Technische Universität Berlin Sommersemester 25
Fakultät II; Institut für Mathematik
M. Karow

Numerische Mathematik I für Ingenieure

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Tutoriumsaufgaben

1) Erläutere die Numerische Lösung von Anfangswertproblemen mit Runge-Kutta-Verfahren. Zum Beispiel anhand der Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

2) Die Butcher-Tabelle für ein explizites 2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren lautet

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c & a & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Schreibe die Rechenvorschrift für dieses Verfahren auf. Wie muss man die Parameter wählen um die Verfahren von Heun und Collatz zu erhalten?
Optional: Zeige, dass ein solches Verfahren die Fehlerordnung 2 hat, wenn

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad b_2 c = 1/2, \quad b_2 a = 1/2.$$

3) Leite die folgenden Mehrschrittverfahren mit Hilfe von Interpolationsparabeln her.

- Adams-Bashforth-Verfahren der Stufe 2:

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\frac{23}{12}f(t_j, y_j) - \frac{16}{12}f(t_{j-1}, y_{j-1}) + \frac{5}{12}f(t_{j-2}, y_{j-2})\right).$$

- Adams-Moulton-Verfahren der Stufe 2:

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\frac{5}{12}\,f(t_{j+1}, y_{j+1}) + \frac{8}{12}\,f(t_j, y_j) - \frac{1}{12}\,f(t_{j-1}, y_{j-1})\right).$$

- BDF(2)-Verfahren:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}y_{j+1} - 2y_j + \frac{1}{2}y_{j-1}\right) = f(t_{j+1}, y_{j+1}).$$

Hausaufgaben

(1) Sei $y : [0, 4[\to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = 5(t + y(t)^2), \qquad y(3) = -1.$$

(a) **(2 Punkte)** Berechne mit einem expliziten Eulerschritt einen Näherungwert y_e für $y(3.1)$.

(b) **(2 Punkte)** Berechne (ausgehend von $y(3)$) durch einmalige Anwendung des Collatz-Verfahrens eine Näherung y_c für $y(3.2)$. Erinnerung: Die Rechenvorschrift für das Collatz-Verfahren zur Lösung einer Differentialgleichung mit rechter Seite f lautet

$$y_{j+1} = y_j + h\,f\left(t_j + \frac{h}{2},\ y_j + \frac{h}{2}\,f(t_j, y_j)\right), \qquad h = t_{j+1} - t_j.$$

(2) **(2 Punkte)** Das 3/8-Verfahren (Ordnung 4) ist durch folgende Butcher-Tabelle definiert.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Schreibe die Rechenvorschrift für dieses Verfahren auf.

Programmieraufgabe 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \cos(t)\, y(t), \qquad y(0) = 1. \qquad (*)$$

Schreibe eine MATLAB-Funktion `loeservergleich(h)`, welche dieses Anfangswertproblem im Intervall $[0, 50]$ mit dem expliziten Eulerverfahren, dem Collatzverfahren und dem Heunverfahren löst und die Lösungen in ein Diagramm plottet. Als Schrittweiten kan man z.B. $h = 0.1$, $h = 0.2$ und $h = 0.5$ wählen. Die exakte Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ ist übrigens die periodische Funktion $y(t) = e^{\sin(t)}$.

Programmieraufgabe 2. Gegeben seien zwei Massen m_1, m_2 die sich zur Zeit t an den Orten $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ befinden. Nach dem Newtonschen Graviationsgesetz zieht die Masse m_2 die Masse m_1 mit der Kraft

$$\vec{F}_1(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)) = \frac{\gamma\, m_1\, m_2}{\|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\|_2^3}(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t))$$

an. Dabei ist γ die Gravitationskonstante. Die Anziehungskraft, welche m_1 auf m_2 ausübt, ist $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Sei $\vec{v}_k(t) = \vec{x}_k'(t)$ die Geschwindigkeit von Masse k zum Zeitpunkt t. Dann gilt

$$m_k\, \vec{v}_k'(t) = \vec{F}_k(t), \quad k = 1, 2 \qquad \text{(Kraft=Masse mal Beschleunigung).}$$

Insgesamt hat man für die Bewegung der Massen die folgende Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2(t) \\ \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \end{bmatrix}}_{=:\vec{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \\ \vec{F}_1(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t))/m_1 \\ \vec{F}_2(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t))/m_2 \end{bmatrix}}_{\vec{f}(\vec{y}(t))} \qquad (*)$$

Schreibe eine MATLAB-Funktion **doppelstern**(m1,m2,x1,x2,p,h) welche die Differentialgleichung $(*)$ mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens löst und einen Film erzeugt, der die Bewegung der Massen zeigt. Ein Beispiel wird in der Vorlesung vorgeführt. Dabei sind alle Vektoren 2-dimensional (ebene Bewegung). Der Parameter `h` ist die Zeitschrittweite, der Parameter `p` bestimmt die Anfangsgeschwindigkeiten, `x1` und `x2` bestimmen die Anfangspositionen, die auf auf der x-Achse (der horizontalen Achse) liegen sollen:

$$\vec{x}_1(t_0) = \begin{bmatrix} \mathtt{x1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t_0) = \begin{bmatrix} \mathtt{x2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathtt{p}/m_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathtt{p}/m_2 \end{bmatrix}$$

Die Gravitationskonstante soll 1 sein: $\gamma = 1$.
Vorschlag für einen Funktionsaufruf: `doppelstern(1,5,-1,1,1,.01)` .
Tipp: Schreibe zuerst eine Funktion `y_neu=ruku_schritt(f,y,h)`, die für eine Differentialgleichung mit beliebiger rechter Seite f (welche aber nicht explizit von der Zeit abhängt) einen Runge-Kutta-Schritt mit Schrittweite h ausführt. Weitere Tipps stehen auf den Vorlesungsfolien.