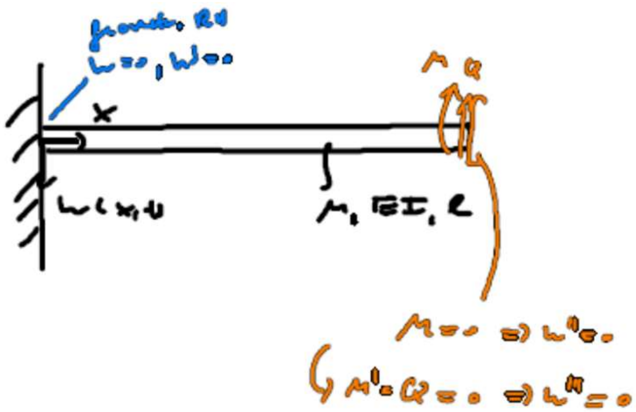
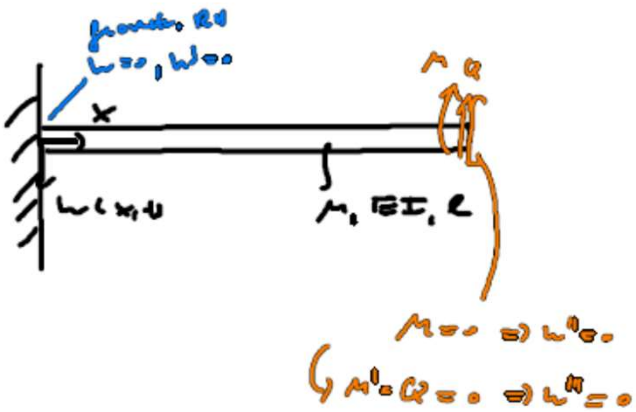
Kontinuumsmechanik VL 7

Jetzt Balkenschwingungen für geänderte Randbedingungen; einseitig fest eingespannter Balken („cantilever beam“)





Feldgleichung $\mu \ddot{w}(x,t) + EI\, w^{IV}(x,t) = 0$

geometr. RBen $w(0,t)=0$ $\quad w'(0,t)=0$ aus Lagerung

dyn. RBen: freies Ende: $M(\ell)$, $Q(\ell)=0$

$w'' = -\frac{M}{EI}$; $M' = Q$ $\quad w''' = -\frac{Q}{EI}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$M=0 \Rightarrow w''=0 \qquad Q=0 \Rightarrow w'''=0$

also $w''(\ell,t)=0 \quad w'''(\ell,t)=0$

RWP: Feldgl. 4. Ordn. im Ort + 4 RBen

Ansatz wieder $w(x,t) = W(x)\,p(t)$, Separieren der Veränderlichen

$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0, \rightarrow \omega$ ist Eigenkreisfrequenz

$$\mathrm{W}^{\mathrm{IV}}(x) - \lambda^4 W(x) = 0 \;\; -> W(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x; \qquad \lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}$$

RBen: $w(0)=0$; $w'(0)=0$; $w''(\ell)=0$; $w'''(\ell)=0$

$$w(x) = A \sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x$$

$$w'(x) = A\lambda\cos\lambda x - B\lambda\sin\lambda x + C\lambda\cosh\lambda x + D\lambda\sinh\lambda x$$

$$w''(x) = -A\lambda^2\sin\lambda x - B\lambda^2\cos\lambda x + C\lambda^2\sinh\lambda x + D\lambda^2\cosh\lambda x$$

$$w'''(x) = -A\lambda^3\cos\lambda x + B\lambda^3\sin\lambda x + C\lambda^3\cosh\lambda x + D\lambda^3\sinh\lambda x$$

$w(0) = 0 \quad B + D = 0 \rightarrow \underline{B = -D}$

$w'(0) = 0 \quad A\lambda + C\lambda = 0 \quad |:\lambda$ s.o. $\rightarrow \underline{A = -C}$

$$w''(\ell) = 0 = -A\lambda^2\sin\lambda\ell - B\lambda^2\cos\lambda\ell + C\lambda^2\sinh\lambda\ell + D\lambda^2\cosh\lambda\ell$$

$$w'''(\ell) = 0 = -A\lambda^3\cos\lambda\ell + B\lambda^3\sin\lambda\ell + C\lambda^3\cosh\lambda\ell + D\lambda^3\sinh\lambda\ell$$

Nach längerer Rechnung folgt daraus die charakteristische Gleichung

$$\cosh\lambda\ell\,\cos\lambda\,\ell = -1$$

Numerische Lösung liefert Lösungen der Form

$$\lambda \ell = \frac{2k-1}{2}\pi + e_k$$

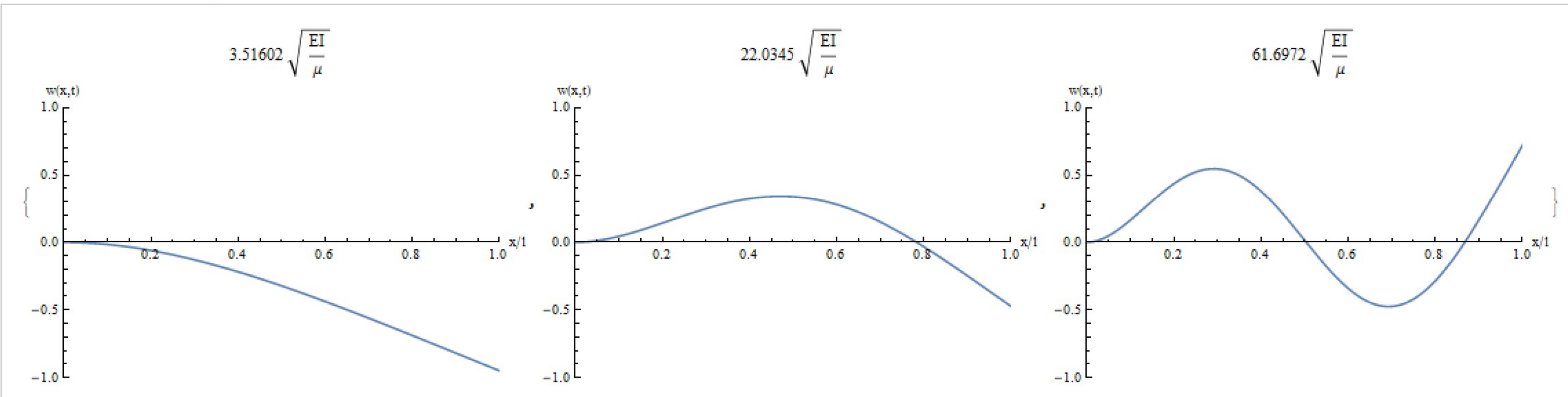
mit $e_1 = 0{,}3042$; $e_2 = -0{,}018$; $e_3 = 0{,}001$

Daraus folgen die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_k = \left(\frac{2k-1}{2}\pi + e_k\right)^2 \frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

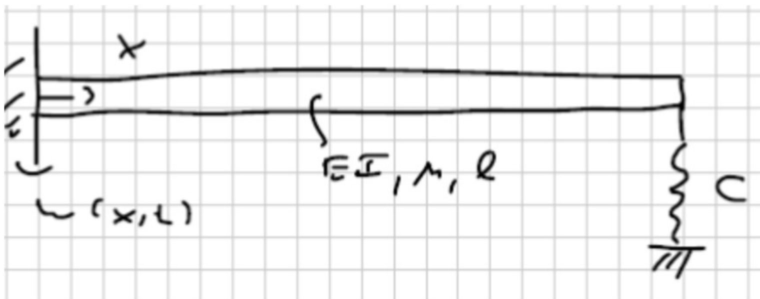
und die Eigenformen

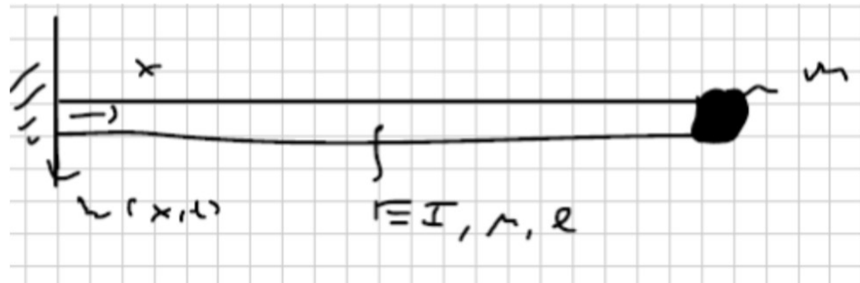
$$W_k(x) = A\left(\sinh\lambda_k x - \sin\lambda_k x - \left(\frac{\sinh\lambda_k \ell + \sin\lambda_k \ell}{\cosh\lambda_k \ell + \cos\lambda_k \ell}\right)(\cosh\lambda_k x - \cos\lambda_k x)\right)$$



3.51602 √(EI/μ)
22.0345 √(EI/μ)
61.6972 √(EI/μ)
w(x,t)
x/1
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

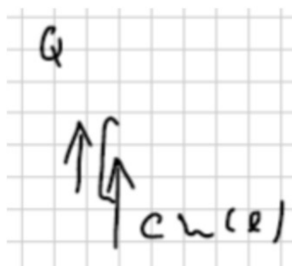
1.2.3 Kopplung mit diskreten Elementen

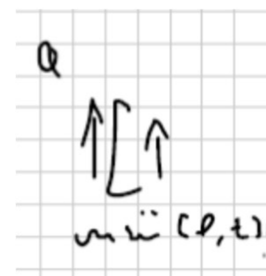




Diskrete Elemente können als Randbedingungen (ggf. auch Übergangsbedingungen) eingehen:

Freischnitte:





$$M = -EI\, w''; \qquad Q = -EI\, w'''$$

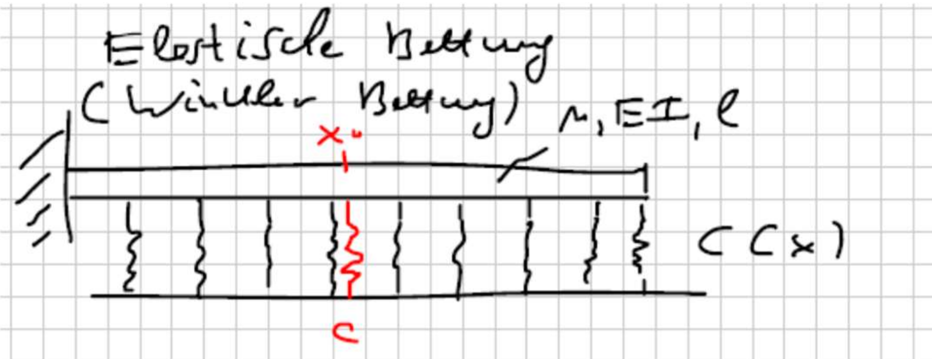
$$Q = -EI\, w'''$$

Randbedingungen:

$$-EI\, w'''\,(\ell, t) + c\, w\,(\ell, t) = 0$$

$$-EI\, w'''\,(\ell, t) + m\, \ddot{w}\,(\ell, t) = 0$$

Mit Hilfe der δ-Funktion auch in Feldgleichungen darstellbar:



Rückstellkraft aus Streckenlast

$$q(x,t) = -c(x)\, w(x,t)$$

z.B. Schiene in Schotterbett

Feldgleichung $\mu \ddot{w} + EI\, w^{IV} + c(x)\, w = 0$

Jetzt diskrete Feder an Stelle x_0.

$$c(x) = \underline{c\, \delta(x - x_0)}$$