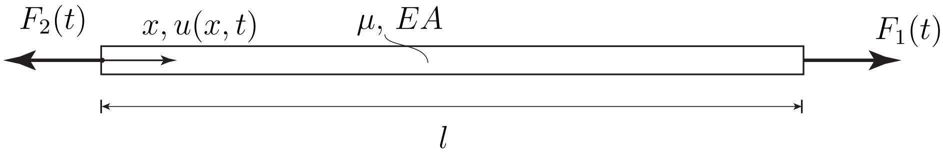
Version 1

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{1}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{2}$$

Randbedingung 1:

$$F_2(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{3}$$

Randbedingung 2:

$$F_1(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{4}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{5}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{6}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{7}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{8}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{9}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1 \frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{10}$$

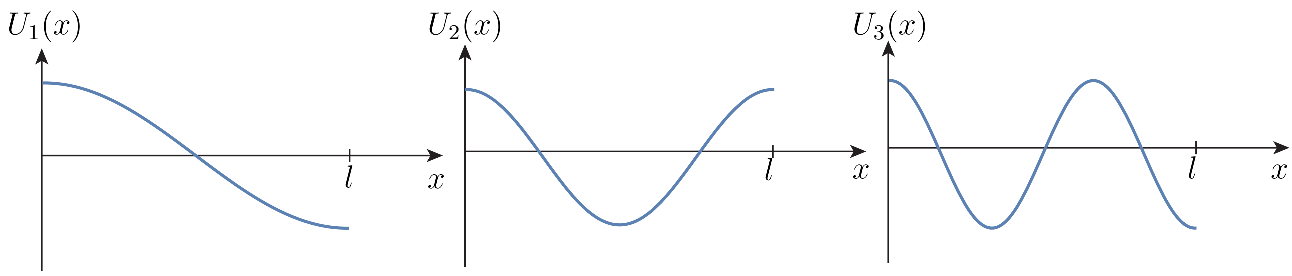
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{12}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{13}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{14}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Randbedingungen 1:

$$\hat{F} \cos \Omega t = EAu'(0,t) \tag{17}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{18}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = D_1 \frac{\Omega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \qquad 1 \tag{19}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F} \cos \Omega t = EAu'(l,t) \tag{20}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{21}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA \left(D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right) \right) \tag{22}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA \left(\frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right) \right) \qquad 1 \tag{23}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}\left(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)\right)}{EA\,\Omega \sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right)} \qquad 1 \tag{24}$$

$$U_\mathrm{p}(x) = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{\hat{F} c\left(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)\right)}{EA\,\Omega \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \tag{25}$$

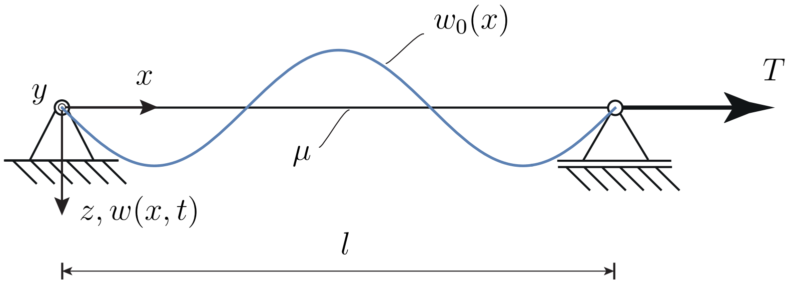
$$= \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \left[\sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \right] \qquad 1 \tag{26}$$

$$u_\mathrm{p}(x) = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \left[\sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \right] \cos \Omega t \qquad 1 \tag{27}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w} \sin\left(3\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct,\ x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad \text{1} \tag{28}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad \text{1} \tag{29}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad \text{1} \tag{30}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad \text{1} \tag{31}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 3. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{32}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \tag{33}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{34}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(l) = 0 \tag{35}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad 1 \tag{36}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{3\pi c}{l} = \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad 1 \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad W_3(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \tag{39}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{40}$$
$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{41}$$
$$\tag{42}$$

d) $x = 0$

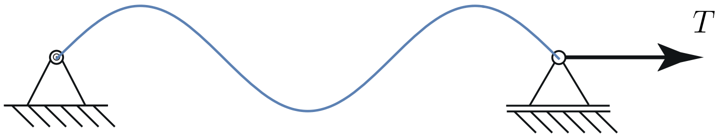
$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{43}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{44}$$

e) $x = l$

$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{45}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(3\pi - \frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(3\pi + \frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \tag{46}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{47}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{48}$$

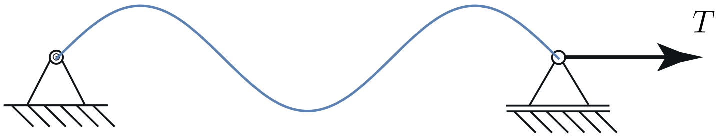
f) Auslenkungen:

t_1



t_2

t_3

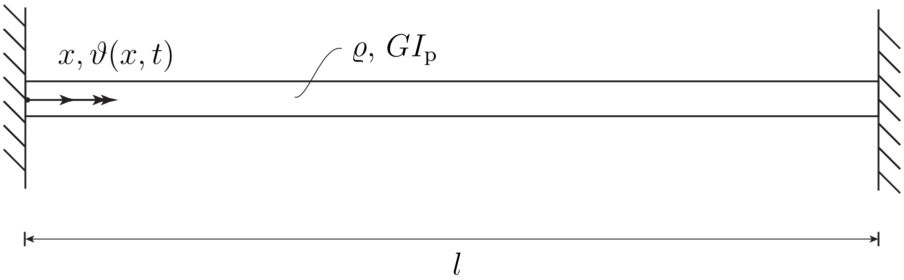


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

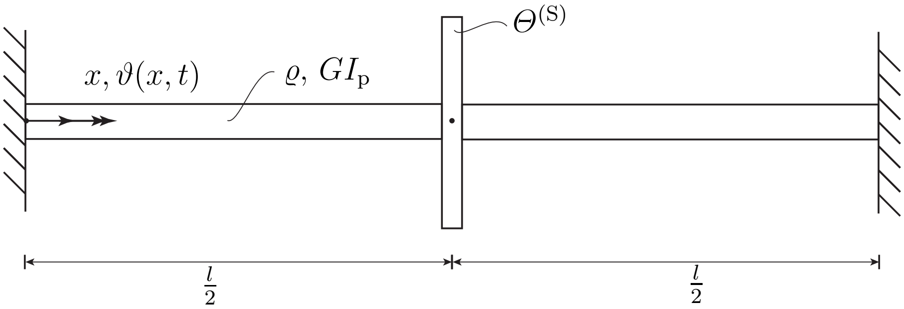
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{49}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \qquad 1 \tag{50}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{51}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{52}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \qquad 1 \tag{53}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{54}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \qquad 1 \tag{55}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \qquad 1 \tag{56}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\ldots \tag{57}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\ldots \qquad 1 \tag{58}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad 1 \tag{59}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{60}$$

$$a = -\frac{1}{l} \qquad 1 \tag{61}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{62}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{63}$$

$$GI_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{2}{l}x+1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right)\mathrm{d}x \tag{64}$$

$$= GI_\mathrm{p}\left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{65}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{66}$$

$$\varrho I_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2+x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p}\int_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right)\mathrm{d}x \tag{67}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p}\left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{68}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \quad 2 \tag{69}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{70}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{71}$$

e)

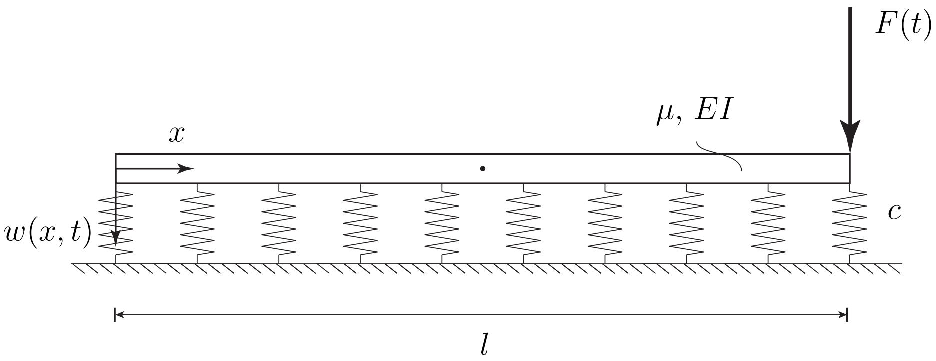
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{72}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{73}$$

$$\approx 1,007 \tag{74}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = l$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{1} \tag{75}$$

c)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EIw''^2(x,t) + cw^2(x,t) \Big)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{2} \tag{76}$$

d)

$$\delta W = F\delta w(l,t) \quad \textbf{1} \tag{77}$$

e)

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta W \, \mathrm{d}t = 0 \tag{78}$$

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad 1 \tag{79}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad 3 \tag{80}$$

Partielle Integrationen:

$$\int\limits_0^l \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \ \ 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{81}$$

$$= - \int\limits_0^l \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad 1 \tag{82}$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{83}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int\limits_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \, \mathrm{d}t \tag{84}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad 1 \tag{85}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{86}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{87}$$

$\delta w(0,t)$:

$$EI w'''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{88}$$

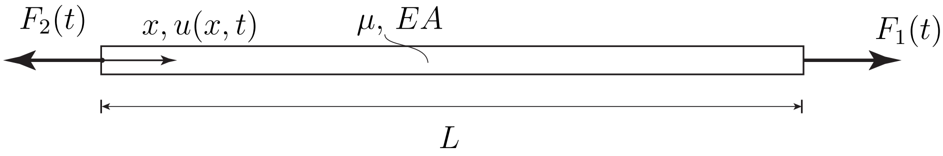
$\delta w(l,t)$:

$$EI w'''(l,t) + F = 0 \qquad 1 \tag{89}$$

Version 2

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge L, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, L, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{90}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{91}$$

Randbedingung 1:

$$F_2(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{92}$$

Randbedingung 2:

$$F_1(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{93}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{94}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{95}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{96}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{97}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{98}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1 \frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{99}$$

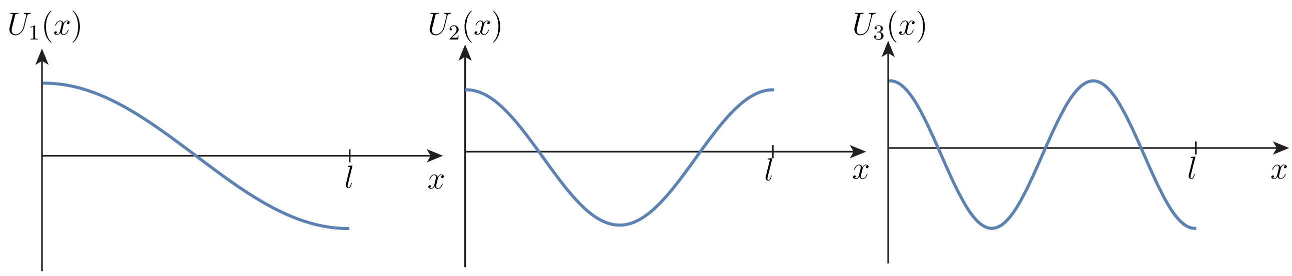
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{100}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{101}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{102}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{103}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{104}$$

$$\tag{105}$$

Randbedingungen 1:

$$\hat{F}\cos \Omega t = EAu'(0,t) \tag{106}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{107}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = D_1 \frac{\Omega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega} \qquad \mathbf{1} \tag{108}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F}\cos \Omega t = EAu'(l,t) \tag{109}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{110}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1 \frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \tag{111}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \qquad \mathbf{1} \tag{112}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right)} \qquad \mathbf{1} \tag{113}$$

$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{\hat{F}c(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{114}$$

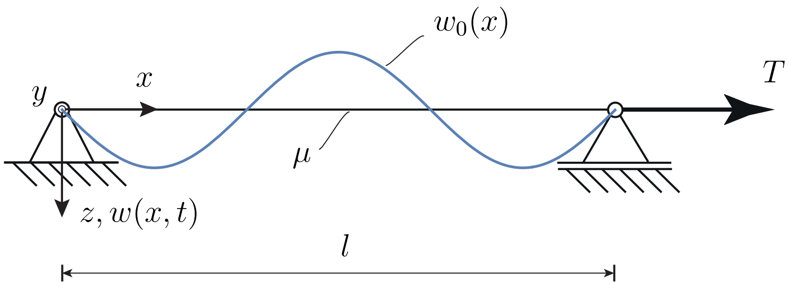
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right] \qquad \mathbf{1} \tag{115}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]\cos\Omega t \qquad \mathbf{1} \tag{116}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w}\sin\left(3\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct,\ x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{117}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{118}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{119}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{120}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 3. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{121}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \tag{122}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \qquad 1 \tag{123}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(l) = 0 \tag{124}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \qquad 1 \tag{125}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{3\pi c}{l} = \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad 1 \tag{126}$$
$$\tag{127}$$

$$\Rightarrow \quad W_3(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \tag{128}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{129}$$
$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{130}$$
$$\tag{131}$$

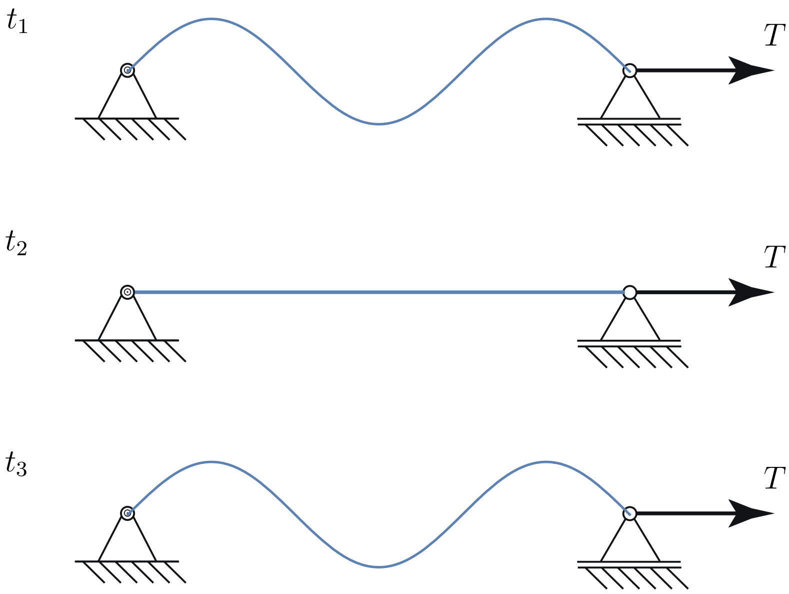
d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{132}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0\,\checkmark \qquad 1 \tag{133}$$

e) $x = l$

$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{134}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(3\pi - \frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(3\pi + \frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \tag{135}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{136}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0\,\checkmark \qquad 1 \tag{137}$$

f) Auslenkungen:

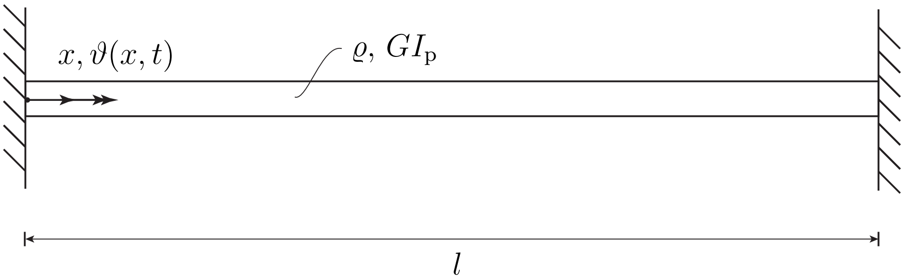


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

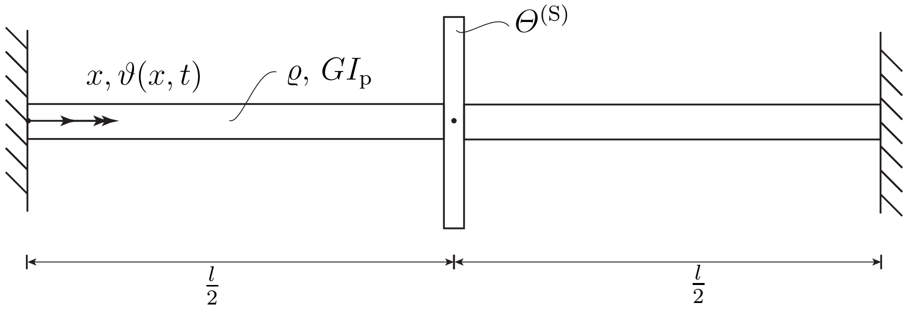
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{138}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{139}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{140}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{141}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{142}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{143}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{144}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{145}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{146}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{147}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{148}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{149}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{150}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{151}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{152}$$

$$GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{2}{l}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{153}$$

$$= GI_\mathrm{p} \left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{154}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{155}$$

$$\varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{156}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p} \left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{157}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p} l^3 \quad 2 \tag{158}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})} \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})} l^2 \quad 1 \tag{159}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p} l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})} l^2}} \quad 1 \tag{160}$$

e)

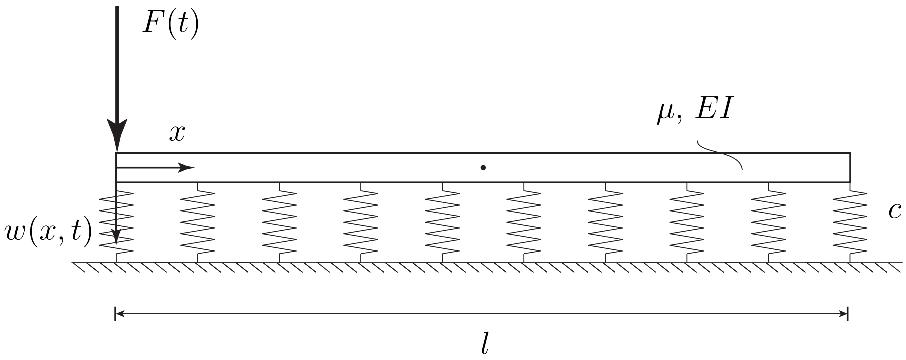
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}} \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{161}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{162}$$

$$\approx 1{,}007 \tag{163}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = 0$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. 1

b)

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad 1 \tag{164}$$

c)

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \Big(EIw''^2(x,t) + cw^2(x,t)\Big)\,\mathrm{d}x \quad 2 \tag{165}$$

d)

$$\delta W = F\delta w(0,t) \quad 1 \tag{166}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \, \mathrm{d}t = 0 \tag{167}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad 1 \tag{168}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad 3 \tag{169}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \quad 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{170}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad 1 \tag{171}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{172}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \, \mathrm{d}t \tag{173}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w''''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad 1 \tag{174}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{175}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{176}$$

$\delta w(0,t)$:

$$-EIw'''(0,t) + F(t) = 0 \quad \text{1} \tag{177}$$

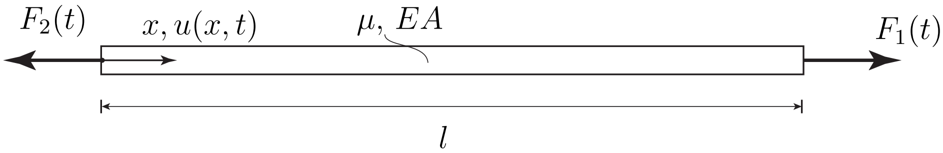
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) = 0 \quad \text{1} \tag{178}$$

Version 3

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos \mathit{\Omega} t$, wobei $\hat{F}$ und $\mathit{\Omega}$ gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos \mathit{\Omega} t$ (mit $\hat{F}$ und $\mathit{\Omega}$ gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\mathit{\Omega}}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\mathit{\Omega}}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos \mathit{\Omega} t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{179}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{180}$$

Randbedingung 1:

$$F_2(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{181}$$

Randbedingung 2:

$$F_1(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{182}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{183}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{184}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{185}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{186}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{187}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1\frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{188}$$

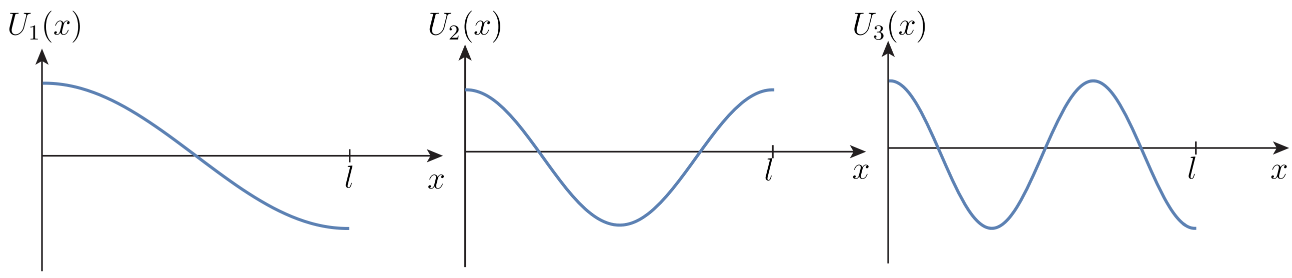
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\ldots \tag{189}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\ldots \quad 1 \tag{190}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{191}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{192}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{193}$$

$$\tag{194}$$

Randbedingungen 1:

$$\hat{F}\cos \varOmega t = EAu'(0,t) \tag{195}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{196}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = D_1\frac{\varOmega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega} \quad 1 \tag{197}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F}\cos \varOmega t = EAu'(l,t) \tag{198}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{199}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1\frac{\varOmega}{c}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right) - D_2\frac{\varOmega}{c}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)\right) \tag{200}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\frac{\varOmega}{c}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right) - D_2\frac{\varOmega}{c}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)\right) \quad 1 \tag{201}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right))}{EA\,\varOmega\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)} \quad 1 \tag{202}$$

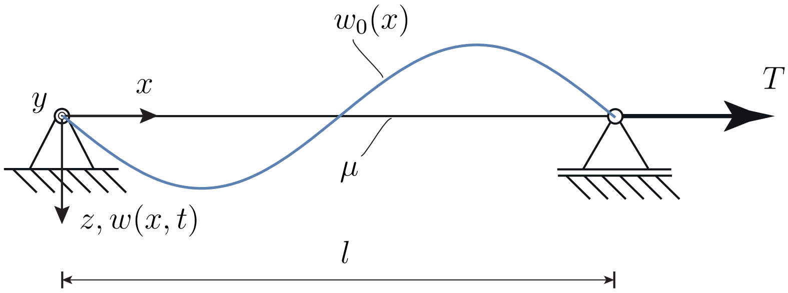
$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{\hat{F}c(1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right))}{EA\,\varOmega\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) \tag{203}$$
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)\right] \quad 1 \tag{204}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)\right]\cos\varOmega t \quad 1 \tag{205}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w} \sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct$, $x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{206}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{207}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{208}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{209}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 2. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{210}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \tag{211}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{212}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(l) = 0 \tag{213}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad 1 \tag{214}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{l} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad 1 \tag{215}$$

$$\Rightarrow \quad W_2(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \tag{216}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{217}$$
$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{218}$$

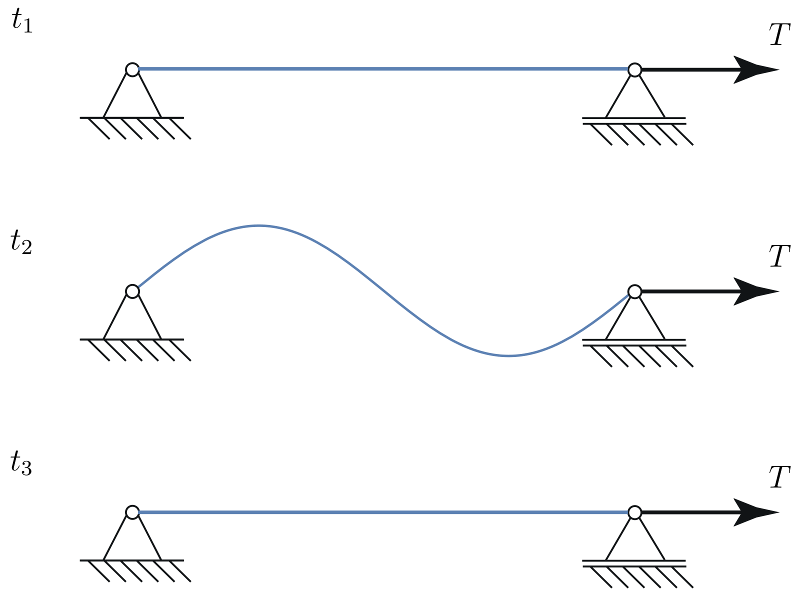
d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{219}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{220}$$

e) $x = l$

$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{221}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(2\pi - \frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(2\pi + \frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \tag{222}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{223}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{224}$$

f) Auslenkungen:

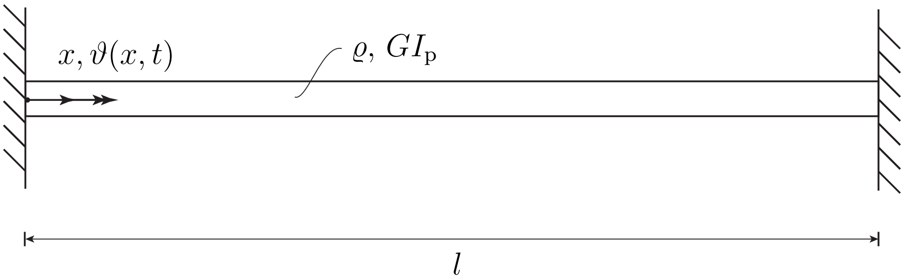


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

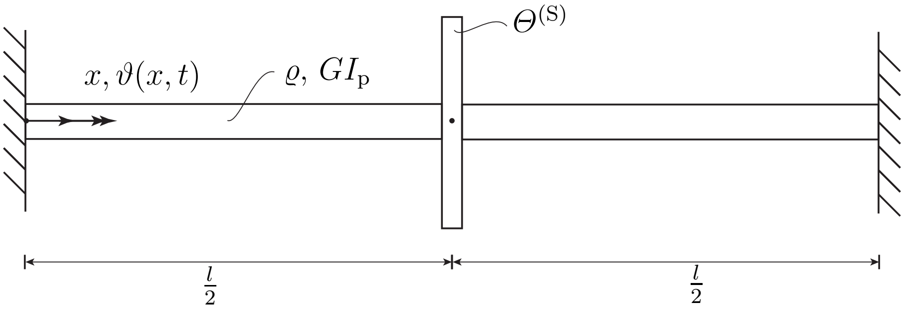
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})} \tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{225}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{226}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{227}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{228}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{229}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{230}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{231}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{232}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots \tag{233}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad 1 \tag{234}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{235}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{236}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{237}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{238}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{239}$$

$$GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{2}{l}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{240}$$

$$= GI_\mathrm{p} \left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{241}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \qquad 2 \tag{242}$$

$$\varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{243}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p} \left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{244}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \qquad 2 \tag{245}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{246}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \qquad 1 \tag{247}$$

e)

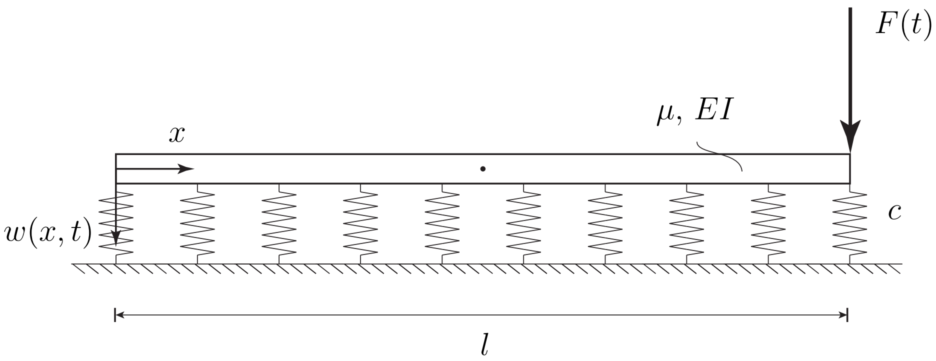
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \qquad 1 \tag{248}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \qquad 1 \tag{249}$$

$$\approx 1{,}007 \tag{250}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = l$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \mathbf{1} \tag{251}$$

c)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EIw''^2(x,t) + cw^2(x,t) \Big)\,\mathrm{d}x \quad \mathbf{2} \tag{252}$$

d)

$$\delta W = F \delta w(l,t) \quad \mathbf{1} \tag{253}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{254}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad 1 \tag{255}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad 3 \tag{256}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \quad 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{257}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad 1 \tag{258}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{259}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{260}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad 1 \tag{261}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{262}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{263}$$

$\delta w(0,t)$:

$$EIw'''(0,t) = 0 \quad 1 \tag{264}$$

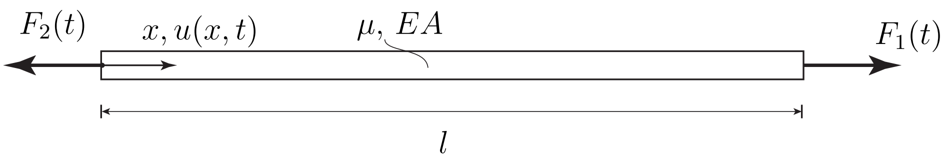
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) + F = 0 \quad 1 \tag{265}$$

Version 4

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)}\cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{266}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{267}$$

Randbedingung 1:

$$F_2(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{268}$$

Randbedingung 2:

$$F_1(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{269}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{270}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{271}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{272}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{273}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{274}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1 \frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{275}$$

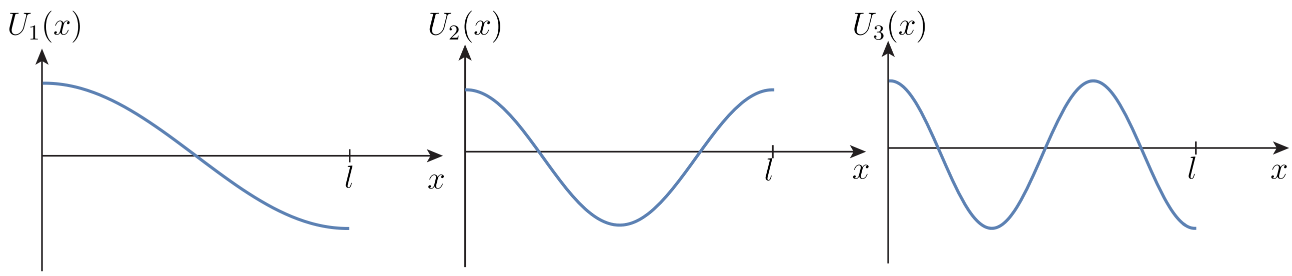
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{276}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{277}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{278}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{279}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{280}$$

(281)

Randbedingungen 1:

$$\hat{F}\cos\Omega t = EAu'(0,t) \tag{282}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{283}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = D_1\frac{\Omega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega} \quad 1 \tag{284}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F}\cos\Omega t = EAu'(l,t) \tag{285}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{286}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \tag{287}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \quad 1 \tag{288}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right)} \quad 1 \tag{289}$$

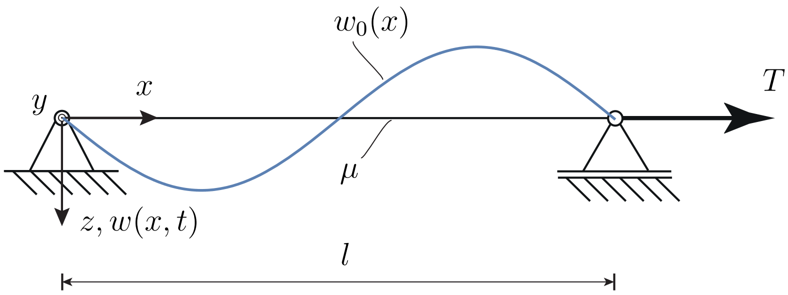
$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{\hat{F}c(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{290}$$
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right] \quad 1 \tag{291}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]\cos\Omega t \quad 1 \tag{292}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w}\sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct$, $x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{293}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{294}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{295}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{296}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 2. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{297}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \tag{298}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{299}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(l) = 0 \tag{300}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad 1 \tag{301}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{l} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad 1 \tag{302}$$

$$\Rightarrow \quad W_2(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \tag{303}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{304}$$
$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{305}$$

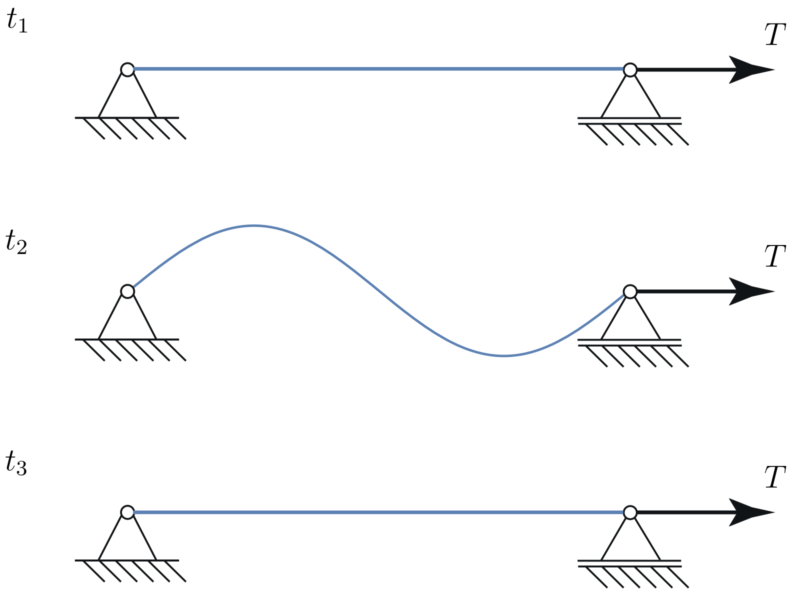
d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{306}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{307}$$

e) $x = l$

$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{308}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(2\pi - \frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(2\pi + \frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \tag{309}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{310}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{311}$$

f) Auslenkungen:

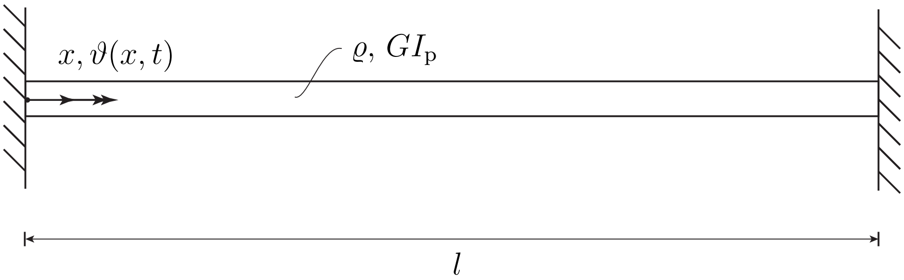


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

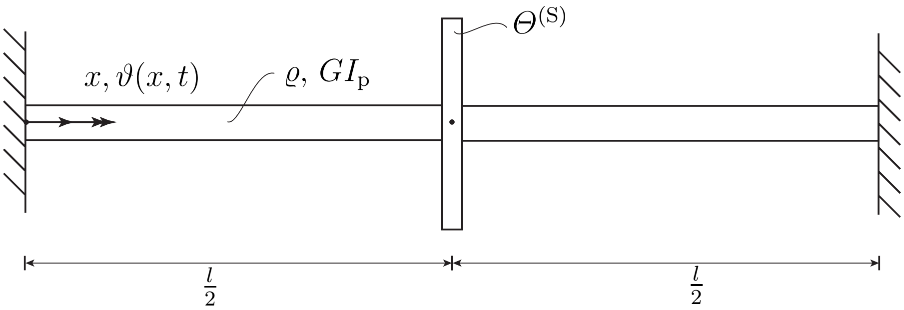
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p} \tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{312}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{313}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{314}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{315}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{316}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{317}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{318}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{319}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{320}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{321}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{322}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{323}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{324}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{325}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{326}$$

$$GI_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{2}{l}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{327}$$

$$= GI_\mathrm{p} \left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{328}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{329}$$

$$\varrho I_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{330}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p} \left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{331}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \quad 2 \tag{332}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{333}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{334}$$

e)

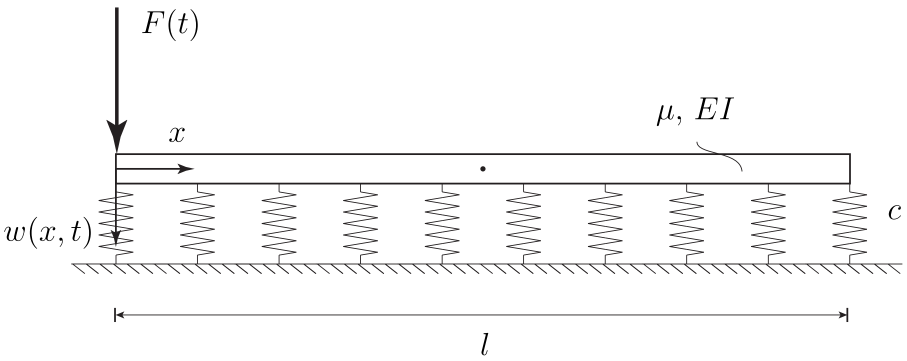
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{335}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{336}$$

$$\approx 1,007 \tag{337}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = 0$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\, \mathrm{d}x \quad \mathbf{1} \tag{338}$$

c)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big)\, \mathrm{d}x \quad \mathbf{2} \tag{339}$$

d)

$$\delta W = F \delta w(0,t) \quad \mathbf{1} \tag{340}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{341}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \quad 1 \tag{342}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \quad 3 \tag{343}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \quad 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{344}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \quad 1 \tag{345}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= -EI \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{346}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{347}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \quad 1 \tag{348}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \quad 1 \tag{349}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \quad 1 \tag{350}$$

$\delta w(0,t)$:

$$-EIw'''(0,t) + F(t) = 0 \quad 1 \tag{351}$$

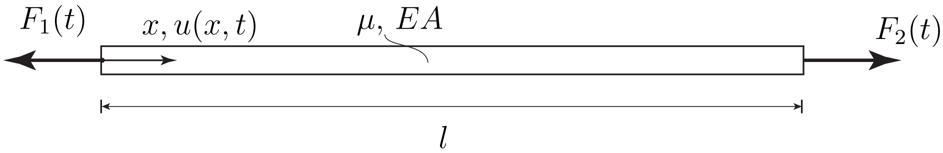
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) = 0 \quad 1 \tag{352}$$

Version 5

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)}\cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{353}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{354}$$

Randbedingung 1:

$$F_1(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{355}$$

Randbedingung 2:

$$F_2(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{356}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{357}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{358}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{359}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{360}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{361}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1 \frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{362}$$

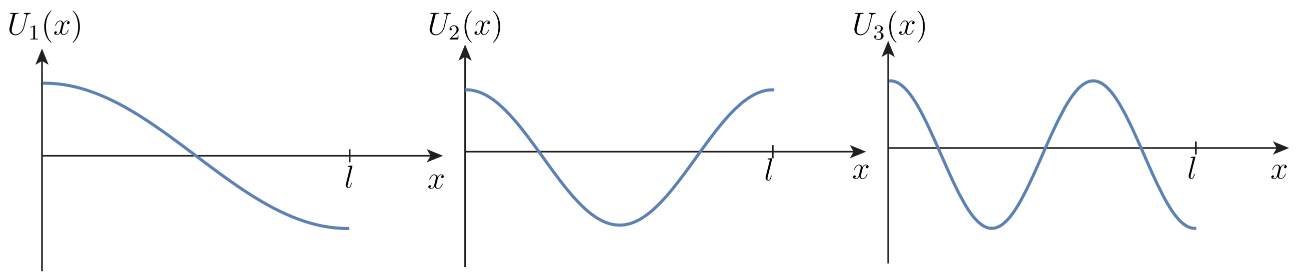
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{363}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{364}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{365}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{366}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{367}$$

(368)

Randbedingungen 1:

$$\hat{F} \cos \varOmega t = EAu'(0,t) \tag{369}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{370}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = D_1 \frac{\varOmega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega} \qquad 1 \tag{371}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F} \cos \varOmega t = EAu'(l,t) \tag{372}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{373}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1 \frac{\varOmega}{c} \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right) - D_2 \frac{\varOmega}{c} \sin\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)\right) \tag{374}$$
$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\varOmega} \frac{\varOmega}{c} \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right) - D_2 \frac{\varOmega}{c} \sin\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)\right) \qquad 1 \tag{375}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1 - \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right))}{EA\,\varOmega \sin\left(\frac{\varOmega}{c} x\right)} \qquad 1 \tag{376}$$

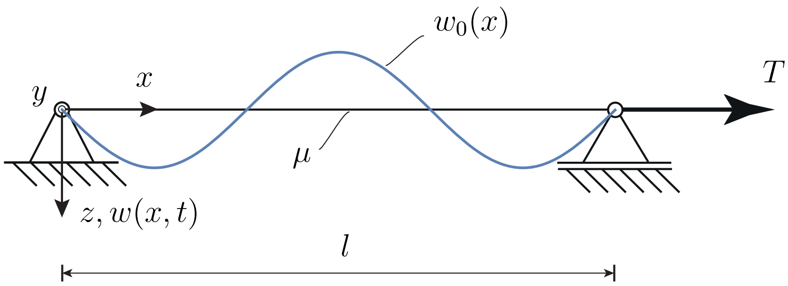
$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega} \sin\left(\frac{\varOmega}{c} x\right) - \frac{\hat{F}c(1 - \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right))}{EA\,\varOmega \sin\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\varOmega}{c} x\right) \tag{377}$$
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\varOmega}{c} x\right)\right] \qquad 1 \tag{378}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\varOmega}{c} x\right)\right] \cos \varOmega t \qquad 1 \tag{379}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w}\sin\left(3\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct$, $x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{380}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{381}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{382}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{383}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 3. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{384}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(0) = 0 \tag{385}$$

$$\Rightarrow \qquad C_1 = 0 \qquad 1 \tag{386}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(l) = 0 \tag{387}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \qquad 1 \tag{388}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_3 = \frac{3\pi c}{l} = \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad 1 \tag{389}$$

$$\tag{390}$$

$$\Rightarrow \qquad W_3(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \tag{391}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{392}$$

$$\Rightarrow \qquad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{393}$$

$$\tag{394}$$

d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{395}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \qquad 1 \tag{396}$$

e) $x = l$

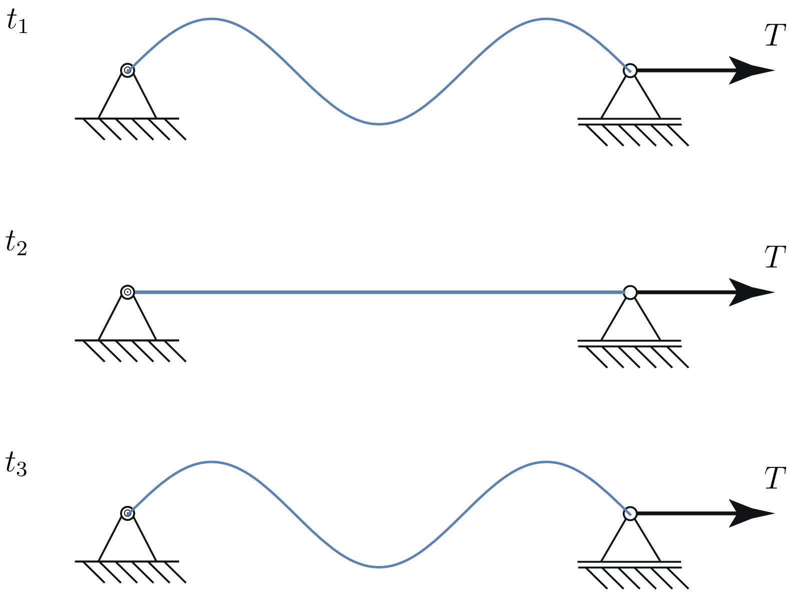
$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{397}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(3\pi - \frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(3\pi + \frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \tag{398}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{399}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \qquad 1 \tag{400}$$

f) Auslenkungen:

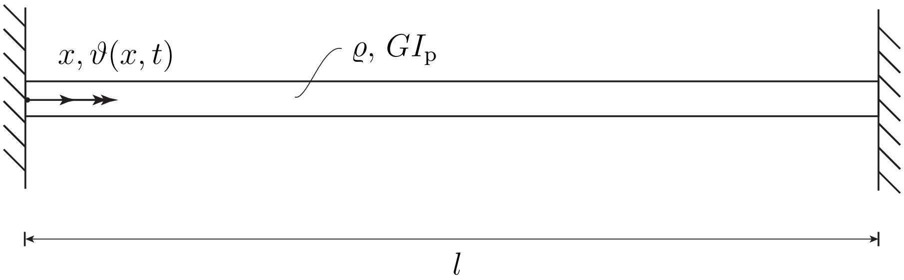


Randbedingungen passen bei allen **1**

für die Skizzen **3**

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

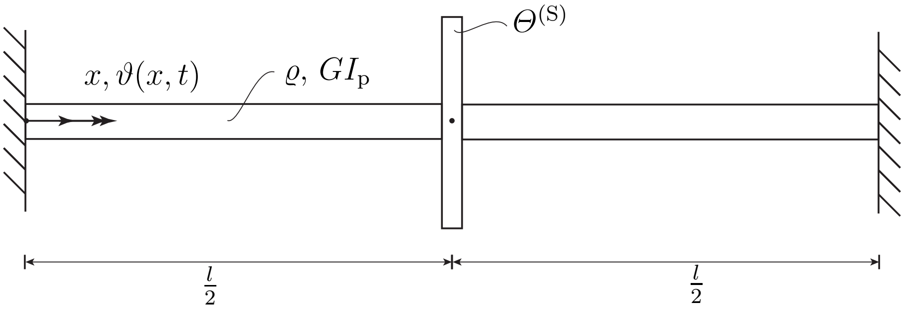
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{401}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{402}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{403}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{404}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{405}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{406}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{407}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{408}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{409}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{410}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{411}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{412}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{413}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{414}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{415}$$

$$GI_\mathrm{p}\int\limits_0^l \left(-\frac{2}{l}x+1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p}\int\limits_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{416}$$

$$= GI_\mathrm{p}\left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{417}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{418}$$

$$\varrho I_\mathrm{p}\int\limits_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2+x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p}\int\limits_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{419}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p}\left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{420}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \quad 2 \tag{421}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{422}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{423}$$

e)

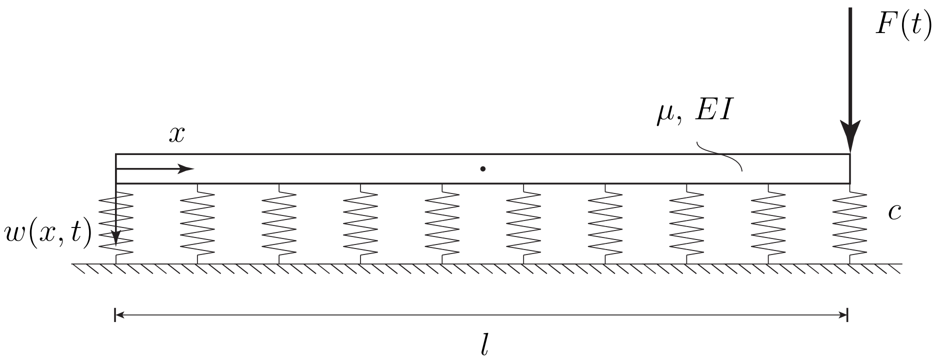
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{424}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{425}$$

$$\approx 1{,}007 \tag{426}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = l$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. 1

b)

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad 1 \tag{427}$$

c)

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big(EIw''^2(x,t) + cw^2(x,t)\Big)\,\mathrm{d}x \quad 2 \tag{428}$$

d)

$$\delta W = F\delta w(l,t) \quad 1 \tag{429}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{430}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \quad 1 \tag{431}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \quad 3 \tag{432}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \;\; 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{433}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \quad 1 \tag{434}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{435}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{436}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \quad 1 \tag{437}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \quad 1 \tag{438}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \quad 1 \tag{439}$$

$\delta w(0,t)$:

$$EIw'''(0,t) = 0 \quad \mathbf{1} \tag{440}$$

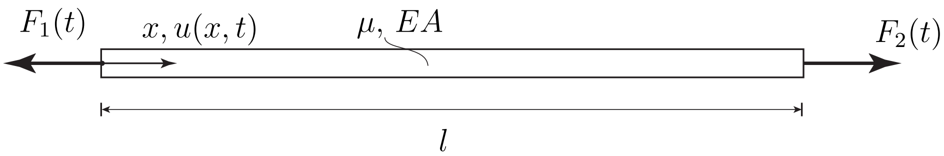
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) + F = 0 \quad \mathbf{1} \tag{441}$$

Version 6

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \qquad 1 \tag{442}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \qquad 1 \tag{443}$$

Randbedingung 1:

$$F_1(t) = EAu'(0,t) \qquad 1 \tag{444}$$

Randbedingung 2:

$$F_2(t) = EAu'(l,t) \qquad 1 \tag{445}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{446}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{447}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{448}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{449}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{450}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1\frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{451}$$

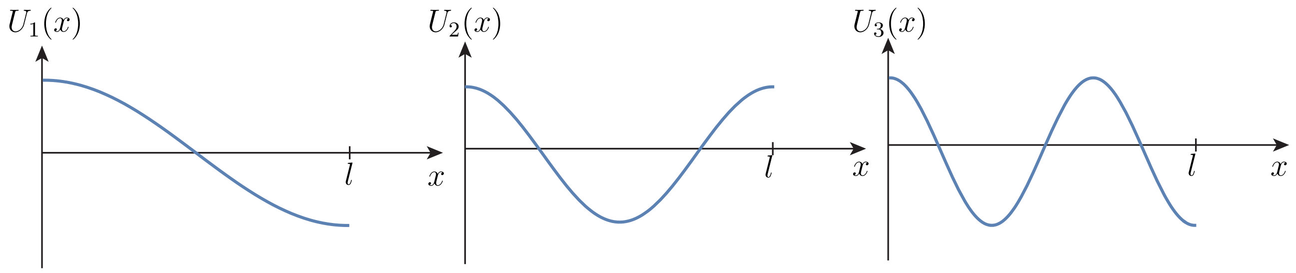
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\ldots \tag{452}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\ldots \quad 1 \tag{453}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{454}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{455}$$

$$U'_\mathrm{p}(x) = D_1\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{456}$$

$$\tag{457}$$

Randbedingungen 1:

$$\hat{F}\cos\varOmega t = EAu'(0,t) \tag{458}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{459}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = D_1\frac{\varOmega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega} \qquad 1 \tag{460}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F}\cos\varOmega t = EAu'(l,t) \tag{461}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{462}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1\frac{\varOmega}{c}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right) - D_2\frac{\varOmega}{c}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)\right) \tag{463}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\frac{\varOmega}{c}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right) - D_2\frac{\varOmega}{c}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)\right) \qquad 1 \tag{464}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right))}{EA\,\varOmega\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)} \qquad 1 \tag{465}$$

$$U_\mathrm{p}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{\hat{F}c(1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right))}{EA\,\varOmega\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) \tag{466}$$

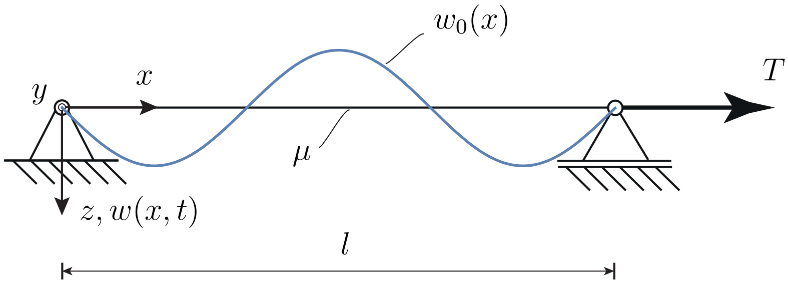
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)\right] \qquad 1 \tag{467}$$

$$u_\mathrm{p}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\varOmega}\left[\sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\varOmega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)\right]\cos\varOmega t \qquad 1 \tag{468}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w} \sin\left(3\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct$, $x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{469}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{470}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{471}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{472}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 3. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{473}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(0) = 0 \tag{474}$$

$$\Rightarrow \qquad C_1 = 0 \qquad 1 \tag{475}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(l) = 0 \tag{476}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \qquad 1 \tag{477}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_3 = \frac{3\pi c}{l} = \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad 1 \tag{478}$$

$$\tag{479}$$

$$\Rightarrow \qquad W_3(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \tag{480}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{481}$$

$$\Rightarrow \qquad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{482}$$

$$\tag{483}$$

d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{484}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \qquad 1 \tag{485}$$

e) $x = l$

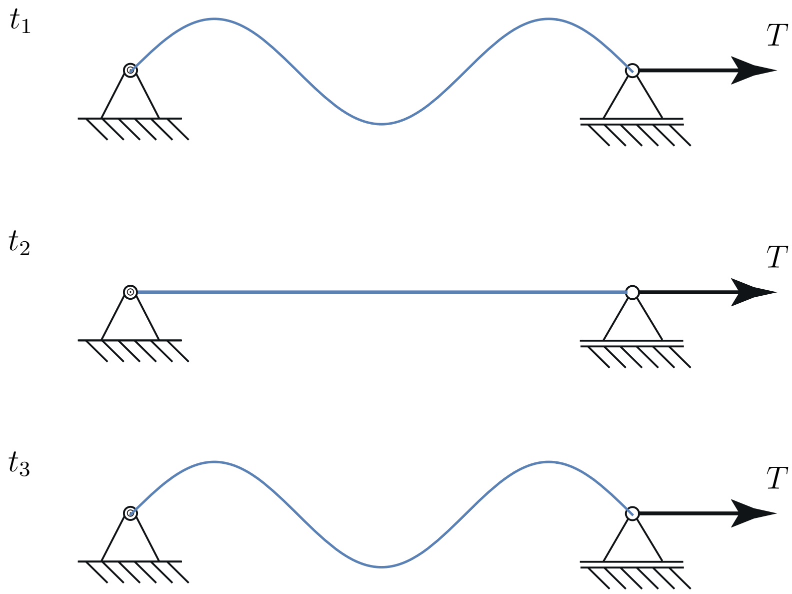
$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{3}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \qquad 1 \tag{486}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(3\pi - \frac{3}{l}\pi ct\right) + \sin\left(3\pi + \frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \tag{487}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] \qquad 1 \tag{488}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{3}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \qquad 1 \tag{489}$$

f) Auslenkungen:

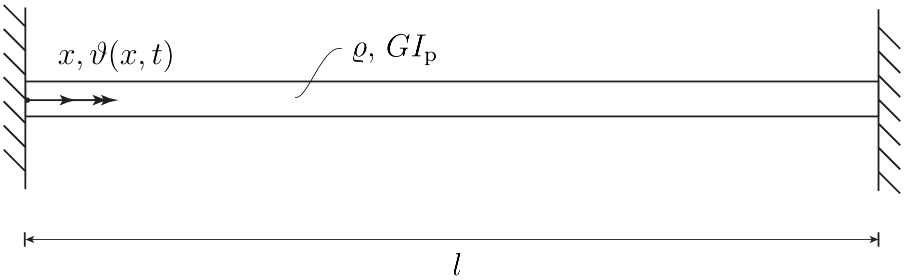


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

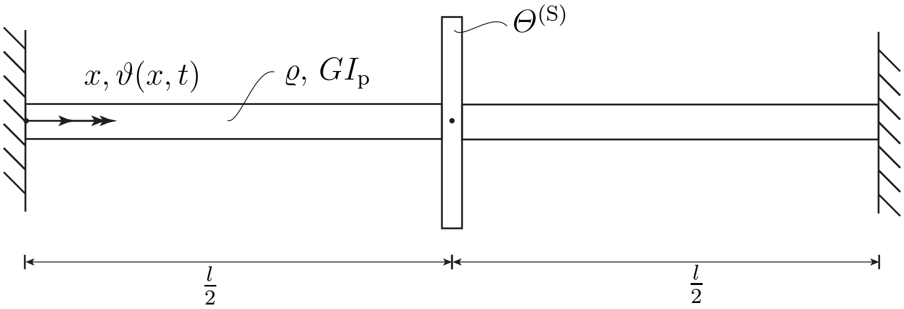
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{490}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{491}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{492}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{493}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{494}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{495}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{496}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{497}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\ldots \tag{498}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\ldots \quad 1 \tag{499}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{500}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{501}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{502}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{503}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{504}$$

$$GI_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{2}{l}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{505}$$

$$= GI_\mathrm{p} \left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{506}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{507}$$

$$\varrho I_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p} \int\limits_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{508}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p} \left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{509}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \quad 2 \tag{510}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})} \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{511}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{512}$$

e)

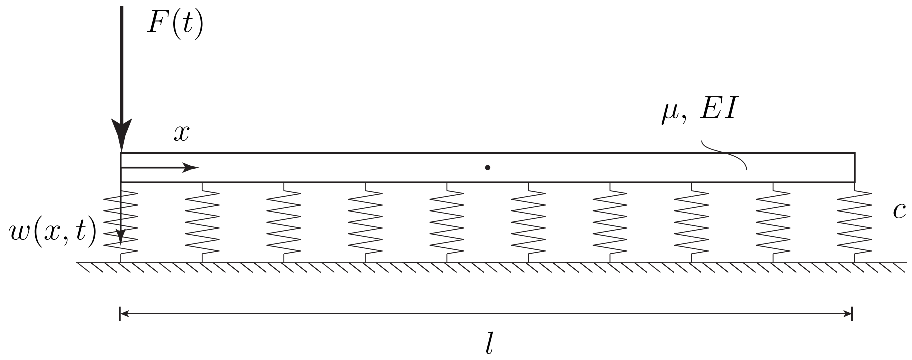
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{513}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{514}$$

$$\approx 1,007 \tag{515}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = 0$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \,\mathrm{d}x \qquad \mathbf{1} \tag{516}$$

c)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \,\mathrm{d}x \qquad \mathbf{2} \tag{517}$$

d)

$$\delta W = F \delta w(0,t) \qquad \mathbf{1} \tag{518}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{519}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad \mathbf{1} \tag{520}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad \mathbf{3} \tag{521}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \;\; \mathbf{1}} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{522}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad \mathbf{1} \tag{523}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{\mathbf{2}} \tag{524}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{525}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad \mathbf{1} \tag{526}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad \mathbf{1} \tag{527}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad \mathbf{1} \tag{528}$$

$\delta w(0,t)$:

$$-EIw'''(0,t) + F(t) = 0 \quad 1 \tag{529}$$

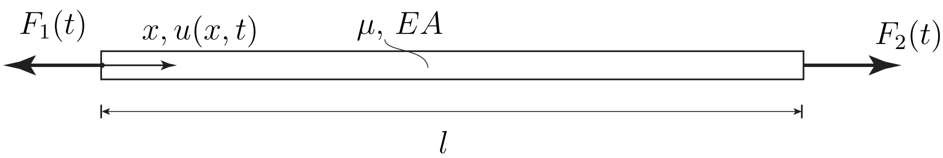
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) = 0 \quad 1 \tag{530}$$

Version 7

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F} \cos \varOmega t$, wobei $\hat{F}$ und $\varOmega$ gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F} \cos \varOmega t$ (mit $\hat{F}$ und $\varOmega$ gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\varOmega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\varOmega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos \varOmega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{531}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{532}$$

Randbedingung 1:

$$F_1(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{533}$$

Randbedingung 2:

$$F_2(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{534}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{535}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{536}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{537}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{538}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1\frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{539}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1\frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \qquad 1 \tag{540}$$

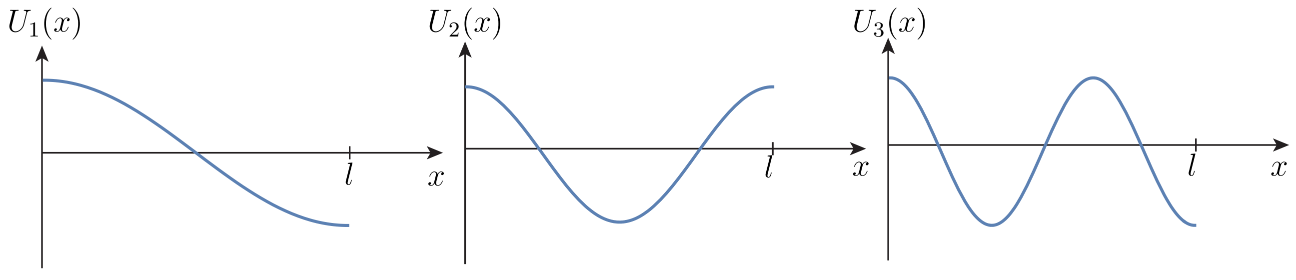
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2\frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{541}$$

$$1 \qquad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad 1 \tag{542}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad 1 \tag{543}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{544}$$

$$U'_\mathrm{p}(x) = D_1\frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2\frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \qquad 1 \tag{545}$$

$$\tag{546}$$

Randbedingungen 1:

$$\hat{F}\cos \Omega t = EAu'(0,t) \tag{547}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{548}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = D_1\frac{\Omega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega} \qquad \mathbf{1} \tag{549}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F}\cos \Omega t = EAu'(l,t) \tag{550}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{551}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(D_1\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \tag{552}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA\left(\frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\frac{\Omega}{c}\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right) - D_2\frac{\Omega}{c}\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)\right) \qquad \mathbf{1} \tag{553}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right)} \qquad \mathbf{1} \tag{554}$$

$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{\hat{F}c(1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right))}{EA\,\Omega\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{555}$$

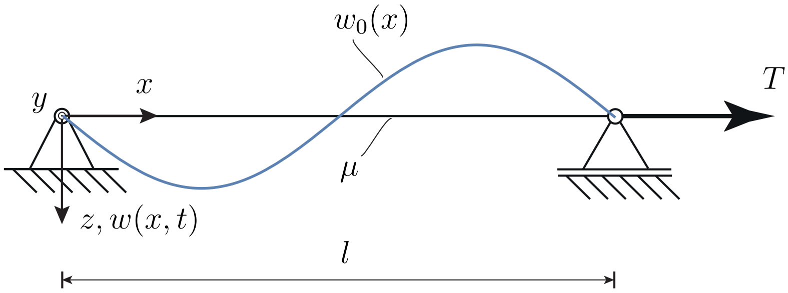
$$= \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right] \qquad \mathbf{1} \tag{556}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F}c}{EA\Omega}\left[\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}l\right)}\cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]\cos\Omega t \qquad \mathbf{1} \tag{557}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w} \sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct$, $x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{558}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{559}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{560}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{561}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 2. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{562}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \tag{563}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{564}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(l) = 0 \tag{565}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad 1 \tag{566}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{l} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad 1 \tag{567}$$

$$\Rightarrow \quad W_2(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \tag{568}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{569}$$
$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{570}$$

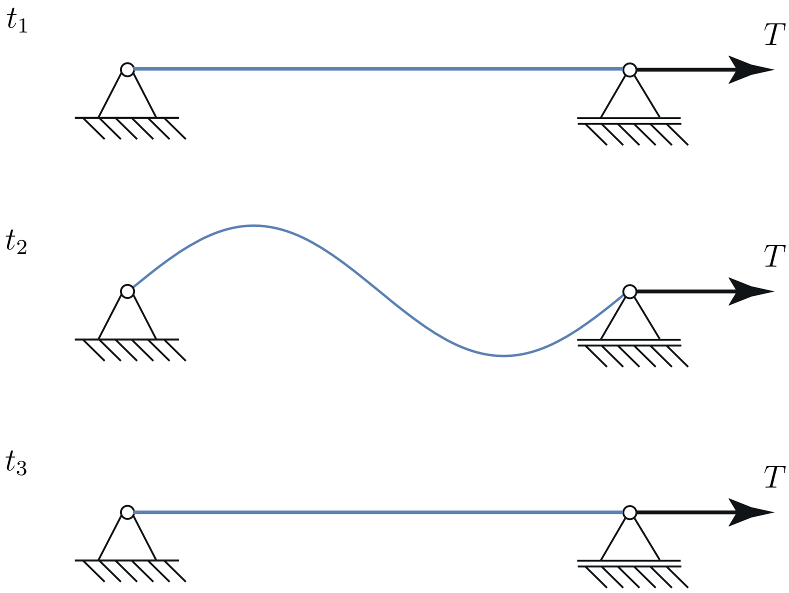
d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{571}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{572}$$

e) $x = l$

$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \quad 1 \tag{573}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(2\pi - \frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(2\pi + \frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \tag{574}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad 1 \tag{575}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad 1 \tag{576}$$

f) Auslenkungen:

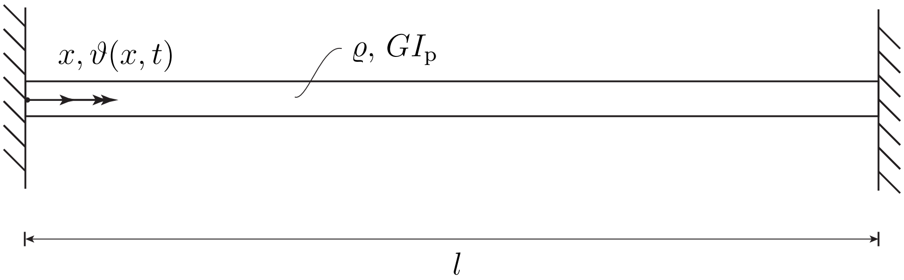


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

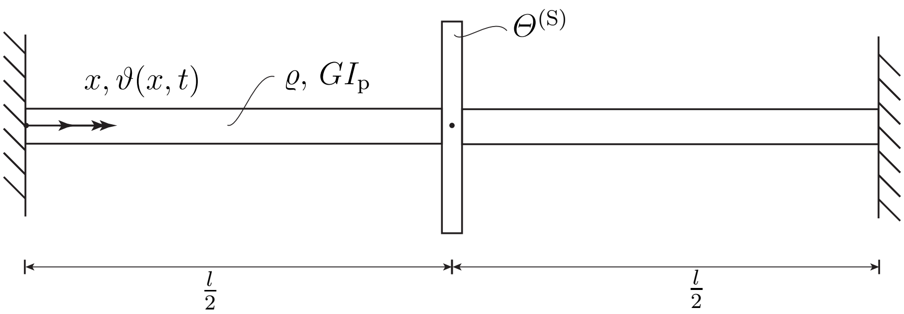
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{577}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \qquad 1 \tag{578}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{579}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{580}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \qquad 1 \tag{581}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{582}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \qquad 1 \tag{583}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \qquad 1 \tag{584}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\dots \tag{585}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\dots \qquad 1 \tag{586}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad 1 \tag{587}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{588}$$

$$a = -\frac{1}{l} \qquad 1 \tag{589}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{590}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{591}$$

$$GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{2}{l}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right) \mathrm{d}x \tag{592}$$

$$= GI_\mathrm{p} \left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{593}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{594}$$

$$\varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p} \int_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x \tag{595}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p} \left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{596}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p} l^3 \quad 2 \tag{597}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})} \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{598}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{599}$$

e)

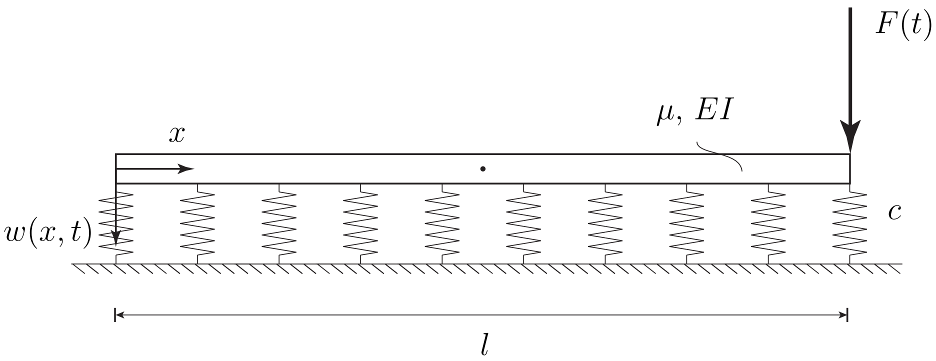
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{600}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{601}$$

$$\approx 1,007 \tag{602}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = l$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \mathbf{1} \tag{603}$$

c)

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \Big(EIw''^2(x,t) + cw^2(x,t)\Big)\,\mathrm{d}x \quad \mathbf{2} \tag{604}$$

d)

$$\delta W = F\delta w(l,t) \quad \mathbf{1} \tag{605}$$

e)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{606}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad 1 \tag{607}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad 3 \tag{608}$$

Partielle Integrationen:

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \;\; 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{609}$$

$$= - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad 1 \tag{610}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= -EI \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{611}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t) + EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{612}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w''''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad 1 \tag{613}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{614}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{615}$$

$\delta w(0,t)$:

$$EIw'''(0,t) = 0 \quad \textbf{1} \tag{616}$$

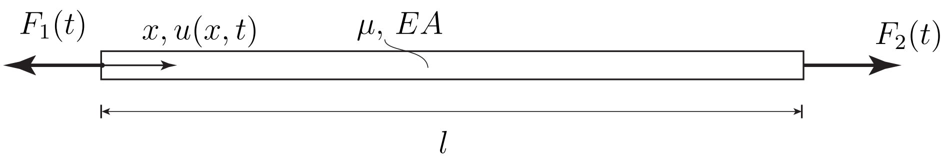
$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) + F = 0 \quad \textbf{1} \tag{617}$$

Version 8

[20 Punkte]

Aufgabe 1



An einem freien Stab (Länge l, Masse/Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) greifen an den Enden wie skizziert die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$ an.

Geg.: EA, l, μ, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

b) Bestimmen Sie für $F_1(t) = F_2(t) = 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_i und damit die Eigenformen $U_i(x)$.
Bemerkung: Die Starrkörperbewegung mit verschwindender Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 0$ muss dabei nicht beachtet werden.

c) Skizzieren Sie die zu den ersten drei Eigenkreisfrequenzen $\omega_i > 0$ gehörenden Eigenformen $U_1(x)$, $U_2(x)$ und $U_3(x)$.

d) Es gelte nun $F_1(t) = -F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$, wobei $\hat{F}$ und Ω gegeben sind. Welche der drei ersten Eigenformen aus c) kann/können damit angeregt werden? Bemerkung: Keine Rechnung notwendig.

e) Bestimmen Sie nun für $F_1(t) = F_2(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ (mit $\hat{F}$ und Ω gegeben) eine stationäre partikuläre Zwangsschwingung mit dem Ansatz

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \underbrace{\left[D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right)\right]}_{U_\mathrm{p}(x)} \cos\Omega t,$$

welcher die Feldgleichung erfüllt.

Lösung

a)

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u(x,t)'' \quad 1 \tag{618}$$

$$c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad 1 \tag{619}$$

Randbedingung 1:

$$F_1(t) = EAu'(0,t) \quad 1 \tag{620}$$

Randbedingung 2:

$$F_2(t) = EAu'(l,t) \quad 1 \tag{621}$$

b) Mit $F_1(t) = F_2(t) = 0$ und $u(x,t) = U(x)p(t)$

Randbedingung 1:

$$EAu'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(0) = 0 \tag{622}$$

Randbedingung 2:

$$EAu'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(l) = 0 \tag{623}$$

$$U''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \tag{624}$$

$$U(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{625}$$

Ableiten zur Auswertung der Randbedingungen:

$$U'(x) = C_1 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) - C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{626}$$

Auswertung der Randbedingung 1:

$$U'(0) = C_1 \frac{\omega}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad 1 \tag{627}$$

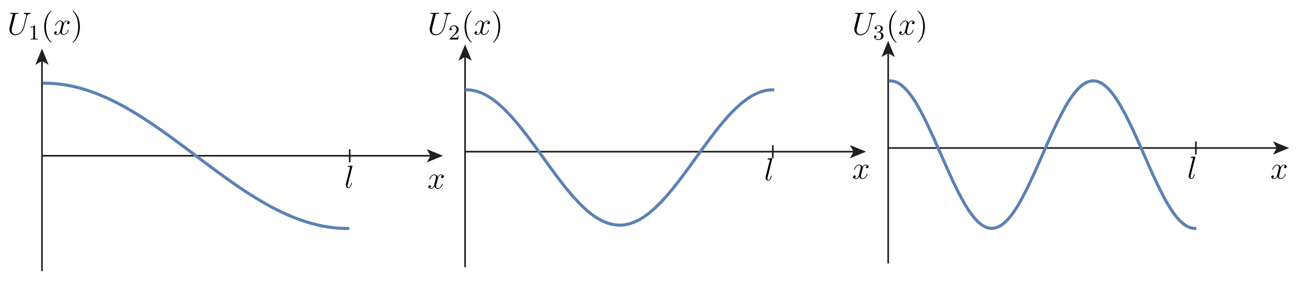
Auswertung der Randbedingung 2:

$$U'(l) = -C_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{628}$$

$$1 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad 1 \tag{629}$$

$$U_k(x) = C_2 \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{630}$$

c) Skizze der ersten drei Eigenformen: 3



d) Nur $U_2(x)$ kann mit dieser Art von Anregung angesprochen werden. 1

e) Zum Anpassen an die nun geltenden Randbedingungen:

$$U_\mathrm{p}(x) = D_1 \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) + D_2 \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \tag{631}$$

$$U_\mathrm{p}'(x) = D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c}x\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right) \quad 1 \tag{632}$$

(633)

Randbedingungen 1:

$$\hat{F} \cos \Omega t = EAu'(0,t) \tag{634}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(0) \tag{635}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = D_1 \frac{\Omega}{c} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \qquad \mathbf{1} \tag{636}$$

Randbedingungen 2:

$$\hat{F} \cos \Omega t = EAu'(l,t) \tag{637}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EAU'(l) \tag{638}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA \left(D_1 \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right) \right) \tag{639}$$

$$\Rightarrow \hat{F} = EA \left(\frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \frac{\Omega}{c} \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right) - D_2 \frac{\Omega}{c} \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right) \right) \qquad \mathbf{1} \tag{640}$$

Umstellen führt zu:

$$D_2 = -\frac{c\hat{F}(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right))}{EA\,\Omega \sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right)} \qquad \mathbf{1} \tag{641}$$

$$U_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{\hat{F} c(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right))}{EA\,\Omega \sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \tag{642}$$

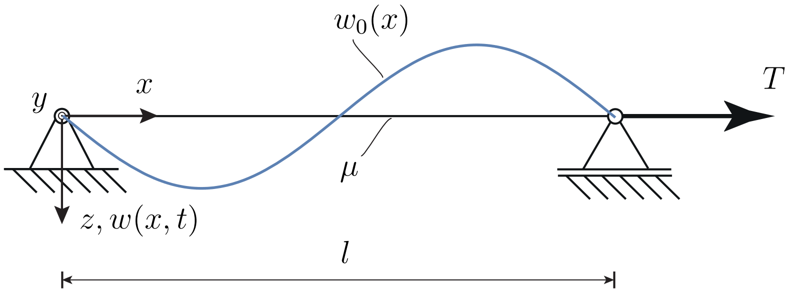
$$= \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \left[\sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \right] \qquad \mathbf{1} \tag{643}$$

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \frac{\hat{F} c}{EA\Omega} \left[\sin\left(\frac{\Omega}{c} x\right) - \frac{1 - \cos\left(\frac{\Omega}{c} l\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c} l\right)} \cos\left(\frac{\Omega}{c} x\right) \right] \cos \Omega t \qquad \mathbf{1} \tag{644}$$

c einsetzen?

[19 Punkte]

Aufgabe 2



Gegeben ist eine vorgespannte Saite (Länge l, Masse/Länge μ, Vorspannkraft T) die wie skizziert gelagert ist. Die Anfangsauslenkung der Saite beträgt $w_0(x) = \hat{w} \sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

Geg.: μ, l, $w_0(x)$, $\hat{w}$, T

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für das System an.

b) Welcher Eigenform der Anordnung entspricht die Anfangsauslenkung und wie groß ist die zugehörige Eigenkreisfrequenz?

c) Ermitteln Sie für die gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung $w(x,t)$ nach d'Alembert im Bereich $0 < x - ct,\ x + ct < l$.

d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = 0$ für alle Zeiten t erfüllt ist.
Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$.

e) Zeigen Sie, dass die Randbedingung bei $x = l$ für alle Zeiten t erfüllt ist.

Hinweis: $\sin(-\xi) = -\sin(\xi)$ und $\sin(k\pi + \xi) = \begin{cases} -\sin(\xi), & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \sin(\xi), & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

f) Zeichnen Sie die Lösung zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $t_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und $t_3 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$

Lösung

a)

$$\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0 \quad 1 \tag{645}$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu} \quad 1 \tag{646}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \qquad \text{RB1} \quad 1 \tag{647}$$

$$w(l,t) = 0 \qquad \text{RB2} \quad 1 \tag{648}$$

b) Die Anfangsauslenkung entspricht der 2. Eigenform. 1
Ansatz $w(x,t) = W(x)p(t)$:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (1) \tag{649}$$

Randbedingung RB1 auswerten:

$$w(0,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(0) = 0 \tag{650}$$

$$\Rightarrow \qquad C_1 = 0 \quad (1) \tag{651}$$

Randbedingung RB2 auswerten:

$$w(l,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(l) = 0 \tag{652}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_k = \frac{k\pi c}{l} \quad (1) \tag{653}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{2\pi c}{l} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (1) \tag{654}$$

$$\Rightarrow \qquad W_2(x) = C_{2,3} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \tag{655}$$

c)

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct)\right] \tag{656}$$

$$\Rightarrow \qquad w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(x+ct)\right)\right] \quad (1) \tag{657}$$

d) $x = 0$

$$w(0,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad (1) \tag{658}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad (1) \tag{659}$$

e) $x = l$

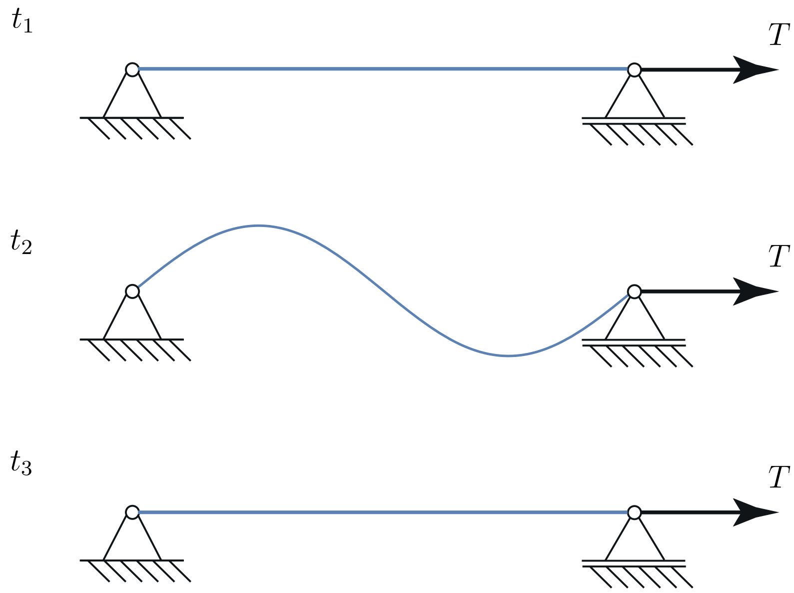
$$w(l,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi(l-ct)\right) + \sin\left(\frac{2}{l}\pi(l+ct)\right)\right] \quad (1) \tag{660}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(2\pi - \frac{2}{l}\pi ct\right) + \sin\left(2\pi + \frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \tag{661}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[-\sin\left(-\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] \quad (1) \tag{662}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right) - \sin\left(\frac{2}{l}\pi ct\right)\right] = 0 \checkmark \quad (1) \tag{663}$$

f) Auslenkungen:

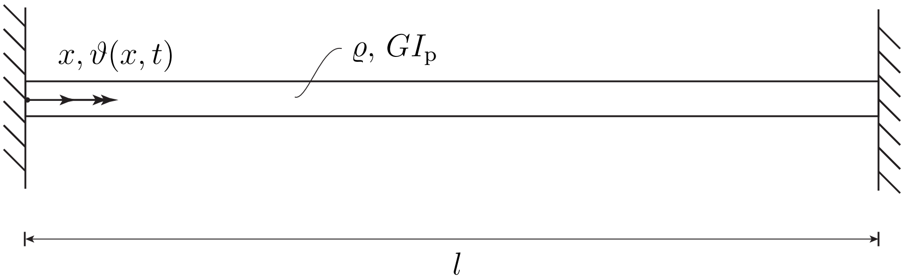


Randbedingungen passen bei allen 1

für die Skizzen 3

[18 Punkte]

Aufgabe 3



Ein Torsionsstab mit kreisförmigem Querschnitt (Dichte ϱ, Länge l, Masse/Länge μ, Torsionssteifigkeit GI_p) ist beidseitig eingespannt.

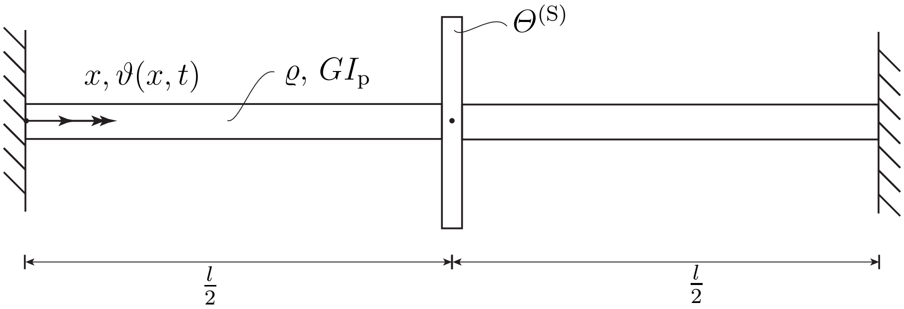
Geg.: ϱ, l, GI_p

a) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an. Geben Sie die Feldgleichung und ggf. existierende dynamische Randbedingungen an.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenformen $\Theta_i(x)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ eine zulässige Funktion für das vorliegende Randwertproblem.

d) Jetzt wird wie skizziert mittig eine fest mit dem Torsionsstab verbundene starre Drehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(\mathrm{S})}$ bzgl. der x-Achse, vernachlässigter Dicke in x-Richtung) ergänzt:



Zusätzlich gegeben: Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta^{(\mathrm{S})}$

Berechnen Sie für das ergänzte System mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und der in c) bestimmten zulässigen Funktion eine Näherungslösung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz im Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} > 0$.
Der Rayleigh-Quotient für dieses System lautet

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}_1^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

e) Wie ist das Verhältnis $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ für den Fall $\Theta^{(\mathrm{S})} = 0$?

Lösung

a)

$$\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0 \tag{664}$$

$$c^2 = \frac{G}{\varrho} \quad 1 \tag{665}$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1 \tag{666}$$

$$\vartheta(l,t) = 0 \quad 1 \tag{667}$$

b) Ansatz $\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)$:

$$\Theta''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Theta(x) = 0 \quad 1 \tag{668}$$

$$\Theta(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{669}$$

aus RB1:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad 1 \tag{670}$$

aus RB2:

$$\Theta(l) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad 1 \tag{671}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, \quad k = 1,2,\ldots \tag{672}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{l}, \quad k = 1,2,\ldots \quad 1 \tag{673}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_k(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad 1 \tag{674}$$

c) $\tilde{\Theta}(x) = ax^2 + x$ erfüllt die erste Randbedingung. Aus der zweiten Randbedingung folgt

$$al^2 + l = 0 \tag{675}$$

$$a = -\frac{1}{l} \quad 1 \tag{676}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = -\frac{1}{l}x^2 + x \quad 1 \tag{677}$$

d)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_\mathrm{p}\tilde{\Theta}'^2(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^l \varrho I_\mathrm{p}\tilde{\Theta}^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(\mathrm{S})}\tilde{\Theta}^2\left(\frac{l}{2}\right)}$$

mit

$$\tilde{\Theta}'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{678}$$

$$GI_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{2}{l}x+1\right)^2 \mathrm{d}x = GI_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{4}{l^2}x^2 - \frac{4}{l}x + 1\right)\mathrm{d}x \tag{679}$$

$$= GI_\mathrm{p}\left[-\frac{4}{3l^2}x^3 - \frac{2}{l}x^2 + x\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{680}$$

$$= \frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l \quad 2 \tag{681}$$

$$\varrho I_\mathrm{p}\int_0^l \left(-\frac{1}{l}x^2 + x\right)^2 \mathrm{d}x = \varrho I_\mathrm{p}\int_0^l \left(\frac{1}{l^2}x^4 - \frac{2}{l}x^3 + x^2\right)\mathrm{d}x \tag{682}$$

$$= \varrho I_\mathrm{p}\left[\frac{1}{5l^2}x^5 - \frac{1}{2l}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^l \mathrm{d}x \tag{683}$$

$$= \frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 \quad 2 \tag{684}$$

$$\Theta^{(\mathrm{S})}\left(-\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2 \quad 1 \tag{685}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1^2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}GI_\mathrm{p}l}{\frac{1}{30}\varrho I_\mathrm{p}l^3 + \frac{1}{16}\Theta^{(\mathrm{S})}l^2}} \quad 1 \tag{686}$$

e)

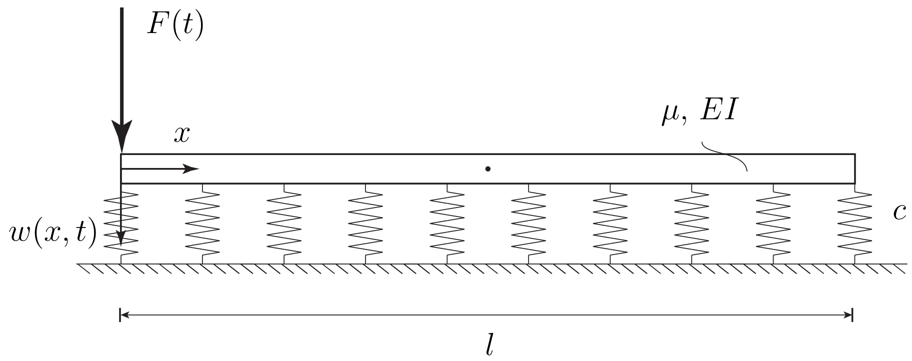
$$\tilde{\omega}_1/\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}G}{\frac{1}{30}\varrho l^2}}\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{G}} \quad 1 \tag{687}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \quad 1 \tag{688}$$

$$\approx 1,007 \tag{689}$$

[18 Punkte]

Aufgabe 4



Ein Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse/Länge μ, Biegesteifigkeit EI) ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c) und wird durch eine Einzellast $F(t)$ an der Stelle $x = 0$ belastet.

Geg.: EI, l, c, μ, $F(t)$, x_1

a) Geben Sie eventuell existierende geometrische Randbedingungen an.

b) Geben Sie die kinetische Energie T an.

c) Bestimmen Sie die potentielle Energie U.

d) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

e) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung(en) und die dynamischen Randbedingungen.

Lösung

a) Es existieren keine geometrischen Randbedingungen. **1**

b)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{1} \tag{690}$$

c)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{2} \tag{691}$$

d)

$$\delta W = F \delta w(0,t) \quad \textbf{1} \tag{692}$$

e)

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{693}$$

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2(x,t) \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_0^l \Big(EI w''^2(x,t) + c w^2(x,t) \Big) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \qquad 1 \tag{694}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l \left[\mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'' - c w(x,t) \delta w(x,t) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \qquad 3 \tag{695}$$

Partielle Integrationen:

$$\int\limits_0^l \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu \dot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^l \left[\underbrace{\mu \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0 \quad 1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta \dot{w}(x,t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \tag{696}$$

$$= - \int\limits_0^l \int\limits_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad 1 \tag{697}$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l EI w''(x,t) \delta w''(x,t) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{-EI \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big|_0^l - w'''(x,t) \delta w(x,t) \Big|_0^l + \int_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t}_{2} \tag{698}$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg(-EI w''(l,t) \delta w'(l,t) + EI w''(0,t) \delta w'(0,t)$$

$$+ EI w'''(l,t) \delta w(l,t) - EI w'''(0,t) \delta w(0,t) - EI \int\limits_0^l w''''(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}t \tag{699}$$

$\delta w(x,t)$:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w'''(x,t) + c w(x,t) = 0 \qquad 1 \tag{700}$$

$\delta w'(l,t)$:

$$EI w''(l,t) = 0 \qquad 1 \tag{701}$$

$\delta w'(0,t)$:

$$EI w''(0,t) = 0 \qquad 1 \tag{702}$$

$\delta w(0,t)$:

$$-EIw'''(0,t) + F(t) = 0 \quad \text{1} \tag{703}$$

$\delta w(l,t)$:

$$EIw'''(l,t) = 0 \quad \text{1} \tag{704}$$