Technische Universität Berlin Wintersemester 23
Fakultät II; Institut für Mathematik
M. Karow

Numerische Mathematik I für Ingenieurwissenschaften

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Berechne die LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) für A und löse damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Ü)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 6 \\ 12 & 26 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 27 \\ 68 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

H)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 13 & 10 & 17 \\ 3 & -4 & 16 & 6 \\ 1 & 27 & -16 & 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 60 \\ -56 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Üa) Wieviele Rechenoperationen $(+, -, *, /)$ benötigt man zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Lx = b$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Diagonale ist?
Üb) Wieviele Rechenoperationen $(+, -, *, /)$ benötigt man bei der Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen?

Bemerkung: Werden die Grundrechnungsarten $+, -, *, /$ auf dem Rechner mit Hilfe der Gleitpunktarithmetik ausgeführt, so nennt man sie flops (floating point operations).

H) Wieviele Rechenoperationen $(+, -, *, /)$ benötigt man
• um das lineare Gleichungssystems $Rx = b$ zu lösen, wobei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit von 0 verschiedenen Diagonalelementen ist?
• um eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu multiplizieren?

Hilfe: Es ist $\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Zeilenoperationen als Matrixmultiplikation.

H) Sei $B = LA$ wobei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\ell_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\ell_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}.$$

Zeige: B ist die Matrix, die man erhält, wenn man in der Matrix A von der dritten Zeile das ℓ_1-fache der zweiten Zeile abzieht und von der vierten Zeile das ℓ_2-fache der zweiten Zeile abzieht.

Was geschieht, wenn man L und A in umgekehrter Reihenfolge multipliziert? Tipp: Berechne $C = AL$ und interpretiere das Ergebnis als Spaltenoperation.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Berechne die Cholesky-Zerlegung für folgende Matrizen (nicht mit dem Computer).

Ü)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -4 \\ 10 & 34 & -7 \\ -4 & -7 & 21 \end{bmatrix},$$

H)

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & -8 & -4 \\ -4 & 10 & -13 & 10 \\ -8 & -13 & 33 & -19 \\ -4 & 10 & -19 & 20 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Prüfe mit Hilfe der Methode der quadratischen Ergänzung, welche der folgenden Matrizen positiv definit ist.

Ü)

$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

H)

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6 **5 Punkte**

Ü) In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix positiv sind. Dies kann folgendermaßen verallgemeinert werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, und sei $i = [i_1, i_2, \ldots, i_p]$ ein Vektor von paarweise verschiedenen Indizes ($i_k \in \mathbb{N}, i_k \leq n$). Dann ist auch die zugehörige Untermatrix von A,

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_p i_1} & \ldots & \ldots & a_{i_p i_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

positiv definit. Erläutere und begründe diese Aussage anhand von Beispielen.

Anmerkungen:
1. Man kann diese Tatsache benutzen um zu erkennen, dass eine Matrix *nicht* positiv definit ist.
2. Die Matrix $\widetilde{A}$ erzeugt man in MATLAB mit dem Ausdruck `A(i,i)`, wobei `i` der Indexvektor ist.

H) Entscheide mit einer Methode deiner Wahl (z.B. quad. Ergänzung, Determinanten, Eigenwerte usw.), welche der folgenden Matrizen positiv definit ist und welche nicht.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A_3 \\ A_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \\ -5 & -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 100 \end{bmatrix}.$$

Programmieraufgabe 1 (Es darf auch Python verwendet werden)

(a) Schreibe eine MATLAB-Funktion `x=vorrueck(L,R,b)`, welche zu einer gegebenen unteren Dreicksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Gleichungssystem $LRx = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen löst. Dabei dürfen nur die 4 Grundrechnungsarten und keine MATLAB-Kommandos wie $A^{-1} * b, \mathrm{inv}(A) * b, A\backslash b$ verwendet werden. Teste das Programm z.B. mit

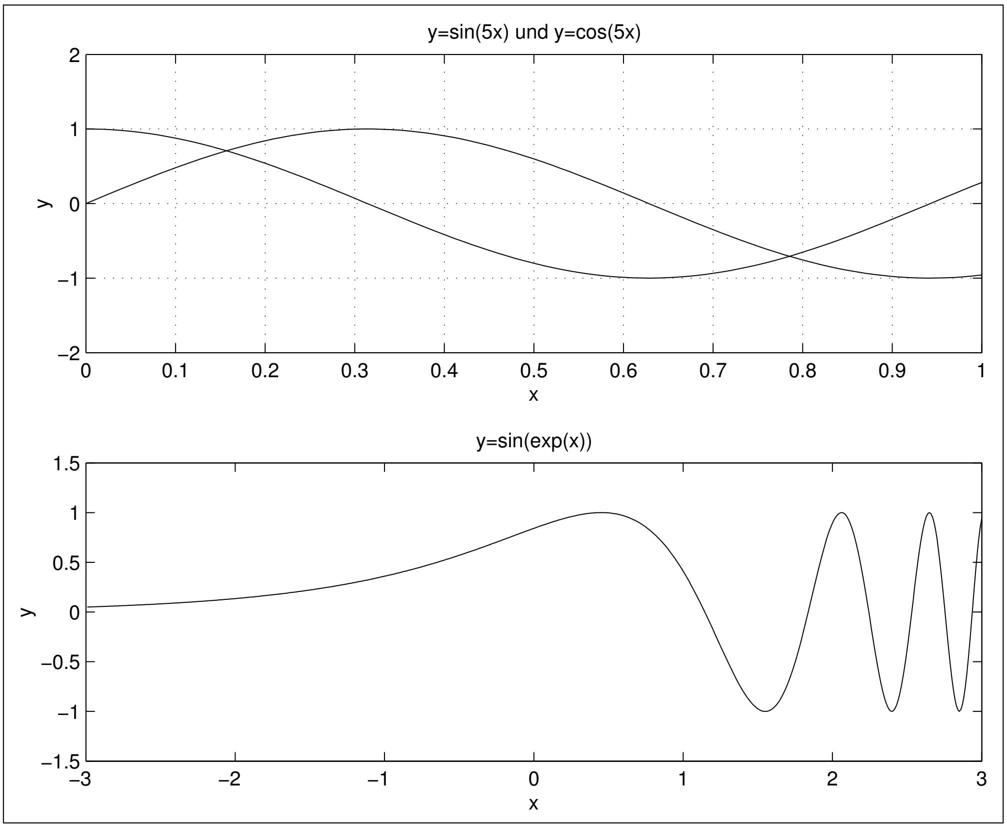
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \\ 231 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Die Lösung des Gleichungssystems $LRx = b$ ist dann $x = [1\ 2\ 3]^\top$.

(b) Schreibe eine MATLAB-Funktion `[L,R]=lr(A)` welche die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet (ohne Pivotisierung). Dabei dürfen nur die 4 Grundrechnungsarten und keine MATLAB-Kommandos wie $A^{-1} * b, \mathrm{inv}(A) * b, A \backslash b$ verwendet werden.

Vorschlag zum Testen: multipliziere die Matrizen aus $(*)$, d.h. setze $A = LR$. Übergebe die Matrix A an die Funktion. Wenn die Funktion richtig rechnet, gibt sie die Matrizen L, R wieder zurück.

(c) Schreibe ein MATLAB-Programm, das folgende Grafik erzeugt (und sie soll auch *haargenau* <u>so</u> aussehen! Ausnahme: Das Hintergrundgitter muss nicht unbedingt gepunktet sein). Hinweis: `subplot`-Befehl benutzen. `hold on` nicht vergessen. Achsenbeschriftungen können mit `xticks` gesteuert werden. Zur Erklärung im Command Window `doc xticks` eingeben. Dann öffnet sich die Dokumentationsseite.



Falls die Lösung fehlerhaft ist, gibt es einen zweiten (und letzten) Abgabeversuch in der folgenden Woche.