Aufgabe 4.1 – Lösung

Bezeichnungen idealisierter Zustandsänderungen

Bezeichnung	**Bedeutung**	**Anschauung**
isobar	$p = const.$	Kochen mit offenem Deckel
isochor	$V = const.$	Kochen im Schnellkochtopf
isenthalp	$H = const.$	Expansion in einer Drossel
isentrop	$S = const.$	reversibler Prozess oder kontinuierliches Abführen von Entropie
isotherm	$T = const.$	Temperatur konstant; näherungsweise: sehr langsamer Prozess
aidabat	$Q = 0$	perfekte Wärmeisolation; näherungsweise: sehr schneller Prozess
polytrop	$pv^n = const.$	Approximation versch. realer Prozessverläufe (siehe Box *“Polytrope Zustandsänderungen”*)

Polytrope Zustandsänderungen

- ZÄ, für deren Verlauf gilt: $\boxed{pv^n = const.}$
- kann gute Näherung für verschiedene reale Prozessabläufe sein
- besondere Werte von n:

  $n = 0 \implies p = const.$ isobar

  $n = \infty \implies v = const.$ isochor

  $n = \kappa \implies s = const.$ isentrop

  für Ideale Gase:

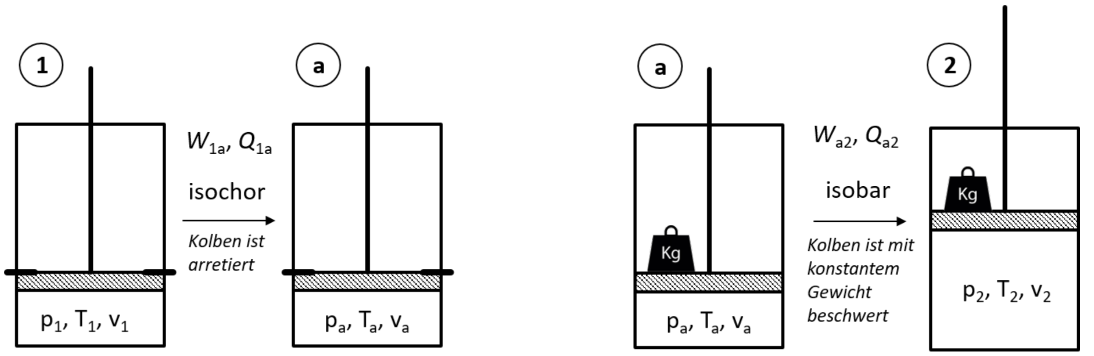
  $n = 1 \implies T = const.$ isotherm

Isentropenexponent κ

- Exponent κ, sodass gilt: $pv^\kappa = const. \iff$ isentrop
- für ideales Gas: $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = konst.$
- für reale Gase: $\kappa \neq \frac{c_p}{c_v}$, und κ ist zustandsabhängig (nicht $konst.$)

Aufgabe 4.2 – Lösung

a)



1 $\longrightarrow$ a (isochore ZÄ): $v_\text{a} = v_1$, a $\longrightarrow$ 2 (isobare ZÄ): $p_\text{a} = p_2 = 2.5\,\text{bar}$

gegeben: $m = 1\,\text{kg}$
$p_1 = 1\,\text{bar}$, $p_2 = 2.5\,\text{bar}$
$T_1 = 300\,\text{K}$, $T_2 = 1200\,\text{K}$
Ideales Gas, $R = 0.287\,\text{kJ/(kg K)}$, $c_v = 0.714\,\text{kJ/(kg K)}$
$v_\text{a} = v_1$
$p_\text{a} = p_2 = 2.5\,\text{bar}$

gesucht: $Q_\text{a} = Q_{1\text{a}} + Q_{\text{a}2}$
$W_\text{a} = W_{1\text{a}} + W_{\text{a}2}$

Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U = W + Q \tag{1}$$

Um die Arbeit und die Wärme auszurechnen, werten wir den 1. HS für beide Prozessschritte separat aus.

1 $\longrightarrow$ a (isochore ZÄ):

Arbeit:

$$\boxed{W_{1\text{a}}} = -m \cdot \int_1^\text{a} p \; \text{d}v = \boxed{0} \qquad \text{(isochor)} \tag{2}$$

Innere Energie:

$$\text{id. Gas} \implies \Delta U_{1\text{a}} = U_\text{a} - U_1 = m \cdot c_v \cdot (T_\text{a} - T_1) \tag{3}$$

Die Temperatur T_a berechnen wir mit der Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$pv = RT \iff \frac{p}{T} = \frac{R}{v} \tag{4}$$

$$\implies \frac{p_\text{a}}{T_\text{a}} = \frac{R}{v_\text{a}} \overset{\text{isochor}}{=} \frac{R}{v_1} = \frac{p_1}{T_1} \tag{5}$$

$$\iff T_\mathrm{a} = \frac{p_\mathrm{a}}{p_1} T_1 = \frac{2.5\,\mathrm{bar}}{1\,\mathrm{bar}} \cdot 300\,\mathrm{K} = 750\,\mathrm{K} \tag{6}$$

Einsetzen in (3):

$$\Delta U_{1\mathrm{a}} = m c_v (T_\mathrm{a} - T_1) = 1\,\mathrm{kg} \cdot 0.714\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (750\,\mathrm{K} - 300\,\mathrm{K}) = 321.3\,\mathrm{kJ} \tag{7}$$

Nun können wir den 1. Hauptsatz anwenden, um die übertragene Wärme zu berechnen:

$$\Delta U_{1\mathrm{a}} = W_{1\mathrm{a}} + Q_{1\mathrm{a}} \tag{8}$$

$$\iff \boxed{Q_{1\mathrm{a}}} = \Delta U_{1\mathrm{a}} - W_{1\mathrm{a}} = 321.3\,\mathrm{kJ} - 0 = \boxed{321.3\,\mathrm{kJ}} \tag{9}$$

a $\longrightarrow$ 2 (isobare ZÄ):

Arbeit:

$$\boxed{W_{\mathrm{a}2}} = -m \int_\mathrm{a}^2 p\,\mathrm{d}v = -m \cdot p \int_\mathrm{a}^2 \mathrm{d}v = -m \cdot p \cdot (v_2 - v_\mathrm{a}) \tag{10}$$

$$= -1\,\mathrm{kg} \cdot 2.5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot (1.378 - 0.861)\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}} = \boxed{-129.25\,\mathrm{kJ}} \tag{11}$$

Innere Energie:

$$\text{id. Gas} \implies \Delta U_{\mathrm{a}2} = U_2 - U_\mathrm{a} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_\mathrm{a}) \tag{12}$$

$$= 1\,\mathrm{kg} \cdot 0.714\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (1200\,\mathrm{K} - 750\,\mathrm{K}) = 321.3\,\mathrm{kJ} \tag{13}$$

Nun können wir den 1. Hauptsatz anwenden, um die übertragene Wärme zu berechnen:

$$\Delta U_{\mathrm{a}2} = W_{\mathrm{a}2} + Q_{\mathrm{a}2} \tag{14}$$

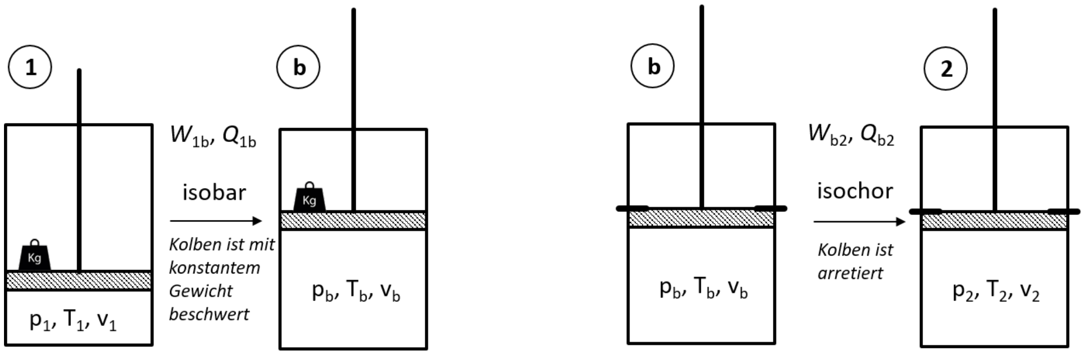
$$\iff \boxed{Q_{\mathrm{a}2}} = \Delta U_{\mathrm{a}2} - W_{\mathrm{a}2} = 321.3\,\mathrm{kJ} + -129.25\,\mathrm{kJ} = \boxed{450.55\,\mathrm{kJ}} \tag{15}$$

1 $\longrightarrow$ 2 (Prozessführung a):

$$\boxed{W_{12,\mathrm{a}}} = W_{1\mathrm{a}} + W_{\mathrm{a}2} = \boxed{-129.25\,\mathrm{kJ}} \tag{16}$$

$$\boxed{Q_{12,\mathrm{a}}} = Q_{1\mathrm{a}} + Q_{\mathrm{a}2} = \boxed{771.85\,\mathrm{kJ}} \tag{17}$$

b)



1 $\longrightarrow$ b (isobare ZÄ): $p_\mathrm{a} = p_1 = 1\,\mathrm{bar}$, b $\longrightarrow$ 2 (isochore ZÄ): $v_\mathrm{b} = v_2$

gegeben: $m = 1\,\mathrm{kg}$
$p_1 = 1\,\mathrm{bar}$, $p_2 = 2.5\,\mathrm{bar}$
$T_1 = 300\,\mathrm{K}$, $T_2 = 1200\,\mathrm{K}$
Ideales Gas, $R = 0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}, c_v = 0.714\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$
$p_\mathrm{b} = p_1 = 1\,\mathrm{bar}$
$v_\mathrm{b} = v_2$

gesucht: $Q_\mathrm{a} = Q_{1\mathrm{a}} + Q_{\mathrm{a}2}$
$W_\mathrm{a} = W_{1\mathrm{a}} + W_{\mathrm{a}2}$

Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U = W + Q \tag{18}$$

1 $\longrightarrow$ b (isobare ZÄ):

Arbeit:

$$\boxed{W_{1\mathrm{b}}} = -m \int_1^\mathrm{b} p\;\mathrm{d}v \overset{\text{isobar}}{=} -m \cdot p \int_1^\mathrm{b} \mathrm{d}v = -mp \cdot (v_\mathrm{b} - v_1) \tag{19}$$

$$= 1\,\mathrm{kg} \cdot 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot \left(1.378\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}} - 0.861\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right) = \boxed{-51.66\,\mathrm{kJ}} \tag{20}$$

Innere Energie:

$$\text{id. Gas} \implies \Delta U_{1\mathrm{a}} = U_\mathrm{a} - U_1 = m \cdot c_v \cdot (T_\mathrm{a} - T_1) \tag{21}$$

Die Temperatur T_b berechnen wir mit der Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$pv = RT \iff \frac{p}{T} = \frac{R}{v} \tag{22}$$

$$\implies \frac{p_\mathrm{b}}{T_\mathrm{b}} = \frac{R}{v_\mathrm{b}} \overset{\text{isochor}}{=} \frac{R}{v_2} = \frac{p_2}{T_2} \tag{23}$$

$$\Longleftrightarrow \; T_\mathrm{b} = \frac{p_\mathrm{b}}{p_2} T_2 = \frac{1\,\mathrm{bar}}{2.5\,\mathrm{bar}} \cdot 1200\,\mathrm{K} = 480\,\mathrm{K} \tag{24}$$

Einsetzen in (29):

$$\Delta U_\mathrm{1b} = m c_v (T_\mathrm{b} - T_1) = 1\,\mathrm{kg} \cdot 0.714\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (480\,\mathrm{K} - 300\,\mathrm{K}) = 128.52\,\mathrm{kJ} \tag{25}$$

Nun können wir den 1. Hauptsatz anwenden, um die übertragene Wärme zu berechnen:

$$\Delta U_\mathrm{1b} = W_\mathrm{1b} + Q_\mathrm{1b} \tag{26}$$

$$\Longleftrightarrow \; \boxed{Q_\mathrm{1b}} = \Delta U_\mathrm{1b} - W_\mathrm{1b} = 128.52\,\mathrm{kJ} + 51.66\,\mathrm{kJ} = \boxed{180.18\,\mathrm{kJ}} \tag{27}$$

<u>b $\longrightarrow$ 2 (isochore ZÄ):</u>

Arbeit:

$$\boxed{W_\mathrm{b2}} = -m \int_\mathrm{b}^2 p \; \mathrm{d}v \overset{\text{isochor}}{=} \boxed{0} \tag{28}$$

Innere Energie:

$$\text{id. Gas} \;\Longrightarrow\; \Delta U_\mathrm{b2} = U_2 - U_\mathrm{b} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_\mathrm{b}) \tag{29}$$

$$= 1\,\mathrm{kg} \cdot 0.714\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (1200\,\mathrm{K} - 480\,\mathrm{K}) = 514.08\,\mathrm{kJ} \tag{30}$$

Nun können wir den 1. Hauptsatz anwenden, um die übertragene Wärme zu berechnen:

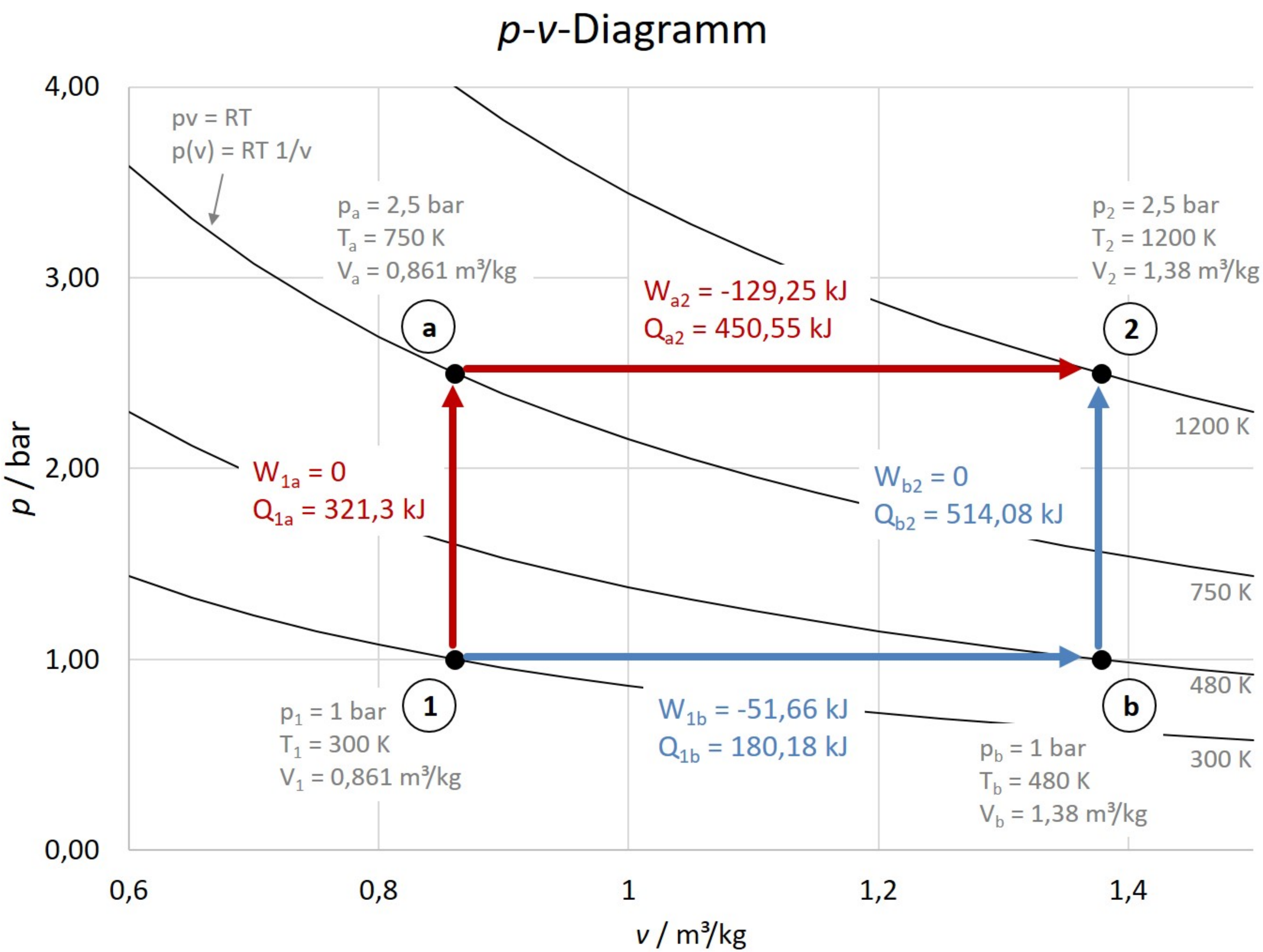
$$\Delta U_\mathrm{b2} = W_\mathrm{b2} + Q_\mathrm{b2} \tag{31}$$

$$\Longleftrightarrow \; \boxed{Q_\mathrm{b2}} = \Delta U_\mathrm{b2} - W_\mathrm{b2} = 514.08\,\mathrm{kJ} - 0 = \boxed{514.08\,\mathrm{kJ}} \tag{32}$$

<u>1 $\longrightarrow$ 2 (Weg b):</u>

$$\boxed{W_\mathrm{12,b}} = W_\mathrm{1b} + W_\mathrm{b2} = \boxed{-51.66\,\mathrm{kJ}} \tag{33}$$

$$\boxed{Q_\mathrm{12,b}} = Q_\mathrm{1b} + Q_\mathrm{b2} = \boxed{694.26\,\mathrm{kJ}} \tag{34}$$

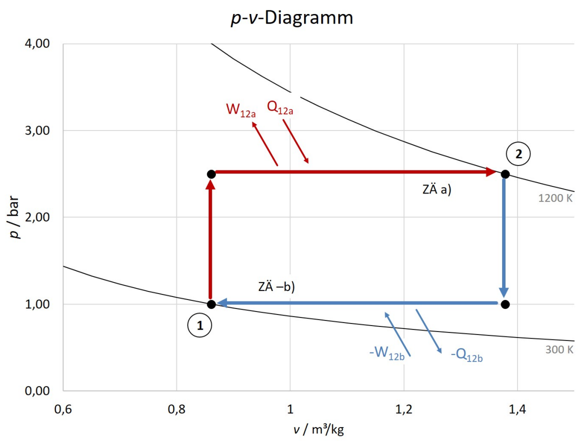

p-v-Diagramm
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
p / bar
0,6
0,8
1
1,2
1,4
v / m³/kg
pv = RT
p(v) = RT 1/v
pa = 2,5 bar
Ta = 750 K
Va = 0,861 m³/kg
p2 = 2,5 bar
T2 = 1200 K
V2 = 1,38 m³/kg
Wa2 = -129,25 kJ
Qa2 = 450,55 kJ
a
2
W1a = 0
Q1a = 321,3 kJ
Wb2 = 0
Qb2 = 514,08 kJ
1200 K
750 K
480 K
300 K
1
b
W1b = -51,66 kJ
Q1b = 180,18 kJ
p1 = 1 bar
T1 = 300 K
V1 = 0,861 m³/kg
pb = 1 bar
Tb = 480 K
Vb = 1,38 m³/kg

Zustandsgrößen und Prozessgrößen

Bei der inneren Energie U handelt es sich um eine **Zustandsgröße**. Sie ist unabhängig von dem Weg, auf dem sie erreicht wird. Dies erkennt man daran, dass ΔU für die beiden Weg a) und b) gleich ist, $\Delta U_{12,\mathrm{a}} = \Delta U_{12,\mathrm{b}}$.

Bei der Arbeit und der Wärme handelt es sich im Gegensatz dazu um **Prozessgrößen**. Sie sind abhängig vom Weg. So gilt beispielsweise $\Delta W_{12,\mathrm{a}} \neq \Delta W_{12,\mathrm{b}}$.

Kreisprozess 1 $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 1



Wird der Weg b in umgekehrter Richtung durchlaufen ($\mapsto$ ZÄ -b), und der Weg a in der oben betrachteten Richtung ($\mapsto$ ZÄ a), handelt es sich bei dem Prozess 1 $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 1 um einen Kreisprozess mit den folgenden Zustands- und Prozessgrößen:

$\Delta U_{\mathrm{ges}} = \Delta U_{12\mathrm{a}} + (-\Delta U_{12\mathrm{b}}) = 0$

$\Delta W_{\mathrm{ges}} = \Delta W_{12\mathrm{a}} + (-\Delta W_{12\mathrm{b}}) = -77.59\,\mathrm{kJ}$

$\Delta Q_{\mathrm{zu}} = \Delta Q_{12\mathrm{a}} = 771.85\,\mathrm{kJ}$

$\Delta Q_{\mathrm{ab}} = (-\Delta Q_{12\mathrm{b}}) = -694.26\,\mathrm{kJ}$

Der thermische Wirkungsgrad des Prozesses ist:

$$\eta_{\mathrm{th}} = \frac{\mathrm{Nutzen}}{\mathrm{Aufwand}} = \frac{|W_{\mathrm{ges}}|}{Q_{\mathrm{zu}}} = \frac{|-77.59|}{771.85} = 0.1$$

Thermo
Prof. Dr.-Ing. habil. Jadran Vrabec
Fachgebiet Thermodynamik
Fakultät III – Prozesswissenschaften

Aufgabe 4.3 – Lösung

a) gegeben: Tabelle: T, v

Ideales Gas, $R = 0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$

gesucht: p für Zustände A bis F

Lösung: Zustandsgleichung des Id.Gas: $pv = RT \iff \boxed{p = \dfrac{RT}{v}}$

Überprüfung der Einheiten

p : [Pa]

$$\frac{R \cdot T}{v} : \left[\frac{\mathrm{J} \cdot \cancel{\mathrm{K}} \cdot \cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \cancel{\mathrm{K}} \cdot \mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] = [\mathrm{Pa}]$$

$\Rightarrow$ Die Einheiten stimmen überein.

- Zustand A:

$$\boxed{p_\mathrm{A}} = \frac{R \cdot T_\mathrm{A}}{v_\mathrm{A}} = \frac{0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot 100\,\mathrm{K}}{0.8\,\mathrm{m^3/kg}} = \frac{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 100\,\mathrm{K}}{0.8\,\mathrm{m^3/kg}} \tag{35}$$

$$= 35875 \frac{\mathrm{J} \cdot \cancel{\mathrm{K}} \cdot \cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \cancel{\mathrm{K}} \cdot \mathrm{m}^3} = 35\,875\,\tfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = 35\,875\,\mathrm{Pa} = \boxed{0.359\,\mathrm{bar}} \tag{36}$$

- Zustand B:

$$\boxed{p_B} = \frac{R \cdot T_\mathrm{B}}{v_\mathrm{B}} = \frac{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 100\,\mathrm{K}}{0.4\,\mathrm{m^3/kg}} = \boxed{0.718\,\mathrm{bar}} \tag{37}$$

- Zustand C:

$$v_\mathrm{C} = 20\,\tfrac{\ell}{\mathrm{kg}} = 20\,\tfrac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{kg}} = 20 \cdot 10^{-3}\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}} = 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg} = 0.02\,\mathrm{m^3/kg} \tag{38}$$

$$\boxed{p_C} = \frac{R \cdot T_\mathrm{C}}{v_\mathrm{C}} = \frac{0.287 \cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 100\,\mathrm{K}}{0.02\,\mathrm{m^3/kg}} = \boxed{14.35\,\mathrm{bar}} \tag{39}$$

- Zustand D:

$$\boxed{p_\mathrm{D} = 3.588\,\mathrm{bar}} \tag{40}$$

- Zustand E:

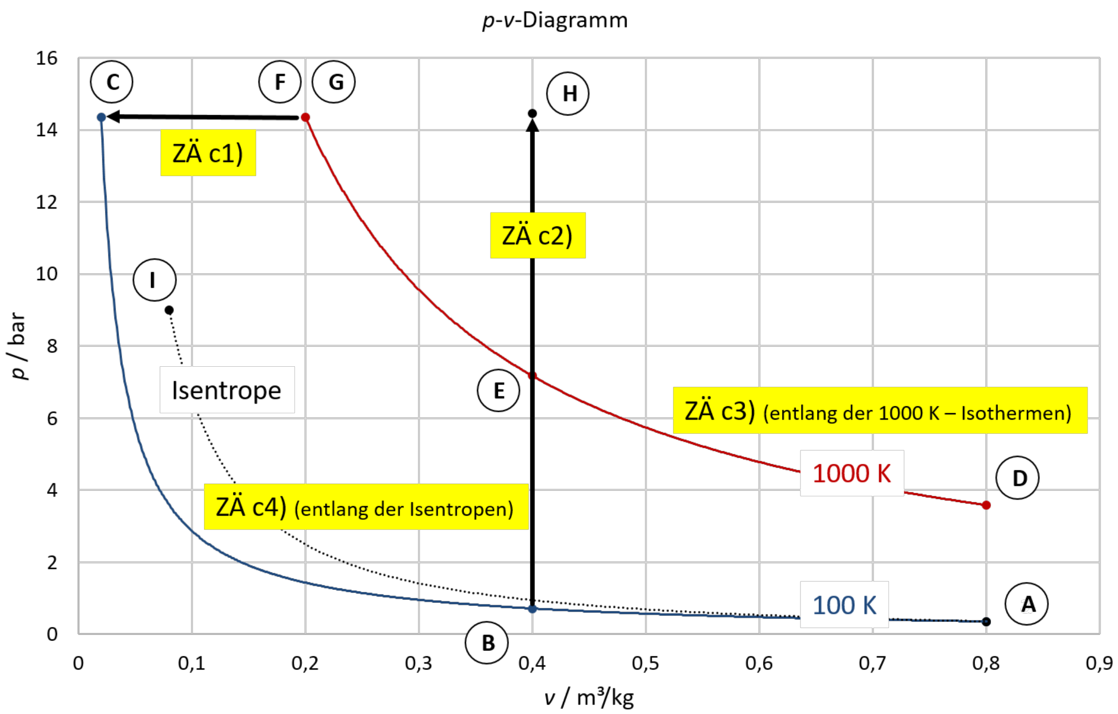
$$\boxed{p_\mathrm{E} = 7.174\,\mathrm{bar}} \tag{41}$$

- Zustand (F):

$$v_F = 0.2\,\frac{m^3}{kg} \tag{42}$$

$$\boxed{p_F = 14.35\,\text{bar}} \tag{43}$$

b)



c) i) <u>(G) $\longrightarrow$ (C) (isobare Zustandsänderung):</u>
$T_G = 726.85\,°C + 273.15\,°C = 1000\,K$
$p_G = p_C = 14.35\,\text{bar}$ (isobar)
$\rightarrow$ siehe p-v-Diagramm für den Verlauf der Zustandsänderung.

ii) <u>(B) $\longrightarrow$ (H) (isochore Zustandsänderung):</u>
$v_H = v_B = 0.4\,\frac{m^3}{kg}$ (isochore Zustandsänderung
$p_H = 14.4\,\text{bar}$
$\rightarrow$ siehe p-v-Diagramm für den Verlauf der Zustandsänderung

iii) <u>(D) $\longrightarrow$ (F) (isotherme Zustandsänderung):</u>
$\rightarrow$ siehe p-v-Diagramm für den Verlauf der Zustandsänderung entlang der 1000 K - Isothermen.

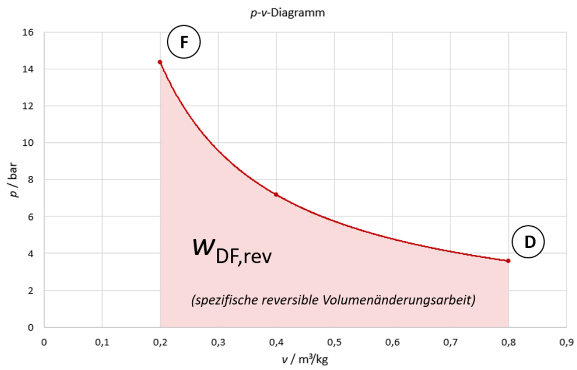
iv) <u>(A) $\longrightarrow$ (I) (reversibel adiabate Zustandsänderung):</u>
$v_I = 0.08\,m^3/kg$
reversibel adiabat $\Longrightarrow$ isentrop

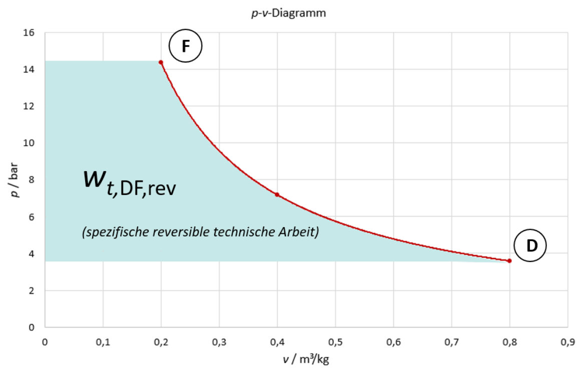
$$\Longrightarrow\ p \cdot v^{\kappa} = const. \Rightarrow p_{\mathrm{I}} \cdot v_{\mathrm{I}}^{\kappa} = p_{\mathrm{A}} \cdot v_{\mathrm{A}}^{\kappa}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{p_{\mathrm{I}}} = \left(\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{I}}}\right)^{\kappa} \cdot p_{\mathrm{A}} = \left(\frac{0.8\,\mathrm{m^3/kg}}{0.08\,\mathrm{m^3/kg}}\right)^{1{,}4} \cdot 0.359\,\mathrm{bar} = \boxed{9.01\,\mathrm{bar}} \tag{44}$$

$$\text{mit: } \kappa = 1 + \frac{R}{c_V} = 1 + \frac{287}{717.5} = 1.4 \tag{45}$$

d)





Volumenänderungsarbeit vs. Technische Arbeit

(reversible) Volumenänderungsarbeit:

- i.d.R. relevant für geschlossene Systeme
- Arbeit, die bei der Änderung des Volumens (gegen eine äußere Kraft) verrichtet wird:

$$\boxed{W_{\mathrm{rev}} := -\int p\,\mathrm{d}V} \iff \boxed{w_{\mathrm{rev}} = -\int p\,\mathrm{d}v}$$

(reversible) Technische Arbeit:

- i.d.R. relevant für offene Systeme
- entspricht der Volumenänderungsarbeit zuzüglich der Einschiebearbeiten durch ein- und austetende Masse

$$\boxed{W_{\mathrm{t,rev}} := \int V\,\mathrm{d}p} \iff \boxed{w_{\mathrm{t,rev}} = \int v\,\mathrm{d}p}$$

e) $Q_{\mathrm{AI}} = 0$, da es sich um eine adiabate Zustandsänderung handelt.

Hinweis: Einheiten

Volumenänderungsarbeit: $W_{12,\mathrm{rev}} = m \cdot w_{12,\mathrm{rev}}, \quad [\mathrm{J}] = [\mathrm{kg}] \cdot \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$

Technische Leistung: $P_{12,\mathrm{rev}} = \dot{m} \cdot w_{\mathrm{t},12,\mathrm{rev}}, \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$