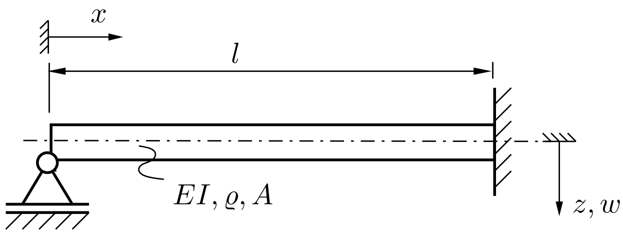
Aufgabenblatt 3

Aufgaben der Hörsaalübung

1. Der skizzierte, massebehaftete Balken wird durch geeignete Anfangsbedingungen in freie Biegeschwingungen versetzt.



   (a) Wie lautet die das System beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

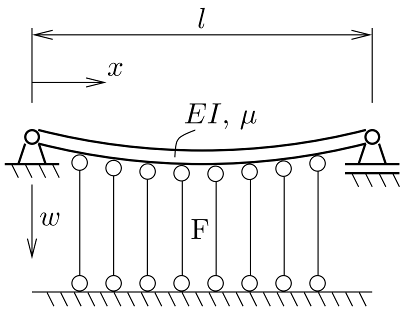
   (b) Formen Sie die partielle Differentialgleichung mit einem Produktansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren Lösungen an.

   (c) Formulieren Sie die geometrischen und dynamischen Randbedingungen.

   (d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und geben Sie Näherungslösungen an.

   Geg.: A, EI, ϱ, l, $\hat{q}$, Ω

2. Ein Balken ist links und rechts gelenkig gelagert. Durch Fesseln F wird ihm die Anfangsauslenkung $w(x,0) = w_0(x)$ mit $w_0 = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ aufgezwungen. Zur Zeit $t = 0$ werden die Fesseln am Balken durchtrennt, und der Balken führt dann freie Schwingungen aus.



   (a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems? Geben Sie alle Randbedingungen an.

   (b) Ein Produktansatz liefert nach Einsetzen die Lösung

   $$w(x,t) = (A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x + C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)(E\cos\omega t + F\sin\omega t)$$

   mit der Abkürzung $\lambda^4 = \frac{\omega^2\mu}{EI}$. Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_k aus der Frequenzgleichung, die Sie mithilfe der Randbedingungen ermitteln und stellen Sie die bis hier bekannte Gesamtlösung auf.

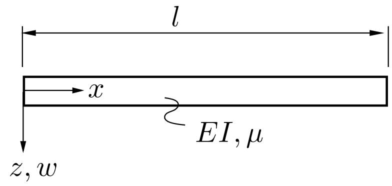
   (c) Das Durchtrennen der Fesseln soll so geschehen, dass der Balken anfangs in Ruhe ist. Bestimmen Sie die verbliebenden Konstanten durch Anpassen der Lösung des RWP an die Anfangsbedingungen.

   (d) Skizzieren Sie die Biegelinie zum Zeitpunkt $t^* = \sqrt{\frac{\mu}{EI}}\frac{l^2}{\pi}$.

   Geg.: l, EI, μ, t^*

Tutoriumsaufgaben

3. Der skizzierte, massebehaftete Balken wird durch geeignete Anfangsbedingungen in freie Transversalschwingungen versetzt.



   (a) Wie lautet die das System beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

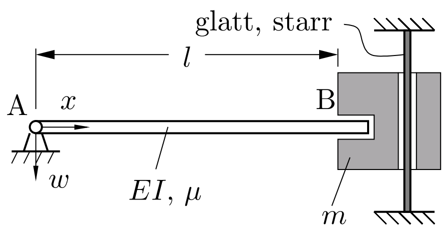
   (b) Formen Sie diese partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche um und geben Sie deren Lösungen an.

   (c) Formulieren Sie die geometrischen und dynamischen Randbedingungen.

   (d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und geben sie näherungsweise die erste von Null verschiedene Eigenkreisfrequenz an.

   Geg.: EI, μ, l

4. Ein Balken (Länge l, Massebelegung $\mu = \rho A$, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.

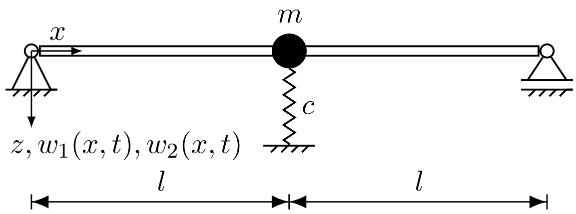


   (a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichung und die zugehörigen Randbedingungen?

   (b) Wie lautet die Frequenzgleichung? *Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.*

   Geg.: EI, μ, l, m

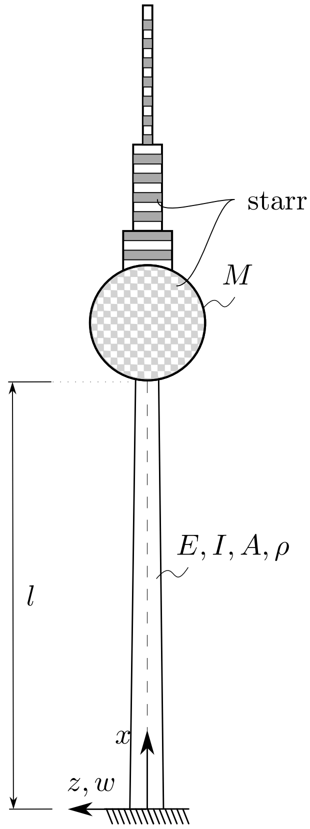
Weitere Aufgaben



5. Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge $2l$, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ durch $w_1(x,t)$ und im Bereich $l \leq x \leq 2l$ durch $w_2(x,t)$ beschrieben. Der Balken wird an der Stelle $x = l$ durch eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w_1(l,t) = w_2(l,t) = 0$) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse m.
   (a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).
   (b) Geben Sie die Feldgleichungen für $w_1(x,t)$ im Bereich $0 \leq x \leq l$ und $w_2(x,t)$ im Bereich $l \leq x \leq 2l$ an.
   (c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle $x = l$ die Übergangsbedingungen an.

   Geg.: EI, l, μ, m, c

6. Der 368 m hohe Berliner Fernsehturm ist eines der bekanntesten Wahrzeichen der Stadt. Der Turmschaft, dessen Querschnitt vereinfacht über die Höhe x konstant angenommen wird, soll als homogener Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Masse pro Länge ρA) modelliert werden. Die Kugel und die Antenne des Turms haben zusammen die Masse M und werden in erster Näherung als starr und punktförmig angenommen.



   (a) Geben Sie die allgemeine Bewegungsgleichung für die Biegeschwingungen eines Balkens an.

   (b) Überführen Sie die Bewegungsgleichung durch einen geeigneten Ansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und geben Sie deren allgemeine Lösungen an.

   (c) Wie lauten die Randbedingungen für das skizzierte System?

   (d) Welche Randbedingungen gelten für die **Sonderfälle**:

      (a) $M \to \infty$,

      (b) $M \to 0$?

   (e) Ermitteln Sie, für den **Sonderfall** $M \to 0$, die Bestimmungsgleichung für die Eigenkreisfrequenzen.

Geg.: l, E, I, ρ, A, M
Hinweis: $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$