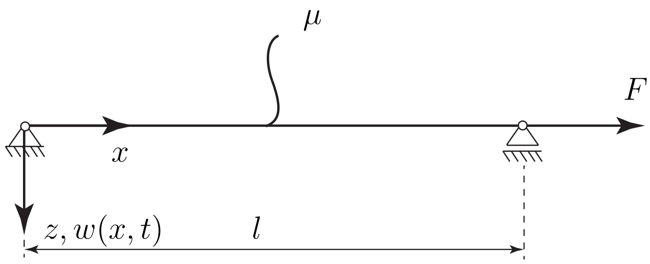
Lösungsvorschlag zum schriftlichen Test vom 15.07.2019

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

[13 Punkte]



Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft F vorgespannt.
Geg.: l, μ, F

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

Ergebnisse:

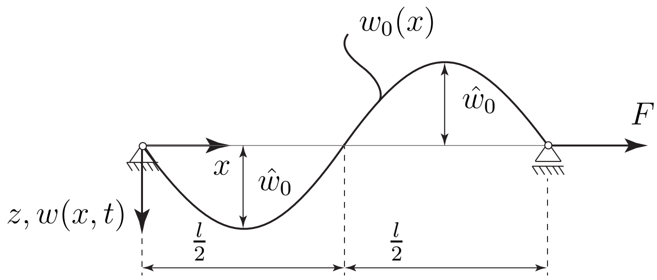
$$\mu \ddot{w}(x,t) - F w''(x,t) = 0 \quad 1$$

$$w(0,t) = 0 \quad 1$$

$$w(l,t) = 0 \quad 1$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad 1$$

b) Die Saite wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wie skizziert **sinusförmig** mit $w_0(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.
Geg.: $\hat{w}_0$, l



Geben Sie die Anfangsbedingungen an.

Ergebnisse:

$$w_0(x) = \hat{w}_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right) \quad 1$$

$$\dot{w}(x,0) = 0 \quad 1$$

c) Bestimmen Sie mittels des Verfahrens der Wellenausbreitung (d'Alembertsche Lösung) die Lösung $w(x, t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{\mu}{F}}$. Skizzieren Sie diese.

Rechnung:

d'Alembertsche Lösung:

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Anpassen an die Anfangsbedingungen

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[\hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x - ct)\right) + \hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x + ct)\right)\right]$$ 1

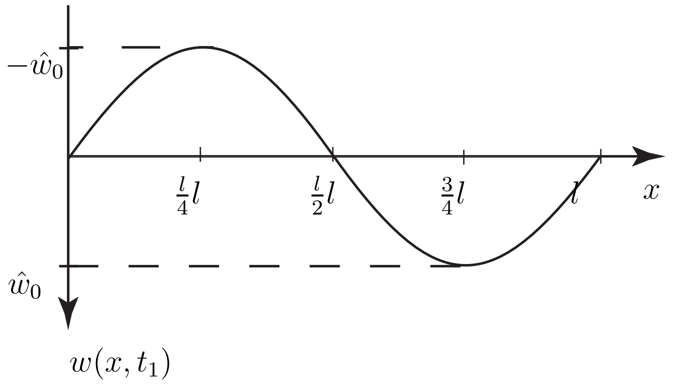
$$w(x,t_1) = \frac{1}{2}\left[\hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x - ct_1)\right) + \hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x + ct_1)\right)\right]$$ 1

mit $t_1 = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{\mu}{F}} = \frac{l}{2c}$ folgt das Ergebnis:

Ergebnis:

$$w(x,t_1) = \frac{1}{2}\left[\hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x - \frac{l}{2})\right) + \hat{w}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}(x + \frac{l}{2})\right)\right]$$ 1

Skizze:



$t_1 = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{\mu}{F}}$

1

d) Nach welcher Zeit T ist erstmals wieder die gleiche Auslenkung und Geschwindigkeit wie bei $t = 0$ erreicht? Die wievielte Eigenkreisfrequenz ω_i können Sie daraus bestimmen und wie groß ist sie?

$$T = \frac{l}{c} = l\sqrt{\frac{\mu}{F}}$$ Periodendauer 1

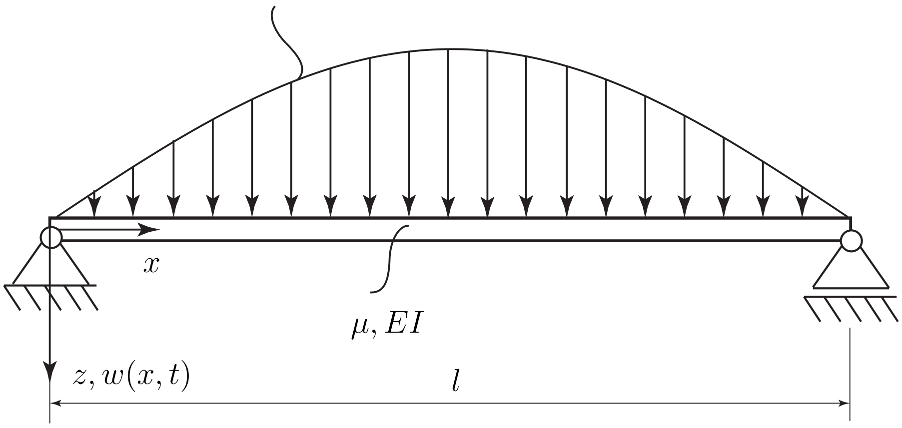
$i = 2$ 2. Eigenkreisfrequenz 1

$$\omega_i = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi\frac{c}{l}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$ 1

Aufgabe 2

[20 Punkte]



Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l})\cos(\Omega t)$ belastet.

Geg: l, μ, EI, q_0, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l})\cos(\Omega t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung und alle Randbedingungen (sowohl dynamische als auch geometrische) an.

Ergebnisse:

Feldgleichung:

$$\mu \ddot{w}(x,t) + EI w^{IV}(x,t) = q_0 \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)\cos(\Omega t) \quad \textbf{2}$$

Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{1}$$

$$\left.\begin{aligned} w''(0,t) &= 0 \\ w''(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{1}$$

b) Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w_p(x,t) = W(x)\cos(\Omega t)$ zu bestimmen. Setzen Sie dazu den Ansatz in die Feldgleichung ein und lösen Sie das entstehende zeitfreie Problem für $W(x)$ mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite. Zeigen Sie, dass $W(x)$ den Randbedingungen genügt.

Rechnung:

$$w_p(x,t) = W(x)\cos(\Omega t) \text{ in DGL}$$

$$\Rightarrow \left[-\mu\Omega^2 W(x) + EIW^{IV}(x)\right]\cos(\Omega t) = q_0 \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos(\Omega t) \quad 1$$

Zeitfreies Randwertproblem:

$$W^{IV}(x) - \frac{\mu\Omega^2}{EI}W(x) = \frac{q_0}{EI}\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) \qquad (*) \quad 1$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$W_p(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) \quad 1$$

Einsetzen in $(*)$

$$\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \frac{\mu\Omega^2}{EI}\right]A\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) = \frac{q_0}{EI}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad 1$$

$$A = \frac{q_0}{EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \mu\Omega^2} \quad 1$$

$$\Rightarrow W(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$W(x) = \frac{q_0}{EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \mu\Omega^2}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$w_p(x,t) = \frac{q_0}{EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \mu\Omega^2}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos(\Omega t) \quad 1$$

Rechnung/Ergebnisse:

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 = W(0)p(t)$$
$$\Rightarrow W(0) = 0$$
$$W(0) = A\sin\left(\frac{\pi}{l}0\right) = 0 \quad \textbf{1}$$

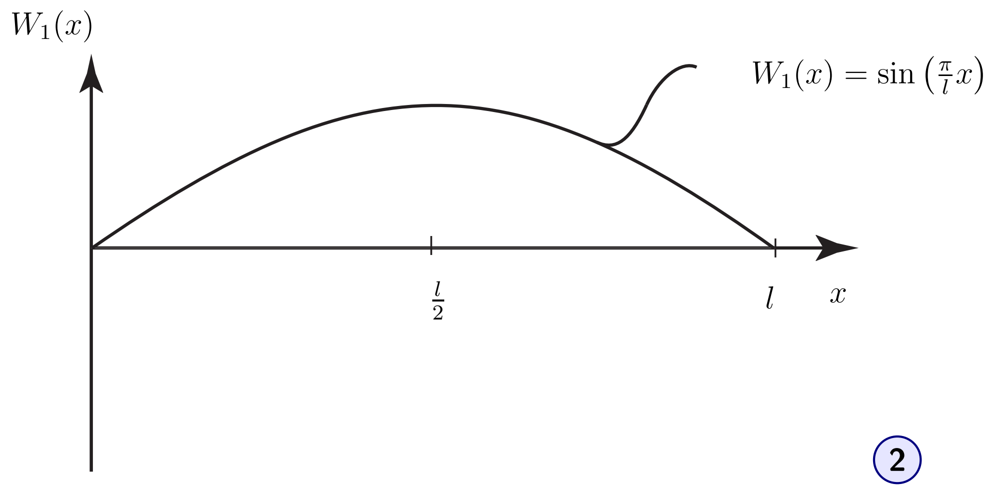
$$w(l,t) = 0 = W(l)p(t)$$
$$\Rightarrow W(l) = 0$$
$$W(l) = A\sin\left(\frac{\pi}{l}l\right) = 0 \quad \textbf{1}$$

$$w''(0,t) = 0 = W''(0)p(t)$$
$$\Rightarrow W''(0) = 0$$
$$W''(0) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 A\sin\left(\frac{\pi}{l}0\right) = 0 \quad \textbf{1}$$

$$w''(l,t) = 0 = W''(l)p(t)$$
$$\Rightarrow W''(l) = 0$$
$$W''(l) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 A\sin\left(\frac{\pi}{l}l\right) = 0 \quad \textbf{1}$$

c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ (ohne Rechnung). Wie groß ist die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems?
Hinweis: Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 lässt sich aus der Lösung der Teilaufgabe 2b) ermitteln.

Skizze:



2

Aus Teilaufgabe (b):

$\lim\limits_{\Omega \to \omega_1} |w_p(x,t)| = +\infty$ Resonanz, wenn der Nenner von $W(x)$ Null wird:

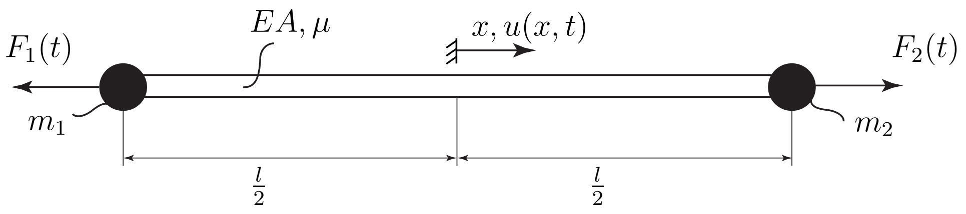
$$EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \mu\Omega^2 = 0$$ 2

$$\omega_1^2 = \frac{EI}{\mu}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\mu}}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$ 2

Aufgabe 3

[21 Punkte]



Der freie (nicht gelagerte) Dehnstab (Länge l, Masse pro Länge μ, Dehnsteifigkeit EA) ist an seinem Ende bei $x = -\frac{l}{2}$ mit einer Punktmasse m_1 und an seinem Ende bei $x = \frac{l}{2}$ mit einer Punktmasse m_2 verbunden. Es wirken außerdem die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$. Mit dem **Prinzip von Hamilton** sollen die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

Geg.: l, m_1, m_2, μ, EA, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

$$T = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu \dot{u}^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{2} m_1 \dot{u}^2\left(-\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}^2 \left(\frac{l}{2}\right) \quad 3 + 1 + 1$$

je 1 P. für die untere und die obere Integralgrenze des 1. Terms, 1 P. für den restlichen Ausdruck des 1. Terms, 1 P. für den 2. Term, 1 P. für den 3. Term

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

$$U = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EAu'^2 \mathrm{dx} \quad 3$$

1 P. für die untere Integralgrenze, 1 P. für die obere Integralgrenze, 1 P. für den restlichen Ausdruck

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente δW an.

$$\delta W = -F_1(t)\delta u\left(-\frac{l}{2}\right) + F_2 \delta u\left(\frac{l}{2}\right) \quad 2 + 2$$

2 P. für den 1. Term, 2 P. für den 2. Term

d) Existieren geometrische Randbedingungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

Ergebnis:

nein 1

e) Bestimmen Sie mit dem **Prinzip von Hamilton** die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen.

Rechnung:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W = 0 \; ; \; L = T - U$$

Variation:

$$\underbrace{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \mu \dot{u} \delta \dot{u} \mathrm{d}t\mathrm{d}x}_{:=\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left(m_1 \dot{u}\left(-\frac{l}{2}\right) \delta \dot{u}\left(-\frac{l}{2}\right) + m_2 \dot{u}\left(\frac{l}{2}\right) \delta \dot{u}\left(\frac{l}{2}\right) \mathrm{d}t \right)}_{:=\mathrm{II}} -$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EAu'\delta u' \mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{:=\mathrm{III}} + \int_{t_0}^{t_1} \left(-F_1 \delta u\left(-\frac{l}{2}\right) + F_2 \delta u\left(\frac{l}{2}\right) \right) \mathrm{d}t = 0$$

Variation richtig ausgeführt 1

partielle Integration

$$\mathrm{I} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\underbrace{\mu \dot{u} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \mu \ddot{u} \delta u \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \quad 1$$

$$\mathrm{II} = \underbrace{m_1 \dot{u}\left(-\frac{l}{2}\right) \delta u\left(-\frac{l}{2}\right) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} + \underbrace{m_2 \dot{u}\left(\frac{l}{2}\right) \delta u\left(\frac{l}{2}\right) \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(m_1 \ddot{u}\left(-\frac{l}{2}\right) \delta u\left(-\frac{l}{2}\right) + m_2 \ddot{u}\left(\frac{l}{2}\right) \delta u\left(\frac{l}{2}\right) \right) \mathrm{d}t \quad 1$$

$$\mathrm{III} = - \int_{t_0}^{t_1} \left[EAu'\delta u \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EAu''\delta u \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \quad 1$$

Rechnung:

Sortieren:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left(-\mu\ddot{u}+EAu''\right)\delta u\mathrm{dx}+\left[-m_1\ddot{u}\left(-\frac{l}{2}\right)+EAu'\left(-\frac{l}{2}\right)-F_1(t)\right]\delta u\left(-\frac{l}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left[-m_2\ddot{u}\left(\frac{l}{2}\right)-EAu'\left(\frac{l}{2}\right)+F_2\left(t\right)\right]\delta u\left(\frac{l}{2}\right)\right]\mathrm{dt}=0 \quad \textbf{1}$$

Rechnung:

Feldgleichung:

$$\mu \ddot{u} - EAu'' = 0 \quad \textbf{1}$$

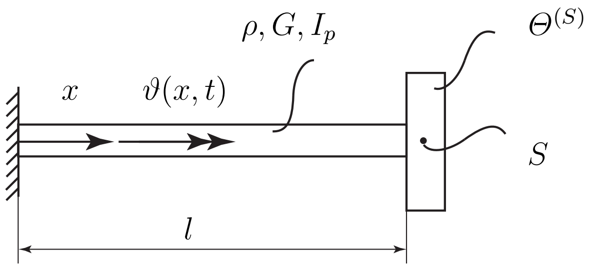
dynamische Randbedingung(en):

$$F_1(t) + m_1 \ddot{u}\left(-\frac{l}{2}\right) = EAu'\left(-\frac{l}{2}\right) \quad \textbf{1}$$

$$F_2(t) - m_2 \ddot{u}\left(\frac{l}{2}\right) = EAu'\left(\frac{l}{2}\right) \quad \textbf{1}$$

Aufgabe 4

[21 Punkte]



Gegeben ist ein Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) mit einer starren homogenen Enddrehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(S)}$). Mittels des Rayleigh-Quotienten ist eine Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz vorzunehmen.
Geg: l, ρ, G, I_p, $\Theta^{(S)}$.

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c sowie die geometrische(n) Randbedingung(en) an.

Ergebnisse:

$$\ddot{\vartheta} - c^2\vartheta'' = 0 \quad (1)$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1)$$

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad (1)$$

b) Geben Sie die dynamische(n) Randbedingung(en) an.

Ergebnis(se):

$$M_T(l,t) = GI_p\vartheta'(l,t) \quad (1)$$

$$GI_p\vartheta'(l,t) = -\Theta^{(S)}\ddot{\vartheta}(l,t) \quad (1)$$

c) Geben Sie das Randwertproblem für $\boldsymbol{\Theta^{(S)}} = \mathbf{0}$ an. Berechnen Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$ (die Eigenform mit der niedrigsten Eigenkreisfrequenz ω_1) sowie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1. Skizzieren Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$.

Rechnung:

Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta(x,t) = \Theta(x)p(t)\\ &\tfrac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2\tfrac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} = -\omega^2\end{aligned}\right\}\ \textbf{1}$$

Randwertproblem:

$$\Theta''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\Theta(x) = 0 \quad \textbf{1}$$

Allgemeine Lösung:

$$\Theta\,(x) = C_1\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad \textbf{1}$$

Anpassen an die Randbedingungen $\Theta(0) = 0$ und $\Theta'(l) = 0$ **1**

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \textbf{1}$$

$$\Theta^{'}(l) = 0 = \frac{\omega}{c}C_2\cos\left(\frac{\omega}{c}l\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0 \quad \textbf{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{c}l = \frac{\pi}{2}$$

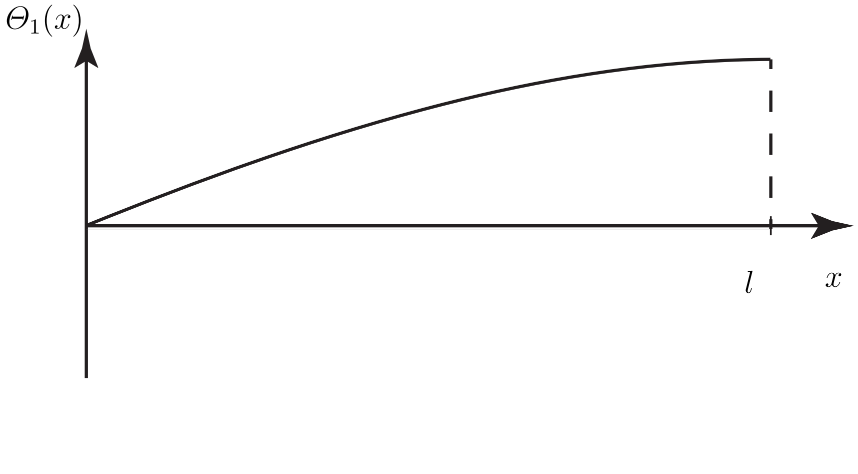
Rechnung:

Ergebnisse:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2l} \quad 1$$

$$\Theta_1(x) = C_2 \sin\left(\frac{\omega_1}{c}x\right) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \quad 1$$

Skizze:



2

d) Berechnen Sie mit Hilfe der im Aufgabenteil c) bestimmten ersten Eigenform $\Theta_1(x) = \tilde{\Theta}_1(x)$ als Ansatzfunktion eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Fall $\boldsymbol{\Theta^{(S)} > 0}$ mittels des Rayleigh-Quotienten. Prüfen Sie für den Fall $\boldsymbol{\Theta^{(S)} = 0}$ die Richtigkeit des Ergebnisses durch den Vergleich mit der ersten Eigenkreisfrequenz aus Aufgabenteil c).

Der Rayleigh-Quotient ist gegeben mit:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_p \tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \rho I_p \tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{d}x + \Theta^{(S)}\tilde{\Theta}_1^2(l)}$$

Hinweis:

$$\int \sin^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax - \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$
$$\int \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax + \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$

Rechnung:

$$\tilde{\Theta}_1(x) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)$$

$$\tilde{\Theta}_1'(x) = \frac{\pi}{2l}C_2\cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \quad 1$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{\int_0^l GI_p \cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \rho I_p \sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x + \Theta^{(S)}} \quad 1$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{GI_p\frac{l}{\pi}\left[\frac{\pi}{2l}x + \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right]_0^l}{\rho I_p\frac{l}{\pi}\left[\frac{\pi}{2l}x - \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right]_0^l + \Theta^{(S)}} \quad 1$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{GI_p\frac{l}{2}}{\rho I_p\frac{l}{2} + \Theta^{(S)}} \quad 1$$

Rechnung:

Rechnung:

Für $\Theta^{(S)} > 0$:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_p l}{\rho I_p l + 2\Theta^{(S)}}}$$ 1

Für $\Theta^{(S)} = 0$:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{G}{\rho}} = \omega_1$$ 1