Vorlesung: Numerik 1 für Ingenieure

Version 7.11.20

Michael Karow

2. Vorlesung

Themen: Allgemeines zu linearen Gleichungssystemen,

LR-Zerlegung

Zur Motivation:

Physikalisches Problem:
Vorhersage und/oder Optimierung eines Vorgangs.
$\rightsquigarrow$
Mathematisches Modell:
Gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen
(unendlich viele Unbekannte)
$\rightsquigarrow$
Numerisches Problem:
Lösung der Diff'gleichungen
$\rightsquigarrow$
Approximation der Diff'gleichungen durch
Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten.
$\rightsquigarrow$
Numerisches Problem:
Lösung dieser Gleichungen
$\rightsquigarrow$
Numerisches Problem:
Lösung linearer Gleichungssysteme

Das Lösen linearer Gleichungssysteme
ist eine Grundaufgabe
des wissenschaftlichen Rechnens

Lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + \ \ 5\,x_2 + \ \ 3\,x_3 &= 7, \\ 8\,x_1 + 26\,x_2 + 16\,x_3 &= 36, \\ 12\,x_1 + 60\,x_2 + 39\,x_3 &= 87. \end{aligned}$$

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 26 & 16 \\ 12 & 60 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 87 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad x = b$$

Gesucht: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

LGS in oberer Dreiecksform löst man durch Rückwärtseinsetzen.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 &= 7 \\ 6\,x_2 + 4\,x_3 &= 8 \\ 1\,x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 5 \\ x_2 &= (1/6)(8 - 4\,x_3) \\ x_1 &= (1/2)(7 - 3\,x_3 - 5\,x_2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_3 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 1$$

LGS in unterer Dreiecksform löst man durch Vorwärtseinsetzen.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 87 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 7 \\ 4\,y_1 + y_2 &= 36 \\ 6\,y_1 + 5\,y_2 + y_3 &= 87 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 7 \\ y_2 &= 36 - 4\,y_1 \\ y_3 &= 87 - 6\,y_1 - 5\,y_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y_1 = 7, \quad y_2 = 8, \quad y_3 = 5$$

Fast jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt

eine **LR-Zerlegung**:

$$A = LR$$

Dabei ist

$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix (Linksdreiecksmatrix) mit 1en auf der Diagonale

$R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix (Rechtsdreiecksmatrix)

Beispiele:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 10 & 19 & 27 & -14 \\ 6 & 16 & 11 & -11 \\ -4 & -11 & 4 & 19 \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}^{R}$$

und

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 26 & 16 \\ 12 & 60 & 39 \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{R}$$

Lösung von LGS mit LR-Zerlegung.

Sei $A = LR$. Dann löst man die Gleichung $A\,x = b$ in zwei Schritten.

1. Schritt: Löse $L\,y = b$ (durch Vorwärtseinsetzen).

2. Schritt: Löse $R\,x = y$ (durch Rückwärtseinsetzen).

$\Rightarrow$

x ist Lösung von $A\,x = b$

'Beweis': Aus $A = LR$, $Ly = b$ und $Rx = y$ folgt $Ax = LRx = Ly = b$.

Problem: Wie findet man eine LR-Zerlegung ?

Wir werden gleich sehen:

Eine LR-Zerlegung findet man mit dem **Gauß-Algorithmus**.

Die Grundidee des Gauß-Algorithmus ist:

Wenn man in einem linearen Gleichungssystem von einer der Gleichungen ein Vielfaches einer anderen Gleichung abzieht, dann ändert sich dadurch die Lösung des Gleichungssystems nicht.

Man zieht die Zeilen so von einander ab, dass unterhalb der Diagonalen Nullen stehen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{vmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{vmatrix}}_{b} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

Anschließend löst man das Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen.

Gauß-Algorithmus (ohne Zeilenvertauschungen)

Zu lösen: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 25 & 16 \\ 12 & 60 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 87 \end{bmatrix}$

Erweiterte Matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & \vdots & 7 \\ 8 & 26 & 16 & \vdots & 36 \\ 12 & 60 & 39 & \vdots & 87 \end{bmatrix}$$

Zeile II + 4*(Zeile I) $\uparrow$ $\downarrow$ Zeile II - 4*(Zeile I)

Zeile III + 6*(Zeile I) $\uparrow$ $\downarrow$ Zeile III - 6*(Zeile I)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 6 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 30 & 21 & \vdots & 45 \end{bmatrix}$$

Zeile III + 5*(Zeile II) $\uparrow$ $\downarrow$ Zeile III - 5*(Zeile II)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 6 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$$

Dreiecksform

Lösen durch Rückwärtseinsetzen

Berechnung der LR-Zerlegung, $A = LR$, mit dem Gauß-Algorithmus.

Die Matrix A wird durch Zeilenumformungen (Subtraktionen) in R umgerechnet. Die Faktoren, mit denen die Zeilen vor dem Subtrahieren multipliziert werden, schreibt man in die L-Matrix. Dann gilt $A = LR$.

Zeilenumformungen:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 10 & 19 & 27 & -14 \\ 6 & 16 & 11 & -11 \\ -4 & -11 & 4 & 19 \end{bmatrix}}^{A} \qquad \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Einheitsmatrix}}$$

$$\begin{aligned} II &- 5 * I \\ III &- 3 * I \\ IV &- (-2) * I \end{aligned}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 14 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} III &- (-4) * II \\ IV &- 3 * II \end{aligned}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$IV - 2 * III$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{R} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L}$$

Zeilenumformungen lassen sich als Multiplikation mit einer Matrix von links darstellen.

Beispiel: Der Übergang

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 25 & 16 \\ 12 & 60 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 87 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Zeile III - 6*(Zeile I)}]{\text{Zeile II -4*(Zeile I)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 30 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 45 \end{bmatrix}$$

entspricht einer Multiplikation mit der Matrix

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denn

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 25 & 16 \\ 12 & 60 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 30 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 87 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Die Umkehrung der obigen Zeilenoperationen entspricht einer Multiplikation mit der Inversen von L_1. Diese ist

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt: $\quad Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad L_1 A x = L_1 b$

Merke: **Die Zeilenoperationen beim Gauß-Algorithmus entsprechen der Links-Multiplikation der Gleichung $Ax = b$ mit Matrizen der Form**

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k,k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & -\ell_{k,n} & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\uparrow$ k-te Spalte

Eine solche Matrix heißt **Frobenius-Matrix** vom Typ k.

Wenn man L_k von links mit einer Matrix A multipliziert,
dann führt man folgende Zeilenoperationen mit A durch:

Von der $(k+1)$-ten Zeile das $\ell_{k,k+1}$-fache der k-ten Zeile abziehen.
Von der $(k+2)$-ten Zeile das $\ell_{k,k+2}$-fache der k-ten Zeile abziehen.
$\vdots$
Von der n-ten Zeile das $\ell_{k,n}$-fache der k-ten Zeile abziehen.

Beweis: durch Nachrechnen

Merke: **Die Inverse einer Frobeniusmatrix bekommt man, indem die Vorzeichen der Einträge unter der Diagonale umkehrt:**

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k,k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & -\ell_{k,n} & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k,k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ell_{k,n} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Beweis: Man muss Nachrechnen dass $L_k L_k^{-1} = I$ (I=Einheitsmatrix).

Der Gauß-Algorithmus sieht in Matrixschreibweise so aus:

$$\begin{aligned}
Ax = b \qquad &\Leftrightarrow \quad L_1\, A\, x = L_1\, b \\
&\Leftrightarrow \quad L_2 L_1\, A\, x = L_2 L_1\, b \\
&\;\vdots \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_1\, A}_{R}\, x = L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_1\, b
\end{aligned}$$

mit geeigneten Frobenius-Matrizen L_k.

Die Matrix $\quad R = L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_1\, A \quad$ hat obere Dreiecksform. Es ist

$$\begin{aligned}
\underbrace{L_1^{-1} \ldots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}}_{=:L} R \quad &= \quad L_1^{-1} \ldots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}\, L_{n-1} L_{n-2} \ldots L_1 A \\
&= \quad A
\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte LR-Zerlegung von A gefunden, denn man hat (das muss man nachrechnen)

$$L = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\
\ell_{12} & \ddots & & & & \\
 & \ddots & 1 & & & \\
\vdots & & \ell_{k,k+1} & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & 1 & 0 \\
\ell_{1n} & & \ldots & & \ell_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}.$$

Der Eintrag $\ell_{k,j}$ ist der Faktor, mit dem (beim Gauß-Algorithmus) die k-te Zeile vor dem Abziehen von der j-ten Zeile multipliziert wird.

Rechenaufwand bei der LR-Zerlegung

Um mit dem Gauß-Algorithmus in der ersten Spalte einer $n \times n$-Matrix unterhalb des Diagonalelements Nullen zu erzeugen, braucht man $(n-1)+(n-1)^2$ Multiplikationen/Divisionen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}_{n} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Sei M_n die Anzahl der Multiplikationen/Divisionen bei der LR-Zerlegung einer $n \times n$ Matrix. Dann ist also

$$\begin{aligned} M_n &= (n-1)+(n-1)^2 + M_{n-1} \\ &= (n-1)+(n-1)^2+(n-2)+(n-2)^2+M_{n-2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{3} n^3 + \text{niedrigere Potenzen von } n \;=\; \mathcal{O}(n^3). \end{aligned}$$

Beispiel: $M_{25} = 5200$, $M_{50} = 41650$, $M_{100} = 333300$.

Faustregel: Bei Verdoppelung der Matrixgröße verachtfacht sich der Rechenaufwand.

Die PLR-Zerlegung:

Manchmal muss man beim Gauß-Algorithmus Zeilen oder Spalten vertauschen, um die Division durch 0 oder eine sehr kleine Zahl zu vermeiden (Division durch kleine Zahlen verstärkt numerische Fehler).

Satz: Jede invertierbare Matrix A hat eine Produktdarstellung,

$$A = PLR,$$

wobei
L eine untere Dreiecksmatrix,
R eine obere Dreiecksmatrix
und P eine Permutationsmatrix ist.

Erläuterung:
Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 hat. Alle anderen Einträge sind 0.

Linksmultiplikation mit einer Permutationsmatrix bewirkt Zeilenvertauschungen.

Andere Zerlegungen zur Lösung linearer Gleichungssysteme:

- QR-**Zerlegung:**
  Jede (auch nichtquadratische) Matrix A hat eine Zerlegung der Form
  $$A = QR,$$
  mit einer oberen Dreiecksmatrix R einer orthogonalen Matrix Q (d.h. $Q^{-1} = Q^\top$).

- **Cholesky-Zerlegung:**
  Jede positiv definite symmetrische Matrix A hat eine Zerlegung der Form
  $$A = LL^T,$$
  wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist.

$\Rightarrow$ Diese Zerlegungen behandeln wir in den kommenden Vorlesungen.

Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

Cramersche Regel:
Sei $A = [a_1, \dots, a_n]$ eine invertierbare quadratische Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n$. Dann kann man die Lösung der Gleichung $Ax = b$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ wie folgt erhalten:

$$x_k = \frac{\det(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}.$$

Merke:
Die Cramersche Regel ist **nicht geeignet** zur Lösung größerer Gleichungssysteme.

Grund: zu großer Rechenaufwand bei der Determinatenberechnung.

Definition der Determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Dabei ist $S(n)$ die Menge der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

$$\det(A) = \begin{array}{l} +a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} \\ -a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43} \\ -a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44} \\ +a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{42} \\ +a_{11}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{43} \\ -a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42} \\ -a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44} \\ +a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43} \\ +a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{44} \\ -a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41} \\ -a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43} \\ +a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41} \end{array} + \begin{array}{l} +a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{44} \\ -a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42} \\ -a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44} \\ +a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41} \\ +a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42} \\ -a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41} \\ -a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43} \\ +a_{14}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42} \\ +a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43} \\ -a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41} \\ -a_{14}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{42} \\ +a_{14}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{41} \end{array}$$

Um für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Determinante nach der obigen Formel zu bestimmen braucht man $(n-1) * n!$ Multiplikationen. Für größere n ist

$$n! \approx \sqrt{2\pi\, n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{(Stirlingsche Formel).}$$

Für $n = 50$: $\quad n! = 3.0414 * 10^{64}, \qquad \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 3.0363 * 10^{64}.$

Alter des Universums $\approx$ 14 Milliarden Jahre $\approx 4.4 * 10^{17}$ sec.

Berechnung einer Determinante mit der LR-Zerlegung

Es gilt folgendes:

1. *Determinatenmultiplikationssatz:*
   Die Determinante eines Matrixprodukts ist das Produkt der Determinanten der Faktoren.

2. Die Determinante einer *Dreiecksmatrix* ist das Produkt ihrer Diagonalelemente.

Folgerung:

$$A = LR \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(LR) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \det(R) = r_{11} r_{22} \ldots r_{nn} \\ &= \text{Produkt der Diagonalelemente von } R. \end{aligned}$$

Begründung der Cramerschen Regel

Sei $Ax = b$, $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots a_j \;\; \ldots a_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also a_j j-te Spalte von A. Dann ist

$$b = Ax = [a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots a_j \;\; \ldots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j.$$

Die Determinante ist linear in jeder Spalte.

Außerdem ist sie 0, wenn eine Spalte doppelt vorkommt. Somit:

$$\begin{aligned}
\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\
&= \det\Big(a_1, \ldots, a_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j, \; a_{k+1}, \ldots, a_n\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \ldots, a_n)}_{=0, \text{ wenn } j \neq k \text{ (doppelte Spalte)}} \, x_j \\
&= \det(\underbrace{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n}_{A}) \, x_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad x_k = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)}$$

Ein Determinatenkriterium für die Existenz der LR-Zerlegung

Eine LR-Zerlegung $A = LR$ für

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

existiert genau dann, wenn die Determinanten der linken oberen Untermatrizen

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k \leq n - 1$$

alle von 0 verschieden sind.

Zur Lösbarkeit linearer Gleichungen

Ein lineares Gleichungssystem muss nicht immer eine eindeutige Lösung haben.

Beispiel:

Die Gleichung $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ hat keine Lösung.

Die Gleichung $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ hat unendlich viele Lösungen, nämlich $x_1 = 1$, x_2 beliebig.

Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungen

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Gleichung $Ax = b$ hat für jeden Vektor b genau eine Lösung
2. Die Gleichung $Ax = 0$ hat $x = 0$ als einzige Lösung.
3. Die Spalten von A sind linear unabhängig.
4. Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
5. A ist invertierbar, d.h. die inverse Matrix A^{-1} existiert.
6. $\det(A) \neq 0$

Definition: Falls eine und damit alle dieser Bedingungen nicht erfüllt sind, dann nennt man die Matrix A **singulär**.

Sei A singulär. Dann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ entweder keine Lösung, oder aber unendlich viele Lösungen (das hängt von b ab).

Falls A nichtsingulär (d.h. regulär, invertierbar), dann ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung von $Ax = b$.

Wie berechnet man die Inverse einer Matrix ?

Seien $x_1, \ldots x_n$ die Spalten der Inversen von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also

$$A^{-1} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n].$$

Es gilt nach Definition der Inversen, dass

$$A\,[x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = [e_1 \; e_2 \; \ldots \; e_n] \qquad (*)$$

mit den Standard-Basisvektoren e_k. Die Gleichung $(*)$ ist eine Zusammenfassung der linearen Gleichungen

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots Ax_n = e_n.$$

Um die Inverse einer $n \times n$-Matrix zu bestimmen, muss man also n lineare Gleichungen lösen.

Merke: In der Numerik wird die Inverse einer Matrix meistens nicht gebraucht. Ihre Berechnung ist aufwendig und man sollte sie vermeiden. Wenn ein Numeriker in einem Algorithmus die Gleichung $x = A^{-1}b$ hinschreibt, dann meint er damit, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ **ohne Berechnung der Inversen** gelöst werden soll.

LR-Zerlegung mit MATLAB

In der englischsprachigen Literatur heißt die LR-Zerlegung

LU-factorization

(L steht für lower, U steht für upper)

Die MATLAB-Anweisung für die LR-Zerlegung ist

$$[\mathtt{L},\mathtt{R}] = \mathtt{lu}(\mathtt{A})$$

Dabei liefert MATLAB aber oft L mutipliziert mit einer Permutationsmatrix zurück. Genaueres darüber erfährt man, wenn man `doc lu` eingibt.

Die MATLAB-Anweisung zur Lösung von $Ax = b$ ist

$$\mathtt{x} = \mathtt{A\backslash b} \qquad \text{(Backslash-Operator)}$$

Die MATLAB-Anweisung für die Inverse von A ist

$$\mathtt{inv(A)} \qquad \text{oder} \qquad \mathtt{A\hat{}(-1)}$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung (Zeilenvertauschung)

Problem:

Der Gauß-Algorithmus ist in der bisherigen Form nicht immer durchführbar.

Elementares Beispiel: Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Da oben links eine Null steht, kann man in der ersten Spalte keine weiteren Nullen erzeugen, indem man von den anderen Zeilen ein Vielfaches der ersten Zeile abzieht.

Abhilfe:

Vertausche zunächst die Zeilen der Matrix, so dass links oben eine von 0 verschiedene Zahl steht:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Nun kann man wie gewohnt weiterrechnen.

Terminologie: Der Matrixeintrag, durch den bei einem Gaußschen Eliminationsschritt dividiert wird, heißt **Pivotelement**.

Beispiel: In $(*)$ ist die 2 oben links das Pivotelement.

Auch wenn ein Schritt des Gauß-Algorithmus durchführbar ist, können dadurch große numerische Fehler entstehen, wenn das Pivotelement klein ist.

Beispiel: Betrachte das Gleichungssystem ($\epsilon > 0$)

$$\begin{aligned} \epsilon\, x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist

$$x_1 = \frac{1}{1-\epsilon}, \qquad x_2 = \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Wenn man den Gauß-Algorithmus anwendet und von der 2. Zeile das $1/\epsilon$-fache der 1. Zeile abzieht, bekommt man das System

$$\begin{aligned} \epsilon\, x_1 + x_2 &= 1 \\ (1-(1/\epsilon))\, x_2 &= 2-(1/\epsilon). \end{aligned}$$

Wenn ϵ sehr klein ist, $1/\epsilon$ also sehr groß, dann kann bei Rechnung mit Maschinenzahlen im ungünstigsten Fall in der unteren Zeile $-1/\epsilon$ statt $(1-(1/\epsilon))$ bzw. $(2-(1/\epsilon))$ herauskommen. Man bekommt dann numerisch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \epsilon\, x_1 + x_2 &= 1 \\ -(1/\epsilon)\, x_2 &= -(1/\epsilon). \end{aligned}$$

Rechnet man nun exakt weiter, dann erhält man als Lösung

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0. \qquad \Rightarrow \qquad \text{großer Fehler in } x_1 \text{ (denn exakt ist } x_1 \approx 1).$$

Man kann zeigen:

Große Pivotelemente erzeugen kleine Rechenfehler.

Kleine Pivotelemente erzeugen große Rechenfehler.

Fazit: Beim Gauß-Algorithmus vor jedem Eliminationsschritt in der gerade aktuellen Spalte das betragsmäßig größte Element (unterhalb bzw. auf der Diagonale) suchen, und Zeilen so vertauschen, dass dieses Element zum Pivotelement wird.
Dieses Vorgehen heißt Spaltenpivotisierung.

Schema:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Ausgangslage | Pivotelement suchen | Zeilen vertauschen | weiterrechnen

In diesem Beispiel ist die 2. Spalte die aktuelle Spalte.

Das betragmässig grösste Element in der 2. Spalte ist mit $\otimes$ markiert.

Bemerkung: Man könnte auch (zusätzlich) Spaltenvertauschungen vornehmen (Zeilenpivotisierung). In der Praxis reicht aber meistens Spaltenpivotisierung aus.

Der allgemeine Satz von der LR-Zerlegung

Mit geeigneten Zeilenvertauschungen ist die LR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix A stets durchführbar. Mathematisch wird das folgendermaßen formuliert.

> **Satz:** Zu jeder invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass
>
> $$PA = LR.$$
>
> Dabei ist
> L eine untere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Diagonale und
> R eine obere Dreiecksmatrix. Bei geeigneter Wahl von P (Spaltenpivotisierung) haben alle Elemente von L Betrag ≤ 1.

Erläuterung:

Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 hat. Alle anderen Einträge sind 0.

Linksmultiplikation mit einer Permutationsmatrix bewirkt Zeilenvertauschungen. (siehe nächste Seite)

Ziel dieser Vorlesung: Den Satz und seine praktische Anwendung verstehen.

Wirkung einer Permutationsmatrix:

Multipliziert man eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ von links mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so werden dabei die Zeilen von A vertauscht.

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{PA}$$

Die 1 in der **1**. Zeile ist in Spalte 3 $\Rightarrow$ 3. Zeile wird zur **1**. Zeile
Die 1 in der **2**. Zeile ist in Spalte 1 $\Rightarrow$ 1. Zeile wird zur **2**. Zeile
Die 1 in der **3**. Zeile ist in Spalte 4 $\Rightarrow$ 4. Zeile wird zur **3**. Zeile
Die 1 in der **4**. Zeile ist in Spalte 2 $\Rightarrow$ 2. Zeile wird zur **4**. Zeile

Paarvertauschungen

Spezielle Permutationsmatrizen sind die Paarvertauschungsmatrizen. Sie haben nur zwei 1en, die nicht auf der Diagonale stehen und vertauschen nur zwei Zeilen miteinander.

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{PA}$$

Die Matrix P vertauscht also die 2. mit der 4. Zeile und lässt alle anderen Zeilen wo sie sind.

Tatsachen über Permutationsmatrizen

1. Das Produkt von Permutationsmatrizen ist wieder eine Permutationsmatrix

2. Für jede Permutationsmatrix gilt $P\,P^\top = P^\top\,P = I$ (I=Einheitsmatrix).

   Daraus folgt $P^\top = P^{-1}$.

   In Worten: Die Inverse einer Permutationsmatrix ist die transponierte Matrix.

3. Jede Permutationsmatrix lässt sich als Produkt von Paarvertauschungsmatrizen darstellen.

4. Die Einheitsmatrix ist auch eine Permutationsmatrix.

Vertauschen einer Permutationsmatrix mit einer Frobeniusmatrix

Beispiel:

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\
 & & \color{blue}{1} & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \color{green}{1} \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{P}
\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
\hline
 & \color{blue}{\times} & 1 & & & \\
 & \times & & 1 & & \\
 & \color{red}{\times} & & & 1 & \\
 & \color{green}{\times} & & & & 1
\end{array}\right]}_{L}
$$

$$
= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
\hline
 & \color{red}{\times} & 1 & & & \\
 & \color{blue}{\times} & & 1 & & \\
 & \color{green}{\times} & & & 1 & \\
 & \times & & & & 1
\end{array}\right]}_{\widetilde{L}}
\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccc}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\
 & & \color{blue}{1} & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \color{green}{1} \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{P}
$$

Wenn die Permutationsmatrix P die ersten k Zeilen nicht vertauscht, dann gilt für jede Frobenius-Matrix L vom Typ k, dass

$$PL = \widetilde{L}P.$$

Dabei ist $\widetilde{L}$ die Frobenius-Matrix, die entsteht, wenn man den rechten unteren Block von P auf die Elemente von L in der k-ten Spalte anwendet.

Der Schritt

$$\ldots \;\rightarrow\; \text{zwei Zeilen vertauschen} \;\rightarrow\; \begin{array}{l}\text{durch Zeilenoperationen die Elemente}\\ \text{unterhalb des Pivotelements eliminieren}\end{array} \;\rightarrow\ldots$$

lautet in Matrixsprache:

$$\ldots \;\rightarrow\; \begin{array}{c}\text{mit Permutationsmatrix } P_k\\ \text{multiplizieren}\end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c}\text{mit Frobenius-Matrix } L_k\\ \text{multiplizieren}\end{array} \;\rightarrow\ldots$$

Man bekommt so: $L_{n-1}\,P_{n-1}\,L_{n-2}\,P_{n-2}\ldots L_k\,P_k\ldots L_2\,P_2\,L_1 P_1\,A \;=\; R.$

Nun kann man die Permutationsmatrizen mit den Frobenius-Matrizen vertauschen (siehe vorige Seite) und bekommt

$$
\begin{aligned}
& L_{n-1}\,P_{n-1}\,L_{n-2}\,P_{n-2}\ldots L_k\,P_k\ldots L_2\,P_2\,L_1 P_1\,A \;=\; R\\
\Rightarrow\;\; & L_{n-1}\,\widetilde{L}_{n-2}\,P_{n-1}\,P_{n-2}\ldots L_k\,P_k\ldots L_2\,P_2\,L_1 P_1\,A \;=\; R\\
& \vdots\\
\Rightarrow\;\; & L_{n-1}\,\widetilde{L}_{n-2}\,\ldots\widetilde{L}_k\ldots\widetilde{L}_1\;\underbrace{P_{n-1}\,P_{n-2}\ldots P_2\,P_1}_{P}\;A = R\\
\Rightarrow\;\; & P\,A = \underbrace{\widetilde{L}_1^{-1}\,\widetilde{L}_2^{-1}\;\ldots\widetilde{L}_k^{-1}\ldots\widetilde{L}_{n-2}^{-1}\,L_{n-1}^{-1}}_{L}\;R.
\end{aligned}
$$

Also: $\quad P\,A \;=\; L\,R.$

In der Praxis wird die **Permutationsmatrix** P nicht explizit berechnet. Stattdessen wird die Information über die Zeilenvertauschungen in einem **Permutationsvektor** p abgespeichert.

Das Vorgehen wird auf den folgenden Seiten am Beispiel dargestellt.

Bemerkung: Mit der MATLAB-Anweisung `[L,R,P]=lu(A)` bekommt man auch P.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

L $\qquad$ A $\qquad$ Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Gegeben: eine invertierbare Matrix A.

Ziel: Berechnung von P, L, R so dass $PA = LR$.

Vorgehen: A wird duch Zeilenoperationen zu R umgeformt

Die Faktoren, mit denen man die Zeilen vor dem Abziehen multipliziert, werden in L abgespeichert.

Beim Zeilenvertauschen werden auch die Zeilen von L und vom Permutationsvektor p mitvertauscht.

Mit p kann am Schluss die Permutationsmatrix P gebildet werden.

Erster Schritt: Finde das Pivotelement (d.h. das betragsgrößte) in der 1. Spalte von A.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

Situation nach dem ersten Schritt:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \otimes & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Permutationsvektor

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Die Zeile, in der das Pivotelement $\otimes$ steht, mit der ersten Zeile vertauschen.

Beispiel: LR-**Zerlegung einer** 4×4-**Matrix mit Spaltenpivotisierung**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \otimes & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Permutationsvektor

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Schritt: Die Zeile, in der das Pivotelement $\otimes$ steht, mit der ersten Zeile vertauschen. Das gilt auch für den Permutationsvektor.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \otimes & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Permutationsvektor

$$p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Elimination der Elemente in der 1. Spalte unterhalb des Pivot-Elements mittels Zeilenumformungen. Zugehörige Faktoren in L eintragen.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & & 1 & \\ \times & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \otimes & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Pivotelement (betragsrößtes Element unterhalb des 1. Elements) in der 2. Spalte suchen.

Beispiel: LR**-Zerlegung einer** 4×4**-Matrix mit Spaltenpivotisierung**

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & & 1 & \\ \times & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Zeile, in der das Pivotelement steht, mit der 2. Zeile vertauschen. Das gilt auch für die L-Matrix und den Permutationsvektor.

Beispiel: LR**-Zerlegung einer** 4×4**-Matrix mit Spaltenpivotisierung**

$$L \qquad\qquad A \text{ modifiziert} \qquad\qquad \text{Permutationsvektor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & & 1 & \\ \times & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Schritt: Zeile, in der das Pivotelement steht,
mit der 2. Zeile vertauschen.
Das gilt auch für die L-Matrix und den Permutationsvektor.

Beispiel: LR**-Zerlegung einer** 4×4**-Matrix mit Spaltenpivotisierung**

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & & 1 & \\ \times & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Einträge unterhalb des Pivot-Elements durch Zeilenumformungen eliminieren. Multiplikationsfaktoren in L eintragen.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & \times & 1 & \\ \times & \times & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Pivotelement (betragsgrößtes Element unterhalb von Zeile 2) in der 3 Spalte suchen.

Beispiel: LR**-Zerlegung einer** 4×4**-Matrix mit Spaltenpivotisierung**

$$L \qquad A \text{ modifiziert} \qquad \text{Permutationsvektor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & \times & 1 & \\ \times & \times & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Zeile, in der das Pivotelement steht,
mit der 3. Zeile vertauschen.
Dasselbe auch für die L-Matrix
und den Permutationsvektor machen.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

$$L \qquad A \text{ modifiziert} \qquad \text{Permutationsvektor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \color{blue}{\times} & \color{blue}{\times} & 1 & \\ \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \color{blue}{\times} & \color{blue}{\times} \\ 0 & 0 & \color{red}{\otimes} & \color{red}{\times} \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \color{blue}{2} \\ \color{red}{4} \end{bmatrix}$$

Schritt: Zeile, in der das Pivot-Element steht,
mit der 3. Zeile vertauschen.
Dasselbe auch für die L-Matrix
und den Permutationsvektor p machen.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \color{red}{\times} & \color{red}{\times} & 1 & \\ \color{blue}{\times} & \color{blue}{\times} & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \color{red}{\otimes} & \color{red}{\times} \\ 0 & 0 & \color{blue}{\times} & \color{blue}{\times} \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \color{red}{4} \\ \color{blue}{2} \end{bmatrix}$$

Nächster Schritt: Durch Zeilenumformung unterhalb des Pivotelements eine 0 erzeugen.
Zugehörigen Faktor in L eintragen.
Das Ergebnis steht auf der nächsten Folie.

Beispiel: LR-Zerlegung einer 4×4-Matrix mit Spaltenpivotisierung

L | A modifiziert | Permutationsvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & \times & 1 & \\ \times & \times & \times & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}}_{R} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Für die eben berechneten Matrizen L, R gilt $PA = LR$, wobei

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

P macht die 3. Zeile zur 1., die 1. Zeile zur 2., die 4. Zeile zur 3. und die 2. Zeile zur 4. Diese Information bekommt man aus dem Permutationsvektor p.

Bemerkung 1: Die Berechnung von P ist **nicht** nötig, um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Man kann im folgenden mit dem Vektor p arbeiten.

Bemerkung 2: Man führt praktisch auch nicht die Zeilenvertauschungen wirklich aus, sondern merkt sich nur p.

Lösung eines linearen Gleichungssystems:

Mit der Darstellung $PA = LR$ folgt

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad PAx = Pb \quad \Rightarrow \quad LRx = Pb.$$

Das Gleichungssystem wird also durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen mit dem Vektor Pb gelöst. Den Vektor Pb bekommt man, indem man die Einträge von b so vertauscht, wie es durch den Permutationvektor p angegeben wird.