Lösungen zum Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

(a) Feldgleichung: $\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0$

Randbedingungen: $w(0,t) = w(l,t) = 0$

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit: $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

(b) Bestimmen der Eigenkreisfrequenzen

Ansatz: $w(x,t) = W(x)p(t)$

Lösung: $W(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$

Anpassen an Randbedingungen:
$W(0) = A = 0 \;\longrightarrow\; A = 0$
$W(l) = B\sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \;\longrightarrow\; \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \;\longrightarrow$
$\frac{\omega_k}{c}l = k\pi,\;\; k = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 2

(a) Die Differentialgleichung für Längsschwingungen von Stäben lautet:

$$\mu\ddot{u}(x,t) - (EAu'(x,t))' = \underbrace{q(x,t)}_{=0} \tag{1}$$

$$\text{mit } \mu = A\varrho \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \tag{3}$$

$$\text{mit} \quad c^2 = \frac{E}{\varrho}$$

(b)

$$u(x,t) = U(x)\,\cos(\omega t + \alpha) \tag{4}$$

$$\ddot{u}(x,t) = U(x)\,(-\omega^2)\,\cos(\omega t + \alpha) \tag{5}$$

$$u''(x,t) = U''(x)\,\cos(\omega t + \alpha) \tag{6}$$

eingesetzt in die Wellengleichung (3) ergibt:

$$\big(-\omega^2 U(x) - c^2 U''(x)\big)\cos(\omega t + \alpha) = 0 \quad \forall t \tag{7}$$

$$\hookrightarrow \quad U''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}U(x) = 0 \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

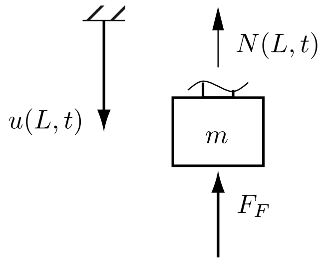
$$U(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x \tag{9}$$

(c) Randbedingung am oberen Rand:

$$u(0,t) = 0 \tag{10}$$

$$\hookrightarrow U(0) = 0 \tag{RB 1}$$

Randbedingung am unteren Rand:



Impulsbilanz:

$$m\ddot{u}(L,t) = -F_F - N(L,t) \tag{11}$$

lineares Federgesetz:

$$F_F = k\,\Delta l = k\,u(L,t) \tag{12}$$

Material-Strukur-Gleichung des Dehnstabs:

$$N(L,t) = EA\,u'(L,t) \tag{13}$$

Eingesetzt:

$$m\ddot{u}(L,t) + k\,u(L,t) + EA\,u'(L,t) = 0 \tag{14}$$

Mit dem Ansatz (4) und dessen zeitliche Ableitung (5) folgt:

$$\big(-m\omega^2 U(L) + kU(L) + EAU'(L)\big)\cos(\omega t + \alpha) = 0 \tag{15}$$

Dies muss für alle Zeiten t gelten. Also folgt:

$$\hookrightarrow \quad U'(L) + \Big(\frac{k - m\omega^2}{EA}\Big)U(L) = 0 \tag{RB 2}$$

(d) Einsetzen der allg. Lösung (9) in die Randbedingung (RB 1) ergibt:

$$A = 0 \tag{16}$$

Eingesetzt in (9) folgt:

$$U(x) = B\sin\Big(\frac{\omega}{c}x\Big) \tag{17}$$

Einmal nach dem Ort abgeleitet:

$$U'(x) = B\frac{\omega}{c}\cos\Big(\frac{\omega}{c}x\Big) \tag{18}$$

Einsetzten von (18) in (RB 2):

$$\underbrace{\left(\frac{(k - \omega^2 m)}{EA}\sin\Big(\frac{\omega}{c}L\Big) + \frac{\omega}{c}\cos\Big(\frac{\omega}{c}L\Big)\right)}_{(*)}B = 0 \tag{19}$$

Wenn $B \neq 0$, also nicht die triviale Lösung vorliegt, muss (*) Null werden:

$$\frac{(k-\omega^2 m)}{EA}\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)+\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)\overset{!}{=}0 \qquad (20)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung der Eigenfrequenzen ω_i.

Aufgabe 3

(a) Die Feldgleichung lautet

$$\mu\ddot{u}-(EAu'(x,t))'=\underbrace{q(x,t)}_{=0} \qquad (21)$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{u}=c^2u'' \qquad (22)$$

$$\text{mit} \quad c^2=\frac{EA}{\mu}=\frac{E}{\varrho} \qquad (23)$$

Damit ergibt sich die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c zu:

$$c=\sqrt{\frac{EA}{\mu}} \qquad (24)$$

Die Randbedingungen lauten aufgrund der festen Einspannung an den Rï¿½ndern

$$u(0,t)=0 \qquad (25)$$

$$u(l,t)=0 \qquad (26)$$

(b) Produktansatz:

$$u(x,t)=U(x)\,p(t) \qquad (27)$$

Ansatz in die Feldgleichung (22) einsetzen

$$U\ddot{p}=c^2U''p \qquad (28)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{p}}{p}=c^2\frac{U''}{U} \qquad (29)$$

Gleichung (29) kann nur erfï¿½llt werden, wenn beide Seiten einer Konstanten entsprechen:

$$\frac{\ddot{p}}{p}=c^2\frac{U''}{U}=:-\omega^2 \qquad (30)$$

Daraus ergeben sich zwei gewï¿½hnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{p}+\omega^2p=0 \qquad (31)$$

$$U''+\frac{\omega^2}{c^2}U=0 \qquad (32)$$

Die allgemeinen Lï¿½sungen der Gleichungen (31) und (32) lauten:

$$p(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t \qquad (33)$$

$$U(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \qquad (34)$$

mit der Abkï¿½rzung $\lambda := \frac{\omega}{c}$.
Anpassen der Ortsfunktion $U(x)$ an die Randbedingungen (25) und (26):

$$u(0,t)=0=U(0)\,p(t) \quad \Rightarrow \quad U(0)=0 \qquad (35)$$

$$u(l,t)=0=U(l)\,p(t) \quad \Rightarrow \quad U(l)=0 \qquad (36)$$

$$\text{aus (35):} \quad \Rightarrow \quad A=0 \qquad (37)$$

$$\text{aus (36):} \quad \Rightarrow \quad B\sin\lambda l=0 \qquad (38)$$

Die Gleichung (38) wird fï¿½r $B=0$ erfï¿½llt, was aber auf die triviale Lï¿½sung $u(x,t)\equiv 0$ fï¿½hrt und somit nicht von Interesse ist. Stattdessen werden ï¿½ber den Sinusanteil die unbekannten λ_k und somit die Eigenkreisfrequenzen ω_k bestimmt.

$$(38)\Rightarrow \quad \sin\lambda l=0 \qquad (39)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k l=k\pi \quad \text{mit } k=1,2,\ldots\infty \qquad (40)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k=k\frac{\pi}{l} \qquad (41)$$

mit $\omega=\lambda c$ folgt:

$$\omega_k=k\frac{\pi}{l}c \qquad (42)$$

Somit lauten die Eigenformen:

$$U_k(x)=B_k\sin\lambda_k x \qquad (43)$$

$$=B_k\sin\frac{k\pi}{l}x \quad \text{mit } k=1,2,...,\infty. \qquad (44)$$

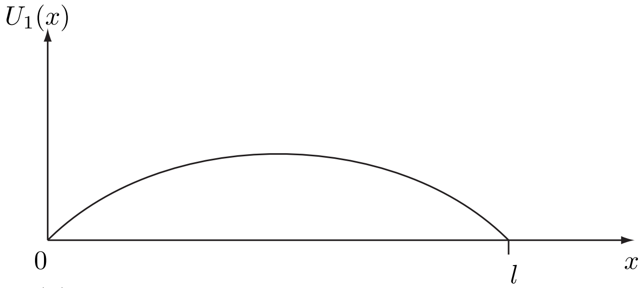
bzw. die ersten drei Eigenformen zu:

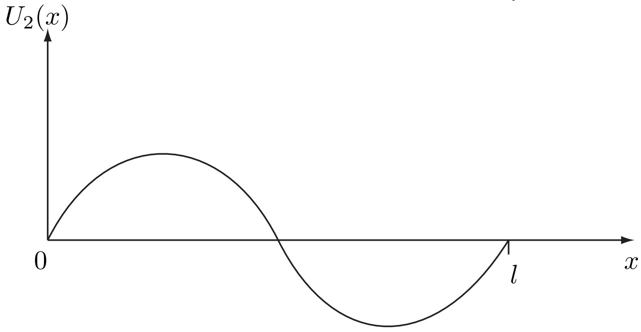
$$U_1(x)=B_1\sin\lambda_1x=B_1\sin\frac{\pi}{l}x \qquad (45)$$

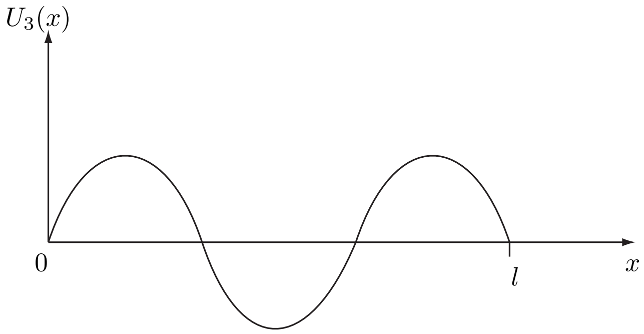
$$U_2(x)=B_2\sin\lambda_2x=B_2\sin 2\frac{\pi}{l}x \qquad (46)$$

$$U_3(x)=B_3\sin\lambda_3x=B_3\sin 3\frac{\pi}{l}x \qquad (47)$$

Skizzen der Eigenformen:







Aufgabe 4

(a) Die eindimensionale Wellengleichung für Längsschwingung von Stäben lautet:

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t), \qquad c^2 = \frac{E}{\varrho} \tag{48}$$

(b) Der Produktansatz nach Bernoulli lautet:

$$u(x,t) = U(x)p(t) \tag{49}$$

Eingesetzt in die Wellendifferentialgleichung(48):

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = \text{konst.} \tag{50}$$

Wir erhalten zwei gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0 \tag{51}$$

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \tag{52}$$

(c) Die allgemeinen Lösungen für diese DGln lauten:

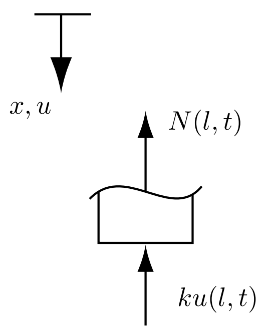
$$p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{53}$$

$$U(x) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x \tag{54}$$

(d) Am oberen Rand gibt es keine Verschiebung:

$$u(0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

Freischnitt am unteren Rand:



Mit dem Materialgesetz

$$N(x,t) = EAu'(x,t) \tag{55}$$

ergibt sich mit Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$u'(l,t) + \frac{k}{EA}u(l,t) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad U'(l) + \frac{k}{EA}U(l) = 0 \tag{RB 2}$$

(e) Einsetzen der Randbedingungen in den Ansatz (54):
Aus (RB 1) folgt:

$$U(0) = 0 \tag{56}$$

$$\Rightarrow \qquad C = 0 \tag{57}$$

$$\Rightarrow \qquad U(x) = D\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{58}$$

$$\Rightarrow \qquad U'(x) = D\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{59}$$

Und (58) und (59) in (RB 2):

$$D\left(\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}l\right) + \frac{k}{EA}\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right)\right) = 0 \tag{60}$$

Für die nichttriviale Lösung ($D \neq 0$) muss also gelten:

$$\left(\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}l\right) + \frac{k}{EA}\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right)\right) = 0 \tag{61}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung der Eigenkreisfrequenzen ω_i. Es gibt abzählbar unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 5

(a) Die Wellengleichung für Torsionsschwingungen lautet:

$$\ddot{\vartheta}(x,t) = c^2\vartheta''(x,t) \tag{62}$$

mit dem Quadrat der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c^2 = \frac{G}{\varrho}$.

(b) Setze den Produktsatz nach Bernoulli

$$\vartheta(x,t) = \theta(x)p(t) \tag{63}$$

in die Wellendifferentialgleichung (62) ein:

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2\frac{\theta''(x)}{\theta(x)} = konst.\ (=: -\omega^2) \tag{64}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) &= 0 \\ \theta''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\theta(x) &= 0 \end{aligned} \tag{65}$$

(c) Lösungen für (65):

$$\begin{aligned} p(t) &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ \theta(x) &= C\sin\frac{\omega}{c}x + D\cos\frac{\omega}{c}x \end{aligned} \tag{66}$$

Lösung für (62) mit (66):

$$\vartheta(x,t) = \theta(x)p(t) \tag{67}$$

(d) Feste Einspannung am linken Rand:

$$\vartheta(0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

Freischneiden der Einzelmasse am rechten Ende:

$$M_T(l,t) = -\Theta_S \ddot{\vartheta}(l,t) \tag{68}$$

mit $\Theta_S = \frac{1}{2} mr^2$ und dem Materialgesetz

$$GI_p \vartheta'(x,t) = M_T(x,t) \tag{69}$$

ergibt sich

$$\ddot{\vartheta}(l,t) + \frac{2GI_p}{mr^2} \cdot \vartheta'(l,t) = 0 \tag{RB 2}$$

(e) Aus (RB 1) folgt sofort mit dem Ansatz (66)::

$$D = 0 \tag{70}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta(x) = C \sin \frac{\omega}{c} x \tag{71}$$

Damit folgt mit (RB 2) und dem Ansatz (66):

$$\ddot{p}(t)\theta(l) + \frac{GI_p}{mr^2} p(t)\theta'(l) = 0 \tag{72}$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\omega^2 \theta(l) + \frac{GI_p}{mr^2} \theta'(l) \right) p(t) = 0 \tag{73}$$

Diese Gleichung muss für alle Zeite gelten. Also folgt mit (71):

$$\left(-\omega^2 \sin\left(\frac{\omega}{c} l\right) + \frac{2GI_p\omega}{mr^2 c} \cos\left(\frac{\omega}{c} l\right) \right) C = 0 \tag{74}$$

Für die nichttriviale Lösung folgt also:

$$\tan\left(\frac{\omega}{c} l\right) = \frac{2GI_p}{mr^2 c\omega} \tag{75}$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen ω_i die man z.B. grafisch bestimmen könnte.