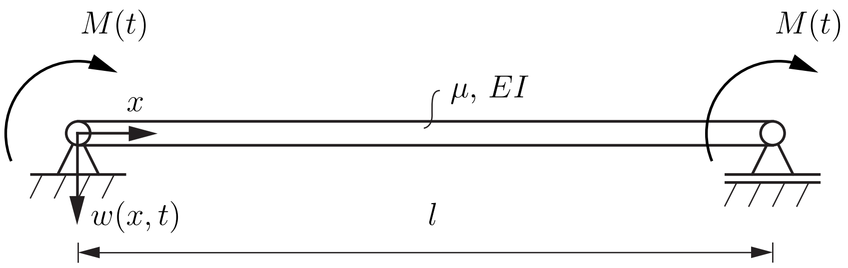
Lösungsvorschlag zum Rechentest vom 01.08.2023

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

[30 Punkte]



Gegeben ist ein schlanker Euler-Bernoulli-Balken mit der Masse pro Länge μ, der Biegesteifigkeit EI und der Länge l. An seinen Enden greifen wie skizziert zwei gleiche Momente $M(t)$ an.

Geg.: $M(t)$, EI, μ, l

a) Geben Sie die Feldgleichung des Balkens an.

$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{\mathrm{IV}}(x,t) = 0$ 2

b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

$w(0,t) = 0$ 1
$w(l,t) = 0$ 1

c) Bestimmen Sie die dynamischen Randbedingungen.

$M(0,t) = M(t) \quad \Leftrightarrow \quad -EIw''(0,t) = M(t)$ 2
$M(l,t) = -M(t) \quad \Leftrightarrow \quad EIw''(l,t) = M(t)$ 2

d) Geben Sie für die freien Schwingungen $M(t) = 0$ die dynamischen Randbedingungen an und berechnen Sie mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x)\sin(\omega t)$ die Eigenkreisfrequenzen ω_k und die Eigenformen $W_k(x)$.

Mit $\lambda^4 = \frac{\omega^2\mu}{EI}$ und $\lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$ folgt der Ansatz für die Ortsfunktion:

$$W(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x)$$ 2

Anpassen an RB:

$W(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + C = 0$ 1

$W''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A - C = 0$ 1 1

$A = C = 0$ 1

$W(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin(\lambda l) + D\sinh(\lambda l) = 0$ 1

$W''(l) = 0$ 1 $\Rightarrow \quad -B\sin(\lambda l) + D\sinh(\lambda l) = 0$ 2

Überführen in eine Gleichungssystem der Form $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix} \sin(\lambda l) & \sinh(\lambda l) \\ -\sin(\lambda l) & \sinh(\lambda l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die nichttriviale Lösung muss gelten:

$\det(A) = 0$ 1 $\Leftrightarrow \quad 2\sin(\lambda l)\sinh(\lambda l) = 0$ 1

Mit $\sinh(\lambda l) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ muss gelten: 1

$$\sin(\lambda l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda l = k\pi$$

$$\Rightarrow \omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$ 1

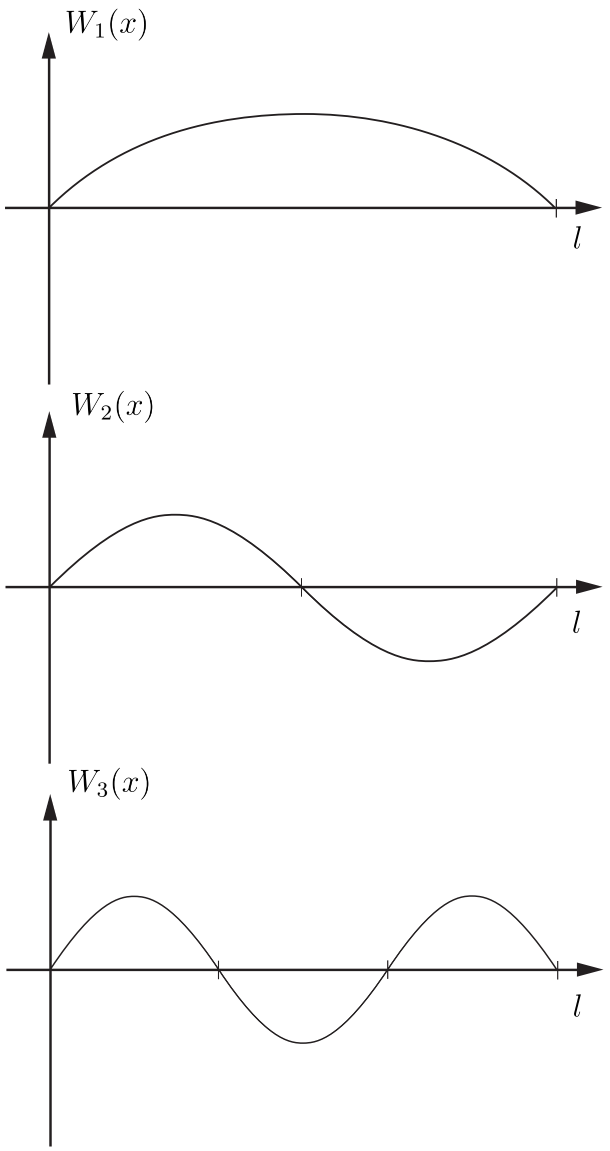
Durch Einsetzen der ermittelten λ_k in das Gleichungssystem folgt: 1

$D\sinh(\lambda l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = 0$ 1

Somit ergeben sich die Eigenformen des Systems:

$$W_k(x) = B_k \sin(\frac{k\pi}{l}x)$$ 1

e) Skizzieren Sie die ersten drei Eigenformen $W_1(x)$, $W_2(x)$ und $W_3(x)$.

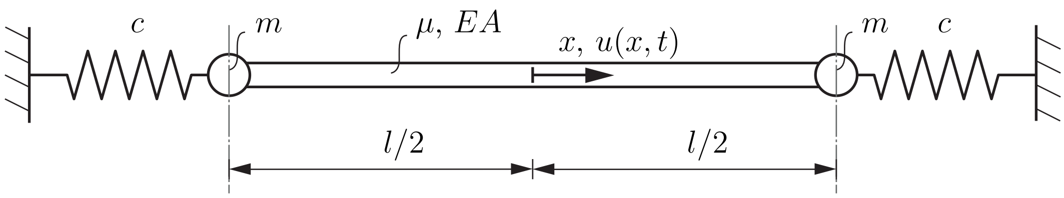


1 1 1

f) Geben Sie an, ob bei Anregung mit $M(t) = M_0 \sin(\Omega_k t)$ mit Kreisfrequenz $\Omega_k = \omega_k$ (aus d.)) für $k = 1, 2, 3$ Resonanz eintritt.

Für $k = 1$ und $k = 3$ tritt keine Resonanz auf.
Für $k = 2$ tritt der Resonanzfall ein. 2

Aufgabe 2 [30 Punkte]



Das skizzierte System besteht aus einem Stab (Länge l, Längssteifigkeit EA, Masse pro Länge μ). An den jeweiligen Enden des Stabes sind Punktmassen m und Federn (Federsteifgkeit c, entspannt für $u(-l/2, t) = 0$ bzw. $u(l/2, t) = 0$) angebracht. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen zu bestimmen.

Geg.: M, EA, m, c, μ, l

a) Geben Sie die kinetische Energie T an.

$$T = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu \dot{u}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{u}(-\tfrac{l}{2}, t)^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}(\tfrac{l}{2}, t)^2$$ 1 1 1

Integralgrenzen korrekt: 1

b) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

$$U = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EA u'^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} c u(-\tfrac{l}{2}, t)^2 + \frac{1}{2} c u(\tfrac{l}{2}, t)^2$$ 1 1 1

Integralgrenzen korrekt: 1

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW potentialloser Kräfte und Momente an.

$\delta W = 0$ 1

d) Geben Sie, sofern vorhanden, die geometrischen Randbedingungen an.

keine 1

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und die dynamische(n) Randbedingung(en).

Aus

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = 0$$ 1 mit $$L = T - U$$ 1

ergibt sich nach Ausführen der Variation:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Big(\mu \dot{u} \delta \dot{u} - EAu' \delta u' \Big) \mathrm{d}x + m\dot{u}(-\tfrac{l}{2}, t)\delta\dot{u}(-\tfrac{l}{2}, t) + m\dot{u}(\tfrac{l}{2}, t)\delta\dot{u}(-\tfrac{l}{2}, t)$$
$$-cu(-\tfrac{l}{2}, t)\delta u(-\tfrac{l}{2}, t) - cu(\tfrac{l}{2}, t)\delta u(\tfrac{l}{2}, t) \Big) \mathrm{d}t$$ 1 1 1 1 1 1

Des Weiteren führt die partielle Integration auf:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Big(-\mu \ddot{u} \delta u + EAu'' \delta u \Big) \mathrm{d}x + EAu'(-\tfrac{l}{2}, t)\delta u(-\tfrac{l}{2}, t) - EAu'(\tfrac{l}{2}, t)\delta u(\tfrac{l}{2}, t)$$
$$-m\ddot{u}(-\tfrac{l}{2}, t)\delta u(-\tfrac{l}{2}, t) - m\ddot{u}(\tfrac{l}{2}, t)\delta u(\tfrac{l}{2}, t)$$ 1 1 1 1 1 1
$$-cu(-\tfrac{l}{2}, t)\delta u(-\tfrac{l}{2}, t) - cu(\tfrac{l}{2}, t)\delta u(\tfrac{l}{2}, t) \Big) \mathrm{d}t$$

Ordnen der Terme:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Big(-\mu \ddot{u} + EAu'' \Big) \delta u \mathrm{d}x$$
$$+\Big(EAu'(-\tfrac{l}{2}, t) - m\ddot{u}(-\frac{l}{2}, t) - cu(-\frac{l}{2}, t) \Big) \delta u(-\frac{l}{2}, t)$$
$$-\Big(EAu'(\tfrac{l}{2}, t) + m\ddot{u}(\tfrac{l}{2}, t) + cu(\tfrac{l}{2}, t) \Big) \delta u(\frac{l}{2}, t) \Big) \mathrm{d}t$$

Es ergeben sich die Feldgleichung

$$\mu \ddot{u}(x, t) - EAu''(x, t) = 0$$ 2

und die Randbedingungen

$$EAu'(-\tfrac{l}{2}, t) - m\ddot{u}(-\tfrac{l}{2}, t) - cu(-\tfrac{l}{2}, t) = 0$$ 2
$$-EAu'(\tfrac{l}{2}, t) - m\ddot{u}(\tfrac{l}{2}, t) - cu(\tfrac{l}{2}, t) = 0$$ 2