Lösungsvorschlag zur Klausur vom 10.10.2011

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

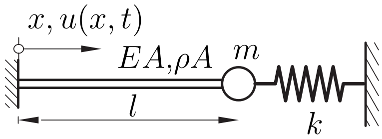
$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die positive x-Richtung laufende Welle?

☒ g 1	☐ h	☐ $\frac{1}{2}(g+h)$	☐ $\frac{1}{2}(g-h)$

Aufgabe T2

[2 Punkte]

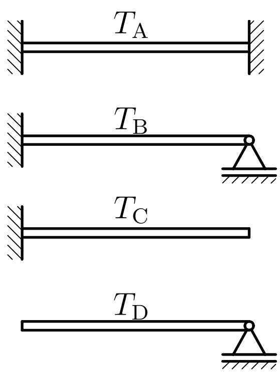


Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x) = x$ als zulässige Funktion. Die Feder sei für $u(l,t) = 0$ entspannt.
Gegeben: EA, ρA, k, l, m, $U(x) = x$

$$R = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l EA\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kl^2}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho A x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ml^2} = \frac{EA + kl}{\frac{1}{3}\rho A l^2 + ml} \quad 2$$

Aufgabe T3

[1 Punkt]

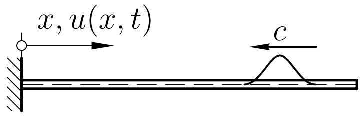


Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweilige Periodendauer der ersten Eigenform der Systeme ist $T_{A,B,C,D}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

☒ $T_A < T_B$	☒ $T_D = \infty$
☐ $T_B > T_C$	☐ $T_D = T_B - T_C$
☐ $T_D = 0$	1

Aufgabe T4 [3 Punkte]

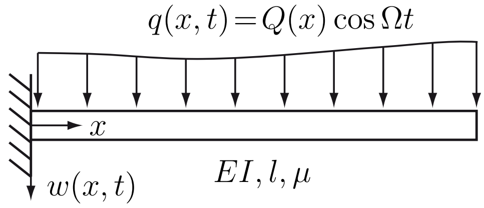
In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Flächenträgheitsmoment I, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle der gegebenen Funktion $u(x,t)$ auf das linke eingespannte Ende zu. Kreuzen Sie an!



	richtig	falsch
Die Eigenkreisfrequenzen des Systems hängen von der Form der Welle $u(x,t)$ ab. 1	☐	☒
Am linken Ende nimmt bei der Wellenreflektion die mechanische Energie des Systems ab. 1	☐	☒
Die erste Eigenkreisfrequenz ist $4\pi \frac{l}{c}$. 1	☐	☒

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Gegeben sei skizzierter Biegebalken $(EI,\, l,\, \mu)$ der an der linken Seite fest eingespannt ist. Belastet wird das System durch eine Streckenlast $q(x,t) = Q(x)\cos\Omega t$. Geben Sie die Randbedingungen sowie einen Ansatz für die partikuläre Lösung an.



Gegeben: EI, l, μ, $Q(x)$, Ω

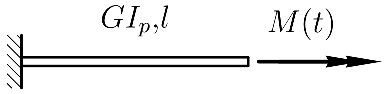
Randbedingungen: $w(0,t) = 0$ $\qquad w'(0,t) = 0$

$EIw''(l,t) = 0$ $\qquad EIw'''(l,t) = 0$

Ansatz: $w_p(x,t) = W(x)\cos\Omega t$ 2

Aufgabe T6 [1 Punkt]

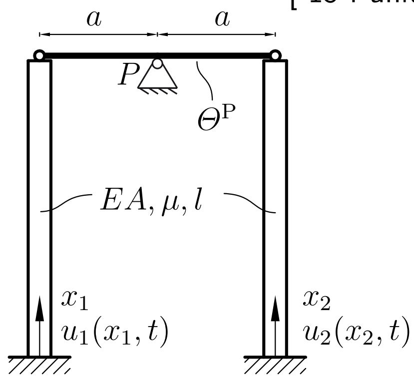
Welchen Einfluss hat ein zeitabhängiges äußeres Moment $M(t)$ auf die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.



Die Eigenfrequenzen werden durch das Moment	kleiner	nicht verändert	größer	
	☐	☒	☐	1

Aufgabe 1

[15 Punkte]



Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Dehnstäben (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ, Länge l) die über eine **starre** Stange (Massenträgheitsmoment Θ^{P}, Masse vernachlässigbar, in Punkt P gelagert) verbunden sind.

Gegeben: EA, μ, a, l, Θ^{P}

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Dehnstäbe in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

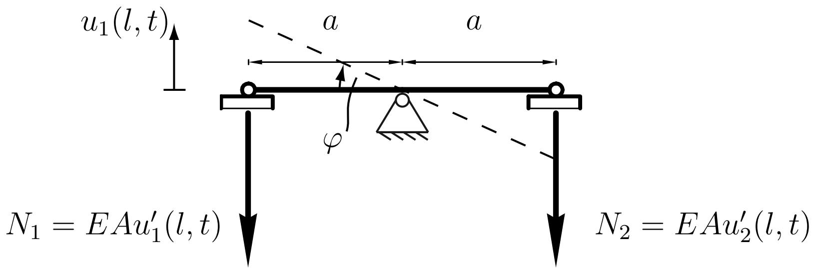
Bewegungsgleichungen:

Dehnstab 1: $\mu \ddot{u}_1(x_1, t) - EA u_1''(x_1, t) = 0$ 1

Dehnstab 2: $\mu \ddot{u}_2(x_2, t) - EA u_2''(x_2, t) = 0$ 1

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:



$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{u}_1(l, t)}{a}$$ 1

Rand- und Übergangsbedingungen:

$u_1(0, t) = 0$ 1 $\qquad$ $u_2(0, t) = 0$ 1

$$-EA u_1'(l, t) a + EA u_2'(l, t) a = \frac{\ddot{u}_1(l, t)}{a} \Theta^{\mathrm{P}}$$ 2

$u_1(l, t) = -u_2(l, t)$ 1

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$:

$$U_1(0) = 0 \qquad U_2(0) = 0 \qquad U_1(l) = -U_2(l) \qquad 1$$

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U_1(x_1), U_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot{u}_1(x_1,t), \dot{u}_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}_1^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}_2^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{u}_1(l,t)}{a}\right)^2 \Theta^{\mathrm{P}} \qquad 2$$

$$U[u_1(x_1,t), u_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l EAu_1'^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l EAu_2'^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \qquad 2$$

$$R[U_1(x_1), U_2(x_2)] = \frac{U[U_1(x_1), U_2(x_2)]}{T[U_1(x_1), U_2(x_2)]}$$

$$R[U_1(x_1), U_2(x_2)] = \frac{\displaystyle\int_0^l EAU_1'^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^l EAU_2'^2(x_2)\mathrm{d}x_2}{\displaystyle\int_0^l \mu U_1^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^l \mu U_2^2(x_2)\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{U_1(l)}{a}\right)^2 \Theta^{\mathrm{P}}} \qquad 1$$

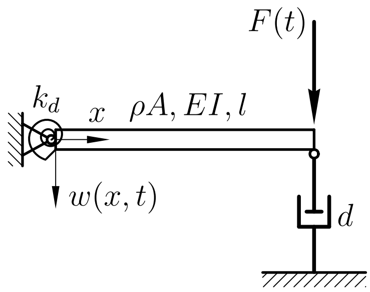
e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an. 1

- [x] Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} sinkt die erste Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} steigt die erste Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Das Massenträgheitsmoment Θ^{P} hat keinen Einfluss auf die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 2

[9 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am linken Lager ist zusätzlich eine Drehfeder (Federsteifigkeit k_d) angebracht. Am rechten Ende des Balkens wirkt die Kraft $F(t)$. Die Feder ist für die skizzierte Lage entspannt.



Gegeben: ρA, EI, l, k_d, d, $F(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}k_d w'^2(0,t)$$ 1

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$$\delta W = F(t)\delta w(l,t) - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t)$$ 1

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0$$ 1

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\int_0^l\Big(-\rho A\ddot{w}(x,t)-EIw^{\mathrm{IV}}(x,t)\Big)\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x+\Big(F(t)-d\dot{w}(l,t)\Big)\delta w(l,t)$$

$$-k_d w'(0,t)\delta w'(0,t)+\Big[EIw'''(x,t)\delta w(x,t)-EIw''(x,t)\delta w'(x,t)\Big]_0^l\Bigg\}\mathrm{d}t$$

$$+\left[\int_0^l\rho A\dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x\right]_{t_1}^{t_2}=0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$$\rho A\ddot{w}(x,t)+EIw^{\mathrm{IV}}(x,t)=0 \quad 1$$

natürliche Randbedingungen:

$$F(t)-d\dot{w}(l,t)+EIw'''(l,t)=0$$
$$EIw''(0,t)-k_d w'(0,t)=0 \qquad 3$$
$$EIw''(l,t)=0$$

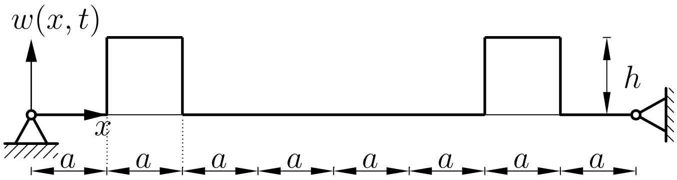
f) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Reibungskräfte können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar wenn verteilte, zeitabhängige Lasten auftreten.
- [x] Das Prinzip von Hamilton liefert bei Vorgabe der natürlichen Randbedingungen die Feldgleichung und die geometrischen Randbedingungen. 1

Aufgabe 3

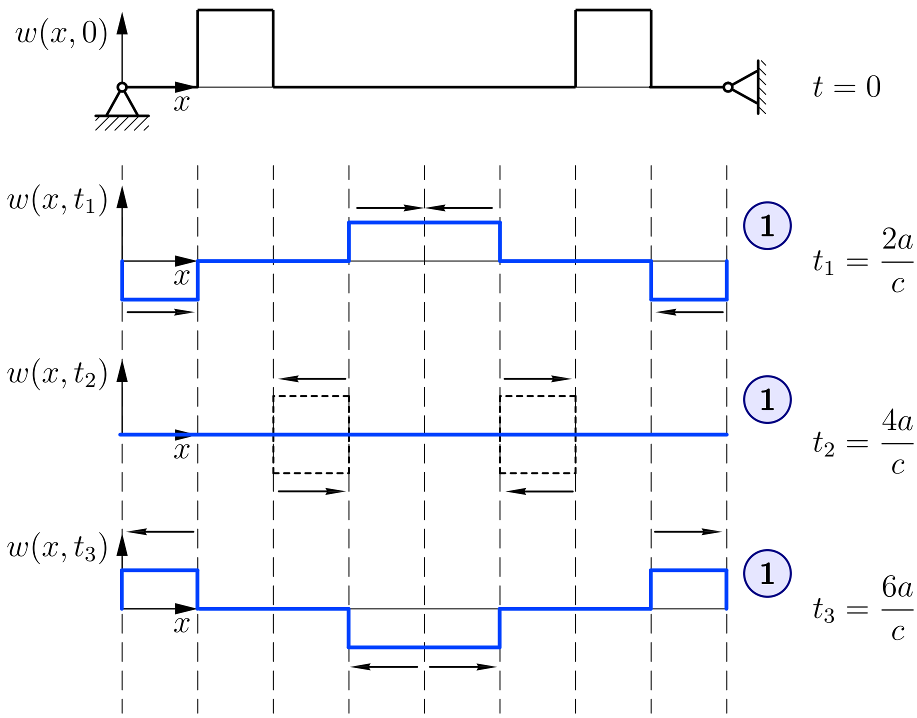
[6 Punkte]

Die fest- fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1 = 2a/c$, $t_2 = 4a/c$, $t_3 = 6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Richtung der jeweiligen Wellenausbreitung.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

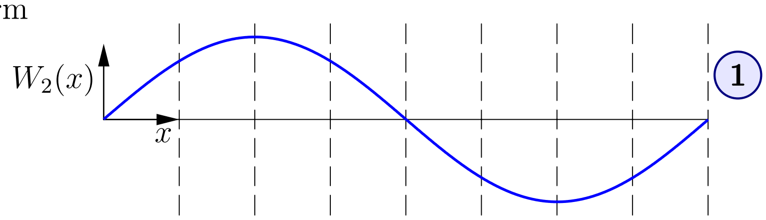
$$T = \frac{16a}{c}$$ 1

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{8a}$$ 1

d) Skizzieren Sie die zweite Eigenform $W_2(x)$ der Saite.

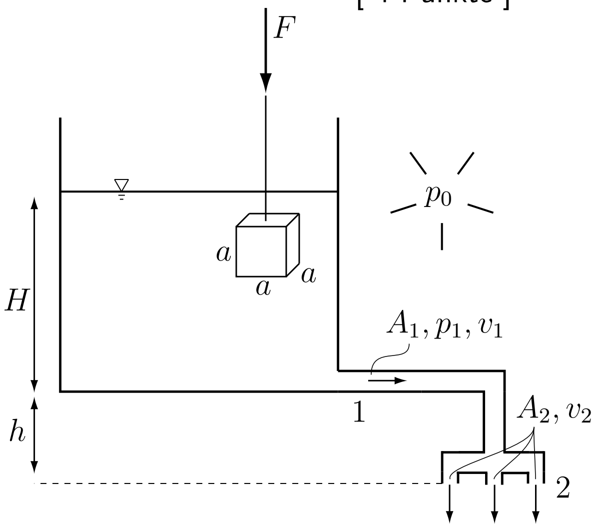
zweite Eigenform



Aufgabe 4

[4 Punkte]

Eine Flüssigkeit unbekannter Dichte befindet sich in einem Behälter. Der Füllstand H kann als konstant angenommen werden. Ein Würfel der Kantenlänge a wird mit der Kaft F vollständig unter der Oberfläche gehalten. Aus einem Rohr des Querschnittes A_1 fließt die Flüssigkeit durch einen Dreifach-Ausfluss (jeweils Querschnittsfläche A_2, Austrittsgeschwindigkeit v_2) in die Umgebung. An der Stelle 1 habe die Flüssigkeit den bekannten Druck p_1.



Gegeben: F, H, h, a, p_1, v_2, g, p_0

Ergänzung gegenüber ursprünglicher Aufgabenstellung: Gewichtskraft des Würfels ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die Dichte ρ der Flüssigkeit in Abhängigkeit der gegeben Größen?

Nebenrechung:

$$F = \rho a^3 g$$

$$\rho = \frac{F}{a^3 g} \quad 1$$

b) Berechnen Sie nun für gegebene Geschwindgkeit v_2 das nötige Querschnittsverhältnis $\frac{A_1}{A_2}$. **Nehmen Sie die Dichte ρ jetzt als gegeben an.**

Nebenrechnung:

$$A_1 v_1 = 3 A_2 v_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 3\frac{v_2}{v_1} \quad 1$$

$$\frac{1}{2}v_1^2\rho + p_1 + \rho g h = \frac{1}{2}v_2^2\rho + p_0 \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0 - p_1 - \rho g h + \frac{1}{2}v_2^2\rho\right)}$$

Querschnittsverhältnis:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3v_2}{\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0 - p_1 - \rho g h + \frac{1}{2}v_2^2\rho\right)}} \quad 1$$

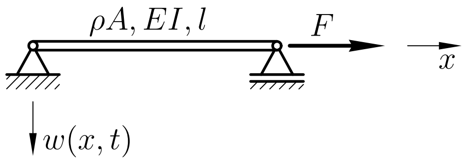
Andere richtige Lösungen durch verschiedene Bezugspunkte und Lage des Nullniveaus möglich.

Aufgabe 5

[6 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist **mit der konstanten positiven Kraft F vorgespannt**.

Gegeben: ρA, EI, l, F



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an. Berücksichtigen Sie auch F in der potentiellen Energie.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l Fw'^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

c) Welche der folgenden Funktionen können als Ansatzfunktionen zur Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz des Systems mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten verwendet werden? Kreuzen Sie an.

[ ] $W_1(x) = x(x+l)$ [X] $W_2(x) = \sin \pi \frac{x}{l}$ [ ] $W_3(x) = \sinh \frac{x}{l}$ 1

d) Gegeben sind nun die Ansatzfunktionen $W_{\mathrm{A}}(x)=x(x-l)$ und $W_{\mathrm{B}}(x)=x^2(x-l)$. Berechnen Sie, welche der beiden Ansatzfunktionen die beste Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz des Systems liefert.

Gegeben:

$$W_{\mathrm{A}}(x) = x(x-l), \qquad W_{\mathrm{B}}(x) = x^2(x-l)$$

Nebenrechnung:

$$\omega_{1,i}^2 \leq \frac{U[W_i(x)]}{T[W_i(x)]}$$

$$\omega_{1,\mathrm{A}}^2 \leq \frac{10(12EI + Fl^2)}{\rho A l^4} \quad 1$$

$$\omega_{1,\mathrm{B}}^2 \leq \frac{14(30EI + Fl^2)}{\rho A l^4} \quad 1$$

$\Rightarrow \omega_{1,\mathrm{A}}^2$ ist die bessere Abschätzung

Die beste Abschätzung liefert: $W_A(x)$ 1