Aufgabe 9.1 – Lösung

a)

Wirkungsgrad η

- allgemein: $\boxed{\eta := \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}}}$
- je nach dem, was man als "Nutzen" und "Aufwand" definiert, ergeben sich verschiedene Wirkungsgrade, mit verschiedener inhaltlicher Bedeutung.

b)

thermischer Wirkungsgrad η_{th}

- betrachtet gesamte Energie:

$$\boxed{\eta_{\text{th}} := \frac{\text{genutze Energie}}{\text{Energieaufwand}}}$$

Turbinen werden genutzt, um Wärme in Arbeit umzuwandeln. Der thermische Wirkungsgrad am Beispiel einer Turbine ist also:

$$\begin{aligned} \text{Nutzen}_{(\text{Turbine})} &= P \\ \text{Aufwand}_{(\text{Turbine})} &= \dot{Q} \\ \implies \quad \eta_{\text{th,Turbine}} &= \frac{P}{\dot{Q}} \end{aligned}$$

Achtung: Wenn wir andere Bauteile betrachten (z.B. eine Wärmepumpe), sähe η_{th} natürlich anders aus! Das gilt auch für η_{ex} und η_s.

c)

Exergetischer Wirkungsgrad η_{ex}

- betrachtet nur den Exergie-Anteil der Energie:

$$\boxed{\eta_{\text{ex}} = \frac{E_{\text{Nutz}}}{E_{\text{Aufw}}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\eta_{\text{ex}} = \frac{\dot{E}_{\text{Nutz}}}{\dot{E}_{\text{Aufw}}}}$$

- bei konstanter Masse m (bzw konstentem Massestrom $\dot{m}$) ergibt sich:

$$\boxed{\eta_{\text{ex}} = \frac{e_{\text{Nutz}}}{e_{\text{Aufw}}}}$$

Der exergetische Wirkungsgrad η_{ex} am Beispiel einer Turbine:

$$
\begin{aligned}
e_{\text{Nutz,Turb.}} &= w_{\text{t},12} \\
e_{\text{Nutz,Turb.}} &= \Delta e_{\text{h}} = e_{\text{h},2} - e_{\text{h},1} \\
\Longrightarrow \quad \eta_{\text{ex,Turb.}} &= \frac{w_{\text{t},12}}{e_{h,2} - e_{h,1}}
\end{aligned}
$$

d)

Isentroper Wirkungsgrad η_s

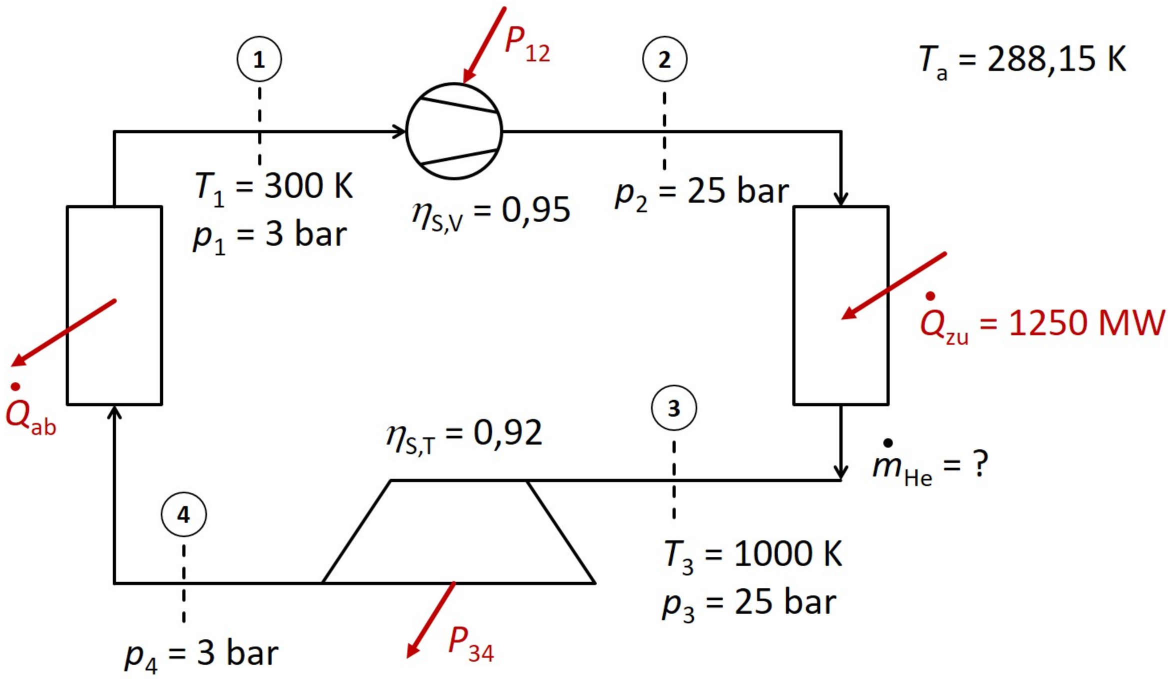
- vergleicht realen Porzess mit idealem Vergleichsprozess (idR. reversibel-adiabat):
$$\boxed{\eta_s := \frac{\eta_{\text{real}}}{\eta_{\text{ideal}}}}$$
- aus Überlegungen zum 2. HS folgt, dass $\eta_s < 1$ für reale Prozesse
- η_s kann als "Qualität der technischen Umsetzung" verstanden werden – anders als andere Wirkungsgrade hängt η_s nur von der technischen Umsetzung einer Anlage ab.

Der isentrope Wirkungsgrad η_s am Beispiel einer Turbine:

$$
\begin{aligned}
\eta_{\text{real,Turb.}} &= \frac{w_{\text{t},12}}{\Delta e_{\text{h}}} \\
\eta_{\text{ideal,Turb.}} &= \frac{w_{\text{t,ad.rev.}}}{\Delta e_{\text{h}}} \\
\Longrightarrow \quad \eta_{s,\text{Turb.}} &= \frac{w_{\text{t},12}}{w_{\text{t,12,rev.ad.}}}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich der Zusammenhang $w_{\text{t}} = \eta_{s,\text{Turb.}} \cdot w_{\text{t,ad.rev.}}$. Dieser stellt eine "Zerlegung" des Outputs dar, wobei $w_{\text{t,ad.rev.}}$ der theoretisch maximal mögliche Output ist (und sich leicht berechnen lässt) und η_s nur von der technischen Umsetzung der Anlage abhängig ist.

Aufgabe 9.2 – Lösung



a) **gesucht:** $w_{\text{t},12},\ T_2$

1 $\longrightarrow$ 2s (reversibel adiabate ZÄ):

Für die technische Arbeit in reversibel adiabaten Prozessen gilt:

$$w_{\text{t},12,\text{rev.ad}} = \int v \,\mathrm{d}p\,. \tag{1}$$

Außerdem kennen wir das Idealgasgesetz

$$pv = RT \iff v = \frac{RT}{p}, \tag{2}$$

sowie die polytrope Beschreibung von isentropen Zustansänderungen:

$$pv^\kappa = const. \tag{3}$$

Zunächst stellen wir (3) nach v um:

$$pv^\kappa = const. \tag{4}$$

$$\implies pv^\kappa = p_1 v_1^\kappa \overset{(2)}{=} p_1\left(\frac{RT_1}{p_1}\right)^\kappa \tag{5}$$

$$\implies v = p^{-\frac{1}{\kappa}} RT_1 p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \tag{6}$$

Diese Beschreibung von v können wir jetzt in (1) einsetzen:

$$w_{\mathrm{t,12,rev.ad}} = RT_1 p_1^{\frac{1}{\kappa}-1} \int p^{-\frac{1}{\kappa}}\,\mathrm{d}p \tag{7}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{\kappa}} RT_1 p_1^{\frac{1}{\kappa}-1} \left[p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]_{p_1}^{p_2} \tag{8}$$

$$= \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) \tag{9}$$

Diese Formel können wir jetzt allgemein benutzen, um die spezifische technische Arbeit für reversibel adiabate Prozesse zu berechnen:

$$w_{\mathrm{t,12,rev.ad}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) \tag{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad w_{\mathrm{t,12,rev.ad}} = \frac{1.67 \cdot 2.0787\,\mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot 300\,\mathrm{K}}{1.67-1} \cdot \left[\left(\frac{25\,\mathrm{bar}}{3\,\mathrm{bar}}\right)^{\frac{1.67-1}{1.67}} - 1\right] \tag{11}$$

$$= 2081.63\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \tag{12}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5.1967\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}}{3.118\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}} = 1.67 \tag{13}$$

$$R = \frac{R_{\mathrm{m}}}{M} = \frac{8.314\,72\,\mathrm{kJ/(kmol\,K)}}{4\,\mathrm{kg/kmol}} = 2.0787\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \tag{14}$$

1 $\longrightarrow$ 2 (adiabate ZÄ):

$$\Longrightarrow \boxed{w_{\mathrm{t,12}}} = \frac{w_{\mathrm{t,12,rev.ad}}}{\eta_{s,V}} = \frac{2081.63\,\mathrm{kJ/kg}}{0,95} = \boxed{2191.19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}} \tag{15}$$

Isentroper Wirkungsgrad: Turbine vs. Verdichter

Turbine: $\eta_{s,\mathrm{T}} = \dfrac{w_{\mathrm{t,34}}}{w_{\mathrm{t,34,rev.ad}}}$, Verdichter: $\eta_{s,\mathrm{V}} = \dfrac{w_{\mathrm{t,12,rev.ad}}}{w_{\mathrm{t,12}}}$

1. HS:

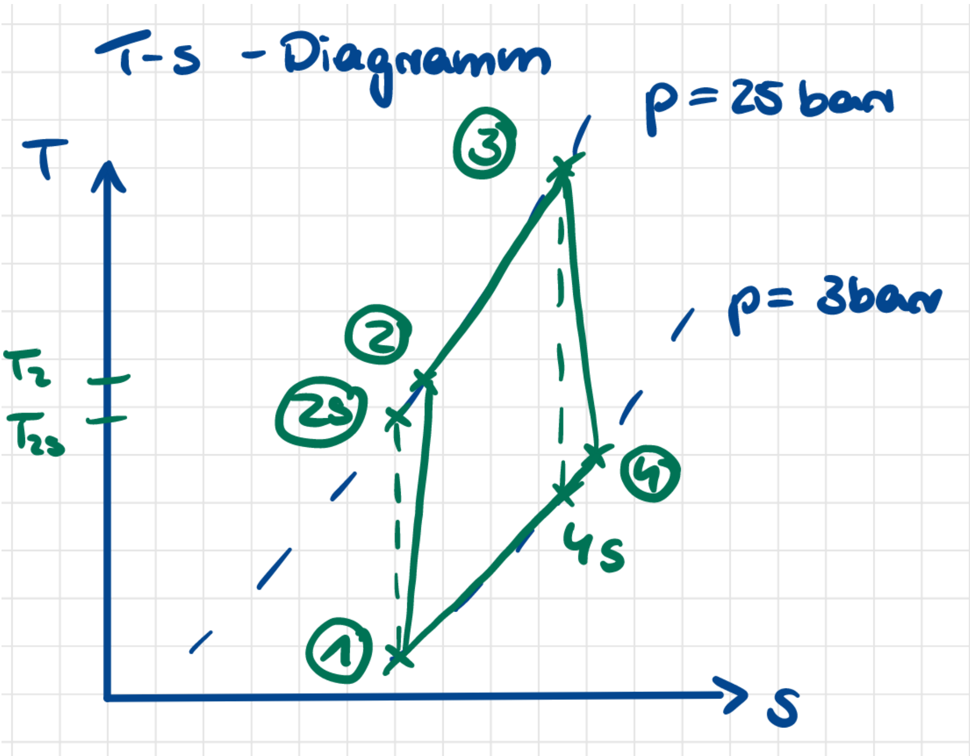
$$P_{12} + \cancel{\dot{Q}_{12}} = \dot{m}_{\mathrm{He}} \cdot (h_2 - h_1) \iff \cancel{\dot{m}_{\mathrm{He}}} \cdot w_{\mathrm{t,12}} = \cancel{\dot{m}_{\mathrm{He}}} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{T_2} = \frac{w_{\mathrm{t,12}}}{c_p} + T_1 = \frac{2191.19\,\mathrm{kJ/kg}}{5.1967\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}} + 300\,\mathrm{K} = \boxed{721.65\,\mathrm{K}} \tag{17}$$

1 $\longrightarrow$ 2s (reversibel adiabate ZÄ):

$$\Longrightarrow T_{2s} = \frac{w_{\mathrm{t,12,rev.ad}}}{c_p} + T_1 = \frac{2081.63\,\mathrm{kJ/kg}}{5.1967\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}} + 300\,\mathrm{K} = 700.57\,\mathrm{K} \tag{18}$$

b)



c) **gesucht:** $\dot{m}_{\mathrm{He}}$

2 $\longrightarrow$ 3 (isobare ZÄ):

$$\text{1. HS:} \quad \cancel{P_{23}} + \dot{Q}_{\mathrm{zu}} = \dot{m}_{\mathrm{He}} \cdot (h_3 - h_2) = \dot{m}_{\mathrm{He}} \cdot c_p \cdot (T_3 - T_2) \tag{19}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\dot{m}_{\mathrm{He}}} = \frac{\dot{Q}_{\mathrm{zu}}}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} = \frac{1250 \cdot 10^3\,\mathrm{kW}}{5.1967\,\mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot (1000 - 721,65)\ K} \tag{20}$$

$$= \boxed{864.15\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}} \tag{21}$$

d) **gesucht:** P_{Nutz}

3 $\longrightarrow$ 4s (reversibel adiabate ZÄ):

$$w_{\mathrm{t,34,rev.ad}} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_3 \cdot \left[\left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \quad w_{\mathrm{t,34,rev.ad}} = \frac{1.67 \cdot 3.0787\,\mathrm{kJ/(kg\,K)} \cdot 1000\,\mathrm{K}}{1.67 - 1} \cdot \left[\left(\frac{3\,\mathrm{bar}}{25\,\mathrm{bar}} \right)^{\frac{1.67-1}{1.67}} - 1 \right] \tag{23}$$

$$= -2971.33\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \tag{24}$$

③ ⟶ ④ (adiabate ZÄ):

$$\Longrightarrow \quad w_{\mathrm{t,34}} = \eta_{s,T} \cdot w_{\mathrm{t,34,rev.ad}} = 0.92 \cdot -2971.33\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = -2733.62\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \tag{25}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P_{\mathrm{Nutz}}} = \dot{m}_{\mathrm{He}} \cdot (w_{\mathrm{t,12}} + w_{\mathrm{t,34}}) \tag{26}$$

$$= 864.15\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot \left(2191.19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} - 2733.62\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \right) \tag{27}$$

$$= \boxed{-468.75\,\mathrm{MW}} \tag{28}$$

e) **gesucht:** η_{th}

Thermischer Wirkungsgrad:

$$\boxed{\eta_{\mathrm{th}}} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{|P_{\mathrm{Nutz}}|}{\dot{Q}_{\mathrm{zu}}} = \frac{|-468.75\,\mathrm{MW}|}{1250\,\mathrm{MW}} = \boxed{37.5\,\%} \tag{29}$$

f) **gesucht:** $\eta_{\mathrm{ex,Anlage}}$, $\eta_{\mathrm{ex,Prozess}}$

Beim exergetischen Wirkungsgrad müssen wir uns zunächst überlegen, welchen Exergiestrom wir als E_{Aufw} betrachten:

i) Wir können den Exergiestrom betrachten, den der Reaktor an den Prozess abgibt ($\eta_{\mathrm{ex,Anlage}}$)

ii) Alternativ können wir den Exergiestrom betrachten, den der Prozess (die Turbine) bekommt ($\eta_{\mathrm{ex,Prozess}}$)

Da bei der Wärmeübertragung Exergie verloren geht, ist der Exergiestrom, den der Reaktor an die Anlage abgibt (Variante i) größer als der Exergiestrom, den der Prozess als E_{Nutz} verwendet (Variante ii).
Beide Varianten sind plausibel, und keine Variante ist "richtiger" als die andere. In der Praxis führt das zu Uneindeutigkeiten, die von Anlagebetreiber:innen und Hesteller:innen beachtet werden müssen.

i) Exergetischer Wirkungsgrad Anlage ($\rightarrow T_{\mathrm{Waermeuebergang}} = T_{\mathrm{Reaktor}}$)

$$\eta_{\mathrm{ex,Anlage}} = \frac{\text{exergetischer Nutzen}}{\text{exergetischer Aufwand}} = \frac{|P_{\mathrm{Nutz}}|}{\dot{E}_{\mathrm{Qzu,Anlage}}} \tag{30}$$

$$\dot{E}_{\mathrm{Qzu,Anlage}} = \left(1 - \frac{T_{\mathrm{a}}}{T_{\mathrm{Reaktor}}} \right) \cdot \dot{Q}_{\mathrm{zu}} = \left(1 - \frac{288.15\,\mathrm{K}}{1050\,\mathrm{K}} \right) \cdot 1250\,\mathrm{MW} \tag{31}$$

$$= 906.96\,\text{MW} \tag{32}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\eta_{\text{ex,Anlage}}} = \frac{|-468.75\,\text{MW}|}{906.96\,\text{MW}} = \boxed{51.68\,\%} \tag{33}$$

ii) Exergetischer Wirkungsgrad Prozess ($\rightarrow T_{\text{Waermeuebergang}} = T_{\text{m,23}}$)

$$\eta_{\text{ex,Prozess}} = \frac{\text{exergetischer Nutzen}}{\text{exergetischer Aufwand}} = \frac{|P_{\text{Nutz}}|}{\dot{E}_{\text{Qzu,Prozess}}} \tag{34}$$

$$\dot{E}_{\text{Qzu,Prozess}} = \left(1 - \frac{T_{\text{a}}}{T_{\text{m,23}}}\right) \cdot \dot{Q}_{\text{zu}} \tag{35}$$

Thermodynam. Mitteltemperatur T_{m} (isobare Wärmeübertragung)

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q}{T_{\text{m}}} \overset{\textbf{isobar}}{=} \frac{\mathrm{d}h}{T_{\text{m}}} \Longrightarrow \boxed{T_{\text{m}} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{c_p \cdot \Delta T}{\Delta s}}$$

- diese Definition von T_{m} lässt sich aus der Exergiedifferenz am Wärmeüberträger herleiten.

$$T_{\text{m,23}} = \frac{c_p \cdot (T_3 - T_2)}{\Delta s_{23}} \tag{36}$$

$$\Delta s_{23} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}h - \cancel{v\,\mathrm{d}p}}{T} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) \tag{37}$$

$$\Longrightarrow T_{\text{m,23}} = \frac{T_3 - T_2}{\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)} = \frac{(1000 - 721.65)\text{K}}{\ln\left(\frac{1000\,\text{K}}{721.65\,\text{K}}\right)} = 853.27\,\text{K} \tag{38}$$

$$\Longrightarrow \dot{E}_{\text{Qzu,Prozess}} = \left(1 - \frac{288.15\,\text{K}}{853.37\,\text{K}}\right) \cdot 1250\,\text{MW} = 827.87\,\text{MW} \tag{39}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\eta_{\text{ex,Prozess}}} = \frac{|-468.75\,\text{MW}|}{827.87\,\text{MW}} = \boxed{56.62\,\%} \tag{40}$$

Wir sehen also, dass $\eta_{\text{ex,Anlage}} < \eta_{\text{ex,Prozess}}$. Der Grund hierfür ist, dass der Prozess weniger Exergie aufnimmt, als die Anlage zur Verfügung gestellt (abgegeben) hat. Dies liegt daran, dass bei der Wärmeübertragung $T_{\text{a}} > T_{\text{Reaktor}} \Longrightarrow$ Entropieerzeugung $\Longrightarrow$ Exergieverlust bei der Wärmeübertragung.