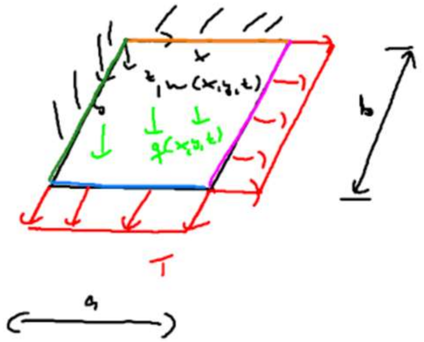
## 3. Zweidimensionale Kontinua (Festkörper)

| eindim. | | zweidim. |
|---|---|---|
| Saite | $\leftrightarrow$ | Membran |
| Balken | $\leftrightarrow$ | Platte |

Ist das zweidimensionale Kontinuum in der Gleichgewichtslage gekrümmt, spricht man von einer Schale.

Membran:




Zweidim. Kontinuum mit vernachlässigter Biegesteifigkeit und Vorspannung $T$ in $x$- und $y$-Richtung

Herleitung Feldgl. über Pr. v. Hamilton

Rechteckmembran $x \in [0,a]$ $y \in [0,b]$

an den Rändern $w = 0$

geometr. RB $\underline{w(0,y,t)} = \underline{w(x,0,t)} = \underline{w(a,y,t)} = \underline{w(x,b,t)} = 0$

Pr. v. Hamilton

$$T = \frac{1}{2}\mu \int_0^a\int_0^b \dot{w}^2 \, dy \, dx \qquad U = \frac{1}{2} T \int_0^a\int_0^b (w_x^2 + w_y^2) \, dy \, dx \qquad \delta W = \int_0^a\int_0^b q(x,y,t) \, \delta w \, dy \, dx$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} \; ; \; w_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$q(x,y,t)$ Flächenlast

Pr. v. Hamilton $\qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \, dt = 0$

Einsetzen und Variation durchführen

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b \Big( \underset{①}{\mu \dot{w} \delta \dot{w}} - T \big( \underset{②}{w_x \delta w_x} + \underset{③}{w_y \delta w_y} \big) + q(x,y,t)\,\delta w \Big) \, dy \, dx \, dt = 0$$

Partielle Integration

$$(1)\quad \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b \mu\dot w\,\delta\dot w\,dy\,dx\,dt = \int_0^a\int_0^b \underbrace{\mu\dot w\,\delta w\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} dy\,dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b \mu\ddot w\,\delta w\,dy\,dx\,dt$$

$$(2)\quad \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b -T w_x\,\delta w_x\,dy\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^b -T w_x\,\delta w\Big|_0^a + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b T w_{xx}\,\delta w\,dy\,dx\,dt$$

geometr. Rdb: beide Null

$$(3)\quad \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b -T w_y\,\delta w_y\,dy\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a -T w_y\,\delta w\Big|_0^b + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b T w_{yy}\,\delta w\,dy\,dx\,dt$$

geometr. RBen: beide Null

Es verbleibt:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^a\int_0^b \underbrace{\left(-\mu\ddot w + T(w_{xx}+w_{yy}) + q(x,y,t)\right)}_{\overset{!}{=}0}\,\delta w\,dy\,dx\,dt = 0$$

$\leftarrow$ beliebig

Also Feldgleichung

$$\boxed{\mu \ddot{w} - T\,(w_{xx} + w_{yy}) = q\,(x, y, t)}$$

Feldgleichung Membran

oder mit $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\qquad \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ $\qquad \nabla$ Nabla

$$\boxed{\ddot{w} - c^2 \nabla^2 w = \frac{1}{\mu} q\,(x, y, t)}$$

Eigenkreisfr. / Eigenformen der Rechteckmembran. „Eigen-" $\rightarrow q(x,y,t) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Feldgl.} & \ddot{w} = c^2 \nabla^2 w \\ \text{RBen} & w(0, y, t) = w(x, 0, t) = w(a, y, t) = w(x, b, t) = 0 \end{array}\right\} \text{Randwert-problem}$$

Ansatz: $\quad w(x, y, t) = X(x)\, Y(y) \cos \omega t \qquad \omega$ Eigenkreisfr.

In Feldgl.:

$$-\omega^2 X Y \cancel{\cos\omega t} - c^2 ( X_{xx} Y + X Y_{yy} ) \cancel{\cos\omega t} = 0 \qquad \Big| : X Y \, c^2 \, (\cdot -1)$$

$$\beta^2 + \frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} = 0 \qquad \text{mit } \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \text{konstant}$$

Damit diese Gleichung für jedes beliebige $x, y$ erfüllt ist, müssen $\frac{X_{xx}}{X}$, $\frac{Y_{yy}}{Y}$ ebenfalls konstant sein! D.h.

$$\frac{X_{xx}}{X} = -\alpha^2 \qquad \frac{Y_{yy}}{Y} = -\gamma^2 \qquad \underline{\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2}$$

Lösungen

Also:

$$X_{xx} + \alpha^2 X = 0 \qquad X(x) = C_1 \sin \underline{\alpha}\, \underline{x} + C_2 \cos \underline{\alpha}\, \underline{x}$$

$$Y_{yy} + \gamma^2 Y = 0 \qquad Y(y) = C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y$$

Anpassen an RBen

$w(0,y,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$w(x,0,t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

$w(a,y,t) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow C_1 \sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{i\pi}{a} \quad i = 1,2,\dots$

$w(x,b,t) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \Rightarrow C_3 \sin \gamma b = 0 \Rightarrow \gamma_j = \frac{j\pi}{b} \quad j = 1,2,\dots$

mit $\beta_{ij} = \sqrt{\alpha_i^2 + \gamma_j^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2} = \frac{\omega_{ij}}{c}$

Also sind die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{ij} = \pi c \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2} \qquad i,j = 1,2,\dots$$

und die Eigenformen

$$W(x,y) = X(x)\,Y(y) = A_{ij} \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}$$

Höhere Eigenkreisfrequenzen $\omega_{ij}$ sind im Allgemeinen keine ganzzahligen Vielfachen (Superharmonische) von $\omega_{11}$.