

Theorie – Übung 2

Ideales Gas

- Modell:
 - Teilchen ohne räumliche Ausdehnung
 - **keine** Wechselwirkung zwischen Teilchen
 - Wechselwirkung mit fester Wand: elastische Stöße
- Näherung gut für kleine Drücke, hohe Temperaturen und kleine Atome
- thermische Zustandsgleichung:

$$\boxed{pv = RT} \iff \boxed{pV = mRT} \iff \boxed{pv_m = R_m T} \iff \boxed{pV = nR_m T}$$

- kalorische Zustandsgleichung:

$$\boxed{u = \frac{f}{2}RT} \iff \boxed{u_m = \frac{f}{2}R_m T} \implies \boxed{du = c_v dT}$$

- R_m : allgemeine (“molare”) Gaskonstante
- $R := \frac{R_m}{M}$: spezifische Gaskonstante
- $f = \#$ Freiheitsgrade (1-atomig: $f = 3$)

Zustandsgleichungen

vlg. VL2.44ff

- definieren Zusammenhang von ZG des Systems im Gleichgewicht
- **Thermische Zustandsgleichung:**
 - definieren Zusammenhang von *thermischen* ZG des Systems (T, p, v und abgeleitete Größen)
 - üblich: $p = p(T, v)$ oder $v = v(T, p)$
 - Bsp. Idealgas: $pv = RT$
- **kalorische Zustandsgleichungen:**
 - beschreiben energetische ZG des Systems (z.B. innere Energie U)
 - z.B. Idealgas: $u = \frac{f}{2}RT$

Aufgabe 2.1 – Lösung

gegeben: $T_1 = 300 \text{ K}$
 $T_2 = 400 \text{ K}$
 $M_{\text{He}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$
 $M_{\text{Ar}} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$

Lösung:

a) Sowohl Helium als auch Argon sind **einatomige** Edelgase ($f = 3$). Es gilt also

$$u_{\text{m,He}} = u_{\text{m,Ar}} = \frac{3}{2} R_{\text{m}} T \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{für } T_1: u_{\text{m,He}} = u_{\text{m,Ar}} = 3.7415 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \quad (2)$$

$$\text{für } T_2: u_{\text{m,He}} = u_{\text{m,Ar}} = 4.9887 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \quad (3)$$

Wir sehen, dass die *molare* innere Energie (neben der Zahl der Freiheitsgrade) nur von der Temperatur abhängt. Die molare Masse kürzt sich heraus.

b) Bei der spezifischen inneren Energie (also nicht molar, sondern massebezogen) spielt die Masse der Teilchen dagegen eine Rolle:

$$u = \frac{3}{2} R T = \frac{3}{2} \frac{R_{\text{m}}}{M} T = \frac{u_{\text{m}}}{M} \quad (4)$$

Zahlenwerte siehe Ergebnistabelle unten.

c) ideales Gas \Rightarrow keine potentielle Energie
 einatomig \Rightarrow keine Rotationsenergie
 \Rightarrow alle Energie ist kinetische Energie:

$$u = e_{\text{kin}} = \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \bar{c} = \sqrt{2u} = \sqrt{\frac{3R_{\text{m}}T}{M}} \quad (6)$$

Zahlenwerte siehe Ergebnistabelle unten.

Ergebnisse:

	u_{m} [kJ/mol]		u [kJ/kg]		\bar{c} [m/s]	
	He	Ar	He	Ar	He	Ar
$T_1 = 300 \text{ K}$	3.7415	3.7415	935.375	93.5375	1367.753	432.5224
$T_2 = 400 \text{ K}$	4.9887	4.9887	1247.175	124.7175	1579.3485	499.4338

Aufgabe 2.2 – Lösung

gegeben: $p_1 = 8 \text{ bar}$, $T_1 = 600 \text{ K}$
 $p_2 = 2.83 \text{ bar}$
 $T_3 = 300 \text{ K}$
 $R = 0.28 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
 ideales Gas $\implies pv = RT$

- a) Wir verwenden die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases (“ideales Gasgesetz”), um v_1 zu berechnen:

$$p_1 v_1 = RT_1 \implies \boxed{v_1} = \frac{RT_1}{p_1} = \boxed{0.21 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \quad (7)$$

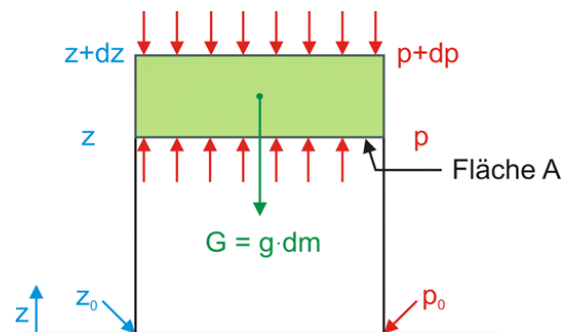
$$\boxed{v_3} = v_2 = 2 \cdot v_1 = \boxed{0.42 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \quad (8)$$

- b) Da uns p_2 und v_2 bekannt sind, können wir das ideale Gasgesetz verwenden, um T_2 zu berechnen:

$$p_2 v_2 = RT_2 \implies \boxed{T_2} = \frac{p_2 v_2}{R} = \boxed{424.5 \text{ K}} \quad (9)$$

Aufgabe 2.3 – Lösung

gegeben: $T_0 = 15^\circ \text{C} = 288.15 \text{ K}$
 Luft als ideales Gas: $R = 0.287 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 gesucht: $p(z = 2000 \text{ m}) =: \hat{p}$



Als Lösungsansatz nutzen wir das Kräftegleichgewicht am differentiellen Volumenelement $\sum F_i = 0$ (siehe auch Grafik), sowie die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$\text{Kräfteggw: } 0 = pA - (p + dp)A - \rho A g dz \quad (10)$$

$$\iff dp = -\rho g dz \quad (11)$$

$$\text{therm. ZG: } pv = RT \iff \rho = \frac{p}{RT} \quad (12)$$

$$(11) \ \& \ (12): \implies dp = -p \frac{g}{RT} \quad (13)$$

$$\iff \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{RT} dz \quad (14)$$

$$\implies \boxed{\int_{p_0}^{\hat{p}} \frac{1}{p} dp = -\frac{g}{R} \int_{z_0}^{\hat{z}} \frac{1}{T(z)} dz} \quad (15)$$

a) gegeben: $T(z) \equiv T = \text{const}$

$$\text{Gleichung (15)} \implies \ln\left(\frac{\hat{p}}{p_0}\right) = -\frac{g}{RT} \implies p(z) = p_0 \exp\left\{-\frac{g}{RT}z\right\} \quad (16)$$

$$\implies \boxed{\hat{p}} = p(2000 \text{ m}) = \boxed{0.7782 \text{ bar}} \quad (17)$$

b) gegeben: $T(z) = a + bz$, mit $a = 288.15 \text{ K}$, $b = -6.5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$.

Wir verwenden Gleichung (15), und setzen $T(z) = a + bz$ ein.

Um die Gleichung nach $p(z)$ zu lösen, verwenden wir das Substitutionsverfahren, mit $x = a + b \cdot z \implies \frac{dx}{dz} = b \iff dz = \frac{dx}{b}$:

$$\implies \ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R} \cdot \frac{1}{b} \cdot \int_{x(z_0)}^{x(z)} \frac{1}{x} dx = -\frac{g}{R \cdot b} \cdot \ln \frac{a + b \cdot z}{a + b \cdot z_0} \quad \text{mit } z_0 = 0 \quad (18)$$

$$\iff \ln \frac{p(z)}{p_0} = \ln \left[\left(\frac{a + b \cdot z}{a} \right)^{-\frac{g}{R \cdot b}} \right] \quad \boxed{u \cdot \ln(v) = \ln(v^u)} \quad (19)$$

$$\implies \boxed{p(z) = p_0 \left(1 + \frac{b \cdot z}{a} \right)^{-\frac{g}{R \cdot b}}} \quad (20)$$

$$\implies p(2000 \text{ m}) = 986.6 \text{ hPa} \cdot \left(1 + \frac{(-6.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}) \cdot 2000 \text{ m}}{288.15 \text{ K}} \right)^{\frac{-9.81 \text{ m/s}^2}{0.287 \cdot 10^3 \text{ J/(kg K)} \cdot (-6.5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m})}} \quad (21)$$

$$\implies \boxed{\hat{p}} = 773.94 \text{ hPa} = \boxed{0.77394 \text{ bar}} \quad (22)$$

Aufgabe 2.4 – Lösung

gegeben: $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$

$\Delta T = 10 \text{ K}$

$p_1 = 1 \text{ bar}$

$V = \text{const} \implies dv = 0$

$\alpha, \gamma \rightarrow \text{Tabelle}$

gesucht: $\Delta p = p_2 - p_1$

Partielle Ableitungen der thermischen Zustandsgleichung

- isobarer (Volumen-)Ausdehnungskoeffizient: $\alpha := \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$
- isochorer Spannungskoeffizient: $\beta := \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$
- isothermer Kompressibilitätskoeffizient: $\gamma := -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$

Lösung:

$$\alpha := \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \iff \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = v\alpha \quad (23)$$

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \iff \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = p\beta \quad (24)$$

$$\gamma = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \iff \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -v\gamma \quad (25)$$

Totales Differential des spezifischen Volumens:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp = dv = 0 \quad (26)$$

$$\stackrel{(23),(25)}{\iff} v \cdot \alpha \cdot dT - v \cdot \gamma \cdot dp = 0 \quad (27)$$

$$\iff dp = \frac{\alpha}{\gamma} dT \quad (28)$$

$$\implies \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha}{\gamma} dT = \frac{\alpha}{\gamma} \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (29)$$

$$\iff \Delta p = \frac{\alpha}{\gamma} \Delta T \quad (30)$$

a)

$$\boxed{\Delta p_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\alpha_{\text{H}_2\text{O}}}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} \Delta T = \frac{18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}{45.4 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}} \cdot 10 \text{ K} = \boxed{39.6 \text{ bar}} \quad (31)$$

b)

$$\boxed{\Delta p_{\text{Hg}}} = \frac{\alpha_{\text{Hg}}}{\gamma_{\text{Hg}}} = \frac{18.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}{3.86 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}} \cdot 10 \text{ K} = \boxed{468.9 \text{ bar}} \quad (32)$$

c) gegeben: Luft als id. Gas betrachten $\implies \boxed{p \cdot v = R \cdot T}$

Lösung: hier gibt es 3 Wege, zum Ziel zu kommen:

i) aus vollst. Differential des Volumens (siehe oben):

- berechne α, β, γ für ideale Gase:

$$\alpha := \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \frac{R}{p} = \frac{R}{vp} = \frac{1}{T} \quad (33)$$

$$\beta := \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{p} \frac{R}{v} = \frac{1}{T} \quad (34)$$

$$\gamma := -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{v} \left(-\frac{RT}{p^2} \right) = \frac{1}{p} \quad (35)$$

- Einsetzen in Gleichung (30):

$$\Delta p = \frac{\alpha}{\gamma} \Delta T \stackrel{(30)}{=} \frac{R}{v} \Delta T \quad \text{mit} \quad \frac{R}{v} = \frac{p_1}{T_1} = \frac{1 \text{ bar}}{293.15 \text{ K}} \quad (36)$$

$$\implies \boxed{\Delta p_{\text{Luft}} = 0.0341 \text{ bar}} \quad (37)$$

ii) aus vollstd. Differential des Drucks:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \underbrace{dv}_{=0} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT, \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v} = \frac{p}{T} \quad (38)$$

$$\implies dp = \frac{p}{T} dT \iff \frac{1}{p} dp = \frac{1}{T} dT \quad (39)$$

$$\implies \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT \quad (40)$$

$$\iff \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \iff \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (41)$$

$$\implies \text{Rest siehe Weg (i)} \implies \boxed{\Delta p_{\text{Luft}} = 0.0341 \text{ bar}} \quad (42)$$

iii) aus direktem Vgl. der thermischen Zustandsgleichung in beiden Zuständen:

$$p_1 v_1 = RT_1 \iff v_1 = \frac{RT_1}{p_1} \quad (43)$$

$$p_2 v_2 = RT_2 \iff v_2 = \frac{RT_2}{p_2} \quad \text{mit} \quad v_1 = v_2 \quad (44)$$

$$\implies \frac{RT_1}{p_1} = \frac{RT_2}{p_2} \iff p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 \quad (45)$$

$$\implies \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - p_1 = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) p_1 = (T_2 - T_1) \frac{p_1}{T_1} \quad (46)$$

$$\implies \boxed{\Delta p = 0.0341 \text{ bar}} \quad (47)$$