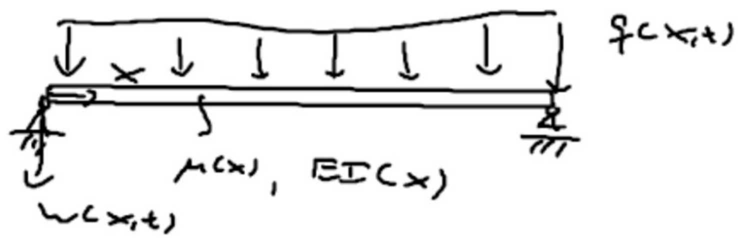
Kontinuumsmechanik VL 6

1.2 Biegeschwingungen von Balken

1.2.1 Feldgleichung des Euler-Bernoulli-Balkens

gemäß elementarer Balkentheorie von Euler-Bernoulli

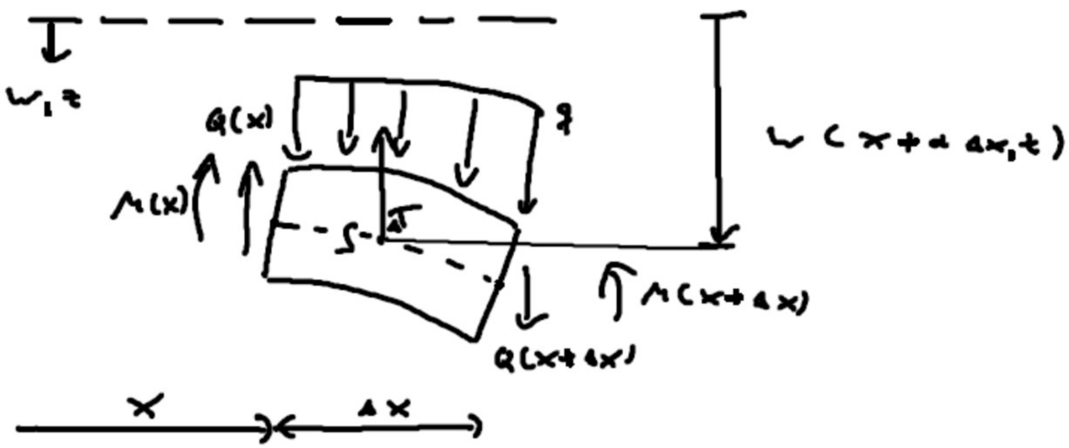


Annahmen zu Balkenbiegung aus der Vorlesung Festigkeitslehre:

- Balkenachse im unverformten Zustand gerade
- Punkte in einer Ebene senkrecht zur Balkenachse bleiben auch im verformten Zustand senkrecht dazu (ebener Querschnitt, keine Wölbung)

-> Annahmen gelten hier unverändert fort!

Freischnitt eines Balkenelements:



Schwerpunkt S an der Stelle $x + \alpha\Delta x$

$$\int_x^{x+\Delta x} q(x,t)\,dx = q(x+\beta\Delta x)\,\Delta x$$

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

Kräftegleichgewicht in *z*-Richtung:

$$Q(x+\Delta x) - Q(x) - \Delta T + q(x+\beta\Delta x)\,\Delta x = 0$$

$$\Delta T = \mu(x+\gamma\Delta x)\,\Delta x\,\ddot{w}(x+\alpha\Delta x, t)$$

einsetzen $:\Delta x$

$$\frac{Q(x+\Delta x) - Q(x)}{\Delta x} - \mu(x+\gamma\Delta x)\,\ddot{w}(x+\alpha\Delta x,t) + q(x+\beta\Delta x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \qquad Q'(x) - \mu(x)\,\ddot{w}\,(x,t) + q(x,t) = 0$$

Aus Momentenbilanz herleitbar wie in Festigkeitslehre: $M' = Q$ bzw. $M'' = Q'$

Außerdem gilt aus Kinematik des Euler-Bernoulli-Balkens und Hookeschem Gesetz wie in der Festigkeitslehre:

$$w'' = -M(x)/EI(x)$$

Also: $\left(-EI(x)w''(x,t)\right)'' - \mu(x)\,\ddot{w}\,(x,t) + q(x,t) = 0$

Umformen:

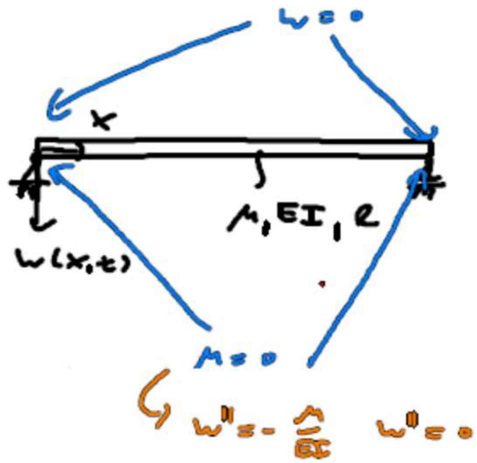
$$\boxed{\mu(x)\,\ddot{w}\,(x,t) + \left(EI(x)w''(x,t)\right)'' = q(x,t)}$$

Feldgleichung des Euler-Bernoulli- Balkens

Für μ, I = konstant ergibt sich

$$\boxed{\mu\,\ddot{w}\,(x,t) + EI\,w^{IV}(x,t) = q(x,t)}$$

1.2.2 Freie Schwingungen des Euler-Bernoulli-Balkens



Freie Schwingung: $q(x,t) \equiv 0$

Feldgleichung $\mu\, \ddot{w}\,(x,t) + EI\; w^{IV}(x,t) = 0$

Geometrische RBen (Lager) $w(0,t) = w\,(\ell\,,t) = 0$

Dynamische RBen $w''(0,t) = w\,''(\ell\,,t) = 0$
(M=0 in den Lagern)

RWP
Rand-
wert-
problem

Produktansatz $\quad w(x,t) = W(x)p(t)$

in Feldgleichung $\quad \mu\, W(x)\, \ddot{p}(t) + EI\; W^{IV}(x)\, p(t) = 0 \quad \Big|\, : \mu\, W(x) \quad : p(t)$

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = -\frac{EI}{\mu}\,\frac{W^{IV}(x)}{W(x)} = -\,\omega^2$$

Trennung der Veränderlichen,
Konstante $-\omega^2$ eingeführt

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = -\frac{EI}{\mu}\,\frac{w^{IV}(x)}{w(x)} = -\omega^2$$

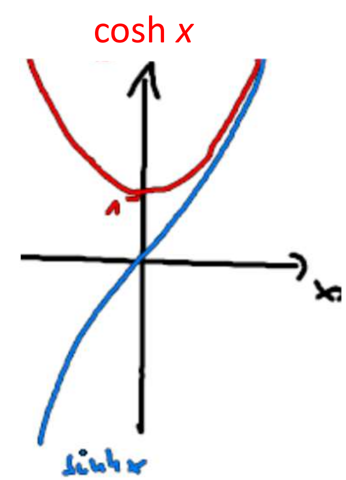
Also $\quad \ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0 \qquad \omega$ ist die Eigenkreisfrequenz

und $\quad w^{IV}(x) - \underbrace{\frac{\mu\omega^2}{EI}}_{=\lambda^4} w(x) = 0$

sowie RBen $\quad w(0,t)=0 \Rightarrow w(0)=0 \qquad w(\ell,t)=0 \Rightarrow w(\ell)=0$

$\qquad w''(0,t)=0 \Rightarrow w''(0)=0 \qquad w''(\ell,t)=0 \Rightarrow w''(\ell)=0$

gewöhnliche Dgl. (nur Abh. in x) 4. Ordn. + 4 RBen



Lös. von $\quad w^{IV}(x) - \lambda^4 w(x) = 0$

ist $\quad W(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$W(x) = A \sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x$$

$$W''(x) = -A\lambda^2 \sin\lambda x - B\lambda^2\cos\lambda x + C\lambda^2\sinh\lambda x + D\lambda^2\cosh\lambda x$$

$$\left.\begin{aligned} W(0) &= 0 = B + D \\ W''(0) &= 0 = -B + D \end{aligned}\right\} B = D = 0$$

$$\left.\begin{aligned} W(\ell) &= 0 = A\sin\lambda\ell + C\sinh\lambda\ell \\ W''(\ell) &= 0 = -A\lambda^2\sin\lambda\ell + C\lambda^2\sinh\lambda\ell \end{aligned}\right\}\begin{matrix}\lambda^2 \\ +/- \\ \text{beide} \\ \text{Glgn}\end{matrix} \quad \left\{\begin{aligned} &A\lambda^2\sin\lambda\ell = 0 \\ &C\lambda^2\sinh\lambda\ell = 0 \end{aligned}\right.$$

- $\lambda = 0 \rightarrow \omega = 0$ oder $\mu \to \infty$ oder $EI \to \infty$ keine Schwingung,
- $A, C = 0 \rightarrow$ triviale Lösung $W(x) = 0$; wir fordern A und/oder $C \neq 0$
- $A = 0$, $\sinh\lambda\ell = 0 \Rightarrow \lambda\ell = 0$ $\lambda = 0$ siehe Fall 1
- $C = 0$, $A \neq 0$, $\sin\lambda\ell = 0$

triviale Lösung,
nicht weiter betrachtet

$$\rightarrow \lambda\ell = k\,\pi \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Also Lösungen der Form

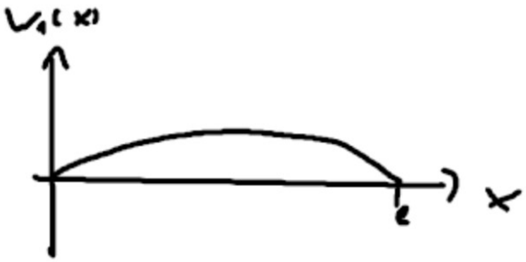
$$\boxed{W_k(x) = A\sin\left(k\,\pi\frac{x}{\ell}\right), k = 1, 2, \ldots}$$

Eigenformen des beidseitig einfach gelagerten Balkens

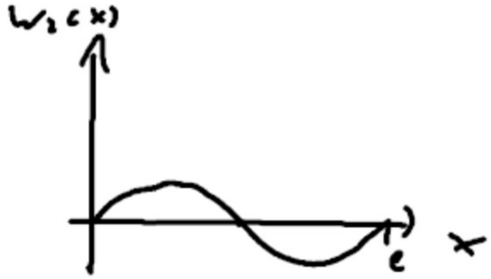
Mit $\lambda_k = \frac{k\,\pi}{\ell} = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega_k^2}{EI}}$

$$\boxed{\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}, k = 1,2, \ldots}$$

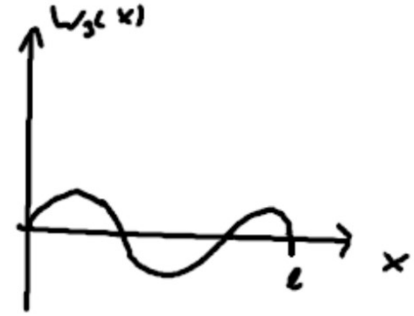
Eigenkreisfrequenzen des beidseitig einfach gelagerten Balkens



$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

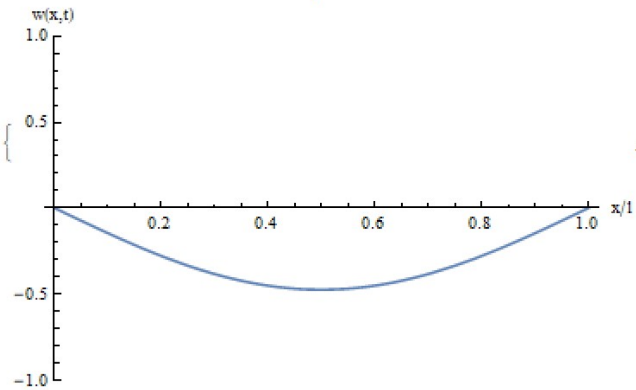


$$\omega_2 = 4\,\omega_1$$

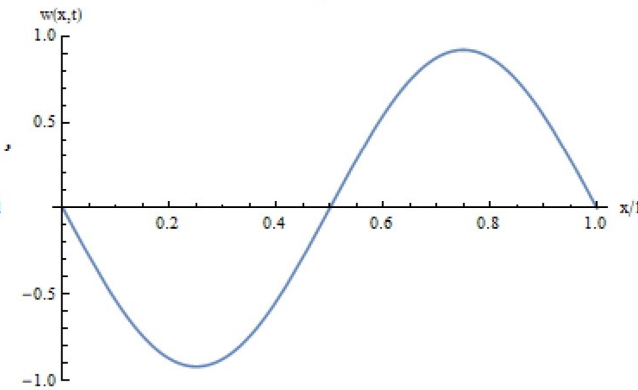


$$\omega_3 = 9\,\omega_1$$

$$\frac{\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}}{l^2}$$



$$\frac{4\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}}{l^2}$$



$$\frac{9\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}}{l^2}$$