

Projekt Wärmeleitung

3. Hausaufgabe

Es sei das Rechengebiet und die entsprechenden Randbedingungen wie in der letzten Hausaufgabe gegeben (Abbildung 1). Dementsprechend werden die Kontrollvolumen im oberen rechten Quadranten (in Abbildung 1 T_i mit $i = 9, 10, 13, 14$) über Dirichlet-Randbedingungen beschrieben.

Das Ziel dieser Hausaufgabe ist die Implementierung und grafische Darstellung des instationären Falls. Dazu soll zunächst als Hilfestellung in Aufgabe 1 die Funktionsvorschrift aus dem Skript (8.52) so umgeformt werden, dass ihr sie in euren bestehenden Code implementieren könnt.

Für den instationären Fall werden Temperaturen für den Startzeitpunkt benötigt. Die Kontrollvolumen im oberen rechten Quadranten besitzen zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 100°C . Die restlichen Kontrollvolumen haben zum Zeitpunkt $t = 0$ die Umgebungstemperatur 21°C .

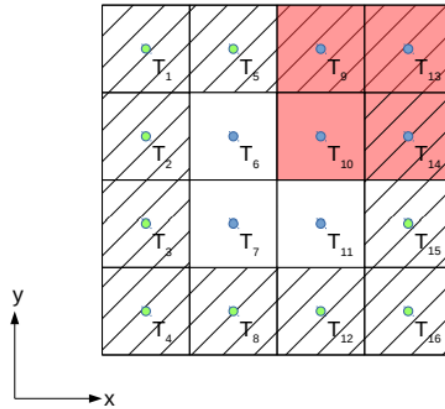


Abbildung 1: Diskretisiertes Rechengebiet mit 4x4 Gitterzellen

Aufgabe 1

Theorie-Aufgabe

Unter der Annahme, dass T_0 gegeben ist, soll die Gleichung

$$T_P^1(\gamma) = T_P^0 + \frac{\Delta t \cdot \gamma}{\rho_p c_P \Delta x \Delta y} \left[-a_P T_P^1 + a_W T_W^1 + a_N T_N^1 + a_E T_E^1 + a_S T_S^1 + \tilde{S}_P \right] + \frac{\Delta t \cdot (1 - \gamma)}{\rho_p c_P \Delta x \Delta y} \left[-a_P T_P^0 + a_W T_W^0 + a_N T_N^0 + a_E T_E^0 + a_S T_S^0 + \tilde{S}_P \right] \quad (1)$$

so umgestellt werden, dass sie wieder als Gleichung eines Gleichungssystems der Form $B \cdot \vec{T}^1 = \vec{F}$ geschrieben werden kann, wobei B eine neue Iterationsmatrix und \vec{F} die rechte Seite bezeichnet, welche alle nicht von \vec{T}^1 abhängigen Werte enthält.

Aufgabe 2

Programmieraufgabe

Nun soll die Implementierung für den instationären Fall erfolgen. Das Programm soll dabei in Abhängigkeit des Parameters γ verfasst werden, sodass zwischen den Zeitdiskretisierungsverfahren gewechselt werden kann. Für die Implementierung werden die folgenden Parameter benötigt:

- PVC spezifische Wärmekapazität: $850 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
- PVC Dichte: $1400 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Kupfer spezifische Wärmekapazität: $385 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
- Kupfer Dichte: $8920 \text{ kg}/\text{m}^3$

Wichtig ist, dass das Ergebnis als eine Art Video geplottet wird, sodass die Entwicklung der Temperatur mit der Zeit beobachtet werden kann. Insgesamt soll die Simulation von einer Minute (60s) mithilfe der Zeitdiskretisierungsverfahren dargestellt werden.

Hinweis: Achtet bei der Wahl der Zeitschritte Δ_t darauf, dass das explizite Eulerverfahren nicht bedingungslos stabil ist. Achtet auf den Umgang mit Dirichlet-Randbedingungen.

Aufgabe 3

Vorstellung des gewählten Projekts

In den beiden folgenden Hausaufgaben sollt ihr eure erworbenen Kenntnisse einsetzen, um eine selbst gewählte Problemstellung der Wärmeleitung zu simulieren. In dieser Hausaufgabe geht es um die rein physikalische Beschreibung eures Anwendungsfalls. Dazu soll eine Skizze zur Veranschaulichung der Geometrie angefertigt werden, die in einem begleitenden Text beschrieben wird. Geht dabei auch auf die Relevanz der Anwendung und eure Fragestellung ein. Listet die verwendeten Materialien mit ihren Parametern auf (Quellenangaben essenziell). Explizit nicht Teil der Aufgabe ist die mathematische Beschreibung des Problems unter Angabe der Randbedingungen und der Diskretisierung

Anforderungen:

- Die Wärmeleitungsgleichung wird für einen ruhenden Festkörper gelöst.
- Angemessene Vereinfachungen erlauben eine Modellierung des Problems in 2D.
- Es gibt im Inneren oder am Rand eine Wärmequelle oder eine Wärmesenke. Das kann wie in den ersten Hausaufgaben auch einfach ein Bereich mit einer vorgegebenen Temperatur sein.
- Es wird ein instationärer Prozess simuliert, das heißt die Temperatur ist nicht an jedem Ort zeitlich konstant. Für die Gitteranalyse wird hingegen wieder zunächst der stationäre Fall betrachtet, in dem alle Zeitableitungen verschwinden.
- Der Körper besteht aus mindestens zwei unterschiedliche Materialien und mindestens zwei unterschiedliche Arten von Randbedingungen werden verwendet.
- Hintergrund ist eine spannende Fragestellung, die eure Simulation beantworten kann.
- Hinweis: Macht das Problem nicht zu kompliziert, sondern setzt den Fokus vor allem auf eine detaillierte Auswertung.

Beispiele:

- Fußbodenheizung (Mit welcher Kennlinie kann die Raumtemperatur möglichst kostengünstig nach der Rückkehr aus dem Urlaub von 16°C auf 20°C erhöht werden?)
- Regler (Inwieweit äußert sich ein Zweipunktregler mit Hysterese nachteilig gegenüber einem stetigen Regler in einem Kühlschrank, einer Klimaanlage oder einer Heizung?)

- Wärmestrom von einem beheizten Zimmer durch die Hauswand nach außen (Nach Gusto von Herrn Habeck: Wie viel Erdgas lässt sich an einem Wintertag einsparen, wenn die Raumtemperatur um 2°C abgesenkt wird?)
- Kühlung einer Bierflasche, die als homogener Festkörper angenommen wird (Wie groß ist der Einfluss der Form der Flasche auf die Zeit, die benötigt wird, um die Flasche von 20°C auf 8°C zu kühlen?) \rightarrow Hier müsste man noch etwas mehr Komplexität einbauen.
- Braten eines Steaks in der Pfanne (Wie muss die Wärmeleistung der Herdplatte gesteuert werden, damit die gewünschte Kerntemperatur im Steak möglichst schnell erreicht wird und von da an möglichst konstant gehalten wird?)
- Eigene Ideen werden sehr begrüßt!