Kontinuumsmechanik VL 1

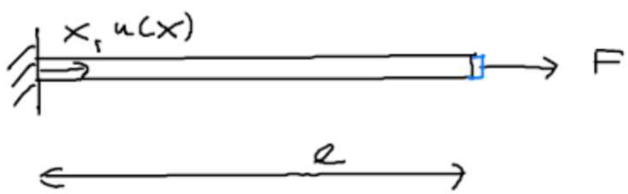
Kontinuum:
In der Festkörpermechanik Festkörper mit verteilten elastischen und Trägheitseigenschaften: „unendlich viele Freiheitsgrade“ im Gegensatz zu diskreten Systemen, bestehend aus Starrkörpern/Punktmassen mit endlicher Zahl von Freiheitsgraden.

1. Eindimensionale Kontinua

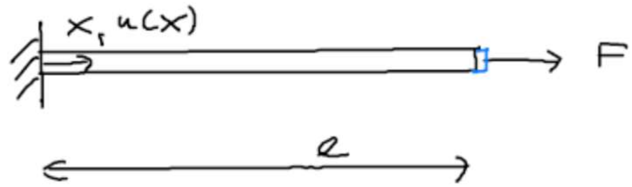
Stab, Balken, Saite im Gegensatz z.B. zu Scheibe, Platte, Membran oder Schale (zweidimensionale Kontinua)

1.0 Wiederholung aus Festigkeitslehre

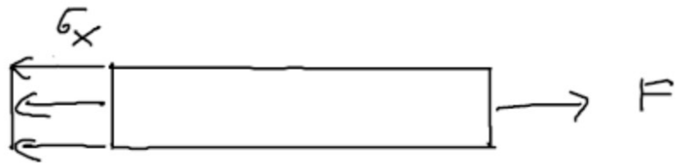
1.0.1 Zugstab



Hier $N(x) = F = \text{konst.}$



Spannungsverteilung konstant im Querschnitt



σ_x = konstant über den Querschnitt

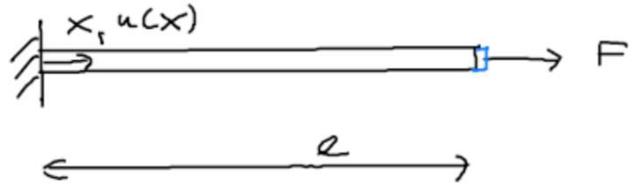
Hooke $\sigma_x = E\ \varepsilon_x = E\ u'(x)$; $\quad (\,)' = \frac{\partial}{\partial x}$

andererseits $\sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$

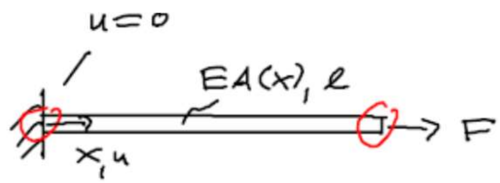
also $N(x) = E\ A(x) u'(x)$

bzw. $u'(x) = N(x)/EA(x)$

Dgl. für statische Längsdehnung

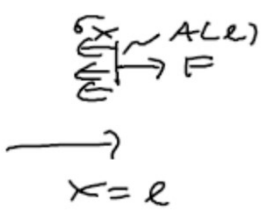


Randbedingungen für



$$u(x=0)=0$$

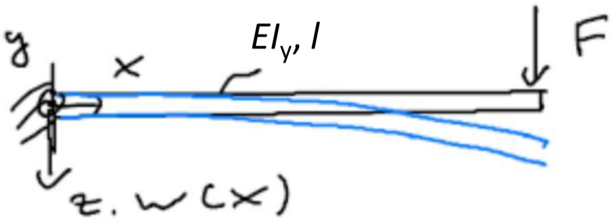
geometrische Randbedingung



$$u'(\ell)=\frac{F}{EA(\ell)}$$

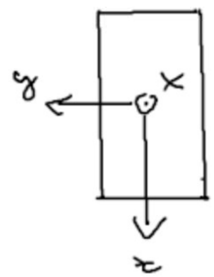
dynamische Randbedingung

1.0.2 Biegebalken



Dgl. für Biegelinie

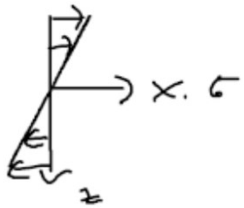
$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y(x)}$$



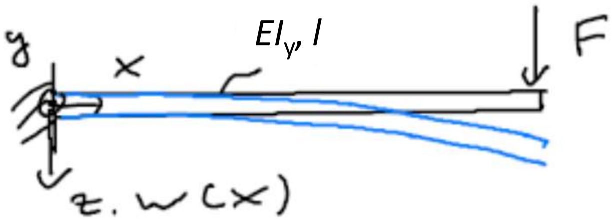
$$I_y = \int z^2 \mathrm{d}\, A$$

Flächenträgheitsmoment

Spannungsverteilung im Querschnitt

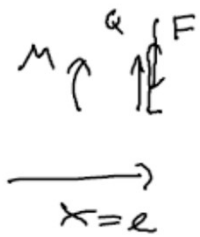


$$\sigma(x, z) = \frac{M(x)}{I_y(x)} \cdot z$$



Randbedingungen:

$\underline{w(x=0)=0}$ $\quad$ $\underline{w'(x=0)=0}$ $\quad$ geometrische Randbedingungen



$M(x=l)=0 \Rightarrow w''(l) = -\dfrac{M(l)}{EI_y}$ $\quad$ also $\quad$ $\underline{w''(l)=0}$

$Q(x=l)=F \qquad Q(x) = \dfrac{dM(x)}{dx}$ $\quad$ also

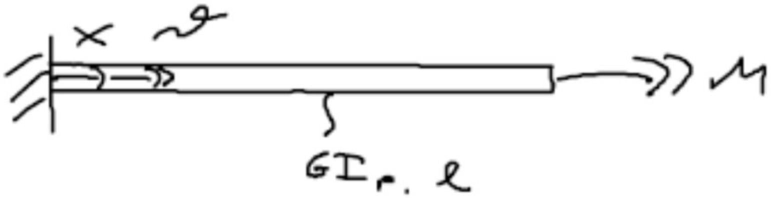
$$Q(l) = -EI_y\, w'''(l) = F$$

$$w'''(l) = -\frac{F}{EI_y}$$

dynamische Randbedingungen

1.0.3 Torsion

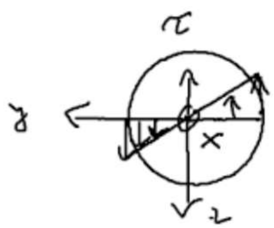
für kreisförmige Querschnitte



Dgl. für $\vartheta(x)$: $\vartheta'(x) = \dfrac{M_T(x)}{G I_p(x)}$

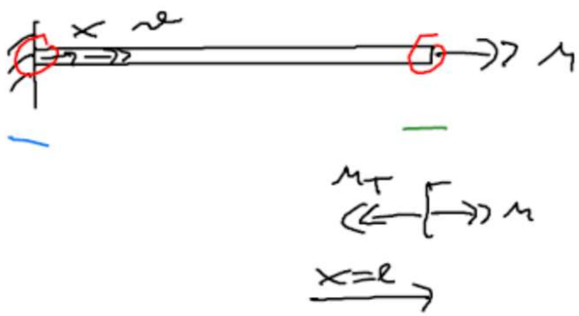
mit $I_p = \int r^2 \, dA = I_y + I_x$ polares Flächenträgheits-moment

Spannungsverteilung im Querschnitt:



$$\tau(x, r) = \frac{M_T(x)}{I_p(x)} \cdot r$$

Randbedingungen:



$\underline{\vartheta(x=0) = 0}$ geometrische Randbedingung

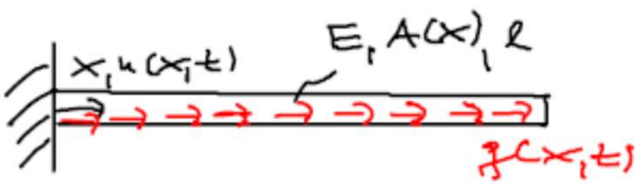
$M_T(x=l) = M$ $\quad \underline{\vartheta'(l) = \dfrac{M}{G I_p(l)}}$

dynamische Randbedingung

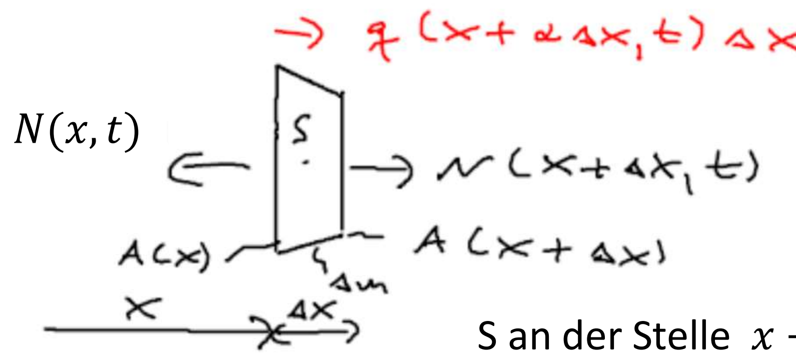
1.1 Eindimensionale Wellengleichung

Jetzt Hinzunahme dynamischer Effekte: Trägheiten

1.1.1 Stablängsschwingungen

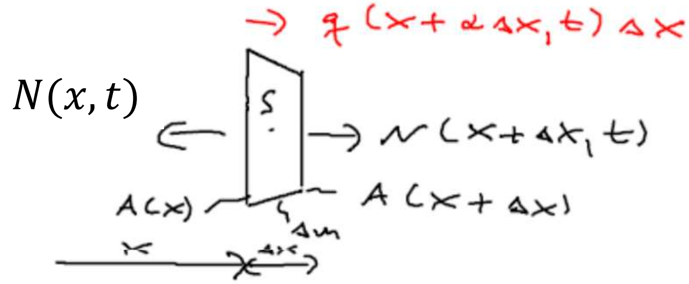


Freischnitt eines Elements



S an der Stelle $x + \beta\Delta x$

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$



Schwerpunktsatz:

$$\Delta m\, \ddot{u}(x+\beta\Delta x, t) = N(x+\Delta x, t) - N(x, t) + q(x+\alpha\Delta x, t)\,\Delta x$$

Für die Normalkraft gilt aus dem Hookeschen Gesetz:

$$N(x) = EA(x)\, u'(x, t)$$

einsetzen und $: \Delta x$

$$\underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta x}}_{\Rightarrow \mu(x)}\, \ddot{u}(\underbrace{x+\beta\Delta x}_{\Rightarrow x}, t) = \frac{EA(x+\Delta x)\, u'(x+\Delta x, t) - EA(x)\, u'(x, t)}{\Delta x} + q(\underbrace{x+\alpha\Delta x, t}_{\Rightarrow x})$$

<u>lim Δx -></u>0

$$\boxed{\mu(\mathrm{x})\,\ddot{u}\,(x,t)\; - \left(\,E\,A(x)u'(x,t)\right)' = \; q(x,t)}$$

Feldgleichung für
erzwungene
Stablängsschwingungen

Partielle Differentialgleichung: Ableitungen nach *x* und *t*

- Ordnung 2: ü, $(\ldots\; u')'$
- Dimension 2: $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$
- Lineare partielle Differentialgleichung
- Ortsabhängige Koeffizienten $\mu(x), A(x)$; falls μ, A=konst. auch konstante Koeffizienten
- Inhomogen: $\mu(\mathrm{x})\,\ddot{u}\,(x,t)\; - \left(\,E\,A(x)u'(x,t)\right)' = \; q(x,t)$

Für μ=konst; A=konst. und freie Schwingungen $q(x,t)$ identisch Null

gilt $$\boxed{\ddot{u} = c^2 u''}$$ eindimensionale Wellengleichung

mit $c^2 = \frac{EA}{\mu} = \frac{EA}{\rho A} = \frac{E}{\rho}$

ρ: Dichte

$$[c] = \sqrt{\frac{\cancel{kg}\, m^2\, \cancel{m^3}}{s^2\, \cancel{m^2}\, \cancel{kg}}} = \frac{m}{s}$$

Dimension einer Geschwindigkeit

Lösung später