Theorie – 1. Hauptsatz für geschlossene Systeme

1. HS für geschlossene Systeme

- stellt Zusammenhang zw. energetischen Zustands- und Prozessgrößen her
- kann *extensiv* oder *intensiv* (massespezifisch) formuliert werden:

$$\overset{\text{extensiv}}{\boxed{\Delta U + \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = Q + W}} \iff \overset{\text{intensiv}}{\boxed{\Delta u + \Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{pot}} = q + w}}$$

(Notation: $\Delta X = X_2 - X_1 = \int_1^2 \mathrm{d}X$)

- mechanische ZG $E_{\text{kin}}, E_{\text{pot}}$ häufig vernachlässigt

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta U = Q + W} \text{ für } E_{\text{kin}} = const, E_{\text{pot}} = const$$

- was der 1.HS kann:
  - Überführbarkeit zwischen Zustand A und Zustand B prüfen
- was der 1.HS <u>nicht</u> kann:
  - <u>Richtung</u>, in die eine Zustandsänderung in der Realität (von alleine) ablaufen kann (Bsp: Fahrrad fährt, Bremsen sind kalt $\leftrightarrow$ Fahrrad steht still, Bremsen sind heiß.)

spezifische Wärmekapazität c

- gibt an, wie viel Wärme(-energie) notwendig ist, um die Temperatur um 1 K zu erhöhen
- ist im Allgemeinen temperaturabhängig
- wird unterschieden zwischen *isochorer* und *isobarer* Wärmekapazität:
  - isochore Wärmekapazität: $\boxed{c_v(T) := \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v}$
  - isobare Wäremkapazität: $\boxed{c_p(T) := \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p}$
- für <u>ideale Gase</u> gilt: $c_p = c_v + R$

– 1.HS für geschl. Systeme

Aufgabe 3.1 – Lösung

a) gegeben: $m = 1\,\mathrm{kg}$

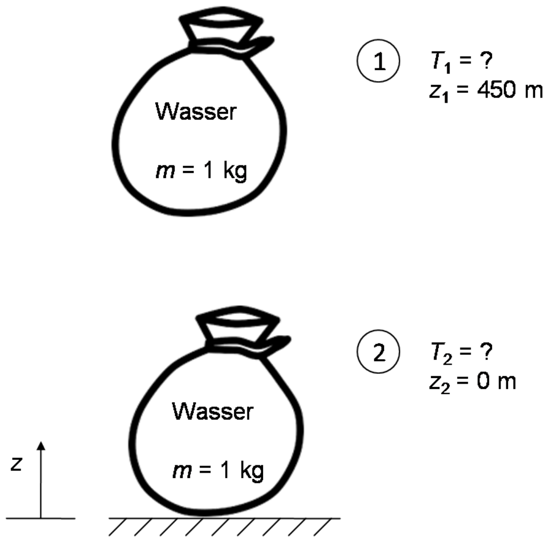
$z_1 = 450\,\mathrm{m}$

$z_2 = 0\,\mathrm{m}$

$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

$c_{v,\mathrm{H20}} = 4.18\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$

gesucht: $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$



Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U_{12} + \Delta E_{\mathrm{kin},12} + \Delta E_{\mathrm{pot},12} = W_{12} + Q_{12} \tag{1}$$

Einzusetzende Größen:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad (\text{Annahme: } V = const.) \tag{2}$$

$$\Delta E_{\mathrm{kin},12} = E_{\mathrm{kin},2} - E_{kin,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (c_2^2 - c_1^2) = 0 \tag{3}$$

$$\Delta E_{\mathrm{pot},12} = E_{\mathrm{pot},2} - E_{\mathrm{pot},1} = m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \tag{4}$$

$$W_{12} = 0 \tag{5}$$

$$Q_{12} = 0 \tag{6}$$

Einsetzen in (1) liefert:

$$0 = \Delta U_{12} + \Delta E_{\mathrm{pot},12} = \cancel{m} \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) + \cancel{m} \cdot g \cdot (\cancel{z_2} - z_1) \tag{7}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta T_{12} = (T_2 - T_1) = \frac{g \cdot z_1}{c_v} = \frac{9.81\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 450\,\cancel{\mathrm{m}}}{4180\,\frac{\cancel{\mathrm{m}^2}}{\mathrm{K}\,\cancel{\mathrm{s}^2}}} \tag{8}$$

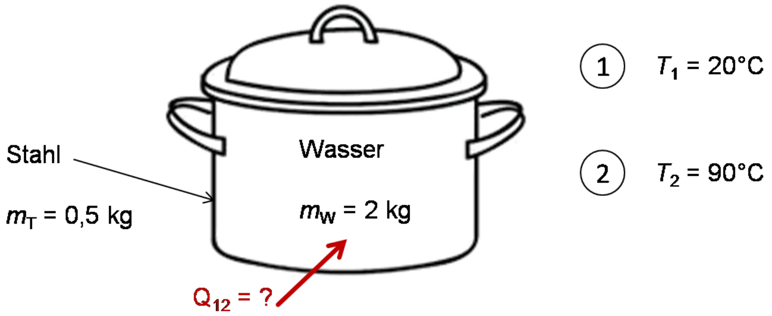
$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\Delta T_{12} = 1.056\,\mathrm{K}} \tag{9}$$

Umrechnung von Einheiten

$c_v = 4.18\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} = 4180\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} = 4180\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{K\,s}^2}$, vgl. Teilaufgabe a)

b) gegeben: $m_\mathrm{T} = 0.5\,\mathrm{kg}$
$m_\mathrm{W} = 2\,\mathrm{kg}$
$T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C} = 293.15\,\mathrm{K}$; $T_2 = 90\,^\circ\mathrm{C} = 363.15\,\mathrm{K}$
$c_{v,\mathrm{H_2O}} = 4.18\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$; $c_{v,\mathrm{Stahl}} = 0.45\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$
$P = 100\,\mathrm{W}$

gesucht: Q_{12}



Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U_{12} + \Delta E_{\mathrm{kin},12} + \Delta E_{\mathrm{pot},12} = W_{12} + Q_{12} \tag{10}$$

Einzusetzende Größen:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)$$
$$= (m_\mathrm{T} \cdot c_{v,\mathrm{Stahl}} + m_\mathrm{W} \cdot c_{v,\mathrm{H_2O}}) \cdot (T_2 - T_1) \tag{11}$$
$$\Delta E_{\mathrm{kin},12} = E_{\mathrm{kin},2} - E_{\mathrm{kin},1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (c_2^2 - c_1^2) = 0 \tag{12}$$
$$\Delta E_{\mathrm{pot},12} = E_{\mathrm{pot},2} - E_{\mathrm{pot},1} = m \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = 0 \tag{13}$$
$$W_{12} = 0 \tag{14}$$

Einsetzen in (10) liefert:

$$\rightarrow Q_{12} = (m_\mathrm{T} \cdot c_{v,\mathrm{Stahl}} + m_\mathrm{W} \cdot c_{v,\mathrm{Wasser}}) \cdot (T_2 - T_1)$$
$$= \left(0.5\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 0.45\frac{\mathrm{kJ}}{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \cancel{\mathrm{K}}} + 2\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 4.18\frac{\mathrm{kJ}}{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \cancel{\mathrm{K}}}\right) \cdot (90 - 20)\cancel{\mathrm{K}} \tag{15}$$
$$\Longrightarrow \boxed{Q_{12} = 600.95\,\mathrm{kJ}} \tag{16}$$

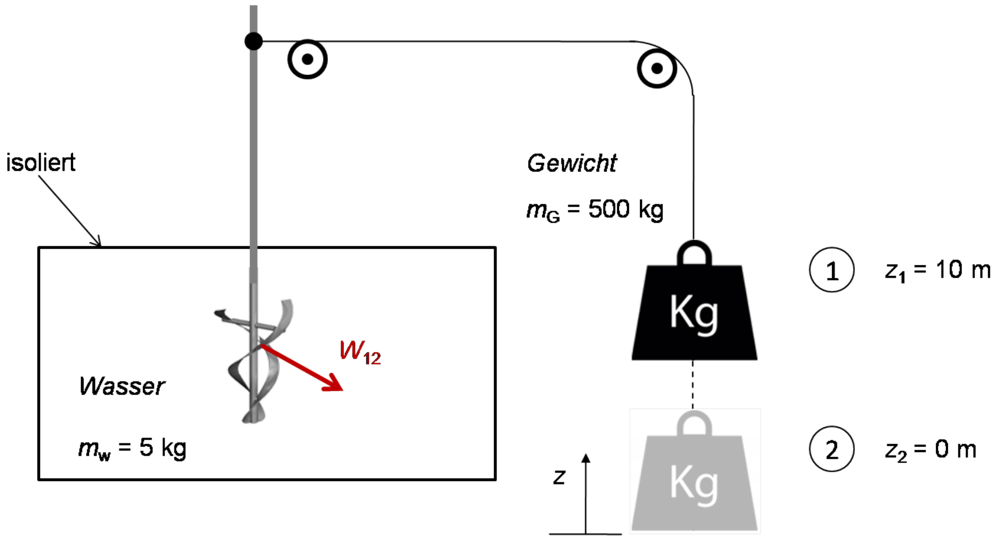
Zeit, in der bei einer Leistung von $P = 100\,\mathrm{W}$ die notwendige Energie $(600.95\,\mathrm{kJ})$

erbracht wird:

$$P = \frac{W}{t} \tag{17}$$

$$\iff \boxed{t} = \frac{W}{P} = \frac{600.95 \cdot 10^3 \cancel{\mathrm{J}}}{100 \frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\mathrm{s}}} = \boxed{6009.5\,\mathrm{s}} = 1.67\,\mathrm{h} \tag{18}$$

c) gegeben:
$m_\mathrm{G} = 500\,\mathrm{kg}$
$\Delta z = (z_2 - z_1) = -10\,\mathrm{m}$
$m_\mathrm{W} = 5\,\mathrm{kg}$
$T_1 = T_3 = 20\,°\mathrm{C} = 293.15\,\mathrm{K}$
$c_{v,\mathrm{H20}} = 4.18\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}$
$g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



i) gesucht: $W_{12,\mathrm{G}}$ → Lösung: 1.HS für das System *Gewicht*:

$$\Delta U_{12,\mathrm{G}} + \Delta E_{\mathrm{kin},12,\mathrm{G}} + \Delta E_{\mathrm{pot},12,\mathrm{G}} = W_{12,\mathrm{G}} + Q_{12,G} \tag{19}$$

Einzusetzende Größen:

$$\Delta U_{12,\mathrm{G}} = 0 \qquad \text{(keine Temperaturänderung o.Ä.)} \tag{20}$$

$$\Delta E_{\mathrm{kin},12,\mathrm{G}} = E_{\mathrm{kin},2} - E_{\mathrm{kin},1} = \frac{1}{2} \cdot m_\mathrm{G} \cdot (c_2^2 - c_1^2) = 0 \tag{21}$$

$$\Delta E_{\mathrm{pot},12,\mathrm{G}} = E_{\mathrm{pot},2} - E_{\mathrm{pot},1} = m_\mathrm{G} \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \tag{22}$$

$$Q_{12,\mathrm{G}} = 0 \tag{23}$$

Einsetzen in (19) liefert:

$$\boxed{W_{12,\mathrm{G}}} = -m_\mathrm{G} \cdot g \cdot z_1 = -500\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m} = -49\,050\,\mathrm{J} = \boxed{-49.05\,\mathrm{kJ}} \tag{24}$$

Umrechnung von Einheiten

$[\mathrm{J}] = [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}] = [\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}] = [\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}]$

ii) gesucht: ΔU_{12} → Lösung: 1.HS für das System *Wasser*:

$$\Delta U_{12,\mathrm{W}} + \Delta E_{\mathrm{kin},12,\mathrm{W}} + \Delta E_{\mathrm{pot},12,\mathrm{W}} = W_{12,\mathrm{W}} + Q_{12,\mathrm{W}} \tag{25}$$

Die Arbeit, die dem System *Wasser* hinzugefügt wird, ist genau die Arbeit, die das System *Gewicht* abgibt. Achtung: Egoistische Vorzeichen-Regel beachten!

$$\Delta E_{\mathrm{kin},12,\mathrm{W}} = 0 \tag{26}$$
$$\Delta E_{\mathrm{pot},12,\mathrm{W}} = 0 \tag{27}$$
$$Q_{12,\mathrm{W}} = 0 \tag{28}$$
$$W_{12,\mathrm{W}} = -W_{12,\mathrm{G}} = 49.05\,\mathrm{kJ} \tag{29}$$

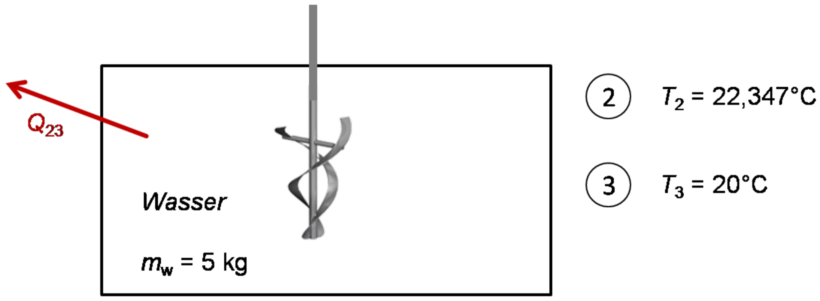
Einsetzen in (25) liefert:

$$\boxed{\Delta U_{12,\mathrm{W}} = 49.05\,\mathrm{kJ}} \tag{30}$$

iii) gesucht: T_2

$$\Delta U_{12} = m_\mathrm{W} \cdot c_v \cdot (T_{\mathrm{W},2} - T_{\mathrm{W},1}) \tag{31}$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{T_{2,\mathrm{W}}} = \frac{\Delta U_{12}}{m_\mathrm{W} \cdot c_v} + T_{\mathrm{W},1} \tag{32}$$
$$= \frac{49.05\,\mathrm{kJ}}{5\,\mathrm{kg} \cdot 4.18\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}} + 20\,^\circ\mathrm{C} = 2.347\,\mathrm{K} + 20\,^\circ\mathrm{C} \tag{33}$$
$$= \boxed{22.347\,^\circ\mathrm{C}} \tag{34}$$

iv) gesucht: Q_{23}



Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U_{23} + \Delta E_{\mathrm{kin},23} + \Delta E_{\mathrm{pot},23} = W_{23} + Q_{23} \tag{35}$$

Einzusetzende Größen:

$$\Delta U_{23} = U_3 - U_2 = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) \tag{36}$$

$$\Delta E_{\text{kin},23} = 0 \tag{37}$$

$$\Delta E_{\text{pot},23} = 0 \tag{38}$$

$$W_{23} = 0 \tag{39}$$

Einsetzen in (35) liefert:

$$\boxed{Q_{23}} = m_{\text{W}} \cdot c_v \cdot (T_{\text{W},3} - T_{\text{W},2}) \tag{40}$$

$$= 5\,\cancel{\text{kg}} \cdot 4.18\frac{\text{kJ}}{\cancel{\text{kg}} \cdot \cancel{\text{K}}} \cdot (20 - 22.347)\cancel{\text{K}} \tag{41}$$

$$= \boxed{-49.05\,\text{kJ}} \tag{42}$$

$$= -\Delta U_{12,\text{W}} \tag{43}$$