1. Klausur Kontinuumsmechanik SoSe 08, Prof. Dr. U. von Wagner

T	
1	
2	
3	
4	
$\sum$	

Bitte deutlich schreiben!

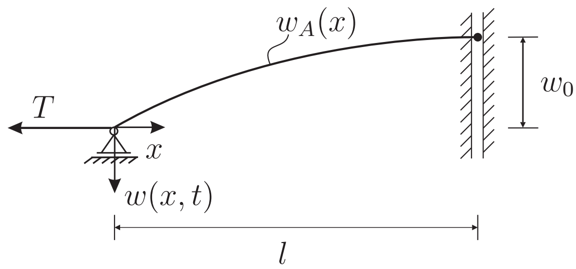
Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

$\boxed{1}$ (9 Punkte)

Eine Saite der Länge l (Masse pro Länge μ) ist beidseitig gelagert und mit der Kraft T vorgespannt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist sie wie skizziert sinusförmig mit $w_A(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.



(a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen $w(x, t = 0)$, $\dot{w}(x, t = 0)$ an.

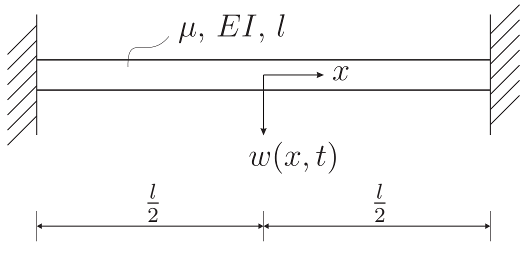
(b) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{\mu}{T}}$ mit dem Lösungsansatz nach d'Alembert (eine Herleitung ist nicht erforderlich).

(c) Prüfen Sie ob die Lösung $w(x, t)$ die Randbedingungen erfüllt. Überführen Sie dazu die Lösung nach d'Alembert in die Form $w(x, t) = W(x) \cdot p(t)$ und nutzen Sie dafür die Zusammenhänge $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$.

Geg.: l, T, μ, w_0

$\boxed{2}$ (11 Punkte)

Gegeben ist der skizzierte beidseitig eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l).



(a) Skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen (die beiden Eigenformen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen).

(b) Es soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz über den Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Als Ansatzfunktion soll ein Polynom

$$\tilde{W}_1(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$$

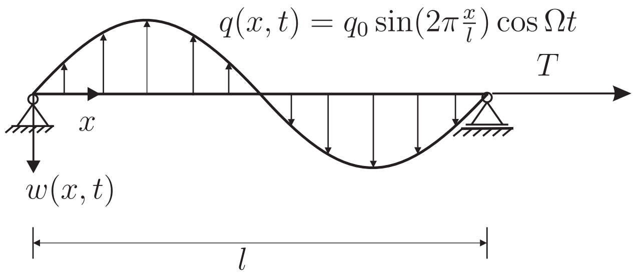
gewählt werden. Bestimmen Sie α und β aus der Anpassung an die geometrischen Randbedingungen. Beachten Sie dafür das gewählte Koordinatensystem und die Symmetrie des Systems. Zeigen Sie, dass $\tilde{W}_1$ alle geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(c) Geben Sie damit eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 an.
Hinweis: Der nach Einsetzen der Integralgrenzen für $\tilde{\omega}_1$ entstandene Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden.

Geg.: μ, EI, l

3 **(9 Punkte)**

Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Masse pro Länge μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x) \cos \Omega t$ zu bestimmen.



(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

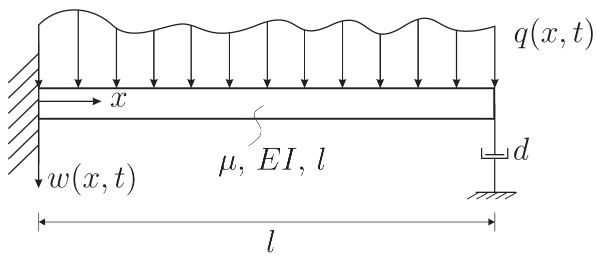
(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Feldgleichung einsetzen und für $W(x)$ einen Ansatz vom Typ der rechten Seite aufstellen. Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: l, T, μ, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$

4 **(11 Punkte)**

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l) ist linksseitig eingespannt, an seinem rechten Ende mit einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden, sowie durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet.



(a) Ermitteln Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente δW für Biegeschwingungen $w(x,t)$.

(b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

(c) Bestimmen Sie über das Prinzip von Hamilton die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen.

Geg.: μ, EI, l, $q(x,t)$, d

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenbelegung μ	$\frac{kg}{m}$
Biegesteifigkeit EI	$\frac{m^3 kg}{s^2}$
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c	$\frac{m}{s}$

(1 Punkt)

2. Gegeben ist die Feldgleichung für Torsionsschwingungen eines Stabs

$$\rho\ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0.$$

Wieviele Randbedingungen und wieviele Anfangsbedingungen werden benötigt um $\vartheta(x,t)$ zu bestimmen?

Zahl Randbedingungen $\boxed{2}$ Zahl Anfangsbedingungen $\boxed{2}$

(1 Punkt)

3. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die folgende Gestalt:

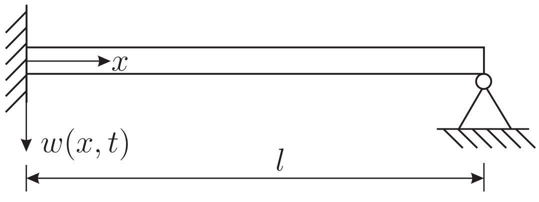
$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt dabei die in negative x-Richtung laufende Welle?

$\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ☐ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ ☐ f_1 ☐ f_2 ☒

(1 Punkt)

4. Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Balken. Geben Sie für die Biegeschwingung $w(x,t)$ die Feldgleichung, die geometrischen sowie die dynamischen Randbedingungen an.



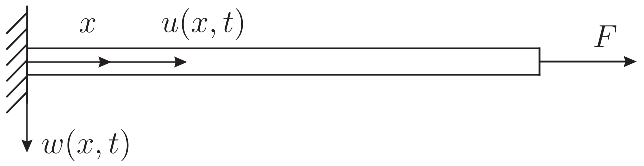
Feldgleichung: $EIw'''' + \mu\ddot{w} = 0$

geometrische RBed.: $w(0,t) = 0,\ w'(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0$

dynamischen RBed.: $w''(l,t) = 0$

(2 Punkte)

5. Gegeben ist ein Stab/Balken unter konstanter Vorspannkraft $F > 0$.

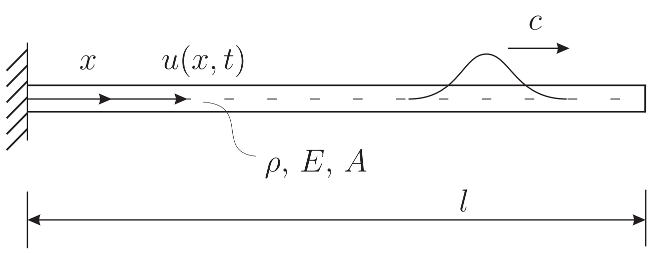


Welchen Einfluss hat F auf die Eigenkreisfrequenzen ω der Stablängsschwingungen bzw. der Biegeschwingungen?

	Stablängsschwingungen	Biegeschwingungen
die Eigenkreisfrequenzen nehmen ab	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen bleiben gleich	X	☐
die Eigenkreisfrequenzen nehmen zu	☐	X

(2 Punkte)

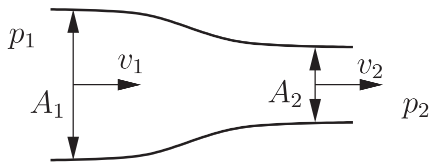
6. In einem Stab (Dichte ρ, E-Modul E, Fläche A) läuft eine Welle auf das freie Ende zu. Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x = l, t)$ während der Wellenreflexion?



$\sigma(x = l, t) = 0$

(1 Punkt)

7. Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt A. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2!



Geg.: Querschnittsflächen A_1 und A_2, p_1, v_1

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$

$\frac{1}{2}\rho v + p = \text{const.}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho \frac{A_1}{A_2} v_1 + p_2$

$\Rightarrow \quad p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1 + p_1 - \frac{1}{2}\rho \frac{A_1}{A_2} v_1 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$

(2 Punkte)

Aufgabe 1

(a) Feldgleichung:

$$\ddot{w}(x,t) = c^2 w''(x,t) \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad c^2 = \frac{T}{\mu} \tag{2}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \tag{3}$$

$$w'(l,t) = 0 \tag{4}$$

Anfangsbedingungen:

$$w(x,0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{2l} \tag{5}$$

$$\dot{w}(x,0) = 0 \tag{6}$$

(b) Bestimmung der Durchbiegung $w(x,t)$ mit dem Lösungsansatz von d'Alembert:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct) + \frac{1}{c}\underbrace{\int_0^\infty w'(\xi)d\xi}_{=0}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x-ct) + w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x+ct)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Einsetzten von $t = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und (2) in (7)

$$\begin{aligned} w(x, \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}) &= \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x - \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}) \right. \\ &\quad \left. + w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x + \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x - \frac{l}{2}) + w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x + \frac{l}{2})\right] \end{aligned} \tag{8}$$

(c) Überprüfung der Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w'(l,t) = 0 \tag{9}$$

Die Gleichung für die Durchbiegung lautet:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\left(\frac{x\pi}{2l} - \frac{ct\pi}{2l}\right) + w_0 \sin\left(\frac{x\pi}{2l} + \frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \tag{10}$$

Anwenden des Additionstheorems und Einführung folgender Abkürzungen

$$A = \frac{x\pi}{2l} \quad \text{und} \quad B = \frac{ct\pi}{2l} \tag{11}$$

lifert:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}w_0\left(\sin A\cos B - \cos A \sin B + \sin A \cos B\right. \\ &\quad \left. + \cos A \sin B\right) \\ &= \frac{1}{2}w_0\left(2\sin A \cos B\right) \\ &= w_0 \sin A \cos B \\ &= w_0 \sin\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} \end{aligned} \tag{12}$$

Die erste Randbedingung

$$w(0,t) = w_0 \sin 0 \cos B = 0 \tag{13}$$

ist erfüllt. Bestimmung von $w'(x,t)$:

$$w'(x,t) = \frac{1}{2}w_0\frac{\pi}{2l}\left[\cos\left(\frac{x\pi}{2l} - \frac{ct\pi}{2l}\right) + \cos\left(\frac{x\pi}{2l} + \frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \tag{14}$$

Anwenden des Additionstheorems liefert:

$$\begin{aligned} w'(x,t) = w_0\frac{\pi}{4l}&\left[\left(\cos\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} + \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right. \\ &\left. + \left(\cos\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} - \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

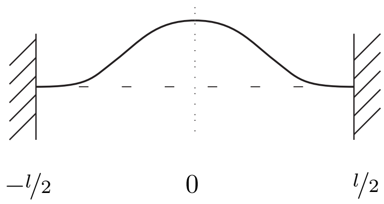
Überprüfen der zweiten Randbedingung:

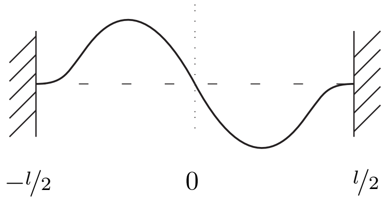
$$\begin{aligned} w'(l,t) = w_0\frac{\pi}{4l}&\left[\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\frac{ct\pi}{2l} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right. \\ &\left. + \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\frac{ct\pi}{2l} - \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Damit ist auch die zweite Randbedingung erfüllt.

Aufgabe 2

(a)





(b) Symmetrie:

$$\tilde{W}_1(x) = \tilde{W}_1(-x) \tag{17}$$

$$\tilde{W}'_1(x) = -\tilde{W}'_1(-x) \tag{18}$$

Randbedingungen:

$$1.\ \tilde{W}_1(-\frac{l}{2}) = \tilde{W}_1(\frac{l}{2}) = 0 = \frac{l^4}{16} + \alpha\frac{l^2}{4} + \beta \tag{19}$$

$$2.\ \tilde{W}'_1(\frac{l}{2}) = -\tilde{W}'_1(-\frac{l}{2}) = 0 = 4\frac{l^3}{8} + 2\alpha\frac{l}{2} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{l^2}{2} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{l^4}{16} \tag{22}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\tilde{W}_1(x) = x^4 - \frac{l^2}{2}x^2 + \frac{l^4}{16}} \tag{23}$$

Rayleigh-Quotient:

$$\tilde{\omega}_k^2 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EI\tilde{W}''^2_1(x)dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu\tilde{W}_1^2(x)dx} \tag{24}$$

mit

$$\tilde{W}''_1 = 12x^2 - l^2 \tag{25}$$

$$\tilde{W}''^2_1 = 144x^4 - 24x^2l^2 + l^4 \tag{26}$$

$$\tilde{W}_1^2 = x^8 - x^6l^2 + \frac{3x^4l^4}{8} - \frac{x^2l^6}{16} + \frac{l^8}{256} \tag{27}$$

Überprüfen der Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1\left(\frac{l}{2}\right) &= \left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{l^2}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^4}{16}\\ &= \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{8} + \frac{l^4}{16}\\ &= 0\end{aligned} \tag{28}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{W}'_1\left(\frac{l}{2}\right) &= 4\frac{l^3}{8} - 2\frac{l^2}{2}\frac{l}{2}\\ &= \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{2} = 0\end{aligned} \tag{29}$$

(c) Einsetzen von (26) und (27) in (24) liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k^2 &= \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EI\left(144x^4 - 24x^2l^2 + l^4\right)dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu\left(x^8 - x^6l^2 + \frac{3x^4l^4}{8} - \frac{x^2l^6}{16} + \frac{l^8}{256}\right)dx}\\ &= \frac{EI\left(\frac{144}{5}x^5 - 8x^3l^2 + xl^4\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}}{\mu\left(\frac{x^9}{9} - \frac{x^7l^2}{7} + \frac{3x^5l^4}{40} - \frac{x^3l^6}{48} + \frac{xl^8}{256}\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}}\end{aligned} \tag{30}$$

Beim Einsetzen der Grenzen fallen die geraden Potenzen weg und die ungeraden Potenzen verdoppeln sich. Alles zusammenfassen liefert:

$$\tilde{\omega}_k^2 = \frac{4EI}{5\mu l^4\left(\frac{1}{4608} - \frac{1}{896} + \frac{3}{1280} - \frac{1}{384} + \frac{1}{256}\right)} \tag{31}$$

Aufgabe 3

(a) Feldgleichung:

$$\mu\ddot{w} - Tw'' = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)\cos\Omega t \tag{32}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \text{ und } w(l) = 0 \tag{33}$$

(b) Ansatz:

$$w(x,t) = W(x)\cos\Omega t \tag{34}$$

$$w''(x,t) = W''(x)\cos\Omega t \tag{35}$$

$$\ddot{w}(x,t) = -\Omega^2 W(x)\cos\Omega t \tag{36}$$

Einsetzen der Gleichungen (34) bis (36) in die Feldgleichung liefert:

$$-\mu\Omega^2 W(x)\cos\Omega t - TW''(x)\cos\Omega t = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)\cos\Omega t \tag{37}$$

$$\Rightarrow\quad -\mu\Omega^2 W(x) - TW''(x) = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{38}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$W(x) = w_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{39}$$

$$W''(x) = -w_0\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{40}$$

Einsetzen von (40) und (39) in (38) führt auf

$$-\mu\Omega^2 w_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) + Tw_0\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)$$

$$-\mu\Omega^2 w_0 + Tw_0\frac{4\pi^2}{l^2} = q_0 \tag{41}$$

$$\Rightarrow\quad w_0\left(-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}\right) = q_0 \tag{42}$$

$$\Rightarrow\quad w_0 = \frac{q_0}{-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}} \tag{43}$$

$$\Rightarrow\quad W(x) = \frac{q_0}{-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{44}$$

Die Randbedingungen (33) sind von der Gleichung (44) auch erfüllt.

(c) Resonanz:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad -\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2} &\overset{!}{=} 0\\ \Rightarrow\quad \Omega^2 - \frac{4\pi^2 T}{\mu l^2} &= 0\\ \Rightarrow\quad \Omega &= \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\end{aligned} \tag{45}$$

Aufgabe 4

(a) kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\mu\int_0^l \dot{w}^2(x,t)dx \tag{46}$$

potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)dx \tag{47}$$

virtuelle Arbeit:

$$\delta W = \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \tag{48}$$

(b) geometrischen Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w'(0,t) = 0 \tag{49}$$

$$\Rightarrow \quad \delta w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad \delta w'(0,t) = 0 \tag{50}$$

(c) Bestimmung der Feldgleichung mit dem Prinzip von Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \tag{51}$$

Einsetzen von (46) bis (48) in (51):

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\mu \int_0^l \dot{w}^2(x,t) dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2(x,t) dx \right) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t) dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \right) dt \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \int_0^l \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \dot{w}\delta\dot{w} dt}_{I}\, dx - EI \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\int_0^l w''\delta w'' dx}_{II}\, dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t) dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \right) dt \end{aligned} \tag{53}$$

Ausrechnen der einzelnen Integrale:

$$I: \quad \int_{t_0}^{t_1} \dot{w}\delta\dot{w} dt = \underbrace{\dot{w}\delta w|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{w}\delta w dt \tag{54}$$

$$\begin{aligned} II: \quad \int_0^l w''\delta w'' dx &= w''\delta w'|_0^l - \int_0^l w'''\delta w' dx \\ &= w''\delta w'|_0^l - w'''\delta w|_0^l + \int_0^l w^{IV}\delta w dx \\ &= w''\delta w'(l) - w'' \underbrace{\delta w'(0)}_{=0, RB} - w'''\delta w(l) \\ &\quad + w''' \underbrace{\delta w(0)}_{=0, RB} + \int_0^l w^{IV}\delta w dx \end{aligned} \tag{55}$$

Einsetzen der Ergebnisse der Berechnung von I und II in (53):

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^l \left[\int_{t_0}^{t_1} -\ddot{w}\delta w dt \right] dx \\ &- EI \int_{t_0}^{t_1} \left\{ w''\delta w'(l) - w'''\delta w(l) + \int_0^l w^{IV} d \cdot w dx \right\} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l q(x,t)\delta w dx - d \cdot \dot{w}\delta w(l) \right\} dt = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Sortieren:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ &\underbrace{\int_0^l \left[-\mu\ddot{w} d \cdot w - EI w^{IV}\delta w + q(x,t)\delta w \right] dx}_{1} \\ &+ \underbrace{\left[-EI w''(l)\delta w'(l) \right]}_{2} \\ &+ \underbrace{\left[EI w'''(l)\delta w(l) \right] - d \cdot \dot{w}\delta w(l)}_{3} \Bigg\} dt = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Aus 1 folgt unter der Annahme $\delta w \neq 0$ die **Feldgleichung**

$$\underline{\mu\ddot{w} + EI w^{IV} = q(x,t)} \tag{58}$$

Aus 2 fogt unter der Annahme $\delta w'(l) \neq 0$ die **erste dynamische Randbedingung** (Moment bei $x = l$ ist Null)

$$\underline{-EI w''(l) = 0} \tag{59}$$

Aus 3 fogt unter der Annahme $\delta w(l) \neq 0$ die **zweite dynamische Randbedingung** (Querkraft bei $x = l$ ist Null)

$$\underline{EI w'''(l) - d \cdot \dot{w}(l) = 0} \tag{60}$$