Aufgabe 1.1 – Lösung

a)

Zustandsgrößen (ZG)

- beschreiben eindeutig den Zustand des Systems
- besitzen ein vollständiges Differential und erfüllen den Satz von Schwarz:

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}_{\text{Satz v. Schwarz}}$$

- daraus folgt, dass ZG wegunabhängig sind
- Bsp: $T, p, \rho, V, \ldots$ (siehe unten)

b) gegeben: Ideales Gas, mit $p(T,v) = \frac{R \cdot T}{v}$

$$\frac{\partial p(T,v)}{\partial T} = \frac{R}{v} \Longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T} = -\frac{R}{v^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(T,v)}{\partial v} = -\frac{R \cdot T}{v^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial v} = -\frac{R}{v^2} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T} = -\frac{R}{v^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial v}} \tag{3}$$

$\Longrightarrow$ Der Satz von Schwarz ist erfüllt. $\Longrightarrow$ Der Druck p ist eine Zustandsgröße.

c)

Prozessgrößen

- beschreiben Energie / Masse , die die Systemgrenze bei einer Zustandsänderung (Übergang von einem Zustand in einen anderen Zustand) überschreiten
- wegabhängig (Zustand B kann von Zustand A aus auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden, dabei können die Prozessgrößen unterschiedlich ausfallen!)
- Bsp: Wärme Q, Arbeit W, Massenstron $\dot{m}$, Stoffstrom $\dot{n}$

Aufgabe 1.2 – Lösung

a)

Intensive Größen

- bleiben bei Teilung / Vervielfachung des Systems konstant
- Bsp:
  - Druck $p, \left[\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}\right]$
  - Temperatur T, [K]
  - Dichte ρ, $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$
  - ...

b)

Extensive Größen

- ändern sich bei Teilung / Vervielfachung des Systems
- Bsp:
  - Masse m, [kg]
  - Volumen V, $\left[\mathrm{m^3}\right]$
  - Stoffmenge n, [mol]
  - innere Energie U, $[\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}]$
  - ...

c)

Bezogene Größe

- da intensive Größen bessser geeignet sind, allgemeine Aussagen zu treffen, geben wir extensive Größen gern als *bezogene Größen* an:
- "*spezifisch*" (massebezogen):
  - spezifisches Volumen $v := \frac{V}{m}$, $\left[\mathrm{m^3/kg}\right]$
  - spezifische innere Energie $u := \frac{U}{m}$, [J/kg]
  - ...
- "*molar*" (stoffmengenbezogen):
  - molares Volumen $v_\mathrm{m} := \frac{V}{n}$, $\left[\mathrm{m^3/mol}\right]$
  - ...

Aufgabe 1.3 – Lösung

a) gesucht: ρ_He
ρ_L

Die Dichte ist definiert als Verhältnis von Masse zu Volumen:

$$\boxed{\rho := \frac{m}{V}} \tag{4}$$

Einsetzen der gegebenen Werte in (4) liefert:

$$\boxed{\rho_\mathrm{He}} = \frac{m_\mathrm{He}}{V} = \frac{0.5\,\mathrm{g}}{4\,\mathrm{dm}^3} = \frac{0.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = \boxed{0.125\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \tag{5}$$

$$\boxed{\rho_\mathrm{L}} = \frac{m_\mathrm{L}}{V} = \frac{3.62\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = \boxed{0.905\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \tag{6}$$

b) gesucht: $\rho_\mathrm{m,He}$
$\rho_\mathrm{m,L}$

Die molare Dichte ρ_m ist das Verhältnis der Stoffmenge n zum Volumen:

$$\boxed{\rho_\mathrm{m} := \frac{n}{V}} \tag{7}$$

Die Molmasse M ist das Verhältnis zwischen Masse und Stoffmenge:

$$\boxed{M := \frac{m}{n}} \tag{8}$$

Nach Umstellen können wir (8) in (7) einsetzen:

$$\rho_\mathrm{m} = \frac{m}{MV} = \frac{\rho}{M} \tag{9}$$

Nun können wir die Werte für Helium und Luft einsetzen:

$$\boxed{\rho_\mathrm{m,He}} = \frac{0.125\,\mathrm{kg/m}^3}{4\,\mathrm{g/mol}} = \boxed{31.25\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^3}} \tag{10}$$

$$\boxed{\rho_\mathrm{m,L}} = \frac{0.905\,\mathrm{kg/m}^3}{28.96\,\mathrm{g/mol}} = \boxed{31.25\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^3}} \tag{11}$$

Wir sehen, dass die Dichte ρ sich von der molaren Dichte ρ_m qualitativ unterscheidet: Obwohl in beiden Behältern gleich viele Teilchen sind, ist die Dichte der Luft deutlich höher! Grund dafür ist, dass die einzelnen Teilchen der Luft eine höhere Masse haben als die des Heliums ($M_\mathrm{L} > M_\mathrm{He}$).

Theorie – Systemgrenzen

Durchlässigkeit von Systemgrenzen

- offenes System
  - Systemgrenzen **durchlässig** für Materie
  - Systemgrenzen **durchlässig** für Energie
- geschlossenes System
  - Systemgrenzen **nicht durchlässig** für Materie
  - Systemgrenzen **durchlässig** für Energie
- abgeschlossenes System
  - Systemgrenzen **nicht durchlässig** für Materie
  - Systemgrenzen **nicht durchlässig** für Energie

Aufgabe 1.4 – Lösung

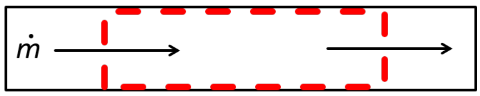
System $\boxed{\text{I}}$: Mit einem Deckel verschlossener Kochtopf mit Wasser. Kein Massenfluss über die Systemgrenzen, Energiefluss (Wärme) über die Systemgrenzen → geschlossenes System

System $\boxed{\text{II}}$: Verschlossene Thermoskanne mit Kaffee. Kein Massenfluss über die Systemgrenzen, kein Energiefluss über die Systemgrenzen → abgeschlossenes System

System $\boxed{\text{III}}$: Durchflossenes Rohr. Massenfluss über die Systemgrenzen → offenes System

I

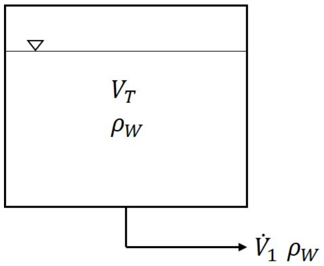
II



III

Aufgabe 1.5 – Lösung

a)



b) Die Massenbilanz für das System lautet:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \dot{m}_{\mathrm{ein}} - \dot{m}_{\mathrm{aus}}, \tag{12}$$

$$\text{mit} \quad \dot{m}_{\mathrm{ein}} = 0 \tag{13}$$

$$\dot{m}_{\mathrm{aus}} = \dot{V}_1 \cdot \rho_{\mathrm{W}} \tag{14}$$

Da $\sum \dot{m} \neq 0$, handelt es sich um ein *instationäres* System.

c) Wir nutzen die Massenbilanz aus Teilaufgabe (b):

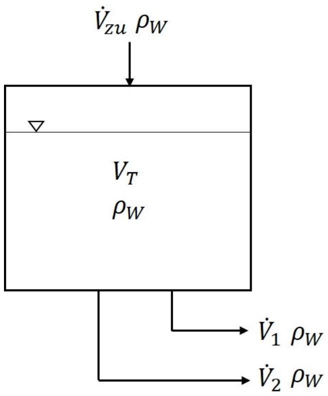
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = -\dot{m}_{\mathrm{aus}} \tag{15}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}m = -\dot{m}_{\mathrm{aus}} \cdot \mathrm{d}\tau \tag{16}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta m = -\dot{m}_{\mathrm{aus}} \cdot \Delta\tau \tag{17}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta\tau = -\frac{\Delta m}{\dot{m}_{\mathrm{aus}}} = -\frac{\rho_{\mathrm{W}} \cdot \Delta V}{\rho_{\mathrm{W}} \cdot \dot{V}_1} = -\frac{0 - V_{\mathrm{T}}}{\dot{V}_1} = \frac{2500\,\ell}{120\,\ell/\mathrm{min}} = 20.8\,\mathrm{min} \tag{18}$$

d)



e) Die neue Massenbilanz unter Berücksichtigung der Ströme $\dot{V}_{\mathrm{zu}}$ und $\dot{V}_2$ lautet:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \dot{m}_{\mathrm{ein}} - \dot{m}_{\mathrm{aus}} = \dot{m}_{\mathrm{zu}} - \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \rho_{\mathrm{W}} \cdot \dot{V}_{\mathrm{zu}} - \rho_{\mathrm{W}} \cdot \dot{V}_1 - \rho_{\mathrm{W}} \cdot \dot{V}_2 \tag{19}$$

Da die Wassermenge im Tank konstant bleiben soll, handelt es sich nun um ein *stationäres* System.

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{20}$$

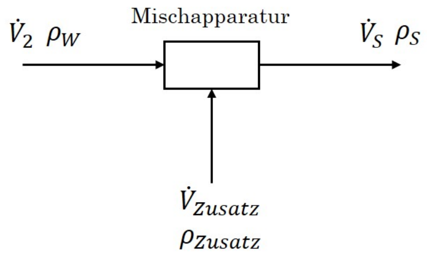
Da sämtliche Ströme die gleiche Dichte $\rho_\mathrm{W} \neq 0$ aufweisen gilt:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}}_{=0} = \rho_\mathrm{W}(\dot{V}_\mathrm{zu} - \dot{V}_1 - \dot{V}_2) \tag{21}$$

$$\Longrightarrow \; 0 = \dot{V}_\mathrm{zu} - \dot{V}_1 - \dot{V}_2 \tag{22}$$

$$\Longleftrightarrow \; \dot{V}_\mathrm{zu} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 120\,\ell/\mathrm{min} + 400\,\ell/\mathrm{min} = 520\,\ell/\mathrm{min} \tag{23}$$

f)



Massebilanz der Mischapparatur:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \dot{m}_2 + \dot{m}_\mathrm{Zusatz} - \dot{m}_\mathrm{S} = \rho_\mathrm{W} \cdot \dot{V}_2 + \rho_\mathrm{Zusatz} \cdot \dot{V}_\mathrm{Zusatz} - \rho_\mathrm{S} \cdot \dot{V}_\mathrm{S} \tag{24}$$

Vorgang stationär ($\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = 0$):

$$\Longrightarrow \; \rho_\mathrm{S} \cdot \dot{V}_\mathrm{S} = \rho_\mathrm{W} \cdot \dot{V}_2 + \rho_\mathrm{Zusatz} \cdot \dot{V}_\mathrm{Zusatz} \tag{25}$$

Da wir uns für ein Gesamtvolumen interessieren (nicht den Volumenstrom), multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der Zeit $\Delta\tau$, die vergeht, bis $20\,\ell$ des Zusatzstoffes eingeflossen sind (es gilt $\dot{V} \cdot \Delta\tau = V$).

$$\Longrightarrow \; \rho_\mathrm{S} \cdot V_\mathrm{S} = (\rho_\mathrm{W} \cdot V_2 + \rho_\mathrm{Zusatz} \cdot V_\mathrm{Zusatz}) \tag{26}$$

aus Aufgabenstellung folgt:

$$\frac{V_\mathrm{Zusatz}}{V_2} = \frac{3}{100} \Longrightarrow V_2 = \frac{100}{3} \cdot V_\mathrm{Zusatz} = 666.67\,\mathrm{m}^3 \tag{27}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_\mathrm{S}} = \frac{1}{\rho_\mathrm{S}} (\rho_\mathrm{W} \cdot V_2 + \rho_\mathrm{Zusatz} \cdot V_\mathrm{Zusatz}) \tag{28}$$

$$= \frac{1}{250\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \left(997\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{100}{3} \cdot 0.020\,\mathrm{m}^3 + 1200\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.020\,\mathrm{m}^3 \right) \tag{29}$$

$$= \boxed{2.755\,\mathrm{m}^3} \tag{30}$$

Wir sehen, dass V_S erheblich höher ist, als $V_\mathrm{Z} + V_2 = 20\,\ell + 666.67\,\ell = 0.686\,67\,\mathrm{m}^3$. Hätten wir hier also versucht, mit einer "Volumenbilanz" zu arbeiten, wären wir auf das falsche Ergebnis gekommen. Der Grund hierfür ist, dass das Volumen (anders als Masse und Energie) keine Erhaltungsgröße ist!