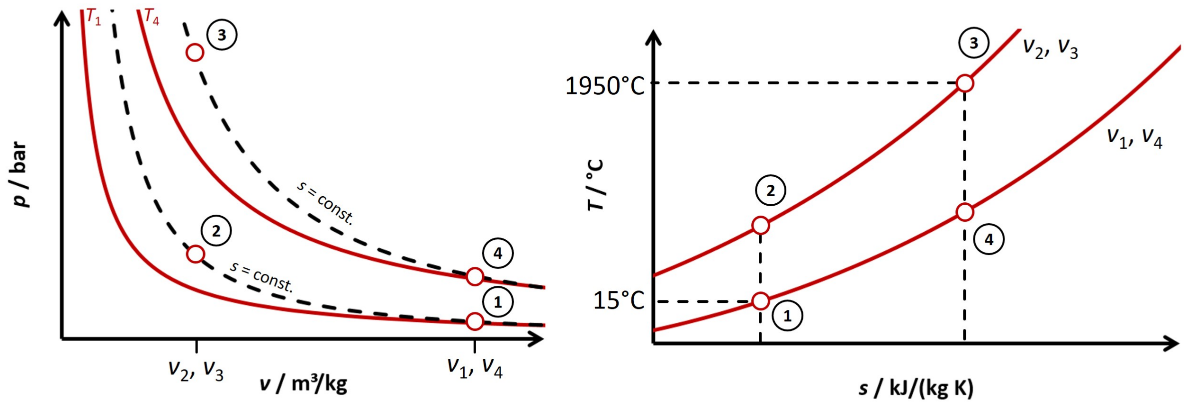
Thermo
Prof. Dr.-Ing. habil. Jadran Vrabec
Fachgebiet Thermodynamik
Fakultät III – Prozesswissenschaften

Aufgabe 14.1 – Lösung

a)



Zustandsänderungen:

1 → 2: reversibel, adiabate Kompression
2 → 3: isochore Wärmezufuhr
3 → 4: reversibel, adiabate Expansion
4 → 1: isochore Wärmeabfuhr

Wertetabelle:

	1	2	3	4
p [bar]	1*	12.29	46.29	3.768
T [°C]	15*	316.89	1950*	812.55
v [m³/kg]	0.826 99	0.137 83	0.137 83	0.826 99

* gegebene Größen

b) Zustand 1:

$$p \cdot v = R \cdot T \implies \boxed{v_1} = \frac{R \cdot T_1}{p_1} \tag{1}$$

$$= \frac{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (15 + 273.15)\mathrm{K}}{1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = \boxed{0.826\,99\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}} \tag{2}$$

Zustand 3:
Wir ermitteln v_3 mit Hilfe des gegebenen Verdichtungsverhältnis ϵ:

$$\epsilon := \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_3} = 6 \tag{3}$$

$$\implies \boxed{v_3} = \frac{v_1}{\epsilon} = \frac{0.826\,99\,\mathrm{m^3/kg}}{6} = \boxed{0.137\,83\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg}}} \tag{4}$$

$$p \cdot v = R \cdot T \implies \boxed{p_3} = \frac{R \cdot T_3}{v_3} \tag{5}$$

$$= \frac{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (1950 + 273.15)\mathrm{K}}{0.137\,83\,\mathrm{m^3/kg}} \tag{6}$$

$$= 46.29 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = \boxed{46.29\,\mathrm{bar}} \tag{7}$$

1 → 2: isentrope ZÄ

$$p \cdot v^\kappa = const. = p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa \tag{8}$$

$$\implies \boxed{p_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\kappa \cdot p_1 = \epsilon^\kappa \cdot p_1 = 6^{1.4} \cdot 1\,\mathrm{bar} = \boxed{12.286\,\mathrm{bar}} \tag{9}$$

Zustand 2:

$$p \cdot v = R \cdot T \tag{10}$$

$$\implies \boxed{T_2} = \frac{p_2 \cdot v_2}{R} = \frac{12.286 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0.137\,83\,\mathrm{m^3/kg}}{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)}} = \boxed{316.89\,^\circ\mathrm{C}} \tag{11}$$

3 → 4: isentrope ZÄ

$$p \cdot v^\kappa = \mathrm{const.} = p_3 \cdot v_3^\kappa = p_4 \cdot v_4^\kappa \tag{12}$$

$$\implies \boxed{p_4} = \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^\kappa \cdot p_3 = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^\kappa \cdot p_3 = \left(\frac{1}{6}\right)^{1.4} \cdot 46.29\,\mathrm{bar} = \boxed{3.768\,\mathrm{bar}} \tag{13}$$

Zustand 4:

$$p \cdot v = R \cdot T \tag{14}$$

$$\implies \boxed{T_4} = \frac{p_4 \cdot v_4}{R} \tag{15}$$

$$= \frac{3.768 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0.826\,99\,\mathrm{m^3/kg}}{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)}} = \boxed{812.55\,^\circ\mathrm{C}} \tag{16}$$

$$\text{Drucksteigerungsverhältnis: } \psi = \frac{p_3}{p_2} = \frac{46.29\,\mathrm{bar}}{12.286\,\mathrm{bar}} = 3.768 \tag{17}$$

$$\text{Einspritzverhältnis: } \varphi = \frac{v_3}{v_2} = 1 \tag{18}$$

c) $q_{12} = 0$ (adiabate Zustandsänderung)

$q_{34} = 0$ (adiabate Zustandsänderung)

2 → 3:

$$\text{1. HS:} \quad Q_{23} + \cancel{W_{23}} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \boxed{q_{23}} = c_v \cdot (T_3 - T_2) = 0.7175\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (1950 - 316.89)\text{K} = \boxed{1171.76\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} \tag{20}$$

$$\text{wobei: } \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \tag{21}$$

$$\Longrightarrow c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{0.287\,\text{kJ/(kg K)}}{1.4 - 1} = 0.7175\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \tag{22}$$

4 → 1:

$$\text{1. HS:} \quad Q_{41} + \cancel{W_{41}} = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_4) \tag{23}$$

$$\Longrightarrow \boxed{q_{41}} = c_v \cdot (T_1 - T_4) = 0.7175\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (15 - 812.55)\text{K} = \boxed{-572.24\,\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} \tag{24}$$

d) 1 → 2:

$$\boxed{w_{12}} = \frac{R \cdot T_1}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \tag{25}$$

$$= \frac{0.287\,\text{kJ/(kg K)} \cdot (15 + 273.15)\text{K}}{1.4 - 1} \cdot \left[\left(\frac{12.29\,\text{bar}}{1\,\text{bar}}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right] \tag{26}$$

$$= \boxed{216.60\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} \tag{27}$$

3 → 4:

$$\boxed{w_{34}} = \frac{R \cdot T_3}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] \tag{28}$$

$$= \frac{0.287\,\text{kJ/(kg K)} \cdot (1950 + 273.15)\text{K}}{1.4 - 1} \cdot \left[\left(\frac{3.768\,\text{bar}}{46.29\,\text{bar}}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right] \tag{29}$$

$$= \boxed{-816.11\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} \tag{30}$$

Aufgrund der egoistischen Vorzeichenregel ist die Summe der spezifischen Arbeiten $(w_{12} + w_{34})$ negativ (aus Sicht des Prozesses wird die Nutzleistung abgegeben). Aus der Pespektive der Umgebung ist die übertragene spezifische Arbeit jedoch positiv:

$$w_{\text{Nutz}} = -(w_{12} + w_{34}) = -\left(216.60\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 816.11\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right) = 599.51\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \tag{31}$$

Nun können wir den thermischen Wirkungsgrad berechnen:

$$\eta_{\text{th}} = \frac{w_{\text{Nutz}}}{q_{23}} \tag{32}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\eta_{\text{th}}} = \frac{599.51\,\text{kJ/kg}}{1171.76\,\text{kJ/kg}} = \boxed{51.16\,\%} \tag{33}$$