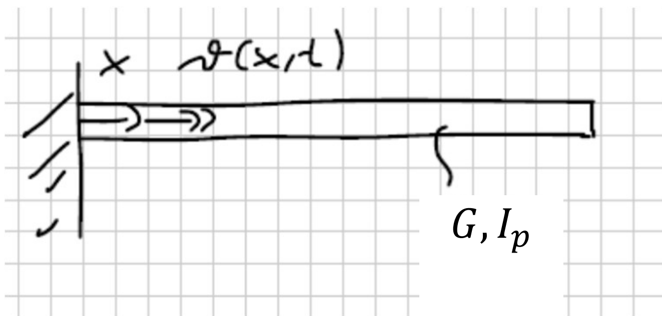
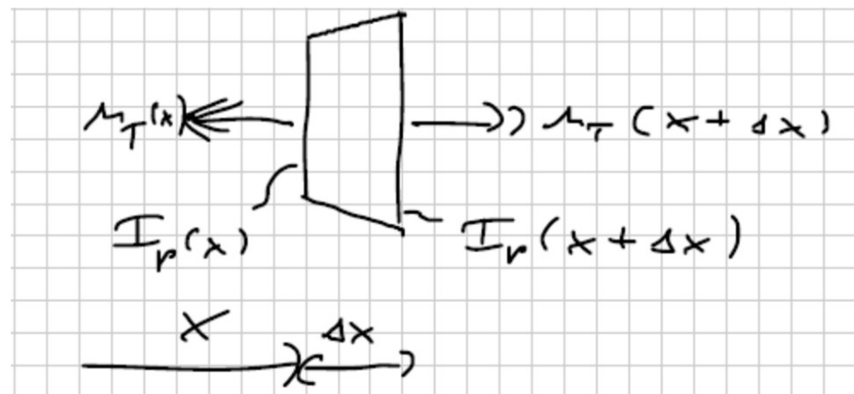
Kontinuumsmechanik VL 2

1.1.2 Torsionsschwingungen

Nur Fall freier Schwingungen und für Kreisquerschnitte mit variablem Radius





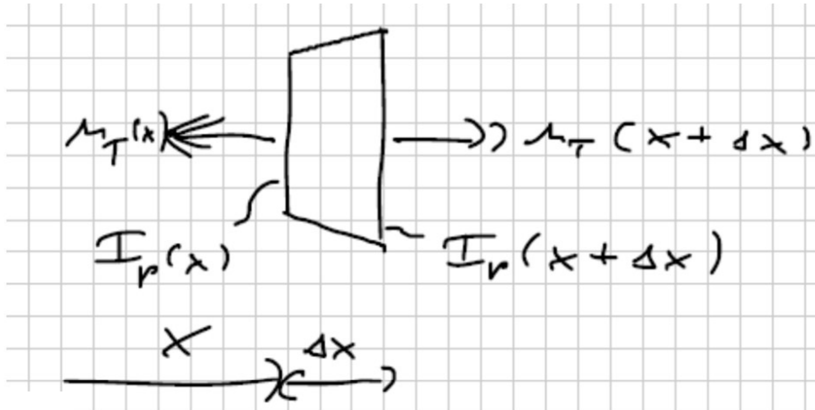
Für Trägheitsterm Zusammenhang zwischen Massenträgheitsmoment Θ und polarem Flächenträgheitsmoment I_p

Erinnerung Definition:

$$\Theta = \int_{(V)} r^2 \, dm \qquad I_p = \int_{(A)} r^2 \, dA$$

$$dm = \rho \underbrace{dA \, dx}_{dV}$$

$$d\Theta = I_p \, \rho \, dx$$



Damit Trägheitsmoment

$$\int_x^{x+\Delta x} \ddot{\vartheta}(x,t)\, d\Theta = \int_x^{x+\Delta x} \ddot{\vartheta}(\bar{x},t)\, I_p(\bar{x})\, \rho\, d\bar{x} = M_T(x+\Delta x) - M_T(x)$$

Hookesches Gesetz: $M_T(x,t) = G\, I_p(x)\vartheta'(x,t)$

außerdem wirken von außen keine Momente:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \ddot{\vartheta}(\bar{x},t)\, I_p(\bar{x})\, \rho\, d\bar{x} = \frac{G I_p(x+\Delta x)\, \vartheta'(x+\Delta x,t) - G I_p(x)\vartheta'(x,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} \ddot{\vartheta}(\bar{x},t)\, I_p(\bar{x})\, \rho\, d\bar{x} = \frac{G I_p(x+\Delta x)\, \vartheta'(x+\Delta x,t) - G I_p(x)\, \vartheta'(x,t)}{\Delta x}$$

$\lim \Delta x \to 0$

$$\boxed{\rho I_p(x)\, \ddot{\vartheta}\,(x,t) - (\,G\, I_p\, \vartheta'(x,t))' = 0}$$

Für I_p=konst. und Gleichung geteilt durch I_p

$$\rho\ddot{\vartheta}(x,t) - G\,\vartheta''(x,t) = 0$$

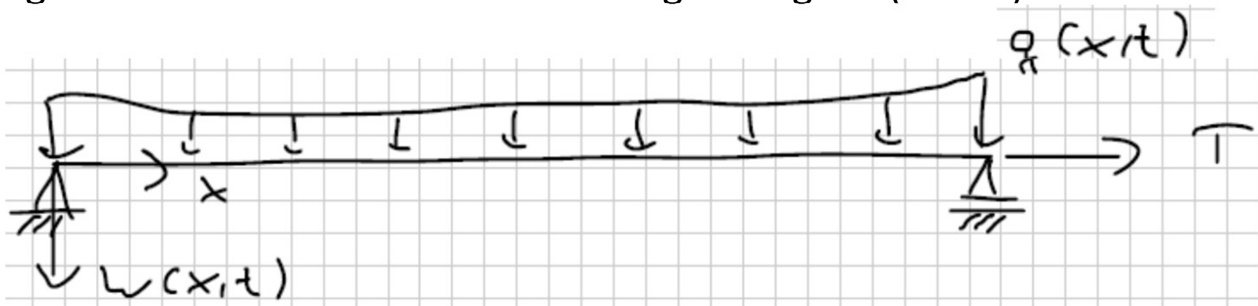
oder

$$\ddot{\vartheta} = c^2\vartheta'' \qquad c^2 = \frac{G}{\rho}$$

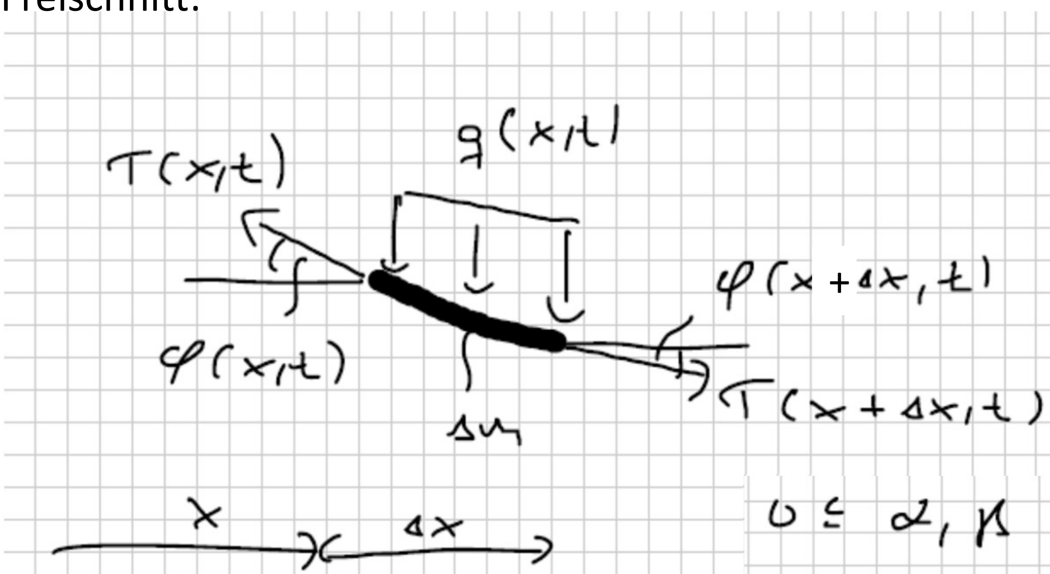
eindimensionale Wellengleichung

1.1.3 Saitenschwingungen

Saite: fadenförmiges elastisches Kontinuum ohne Biegesteifigkeit (*EI* -> 0)



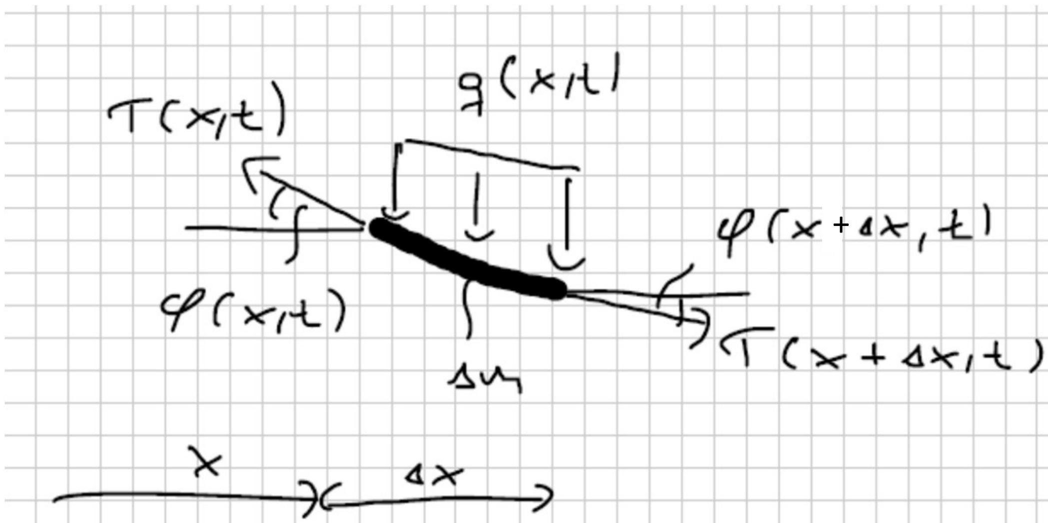
Freischnitt:



$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$

Schwerpunkt bei $x + \alpha\Delta x$,
außerdem:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} q(\bar{x},t)\,d\bar{x} = \underline{q(x+\beta\Delta x,t)\,\Delta x}$$



Gleichgewicht in *z*-Richtung (Richtung der Auslenkung *w*):

$$\Delta m\, \ddot{w}(x+\alpha \Delta x,t) = T(x+\Delta x,t)\sin\varphi(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\varphi(x,t) + \underline{q(x+\beta\Delta x,t)\Delta x}$$

Gleichgewicht in *x*-Richtung unter Vernachlässigung der Trägheit

$$\frac{1}{\Delta x}\Big(T(x+\Delta x,t)\cos\varphi(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\varphi(x,t)\Big) = 0 \quad \Big| : \Delta x$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(T(x+\Delta x,t)\cos\varphi(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\varphi(x,t)\right) = 0 \quad \Big| \cdot \Delta x$$

mit $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+w'^2}}$ und $\lim\ \Delta x \to 0$

$$\left(T\frac{1}{\sqrt{1+w'^2}}\right)' = 0$$

Für kleine Steigungen *w‘* << 1 ergibt dies näherungsweise

$T' = 0 \Rightarrow$ T = konst.; äußere Vorspannung

ebenso $w'' \ll 1 \qquad w' = \tan\varphi \approx \sin\varphi$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung für *z*-Richtung und :Δx

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \ddot{w}(x+\alpha \Delta x, t) = T \frac{w'(x+\Delta x, t) - w'(x,t)}{\Delta x} + q(x+\beta \Delta x, t)$$

$$\Downarrow \qquad \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\mu$$

$$\boxed{\mu(x)\, \ddot{w}(x,t) - T\, w''(x,t) = q(x,t)}$$

Feldgleichung für Zwangsschwingung (*q(x,t)*)der Saite.

Für $q(x,t) \equiv 0$ ergibt sich

$$\boxed{\ddot{w} = c^2 w;} \qquad c^2 = T/\mu$$

eindimensionale Wellengleichung

1.1.4 Bernoullische Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Zunächst Konkretisierung der Aufgabenstellung:
Das komplette Problem ist ein Anfangs-Randwertproblem bestehend aus

– partielle Differentialgleichung: Bewegungsgleichung, Feldgleichung, hier z.B. $\mu \ddot{w}(x,t) - T w''(x,t) = f(x,t)$ (*)

– Anfangsbedingungen, z.B. $w(x,t_0) = w_0(x)$
$\dot{w}(x,t_0) = v_0(x)$

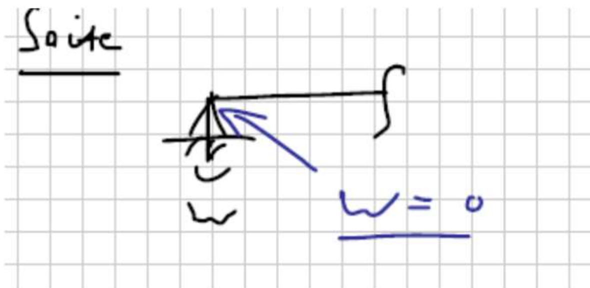
Hier 2 Anfangsbedingungen (ABen), da (*) Differentialgleichung 2. Ordnung in der Zeit *t*.
ABen müssen verträglich sein mit Randbedingungen.

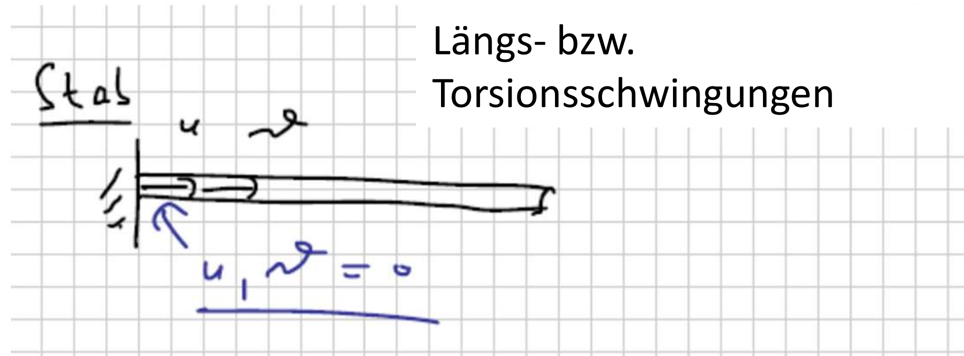
– Randbedingungen, z.B. $w(0,t) = 0$; $w(\ell,t) = 0$
hier 2 Stück, da (*) Dgl. 2. Ordnung in x.
Gelten für beliebige Zeit t.

Im Folgenden meist nur Lösung des Randwertproblems (RWP): Anpassen an Randbedingungen (RBen), aber nicht an ABen. Damit z.B. Bestimmung von Eigenformen, Eigenkreisfrequenzen.

Randbedingungen:

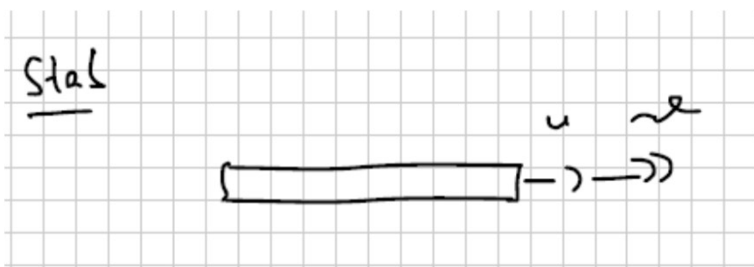
„Festes“ Ende:





Längs- bzw. Torsionsschwingungen

„Freies“ Ende:



Aus Festigkeitslehre:

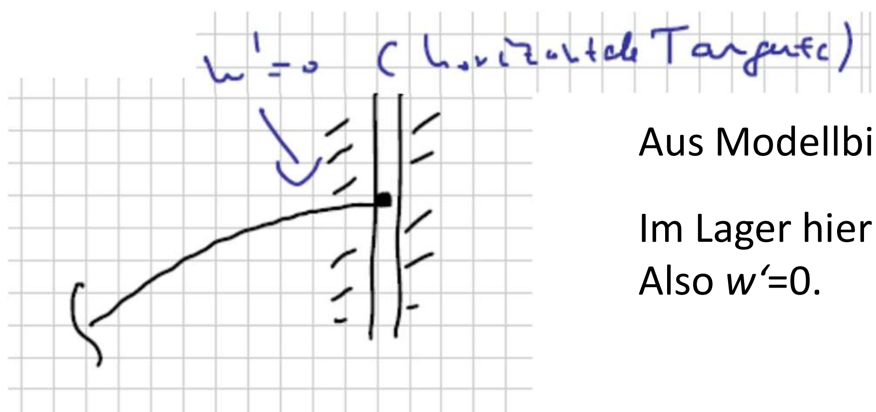
$N(x) = E\ A\ u'(x)$ hier bei
$x = \ell\ \ N = 0\ \ \rightarrow\ u'(\ell) = 0$

bzw. $M_T = G\ I_p\ \vartheta\,'(x)$
hier bei $x = \ell\ \ M_T = 0\ \ \rightarrow\ \vartheta'(\ell) = 0$

Freies Ende bei Saite?

„Geht nicht“. Keine Vorspannung!

„Freies Ende“ bei Saite!



Aus Modellbildung der Saite: Normalkraft = Vorspannkraft.

Im Lager hier nur horizontale Kraft möglich => horizontale Tangente! Also w'=0.