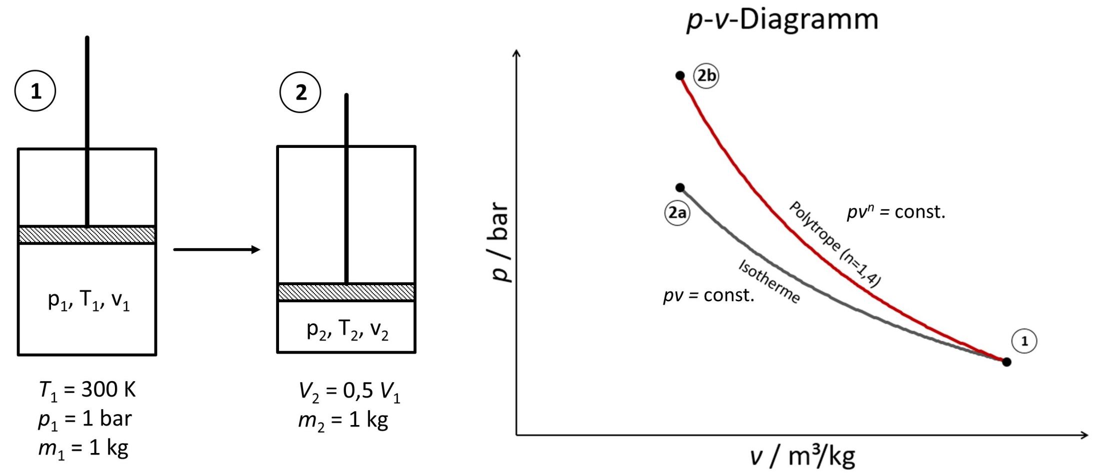
Thermo
Prof. Dr.-Ing. habil. Jadran Vrabec
Fachgebiet Thermodynamik
Fakultät III – Prozesswissenschaften

Aufgabe 5.1 – Lösung



a) i) ① $\longrightarrow$ ②a (Isotherme ZÄ):

gegeben: $T_1 = 300\,\mathrm{K}$
$\mathrm{d}T = 0$, isotherm
$p_1 = 1\,\mathrm{bar}$
$m = 1\,\mathrm{kg}$
$V_2 = \frac{1}{2}V_1$
ideales Gas mit $R = 0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$

gesucht: $W_{12\mathrm{a}}$

Wir kennen die Definition der Volumenänderungsarbeit (1) sowie die Zustandsgleichung des Idealen Gases (2):

$$W_{12\mathrm{a}} = -\int_1^{2\mathrm{a}} p\;\mathrm{d}V = -m \cdot \int_1^{2\mathrm{a}} p\;\mathrm{d}v \tag{1}$$

$$pv = RT \iff p = \frac{RT}{v} \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (2) können wir (1) lösen:

$$\boxed{W_{12\mathrm{a}}} = -m\int_1^{2\mathrm{a}} \frac{RT}{v}\;\mathrm{d}v \tag{3}$$

$$= -mRT\int_1^{2\mathrm{a}} \frac{1}{v}\;\mathrm{d}v \tag{4}$$

$$= -mRT \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{5}$$

$$= -1\,\mathrm{kg} \cdot 0.287\,\tfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 300\,\mathrm{K} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

$$= \boxed{59.68\,\mathrm{kJ}} \tag{7}$$

Umformung (3) → (4) ist nur möglich, weil die Zustandsänderung *isotherm* ist. Dadurch können wir T als Konstante behandeln, und aus dem Integral herauslösen.

ii) 1 → 2b (Polytrope ZÄ):

gegeben: $T_1 = 300\,\mathrm{K}$
$p_1 = 1\,\mathrm{bar}$
$m = 1\,\mathrm{kg}$
$V_2 = \frac{1}{2}V_1$
ideales Gas mit $R = 0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$
$pv^n = const, n = 1.4$

gesucht: $W_{12\mathrm{b}}$

Wir nutzen erneut die Definition der Volumenänderungsarbeit (8), und die Zustandsgleichung des Idealen Gases (9). Zusätzlich haben wir die Formel für die polytrope Zustandsänderung (10).

$$W_{12\mathrm{b}} = -\int_1^{2\mathrm{b}} p\ \mathrm{d}V = -m \cdot \int_1^{2\mathrm{b}} p\ \mathrm{d}v \tag{8}$$

$$pv = RT \tag{9}$$

$$p \cdot v^n = const. \implies p \cdot v^n \equiv p_1 \cdot v_1^n \iff p \equiv \frac{p_1 v_1^n}{v^n} \tag{10}$$

Da T nun aber nicht mehr konstant ist, ist der Umformungsschritt (3)→(4) nun aber nicht mehr möglich. Deshalb setzen wir nun zunächst die Gleichung der polytropen Zustandsänderung (10) in (8) ein:

$$W_{12\mathrm{b}} = -m \int_1^{2\mathrm{b}} \frac{p_1 v_1^n}{v^n}\ \mathrm{d}v \tag{11}$$

$$= -m p_1 v_1^n \int_1^{2\mathrm{b}} \frac{1}{v^n}\ \mathrm{d}v \tag{12}$$

Um dieses Integral zu lösen, nutzen wir den allgemeingültigen Zusammenhang

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \tag{13}$$

wobei in unserem Fall $a = -n$.

$$\implies \boxed{W_{12\mathrm{b}}} = -m \cdot p_1 \cdot v_1^n \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \left[v_{2\mathrm{b}}^{1-n} - v_1^{1-n} \right] \tag{14}$$

$$= \frac{m \cdot p_1 \cdot v_1^n}{n-1} \cdot v_1^{1-n} \cdot \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} - 1 \right] \tag{15}$$

$$= \frac{m p_1 v_1}{n-1} \cdot \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} - 1 \right] \tag{16}$$

$$\overset{(9)}{=} \frac{m R T_1}{n-1} \cdot \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} - 1 \right], \tag{17}$$

$$= \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 0.287\,\mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot 300\,\mathrm{K}}{1.4-1} \cdot \left[(0.5)^{1-1.4} - 1 \right] \tag{18}$$

$$= \boxed{68.77\,\mathrm{kJ}} \tag{19}$$

Volumenänderungsarbeit im p-v-Diagramm

Wie wir wissen, wird die Volumenänderungsarbeit wie folgt berechnet:

$$W_{12} = -\int_1^2 p \; \mathrm{d}V$$

In einem p-v-Diagramm enstpricht das der Fläche unter dem Pfad 1 $\longrightarrow$ 2. Aus dem Diagramm wird also direkt ersichtlich, dass die Volumenänderungsarbeit bei der polytropen Kompression mit $n = 1.4$ größer ist, als bei der isothermen Kompression ($n = 1$).

b) i) gesucht: $p_{2\mathrm{a}}$

Zur Lösung werten wir die Zustandsgleichung des Idealen Gases für die Zustandspunkte 1 und 2a aus:

$$p_{2\mathrm{a}} v_2 = R T_{2\mathrm{a}} = R T_1 = p_1 v_1 \tag{20}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{p_{2\mathrm{a}}} = p_1 \frac{v_1}{v_2} = 1\,\mathrm{bar} \cdot 2 = \boxed{2\,\mathrm{bar}} \tag{21}$$

ii) gesucht: $p_{2\mathrm{b}}$
In diesem Fall handelt es sich um eine polytrope Zustandsänderung, es gilt:

$$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p_2} = p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n = 1\,\mathrm{bar} \cdot \left(\frac{1}{0.5} \right)^{1.4} = \boxed{2.64\,\mathrm{bar}} \tag{23}$$

c) gesucht: $Q_{12\mathrm{a}}$
Lösung: 1.HS f. geschlossene Systeme:

$$\Delta U_{12\mathrm{a}} = W_{12\mathrm{a}} + Q_{12\mathrm{a}} \tag{24}$$

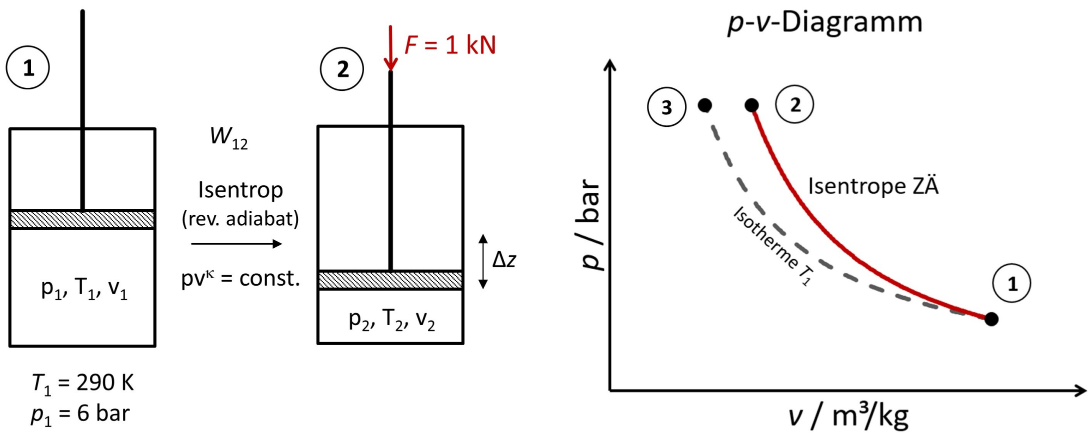
Die Volumenänderungsarbeit $W_{12\mathrm{a}}$ haben wir bereits berechnet. Die Änderung der inneren Energie eines Idealgases hängt nur von der Temperatur ab, und ist damit im isothermen Fall gleich Null:

$$\Delta U_{12\mathrm{a}} = m c_v (T_{2\mathrm{a}} - T_1) = 0 \tag{25}$$

Einsetzen in (24) liefert:

$$\boxed{Q_{12\mathrm{a}}} = -W_{12\mathrm{a}} = \boxed{-59.68\,\mathrm{kJ}} \tag{26}$$

Aufgabe 5.2 – Lösung



a) Wenn ein Prozess sehr schnell abläuft, nehmen wir in der Regel an, dass der Temperaturaustausch mit der Umgebung vernachlässigbar ist, da dieser viel Zeit in Anspruch nimmt.

Daher können wir in dieser Aufgabe annehmen, dass die Kompression des Stoßdämpfers *adiabat* verläuft.

b) gesucht: $\frac{v_2}{v_1}$

Nach Aufgabenstellung handelt es sich um eine reversibel adiabate ZÄ:

$$p \cdot v^\kappa = const. \tag{27}$$

$$\Longrightarrow p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa \iff \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^\kappa \tag{28}$$

$$\Longrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \tag{29}$$

Nun müssen wir nur noch p_2 ermitteln. Dafür nutzen wir das Kräftegleichgewicht im Zustand 2:

$$p_2 = \frac{F}{A} + p_1 = \Delta p_{12} + p_1 \tag{30}$$

$$\Delta p_{12} = p_2 - p_1 = \frac{F}{A} = \frac{1\,\mathrm{kN}}{\pi \cdot (\frac{10}{2}\mathrm{cm})^2} \tag{31}$$

$$= \frac{1 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{\pi \cdot 5^2 \cdot (10^{-2})^2 \mathrm{m}^2} = 1.27 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1.27\,\mathrm{bar} \tag{32}$$

$$\Longrightarrow\ p_2 = 6\,\mathrm{bar} + 1.27\,\mathrm{bar} = 7.27\,\mathrm{bar} \tag{33}$$

Durch Einsetzen in (29) können wir das Volumenverhältnis bestimmen:

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1}} = \left(\frac{6}{7.27}\right)^{\frac{1}{1.3}} = \boxed{0.8627} \tag{34}$$

Relative Änderung:

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - 1 = -13.73\,\% \tag{35}$$

c) Häufig gibt es verschiedene Wege zum Ziel. Hier sollen zwei Wege gezeigt werden:

i) auswerten der Gleichung für polytrope Zustandsänderungen mit Hilfe des Idealgas-Gesetzes:

$$p \cdot v^\kappa = p \cdot \left(\frac{R \cdot T}{p}\right)^\kappa = \frac{p}{p^\kappa} \cdot R^\kappa \cdot T^\kappa = const. \tag{36}$$

$$\Longrightarrow\ p^{1-\kappa} T^\kappa = const. \tag{37}$$

$$\Longrightarrow\ p_1^{1-\kappa} \cdot T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa} \cdot T_2^\kappa \tag{38}$$

$$\Longleftrightarrow\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\kappa} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\kappa \tag{39}$$

$$\Longleftrightarrow\ T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_1 \tag{40}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{T_2} = \left(\frac{6}{7.27}\right)^{\frac{1-1.3}{1.3}} \cdot 290\,\mathrm{K} \tag{41}$$

$$= \boxed{303.1379\,\mathrm{K}} \tag{42}$$

ii) Alternativ können wir auch die Zustandsgleichung des Idealen Gases direkt in beiden Zustandspunkten auswerten. Häufig ist dieser Weg schneller:

$$p_2 v_2 = R T_2 \ \Longrightarrow\ T_2 = \frac{p_2 \cdot v_2}{R} = \frac{p_2 \cdot 2 v_1}{R} \tag{43}$$

$$p_1 v_1 = R T_1 \ \Longrightarrow\ v_1 = \frac{R T_1}{p_1} \tag{44}$$

Durch Einsetzen von (44) in (43) erhalten wir:

$$\boxed{T_2} = \frac{p_2}{R}\frac{v_2}{v_1}\frac{R \cdot T_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{v_2}{v_1}T_1 = \boxed{303.1379\,\mathrm{K}} \tag{45}$$

d) gesucht: $\dfrac{v_3}{v_2}$

Für die isobare Zustandsänderung ② $\longrightarrow$ ③ hängt T nur von v ab:

$$pv = RT \tag{46}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{v}{T} = \frac{R}{p} = const. \tag{47}$$

Wir finden die Lösung, indem wir das Idealgasgesetz in beiden Zustandspunkten auswerten:

$$\frac{v_2}{T_2} = \frac{R}{p} = \frac{v_3}{T_3} \tag{48}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{v_3}{v_2} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{290\,\mathrm{K}}{303.1379\,\mathrm{K}} = \boxed{0.9567} \tag{49}$$

Relative Änderung:

$$\boxed{\frac{v_3 - v_2}{v_2}} = \frac{v_3}{v_2} - 1 = \boxed{-4.33\,\%} \tag{50}$$

e) $V = z \cdot A$ (z: Höhe, A: Zylinder-Querschnittsfläche)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_2 \cdot \cancel{A}}{z_1 \cdot \cancel{A}} = \frac{v_2}{v_1} \tag{51}$$

$$\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot z_1 = 0.872 \cdot 50\,\mathrm{cm} = 43.13\,\mathrm{cm} \tag{52}$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{z_3 \cdot \cancel{A}}{z_2 \cdot \cancel{A}} = \frac{v_3}{v_2} \tag{53}$$

$$\Longrightarrow \quad z_3 = \frac{v_3}{v_2} \cdot z_2 = 0.947 \cdot 43.6\,\mathrm{cm} = 41.27\,\mathrm{cm} \tag{54}$$

$$\boxed{\Delta z_{12}} = z_1 - z_2 = (43.13\,\mathrm{cm} - 50\,\mathrm{cm}) = \boxed{-6.87\,\mathrm{cm}} \tag{55}$$

$$\boxed{\Delta z_{13}} = z_1 - z_3 = (41.27\,\mathrm{cm} - 50\,\mathrm{cm}) = \boxed{-8.73\,\mathrm{cm}} \tag{56}$$