Technische Universität Berlin SS 25
Fakultät II; Institut für Mathematik

Projekt Wärmeleitung

1. Hausaufgabe

Abbildung (1) zeigt ein diskretisiertes Rechengebiet mit einem strukturierten, kartesischen 4×4 Gitter mit äquidistanten Abständen der Rechenpunkte in beide Koordinatenrichtungen. Dabei beschreiben die schraffierten Zellen die Randvolumen, die unschraffierten die inneren Kontrollvolumen. Die diskreten Rechenpunkte T_i mit $i = 1, \dots 16$, im Schwerpunkt der Volumen, werden durch die violettfarbenen Punkte dargestellt. Der roteingefärbte Bereich beschreibt die Zellen mit Quelldichte $\pi \neq 0$.
Das diskretisierte Rechengebiet beschreibt einen ruhenden, inkompressiblen Festkörper aus zwei unterschiedlichen Materialien. Die roteingefärbten Volumen sollen hier aus leitfähigem Kupfer mit Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Cu} = 380 \frac{W}{m \cdot K}$ bestehen, die restlichen Volumen aus isolierendem PVC mit Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{PVC} = 0.23 \frac{W}{m \cdot K}$. Sowohl der gesamte Rand, als auch Kontrollvolumen 10, sollen über Dirichlet-Randbedingungen beschrieben werden. Die quellfreien Randvolumen sollen Raumtemperatur haben, also $T_D = 21C = 294,15K$, die Randvolumen mit Quelle $T_{D_{Quelle}} = 100C = 373,15K$. Das Kontrollvolumen zum Temperaturwert T_{10}, soll über eine innere Dirichlet-Randbedingung beschrieben werden, da dort die Temperatur mit $T_{D_{inner}} = 373,15K$ bereits bekannt ist. Innere Dirichlet-Randbedingungen werden analog zu Dirichlet-Randbedingungen implementiert. Die Abmaße des Gebiets sind $10mm \times 10mm$.

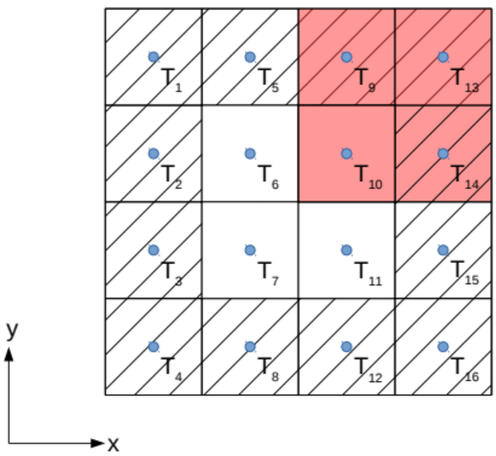

Abbildung 1: Strukturiertes 4×4 Gitter

Im Folgenden soll die Diskretisierung allerdings nicht auf das 4×4 Gitter beschränkt werden. Daher wird das allgemeine $n \times n$ Gitter eingeführt, wobei mit N die Gesamtanzahl an Kontrollvolumen bezeichnet wird (in Abbildung 1 demnach $N = 16$). Der Parameter n wird dabei stets durch $n = 2^s$ mit $s \in \mathbb{N}$ gewählt. Der Aufbau soll dabei analog zu dem in Abbildung 1 definiert sein. Demnach wird der gesamte obere rechte Quadrant durch den Quellterm aus Kupfer beschrieben. Zusätzlich soll auch die Größe der Platte, die im vorliegenden Fall durch $10mm \times 10mm$ definiert ist, beliebig groß gewählt werden können, wobei stets von einem Quadrat ausgegangen werden kann.

Aufgabe 1 **Theorie-Aufgabe**

In dieser Hausaufgabe wird nur der stationäre Fall betrachtet werden. Leitet dafür mithilfe des Skripts die Kontrollvolumen-Gleichung für das Kontrollvolumen T_6 her. Verwendet dazu die angegebenen Parameter der vorgegebenen Temperaturen und der Wärmeleitfähigkeiten. Achtet zusätzlich auf die gegebenen Randbedingungen und die Quellterme. Die finale Form sollte sich an dem Gleichungssystem $A \cdot \vec{T} = \vec{S}$ orientieren und dementsprechend formuliert werden.

Aufgabe 2 **Programmieraufgabe**

Die Programmieraufgabe ist in einzelne Aufgaben unterteilt. Diese sollen euch bei der Implementierung des stationären Falls helfen. Achtet in allen Punkte darauf, dass n, N und die Größe des Gebiets variiert werden können.

a) Implementiert zunächst die Diskretisierung des Gebiets.

b) Definiert $n \times n$ Matrizen für die Wärmeleitfähigkeit, die Quellen und die Randbedingungen. Beachtet bei den Wärmeleitfähigkeiten, dass diese auf der Grenze zwischen zwei Kontrollvolumen mit unterschiedlichen Materialien durch das harmonische Mittel bestimmt werden müssen.

c) Berechnet mit diesen Matrizen die Koeffizienten a_E, a_W, a_N, a_E und a_P. Fügt diese anschließend in die $N \times N$ Systemmatrix A ein. Diese sollte durch eine *sparse*-Matrix (siehe Matlab und Python Bibliotheken) definiert werden. Achtet bei dem Aufstellen der Matrizen auf die Randbedingungen.

d) Stellt den Spaltenvektor $\vec{S}$ auf, der aus N Einträgen besteht. Dieser sollte auch im *sparse*-Format definiert werden.

e) Berechnet anschließend die Lösung $\vec{T}$ des Gleichungssystems $A \cdot \vec{T} = \vec{S}$ mithilfe des Backslash-Operators.

f) Da $\vec{T}$ als Vektor vorliegt, sollte eine Umwandlung in eine $n \times n$ Darstellung mithilfe des Befehls *reshape* durchgeführt werden, damit die Lösung anschließend grafisch ausgegeben werden kann (beispielsweise mit *imagesc*).

Hinweis: Vermeidet wenn möglich Schleifen und verwendet stattdessen Vektoren/Matrizen und entsprechende Vektor-und Matrixoperationen. Beispielsweise beim Erstellen der Koeffizienten a_E, a_W, a_N, a_E und a_P: Diese zunächst in Vektoren speichern und anschließend die Vektoren mit Befehlen wie *spdiags* in die Matrix A übertragen.