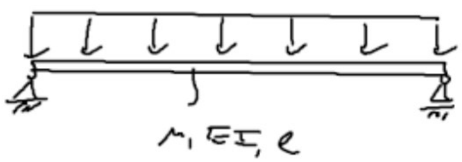
Das Galerkin-Verfahren fordert als Fehlerminimierung:

$$\int_0^l e \cdot F_j(x)\, dx \overset{!}{=} 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Projektion des Fehlers auf die Ansatzfunktionen verschwindet im integralen Mittel. Resultat sind n gekoppelte gewöhnliche Dgln. für die $p_j(t)$.

Bsp. 1.2.8.1

$$\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} = q(x,t)$$



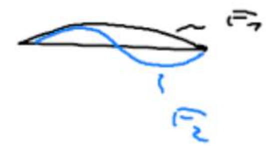
$$q(x,t) = q_0 \sin \Omega t$$

RBen: $w(0) = w(l) = 0 \qquad w''(0) = w''(l) = 0$

Als Ansatzfunktionen werden die ersten zwei Eigenformen gewählt:

$$F_1(x) = \sin \pi \frac{x}{l} \; ; \quad F_2(x) = \sin 2\pi \frac{x}{l}$$

(erfüllen alle RBen)



Gemischer Ritz-Ansatz:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{2} \sin j\pi \frac{x}{l}\, p_j(t)$$

in Feldgleichung

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\mu \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \ddot{p}_i(t) + EI \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) p_i(t) \right) - q_0 \sin \Omega t = \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\mu \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \ddot{r}_i(t) + EI \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) r_i(t) \right) - q_0 \sin \Omega t = e$$

Jetzt Anwendung des Galerkin-Verfahrens:

$j=1 \qquad \int_0^l e \underbrace{\sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)}_{F_1(x)} dx \stackrel{!}{=} 0$

Einige dieser Integrale ergeben Null.

$j=2 \qquad \int e \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right) dx \stackrel{!}{=} 0$

$j=1 \qquad \frac{1}{2} \mu l \ddot{r}_1(t) + \frac{1}{2} EI l \frac{\pi^4}{l^4} r_1(t) - \frac{2l}{\pi} q_0 \sin \Omega t = 0$

oder

$$\boxed{\ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) = \frac{4}{\mu\pi} q_0 \sin \Omega t}$$

mit $\omega_1^2 = \frac{EI}{\mu} \frac{\pi^4}{l^4}$

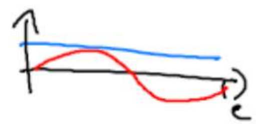
$\underline{\Omega = \omega_1 \quad \text{Resonanz}}$ 1. Eigenkreisfrequenz des Balkens.

$j=2$ $\qquad \frac{1}{2}\mu l \, \ddot{p}_2(t) + \frac{1}{2} EI \, l \, 16 \frac{\pi^4}{l^4} \, p_2(t) = 0$

$$\boxed{\ddot{p}_2(t) + \omega_2^2 \, p_2(t) = 0} \qquad \omega_2^2 = 16 \frac{EI}{\mu} \frac{\pi^4}{l^4} \quad \text{2. Eigenkreisfrequenz}$$

keine Anregung der 2. Eigenform, da

$$\int_0^l \underbrace{q_0}_{\text{Form der Anregung}} \underbrace{\sin 2\pi \frac{x}{l}}_{\text{2. Eigenform}} \, dx = 0 \text{ ist.}$$

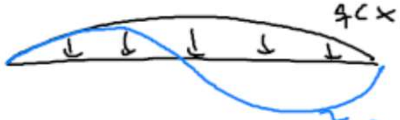


Anm.: Sei $q(x,t) = q_0(x) \sin \Omega t$ eine beliebige Anregung.

Dann entsteht im Galerkin-Verfahren der Term $\int F_i(x) \, q_0(x) \sin \Omega t \, dx$

Ist dies $= 0$ kann die Schwingform $F_i(x)$ nicht angeregt werden, d.h. es kann auch keine Resonanz geben.

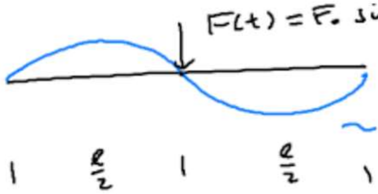
Bsp.:



$\int = 0$ d.h. keine Anregung der 2. Eigenform

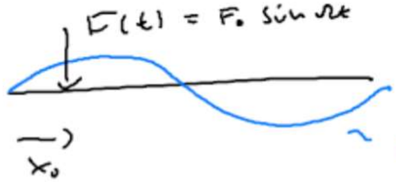
$\uparrow$

keine Resonanz für $\Omega = \omega_2$



$$\int F_0 \, \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \cdot F_2(x) \, dx = 0$$

weil $F_2\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0$



$$\int F_0 \, \delta(x - x_0) \, F_2(x) \, dx \neq 0$$

weil $F_2(x_0) \neq 0$