MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2013

Klausur vom 23.07.2013

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	10	10	10	10	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben

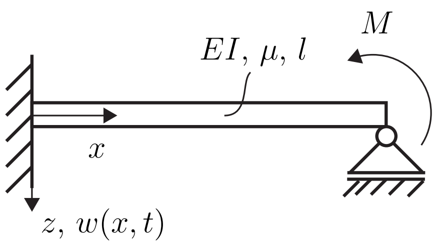
[10 Punkte]

Aufgabe T1

[2 Punkte]

Geben Sie alle Randbedingungen der skizzierten Systeme an. Unterscheiden Sie dabei zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen (RB).

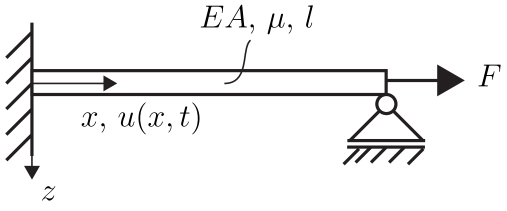
Biegeschwingungen $w(x,t)$



geometrische RB:

dynamische RB:

Längsschwingungen $u(x,t)$



geometrische RB:

dynamische RB:

Aufgabe T2 [1 Punkt]

Die Lösung nach d'Alembert der eindimensionalen Wellengleichung hat die Gestalt

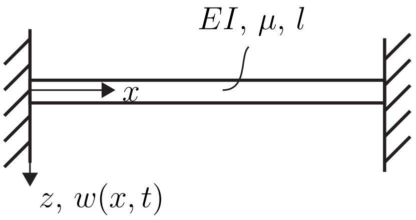
$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

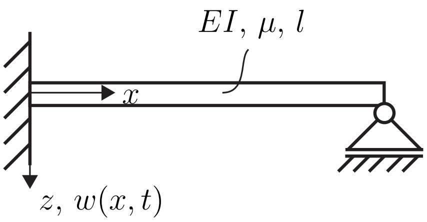
Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in negative x-Richtung laufende Welle? Bitte kreuzen Sie an

☐ f_1	☐ f_2	☐ $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$	☐ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$

Aufgabe T3 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und zweite Eigenform.

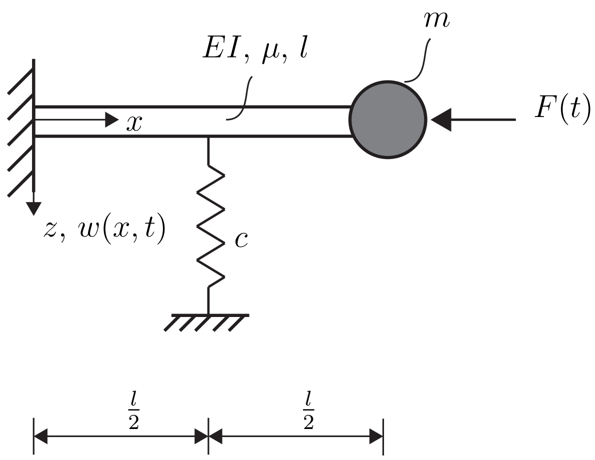




1. Eigenform	2. Eigenform
	
	

Aufgabe T4 [2 Punkte]

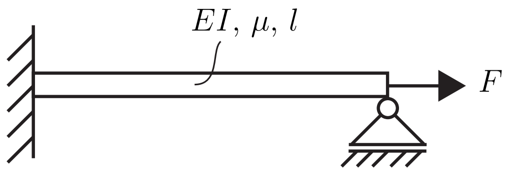
Für das skizzierte System sollen mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen für die Biegeschwingungen $w(x,t)$ bestimmt werden. Kreuzen Sie den korrekten Ausdruck für das Prinzip von Hamilton an.



☐	$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c w^2(\frac{l}{2}) \right) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} F(t) \delta w(l) \mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c w^2(\frac{l}{2}) - \frac{1}{2} \int_0^l F(t) w'^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l F(t) w'^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$ $+ \int_{t_0}^{t_1} \left(F(t) \delta w(l) - c w(\frac{l}{2}) \delta w(\frac{l}{2}) \right) \mathrm{d}t = 0$

Aufgabe T5 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante **positive** Vorspannkraft F auf die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems?

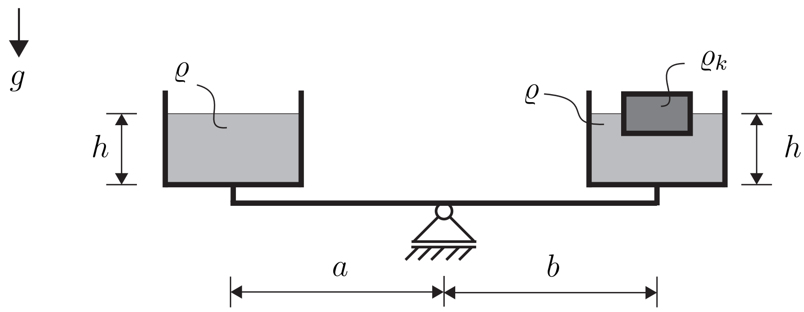


Die Eigenkreisfrequenzen

☐ werden größer.	☐ werden kleiner.	☐ bleiben gleich.

Aufgabe T6 [2 Punkte]

Auf der skizzierten Waage im Gleichgewicht befinden sich die beiden identischen, mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllten Behälter mit gleichen Füllständen h. Im rechten Behälter schwimmt zudem ein Körper mit Dichte ϱ_K. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.



a) Für die Dichten ϱ, ϱ_K gilt:

☐ $\varrho > \varrho_K$	☐ $\varrho < \varrho_K$

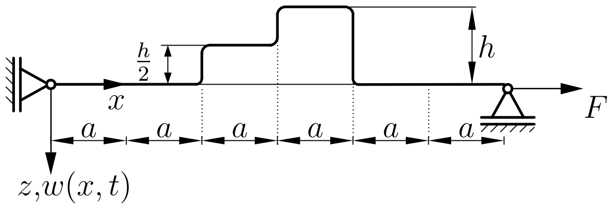
b) Für die Hebelarme a, b gilt:

☐ $a = b$	☐ $a > b$	☐ $a < b$

Aufgabe 1

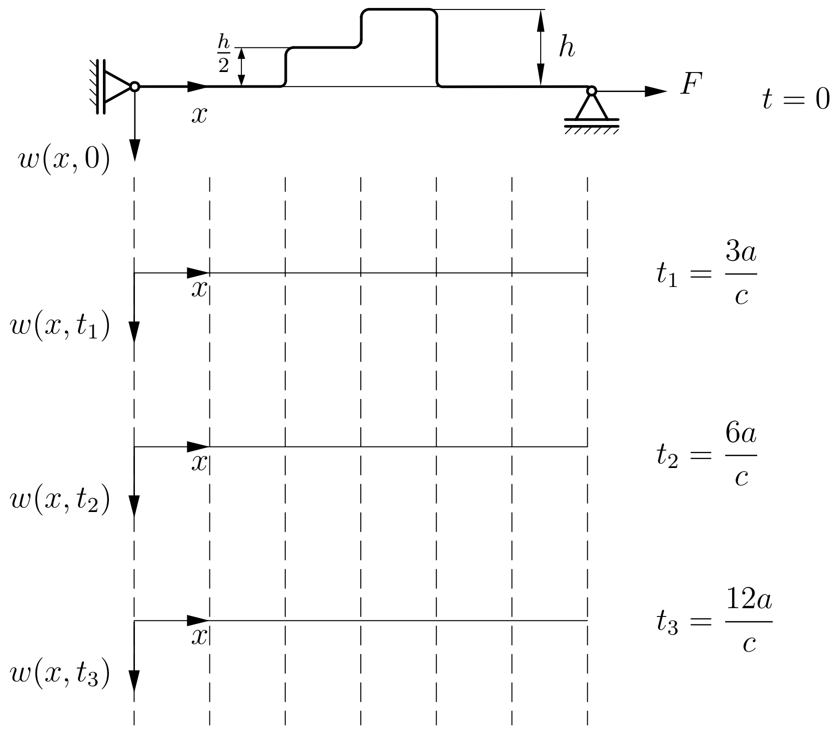
[10 Punkte]

Die vorgespannte, frei-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$, Vorspannkraft F) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h, F

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1 = 3a/c$, $t_2 = 6a/c$, $t_3 = 12a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

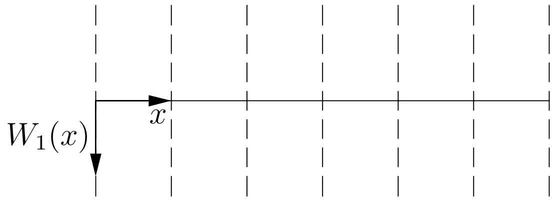
$T =$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$\omega_1 =$

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

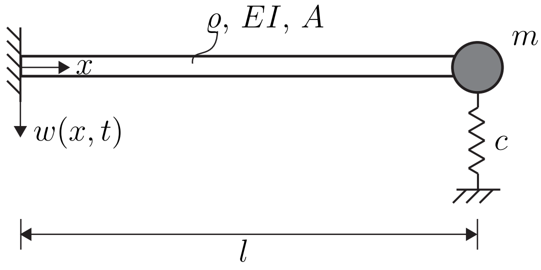
1. Eigenform



Aufgabe 2

[10 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI, Länge l, Querschnittsfläche A) mit einer diskreten Punktmasse (Masse m), die sich über eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w(l,t) = 0$) abstützt.



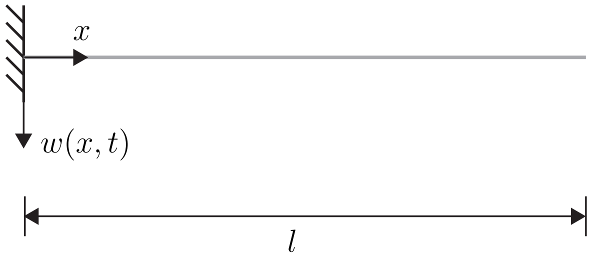
Gegeben: ϱ, A, EI, l, m, c

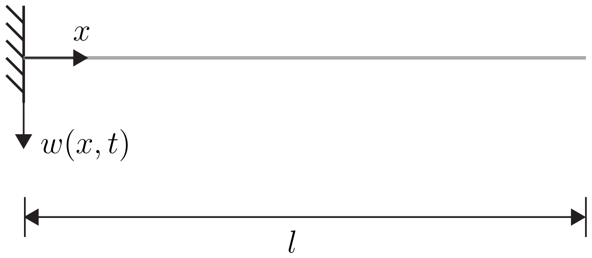
a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

Randbedingungen:

b) Skizzieren Sie die zwei Schwingungsformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen.





c) Welche der folgenden Ansatzfunktionen ist für die Bestimmung der niedrigsten Eigenkreisfrequenz mithilfe des Rayleigh-Quotienten geeignet?

- ☐ $W(x) = x$
- ☐ $W(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^2}$
- ☐ $W(x) = A\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)$
- ☐ $W(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$

d) Bestimmen Sie mit der Funktion $W(x) = 5\frac{x^2}{l}$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Spezialfall $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$.

Nebenrechnung:

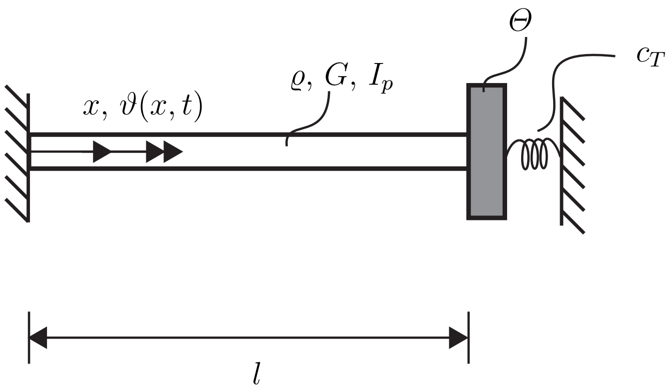
$\omega_1 \leq$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

An einem Torsionsstab (Dichte ϱ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) ist eine starre Scheibe (Massenträgheitsmoment bzgl. x-Achse Θ) angebracht. Die Scheibe ist über eine für $\vartheta(l,t) = 0$ entspannte Torsionsfeder (Drehfedersteifigkeit c_T) mit der Umgebung verbunden. Mit dem Prinzip von Hamilton ist das Randwertproblem für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ zu formulieren.

Gegeben: ϱ, G, I_p, l, Θ, c_T



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$T =$

$U =$

$\delta W =$

b) Geben Sie die geometrische(n) Randbedingung(en) für $\vartheta(x,t)$ an.

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung für $\vartheta(x,t)$ sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnungen:

Hinweis: Bitte das Ergebnis auf der nächsten Seite eintragen.

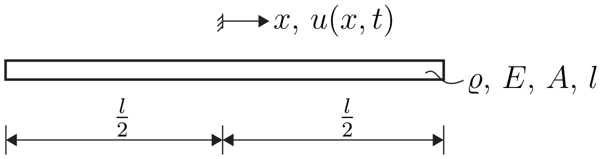
Feldgleichung:

dyn. Randbedingun(en):

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Gegeben ist ein freier Stab (Länge l, Dichte ϱ, E-Modul E, Querschnittsfläche A), der freie Längsschwingungen $u(x,t)$ ausführen kann.



Gegeben: ϱ, E, A, l

Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

a) Geben Sie die Feldgleichung für $u(x,t)$ und die Randbedingungen für $x = -\frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ an. Verwenden Sie dabei **ausschließlich das eingezeichnete Koordinatensystem** ($x = 0$ in der Mitte des Stabes).

Feldgleichung:

Randbedingungen:

b) Leiten Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $U(x)$ her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

Nebenrechnung:

Differentialgleichung:

allgemeine Lösung:

c) Bestimmen Sie die Eigenformen $U_k(x)$ und die Eigenkreisfrequenzen ω_k.

Nebenrechnung:

Eigenformen:

Eigenkreisfrequenzen: