

Projekt Wärmeleitung

Mario Kierstein* Vincent Helmrich[†] Johann Kammholz[‡]

14. August 2022

Institut für Mathematik
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Berlin

*Version vom 06. Juli 2017

[†]Version vom 14. Juli 2020

[‡]Version vom 14. August 2022

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen	1
1. Einleitung	1
2. Bilanzgleichungen	1
2.1. Herleitung der integralen Transportgleichung	3
3. Wärmeübertragung	4
3.1. Wärmeleitung	4
3.2. Konvektion	5
3.3. Wärmestrahlung	5
3.4. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	6
4. Randbedingungen	7
4.1. Dirichlet-Randbedingungen	8
4.2. Neumann-Randbedingungen	8
4.3. Robin-Randbedingungen	8
5. Gittertypen	9
5.1. Strukturierte Gitter	9
5.2. Unstrukturierte Gitter	9
5.3. Hybride Gitter	10
6. Kompassnotation	10
 II. Die Finite-Volumen-Methode	 11
7. Einleitung	11
8. Allgemeine Vorgehensweise	11
9. Beispiel: Temperaturverteilung in einer zweidimensionalen Platte	14
9.1. Diskretisierung des Rechengebiets	14
9.2. Stationärer Fall (räumliche Diskretisierung)	15
9.3. Unterschiedliche Leitfähigkeiten	18
9.4. Randvolumengleichung	18
9.4.1. Vorgegebene Temperatur (Dirichlet-Randbedingung)	19
9.4.2. Vorgegebene Wärmestromdichte (Neumann-/Robin-Randbedingung)	19
9.5. Entstehendes lineares Gleichungssystem	19
9.6. Instationärer Fall (räumliche Diskretisierung und Zeitintegration)	20
9.6.1. Herleitung der verwendeten Zeitintegrationsverfahren	21
9.7. Quelltermbehandlung	22

9.8. Stabilität der Verfahren	23
9.8.1. Von-Neumann-Stabilitätsanalyse	24

Teil I.

Grundlagen

1. Einleitung

Bei der Betrachtung physikalischer Vorgänge in Bezug auf geometrisch beliebig geformte Körper oder Räume, ist es im Allgemeinen nicht ohne Weiteres möglich, analytische Lösungen für die dem Problem zu Grunde liegende Differentialgleichung zu finden. Insbesondere die Erfüllung der Randbedingungen macht eine analytische Lösung mit den bekannten Funktionen oft unmöglich. Um dennoch eine Lösung zu erhalten, bedient man sich numerischer Methoden welche die Differentialgleichung näherungsweise lösen. Die Qualität der erhaltenen Lösung hängt dabei maßgeblich von der Ordnung der gewählten Näherungen und der Art der Diskretisierung selbst ab. Für die numerische Approximation von Differentialgleichungen gibt es eine Vielzahl von Verfahren. Die wohl drei bekanntesten Verfahren sind dabei

- die Finite-Volumen-Methode (FVM),
- die Finite-Element-Methode (FEM),
- und die Finite-Differenzen-Methode (FDM).

Welches Verfahren vorzugsweise für die Diskretisierung einer gegebenen Differentialgleichung angewendet wird, hängt stark von der dem Problem zugrundeliegenden physikalischen Beschreibung ab. So entstammt die der FEM zugrundeliegende mathematische Beschreibung der Lösung von Variationsproblemen, wie man sie aus der Mechanik kennt. Beispiele für solche Variationsprobleme sind das Prinzip von Hamilton oder das Verfahren von Ritz. Das macht die FEM zu einem Standardwerkzeug in der Strukturmechanik. Die FVM hingegen basiert auf dem Prinzip der Erhaltung von Masse und Energie. Diesem Umstand ist es zu verdanken, dass auch das Verfahren selbst einen Erhaltungsscharakter besitzt und garantiert, ungeachtet der Qualität der Näherungslösung, die Erhaltung der gesuchten Größe. Die FVM wird aus diesem Grund vorzugsweise in der numerischen Thermo- und Fluidodynamik eingesetzt. Die FDM hingegen diskretisiert eine beliebige Differentialgleichung direkt durch das Ersetzen der vorkommenden (partiellen) Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten. Der große Vorteil der FDM ist das sehr einfache Vorgehen.

2. Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen beschreiben allgemeingültige Prinzipien bzw. universelle Naturgesetze unabhängig von den speziellen Kontinuumsseigenschaften. Um z.B. Strömungsverhalten, den Wärmeübergang oder chemische Reaktionen beschreiben zu können, stellt man häufig Bilanzgleichungen auf. Diese Bilanzgleichungen basieren insbesondere auf der Bilanzierung von Erhaltungsgrößen wie der Masse, dem Impuls oder der Energie. Man kann

Bilanzgleichungen sowohl in integraler als auch in differentieller Form aufstellen. Wir beschränken uns in diesem Fall auf die integrale Darstellung.

Der Zustand eines beliebigen Systems wird durch die im System auftretenden physikalischen Größen definiert. Befindet sich das System in einem bestimmten Zustand, so bezeichnet man die physikalisch auftretenden Größen als Zustandsgrößen. Wie viele Zustandsgrößen benötigt werden, um ein System vollständig und eindeutig zu beschreiben hängt vor allem von der Anzahl der vorkommenden Stoffe und deren Aggregatzustand ab.

Für die Klassifizierung von Zustandsgrößen gibt es verschiedene Methodiken. Im Folgenden wird eine dieser Klassifizierungen vorgestellt:

- *Intensive Zustandsgrößen* sind Größen, deren Wert sich bei einer gedachten Teilung des Systems nicht ändert. Sie sind nicht massenproportional. Spezifische Größen sind demnach immer intensive Größen. Als Beispiel hierfür kann man z.B. die Temperatur, den Druck oder die Dichte eines Systems betrachten. Intensive Zustandsgrößen sind in der Kontinuumsstheorie in jedem Punkt des Systems definiert.
- *Extensive Zustandsgrößen* sind Größen, die massenproportional sind. Das bedeutet, dass sich die Größen bei einer Teilung des Systems auf die dann entstehenden Systeme aufteilen.

Betrachtet man den Zusammenhang zwischen extensiven und intensiven Größen, dann wird relativ schnell ersichtlich, dass zwei extensive Zustandsgrößen wieder eine intensive Zustandsgröße ergeben. Als Beispiel kann man hierbei den Quotienten aus Masse und Volumen nennen, welche beide extensive Größen sind. Die Größe, welche sich aus dem Verhältnis dieser beiden Größen ergibt ist die intensive Größe der Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.1)$$

Andersherum kann eine intensive Größe mit Hilfe von Integration in eine extensive Größe überführt werden. Hierfür sei als Beispiel das Integral der Dichte über das Volumen vorgestellt. Dieses beschreibt die Masse

$$m = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega, \quad (2.2)$$

welche eine extensive Größe ist. Dies lässt sich allgemein schreiben als

$$\varepsilon = \int_{\Omega} \phi \rho \, d\Omega = \int_{\Omega} \Phi \, d\Omega. \quad (2.3)$$

Dabei beschreibt ε eine beliebige extensive Zustandsgröße, Φ eine beliebige volumenspezifische intensive Zustandsgröße und ϕ eine beliebige massenspezifische intensive Zustandsgröße. Wir werden uns in der weiteren Herleitung auf die volumenspezifische Größe Φ beschränken. Es sei allerdings angemerkt, dass diese jederzeit mithilfe der Beziehung

$$\Phi = \phi \rho \quad (2.4)$$

umgeschrieben werden kann.

2.1. Herleitung der integralen Transportgleichung

Wir betrachten im Folgenden ein Bilanzgebiet Ω_t mit dem Rand Γ_t . Der Index t weist auf die zeitliche Abhängigkeit des Gebietes hin. Um eine allgemeine Transportgleichung herzuleiten wird die zeitliche Änderung einer extensiven Größe ε in dem Bilanzgebiet Ω_t betrachtet. Das hier betrachtete Bilanzgebiet zeichnet sich dadurch aus, dass sich sowohl seine Grenzen mit der Geschwindigkeit \vec{u} beliebig im Raum bewegen können, als auch, dass Materie, welche sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch den Raum bewegt, sowohl in das Bilanzgebiet herein als auch heraus fließen kann. Physikalisch betrachtet bedeutet dies, dass sich die Größe ε einerseits durch den Transport F durch die Oberfläche (den Rand) Γ_t des Bilanzgebietes ändern kann, als auch durch die Vernichtung bzw. Produktion Π innerhalb des Bilanzgebietes.

Man kann den Transport F in zwei Kategorien unterteilen: Zum einen den an Materie gebundenen Transport, dem konvektiven Fluss F_{Kon} , und zum anderen den nicht an Materie gebundenen Transport, dem diffusiven Fluss F_{Dif} . Man kann diesen Zusammenhang mit Einbeziehung der Veränderung innerhalb des Bilanzgebietes Π mathematisch formulieren durch die Gleichung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega = F_{\text{Kon}} + F_{\text{Dif}} + \Pi. \quad (2.5)$$

Wir definieren nun die diffusive Flussdichte $\dot{\vec{q}}$ sowie die Quelldichte π und berücksichtigen die klassische Definition für einen Flächennormalenvektor \vec{n} , welcher per Definition orthogonal zum Rand der Fläche gerichtet ist. Dann ergibt sich:

$$F_{\text{Kon}} = - \oint_{\Gamma_t} \Phi(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.6)$$

$$F_{\text{Dif}} = - \oint_{\Gamma_t} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.7)$$

$$\Pi = \int_{\Omega_t} \pi d\Omega \quad (2.8)$$

Wir können nun die Gleichungen (2.6), (2.7) und (2.8) in Gleichung (2.5) einsetzen und erhalten dann die integrale Transportgleichung in ihrer allgemeinsten Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega &= - \oint_{\Gamma_t} \Phi(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{n} d\Gamma - \oint_{\Gamma_t} \dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_t} \pi d\Omega \\ &= - \oint_{\Gamma_t} [\Phi(\vec{v} - \vec{u}) + \dot{\vec{q}}] \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_t} \pi d\Omega. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Weitere Spezialfälle sind zum Beispiel:

- materielles Bilanzgebiet: $\vec{u} = \vec{v}$
- ortsfestes Bilanzgebiet: $\vec{u} = 0$

Da unser Bilanzgebiet jedoch wie am Anfang des Abschnitts bereits erwähnt von der Zeit abhängig ist, kann die Ableitung auf der linken Seite von Gleichung (2.9) nicht in das Integral hineingezogen werden. Dieses Problem kann man mit Hilfe des Reynolds-Transport-Theorems lösen, welches mit geschickter Nulladdition und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes arbeitet. Man erhält damit für die linke Seite von Gleichung (2.9)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \vec{u}) d\Omega. \quad (2.10)$$

3. Wärmeübertragung

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Wärmeleitungsgleichung für ruhende Festkörper herzuleiten. Zuerst wird hierbei auf die unterschiedlichen Mechanismen der Wärmeübertragung eingegangen. Danach wird mithilfe der bereits hergeleiteten integralen Transportgleichung eine mathematische Beschreibung des Wärmeleitungsprozesses hergeleitet. Es gibt drei verschiedene physikalische Vorgänge, die es zu unterscheiden gilt:

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Wärmestrahlung

3.1. Wärmeleitung

Wärmeleitung basiert auf dem Austausch kinetischer Energie benachbarter Moleküle. Dabei wird kinetische Energie auf angrenzende Moleküle, welche geringere kinetische Energie besitzen, übertragen. Das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung besagt, dass die Wärmestromdichte \vec{q} proportional zum Temperaturgradienten ist:

$$\vec{q} \sim \nabla T \quad (3.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor ist die Wärmeleitfähigkeit λ . Diese ist eine Materialeigenschaft, die sowohl vom Druck, als auch von der Temperatur des Stoffes abhängen kann. Jedoch sind beide Werte bei Festkörpern so klein, dass sie vernachlässigbar sind und somit für λ ein konstanter Wert angenommen werden kann. Da nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik Wärme in Richtung abnehmender Temperaturen übertragen wird, folgt

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T. \quad (3.2)$$

Es gibt neben dem Fourierschen Gesetz auch noch weitere Gesetze, die jedoch für die im Ingenieurbereich auftretenden Probleme zu vernachlässigen sind.

3.2. Konvektion

Konvektion beschreibt die Wärmeübertragung zwischen einem Festkörper und einem strömenden Fluid. Diese basiert allerdings nicht alleine auf der Wärmeleitung zwischen benachbarten Molekülen, sondern hat zusätzlich den Effekt, dass Wärme auch über einen Massestrom übertragen wird. Deshalb ist insbesondere die Grenzschicht zwischen dem Feststoff und dem Fluid entscheidend für die Wärmeübertragung. Die Wärmestromdichte $\dot{\vec{q}}$ hängt dabei von vielen verschiedenen Größen wie der Geometrie, den Stoffwerten, der Grenzschicht und dem Strömungsverhalten ab. Man führt daher in der Praxis den Wärmeübergangskoeffizienten h ein, der die entsprechenden Einflussparameter berücksichtigt. Wir erhalten dann als Näherung für die konvektive Wärmestromdichte die Gleichung

$$\dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = h(T - T_\infty). \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet T die Temperatur des Festkörpers und T_∞ die Temperatur des strömenden Fluids außerhalb der Grenzschicht von Festkörper und Fluid.

3.3. Wärmestrahlung

Wärmestrahlung beschreibt die Energieübertragung in Form von elektromagnetischen Wellen. Im Gegensatz zur Wärmeleitung und der Konvektion ist die Energieübertragung hier nicht an Materie gebunden, sondern kann auch im Vakuum vollzogen werden. Die Energie kann dabei mit hoher Geschwindigkeit über weite Strecken transportiert werden. Jeder Körper dessen Temperatur über dem absoluten Nullpunkt liegt, wandelt innere Energie in elektromagnetische Strahlung um und emittiert diese.

Für die theoretische Berechnung geht man von idealisierten Körpern aus, sogenannten schwarzen Körpern. Die schwarzen Körper zeichnen sich dadurch aus, dass sowohl die maximale Wärmeabstrahlung bei einer bestimmten Temperatur erreicht, als auch die gesamte auf ihn einfallende Strahlung absorbiert wird. Im Gegensatz zu realen Körpern wird also weder Strahlung reflektiert noch transmittiert. Die maximale Wärmestromdichte, welche von einem schwarzen Körper im Vakuum in Form von Strahlung abgegeben werden kann, wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben:

$$\dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = \sigma T^4 \quad (3.4)$$

Dabei ist σ die Stefan-Boltzmann-Konstante mit dem Wert $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Dieser Wert wird allerdings nur von den idealisierten schwarzen Körpern erreicht. Für reale Körper erweitert man die Gleichung um den sogenannten Emissionsgrad $\epsilon \leq 1$. Für einen realen Körper gilt dann

$$\dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = \epsilon \sigma T^4. \quad (3.5)$$

Der Emissionsgrad ist dabei nicht nur abhängig vom Werkstoff, sondern auch von der Temperatur und der Oberflächenbeschaffung des betrachteten Körpers.

3.4. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung betrachten wir zunächst die in Abschnitt 2.1 hergeleitete integrale Transportgleichung für eine massenspezifische Größe. Mit Hilfe der Gleichungen (2.4), (2.9) und (2.10) erhalten wir

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \phi \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho \vec{u}) d\Omega = - \oint_{\Gamma_t} [\phi \rho (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{q}] \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_t} \pi d\Omega. \quad (3.6)$$

Wärme ist eine Form der Energie und unsere in diesem Zusammenhang zu bilanzierende Größe ϕ ist damit die massenspezifische Energie, die im System gespeichert ist.

Die massenspezifische Gesamtenergie eines Systems kann in die kinetische e_{kin} , potentielle e_{pot} und innere Energie u aufgeteilt werden. Da wir einen ruhenden Festkörper betrachten, sind sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie gleich null. Unsere zu bilanzierende Größe ϕ ist somit lediglich die massenspezifische innere Energie u des Systems. Diese kann für einen reinen Stoff durch zwei intensive Zustandsvariablen, wie zum Beispiel dem spezifischen Volumen v und der Temperatur T beschrieben werden. Die totale Änderung der inneren Energie ist somit

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv. \quad (3.7)$$

Da ein Festkörper in guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden kann, gilt $\rho = \text{const.}$ und daher auch $v = \text{const.}$ Mit dieser Annahme kann man Gleichung (3.7) vereinfachen zu

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT. \quad (3.8)$$

Die spezifische isochore Wärmekapazität ist definiert als $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$. Diese beschreibt einfach gesagt die Wärmemenge, welche benötigt wird um 1 kg Stoffmenge um 1 K zu erhitzen. Für das Modellmedium eines inkompressiblen Stoffes gilt außerdem $c_v = c_p = c$, wobei c_p die isobare Wärmekapazität beschreibt. Die spezifische Wärmekapazität c hängt in diesem Fall nur noch von der Temperatur ab. Für kleinere Temperaturbereiche kann c jedoch als konstant angenommen werden. Wir erhalten mit dieser Annahme dann durch Integration von Gleichung (3.8)

$$u(T) = u_0 + \int_{T_0}^T c dT = u(T) = u_0 + c(T - T_0). \quad (3.9)$$

Da wir ruhende Körper betrachten und diese eine konstante Dichte besitzen, gilt für die Geschwindigkeiten $\vec{u} = \vec{v} = 0$. Dies können wir zusammen mit Gleichung (3.9) in Gleichung (3.6) einsetzen. Wir erhalten dann

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(u_0 + c(T - T_0))}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \oint_{\Gamma_t} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_t} \pi d\Omega. \quad (3.10)$$

Dass in einer Energiebilanz ein Quellterm zugelassen wird, obwohl Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann, kommt daher, dass mit diesem Term jegliche Einflüsse modelliert werden können, die nicht über die Oberfläche wirken, wie zum Beispiel

die Wärmezufuhr für niederdimensionale Körper (1D, 2D) aus nicht berücksichtigten Dimensionen. Da an diesen Stellen keine Ränder definiert sind, kann der Einfluss offensichtlich nicht mit Hilfe eines Oberflächenintegrals modelliert werden, welches beschreibt wie die Energie über die Ränder in das Bilanzgebiet fließt. Aus physikalischer Sicht ist die Energie also plötzlich da, ohne über die Grenzen geflossen zu sein.

Wir setzen daher in Gleichung (3.10) noch für den Wärmestromdichte \vec{q} das Fouriersche Gesetz nach (3.2) ein und erhalten dann die Wärmeleitungsgleichung für Festkörper in integraler Form

$$\int_{\Omega_t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \oint_{\Gamma_t} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_t} \pi d\Omega. \quad (3.11)$$

Mit der Voraussetzung, dass der Integrand $\lambda \nabla T$ stetig differenzierbar ist, kann mithilfe des Gaußschen Integralsatzes die Gleichung (3.11) umgeschrieben werden zu

$$\int_{\Omega_t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega_t} (\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \pi) d\Omega. \quad (3.12)$$

Diese Gleichung gilt für alle und insbesondere beliebig kleine Gebiete Ω . Wenn die Integranden stetig sind, folgt die Wärmeleitungsgleichung für Festkörper in differentieller Form

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \pi. \quad (3.13)$$

4. Randbedingungen

Eine Differentialgleichung beschreibt in gewisser Weise das Verhalten einer oder mehrerer gesuchter Größen für jeden Punkt im Rechengebiet. Sie stellt Bedingungen an das Verhalten der gesuchten Lösungsfunktion. Das jeweilige stoffspezifische Verhalten wird dabei durch die entsprechenden stoffspezifischen Terme bzw. Konstanten definiert. Wie die Lösung aber endgültig aussieht wird erst durch die Randbedingungen festgelegt. Wird beispielsweise die Wärmeleitungsgleichung in differentieller Form aus Gleichung (3.13) betrachtet, so beschreibt diese die Wärmeausbreitung in einem beliebigen Festkörper. Genauer gesagt stellt sie Bedingungen an die gesuchte Temperaturfunktion, die diese erfüllen muss.

Die gesuchte Funktion muss so gewählt werden, dass sie Gleichung (3.13) erfüllt. Das stoffspezifische Verhalten wird durch die Dichte ρ , die spezifische Wärmekapazität c und die Wärmeleitfähigkeit λ definiert. Geht man nun beispielsweise davon aus, dass keine Quellen vorhanden sind, d.h. $\pi = 0$, so ist leicht ersichtlich, dass unter anderem jede konstante Funktion Gleichung (3.13) löst. Auch weitere Kandidaten, die die Differentialgleichung lösen, lassen sich bereits durch bloßes Hinsehen finden. Welche der vielen möglichen Funktionen nun aber die gesuchte Lösung ist, wird erst durch die Randbedingungen eindeutig festgelegt. So ist rein intuitiv schon klar, dass die Lösung für einen 20 °C heißen Stein, den man in einen aufgeheizten Backofen legt, anders aussehen muss, als wenn man ihn in Eiswasser schmeißt. Genau diese Interaktion mit der Umwelt wird durch die Randbedingungen spezifiziert.

Im Folgenden werden die für die Wärmeleitung typischen Randbedingungen einzeln vorgestellt:

- Dirichlet-Randbedingungen
- Neumann-Randbedingungen
- Robin-Randbedingungen

Jedem Element auf dem Rand Γ muss eine Randbedingung zugewiesen werden, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Allerdings können bei einem physikalischen Problem sehr wohl unterschiedliche Randbedingungen entlang der Ränder auftreten. In diesem Fall spricht man von *gemischten Randbedingungen*.

4.1. Dirichlet-Randbedingungen

Die Dirichlet-Randbedingung ist eine Randbedingung, die den Verlauf der gesuchten Temperaturfunktion auf dem Rand vorgibt. Wir bezeichnen diese vorgegebene Funktion, die durchaus auch nur ein konstanter Wert sein kann, mit T_0 . Die Randbedingung lautet dann

$$T = T_0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (4.1)$$

Im Fall $T_0 = 0$ bezeichnen wir die Randbedingung als homogen.

4.2. Neumann-Randbedingungen

Die Neumann-Randbedingung gibt, anders als die Dirichlet-Randbedingung, keinen Verlauf der Temperaturfunktion auf dem Rand vor. Stattdessen wird eine Wärmestromdichte vorgegeben. Die Wärmestromdichte über den Rand bezeichnen wir mit \dot{q}_B . Dies ist genau der Anteil von $\vec{\dot{q}}$, der entgegengesetzt zur Richtung des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors \vec{n} fließt. Die Wärmestromdichte \dot{q}_B wird positiv gezählt, wenn der Wärmestrom in das betrachtete Gebiet Ω hinein strömt. Die Randbedingung lautet unter Verwendung von Gleichung (3.2) in diesem Fall

$$\vec{\dot{q}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -\dot{q}_B \quad \text{auf } \Gamma. \quad (4.2)$$

Zu beachten ist an dieser Stelle, dass ein Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen keine eindeutige Lösung besitzt.

4.3. Robin-Randbedingungen

Die Robin-Randbedingung beschreibt den Austausch von Wärme über den Rand aufgrund von Konvektion. Die theoretischen Grundlagen dieses Übergangs wurden bereits in Abschnitt 3.2 behandelt. Auch hier gilt wieder, dass nur der Anteil von $\vec{\dot{q}}$ den Rand überschreitet, welcher in Richtung des Normaleneinheitsvektors \vec{n} zeigt. Die Randbedingung an die gesuchte Lösungsfunktion ist somit

$$\vec{\dot{q}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = h(T - T_\infty) \quad \text{auf } \Gamma. \quad (4.3)$$

Mathematisch gesehen stellen Robin-Randbedingungen eine Kombination von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen dar, weil auf dem Rand eine Linearkombination von Funktionswert und Wert der Ableitung vorgegeben wird.

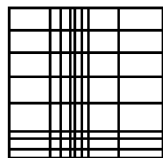
5. Gittertypen

Um eine partielle Differentialgleichung mit numerischen Methoden lösen zu können, muss das Rechenggebiet zuerst diskretisiert werden. Dies bedeutet, dass die unendliche Anzahl von Freiheitsgraden auf eine endliche (finite) Anzahl reduziert wird. Je mehr Freiheitsgrade einem System zugesprochen werden, desto genauer wird im Allgemeinen die Lösung. Mit steigender Anzahl an Freiheitsgraden steigt allerdings auch der Rechenaufwand. Bei der räumlichen Diskretisierung unterscheidet man zwischen strukturierten und unstrukturierten Gittern, welche im Folgenden kurz gegenübergestellt werden.

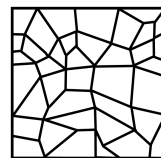
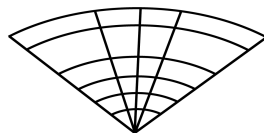
5.1. Strukturierte Gitter

Strukturierte Gitter sind durch eine regelmäßige Topologie gekennzeichnet, haben jedoch nicht notwendigerweise eine gleichbleibende Zellgeometrie, siehe Abbildung 5.1a. Das bedeutet, dass man die Lage jeder Zelle eindeutig bestimmen kann, indem man jeder Dimension einen Index zuspricht. Eindimensionale Gitter sind somit immer strukturiert.

Der Vorteil eines strukturierten Gitters liegt darin, dass sich für eine beliebige Zelle ihre Nachbarzellen leicht identifizieren lassen. Dies ist für das Aufstellen des Gleichungssystems und der späteren Berechnung von großem Vorteil. Für komplexere Geometrien lassen sich unter Zuhilfenahme krummliniger Koordinaten körperangepasste Gitter konstruieren, deren Berechnung selbst aber sehr aufwändig sein kann. Ein großer Nachteil strukturierter Gitter ist, dass man gewünschte Bereiche nicht beliebig lokal verfeinern kann.



(a) Strukturierte Gitter mit regelmäßiger Topologie.



(b) Unstrukturierte Gitter ohne fester Topologie.

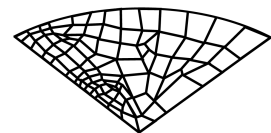


Abbildung 5.1: Strukturierte und unstrukturierte Gitter.

5.2. Unstrukturierte Gitter

Unstrukturierte Gitter haben weder eine regelmäßige Topologie, noch eine regelmäßige Zellgeometrie, siehe Abbildung 5.1b. Daher sind diese Gitter sehr leicht automatisiert zu generieren. Insbesondere bei adaptiven Verfahren sind unstrukturierte Gitter sehr von Vorteil, da sie lokal beliebig verfeinert werden können, ohne dass dies Auswirkungen auf

andere Bereiche hat. Das bedeutet also, dass zusätzliche Freiheitsgrade genau da etabliert werden können, wo sie gebraucht werden. Die Verwendung solcher Gitter ist aber deutlich aufwändiger, da die Identifizierung einer Zelle mitsamt ihrer Nachbarzellen nicht mehr durch Inkrementierung der Indizes möglich ist (aufwendiges *bookkeeping*). Für jede Zelle muss somit die genaue Lage ihrer Knoten und Nachbarzellen gespeichert werden oder ihre Nachbarzellen müssen kostspielig berechnet werden.

5.3. Hybride Gitter

Hybride Gitter sind sowohl aus strukturierten als auch aus unstrukturierten Gittern zusammengesetzt. Sie nutzen somit den Vorteil der leichten Steuerbarkeit strukturierter Gitter, wie auch die größere Flexibilität in Bezug auf komplexe Geometrien oder lokale Verfeinerungen unstrukturierter Gitter.

6. Kompassnotation

Bei der Herleitung einer allgemeingültigen Gleichung für eine beliebige Zelle auf einem strukturierten Gitter bedient man sich bei der Finiten-Volumen-Methode für eine bessere Übersicht der sogenannten Kompassnotation. Betrachtet man eine beliebige Zelle und identifiziert den Rechenpunkt in dieser mit dem Index P , so können alle umliegenden Punkte nach den Himmelsrichtungen bezeichnet werden. Die Buchstaben der Indizes sind dabei von den englischen Bezeichnungen der Himmelsrichtungen abgeleitet:

- N/n = north
- E/e = east
- S/s = south
- W/w = west

Die Großbuchstaben werden dabei für Rechenpunkte verwendet, während Kleinbuchstaben für die Grenzen einer Zelle stehen, siehe Abbildung 6.1.

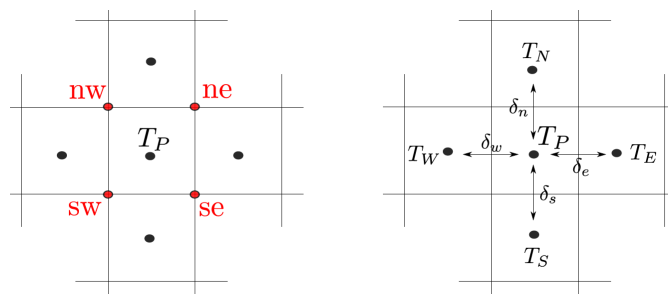


Abbildung 6.1: Ausschnitt einer Zelle und ihrer Nachbarzellen eines strukturierten Gitters in 2D zur Verdeutlichung der Kompassnotation. Links sind Zellgrenzen und rechts Nachbarzellen sowie der Gitterabstand bezeichnet.

Teil II.

Die Finite-Volumen-Methode

7. Einleitung

In diesem Teil wird das Vorgehen der Finiten-Volumen-Methode zur Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen in seinen Grundzügen vorgestellt. Nach einer allgemeinen Beschreibung der Vorgehensweise im nächsten Abschnitt wird im Anschluss ein konkretes, aber sehr einfaches Beispiel betrachtet, um die Herangehensweise zu veranschaulichen. Als Modellproblem dient die Wärmeleitungsgleichung für Festkörper, wie sie in Abschnitt 3.4 hergeleitet wurde. Da diese Gleichung nur einen Diffusionsprozess und keinen gerichteten Transport beschreibt, ist sie verhältnismäßig leicht mit numerischen Methoden zu lösen. Natürlich kann man diese Differentialgleichung für einige Spezialfälle auch analytisch lösen. Im allgemeinen Fall, also bei der Betrachtung eines beliebig geformten Körpers im zwei- oder dreidimensionalen Raum mit beliebig gearteten Randbedingungen, ist man aber beim Lösen der Gleichung auf numerische Methoden angewiesen. Da die Diskretisierung der instationären Gleichung nur einer geringen Modifikation der diskretisierten stationären Gleichung bedarf, wird für eine übersichtlichere Darstellung zuerst nur auf die numerische Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung eingegangen. Im darauf folgenden Abschnitt wird weiter anhand des Beispiels das Einbinden der drei für die Wärmeleitung typischen Randbedingungen aus Abschnitt 4 exemplarisch erläutert. Nachdem dann für die stationäre Wärmeleitungsgleichung eine sogenannte allgemeine Kontrollvolumengleichung hergeleitet wurde, wird die instationäre Wärmeleitungsgleichung betrachtet. Die unter Einbeziehung der örtlichen Diskretisierung semidiskrete Wärmeleitungsgleichung entspricht formal nur noch einer gewöhnlichen Differentialgleichung und kann mit den bekannten Methoden für solche, wie z.B. dem Runge-Kutta-Verfahren gelöst werden. Hergeleitet werden in diesem Abschnitt nur drei der im Zusammenhang mit der FVM aufgrund ihrer Einfachheit häufig verwendeten Zeitintegrationsverfahren:

- implizites Euler-Verfahren
- explizites Euler-Verfahren
- Crank-Nicolson-Verfahren

Im letzten Abschnitt wird mithilfe der Von-Neumann-Stabilitätsanalyse die Stabilität der vorher hergeleiteten Zeitintegrationsverfahren untersucht. Die Konsistenz und Konvergenz der Verfahren werden nicht näher betrachtet.

8. Allgemeine Vorgehensweise

Die FVM ist ein numerisches Verfahren zum Lösen partieller Differentialgleichungen, denen ein Erhaltungssatz zugrunde liegt. Sie approximiert dabei die integrale Erhaltungs-

gleichung wie sie in Abschnitt 2.1 hergeleitet wurde. Die grundlegende Vorgehensweise ist dabei die Folgende:

1. Diskretisierung des Rechengebiets
2. Identifikation der Kontrollvolumen und Integration der Erhaltungsgleichung über diese Kontrollvolumen
3. Numerische Approximation der auftretenden Integrale und Ableitungen
4. Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems

Das betrachtete Rechengebiet wird zunächst in N Zellen Ω_i mit $i = 1, \dots, N$ zerlegt. Die Zerlegung muss dabei folgende Bedingungen erfüllen:

- $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$

Dies bedeutet lediglich, dass die Zellen, in die das Gebiet eingeteilt wird, sich weder überlappen dürfen, noch Lücken zwischen ihnen auftreten können. Grundsätzlich können für die Diskretisierung sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Gitter gewählt werden, vgl. Abschnitt 5. Diese Wahlfreiheit ermöglicht eine große Flexibilität bezüglich der Gittergenerierung (*mesh generation*) bei komplexen Strukturen.

Nachdem das Gebiet in einzelne Zellen eingeteilt wurde, wird eine endliche (finite) Anzahl an Rechenpunkten festgelegt. Um diese Rechenpunkte werden wiederum sogenannte Kontrollvolumen gelegt. Kontrollvolumen sind kleine Gebiete, über die die integrale Erhaltungsgleichung integriert wird. Da es eine Bilanzgleichung ist, muss sie für das gesamte untersuchte Gebiet erfüllt sein, insbesondere aber auch für jedes beliebig kleine Volumen, also auch für jedes Kontrollvolumen. Der Grund weshalb man die Gleichung einzeln über die Kontrollvolumen integriert, ist, dass nun Approximationen für die auftretenden Integrale und Ableitungen in der Bilanzgleichung eingesetzt werden können. Die Kontrollvolumen müssen dabei so klein gewählt werden, dass die Approximation der auftretenden Ausdrücke durch einfache numerische Näherungen gerechtfertigt ist. Für die Auswertung dieser Approximationen werden dann die vorher festgelegten diskreten Rechenpunkte verwendet. Je nachdem wo diese Rechenpunkte auf dem Gitter definiert werden, unterscheidet man zwei Vorgehensweisen:

- cell-centered FVM
- cell-vertex FVM

Bei der cell-centered FVM werden die Rechenpunkte direkt im Inneren, meist im Schwerpunkt, der vorher eingeteilten Zellen definiert. Die Kontrollvolumen sind in diesem Fall also mit den Zellen identisch. Bei der cell-vertex FVM hingegen werden die Rechenpunkte in den Ecken der Zellen definiert. Die Kontrollvolumen werden dann in der Regel um diese herum gelegt. Die Kontrollvolumen sind bei der cell-vertex FVM also

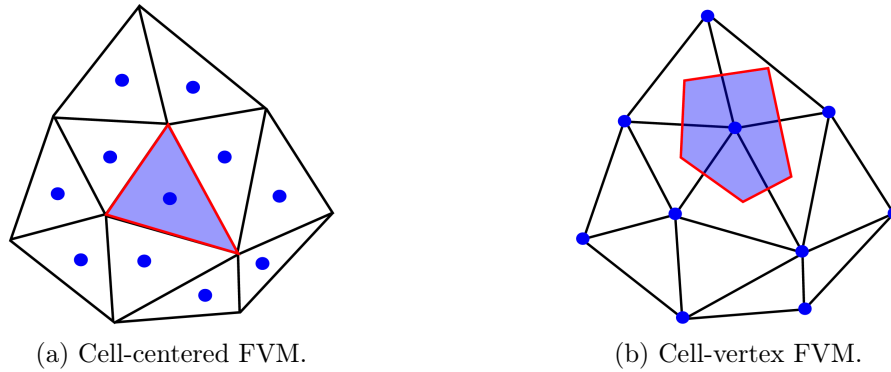


Abbildung 8.1: Vergleich einer Diskretisierung mit cell-centered FVM und cell-vertex FVM. Die roten Linien kennzeichnen die Ränder des blau hinterlegten Kontrollvolumens. Die Rechenpunkte sind durch blaue Kreise dargestellt.

nicht identisch mit den vorher definierten Gitterzellen. Abbildung 8.1 verdeutlicht diesen Unterschied grafisch.

Der hauptsächliche Vorteil der cell-vertex FVM liegt darin, dass die Kontrollvolumen nicht vom Meshgenerator, sondern vom Finite-Volumen-Code generiert werden. Es gibt dabei unterschiedliche Methoden wie man an dieser Stelle vorgehen kann, um die Kontrollvolumen zu definieren. In dem Beispiel in Abbildung 8.1b wurde das Kontrollvolumen mithilfe von Delaunay-Triangulierung und eines Voronoi-Diagramms festgelegt. Da in diesem Projekt nur von einfachen, rechteckigen Strukturen ausgegangen wird, welche mit der cell-centered FVM diskretisiert werden, wird die Vorgehensweise bei der cell-vertex FVM an dieser Stelle nicht weiter vertieft.

Durch Einsetzen geeigneter Approximationen für die auftretenden Integrale und Ableitungen wird die integrale Erhaltungsgleichung (eine partielle Integrodifferentialgleichung) in eine algebraische Gleichung mit endlich vielen Unbekannten überführt. Grundsätzlich unterscheidet man die Diskretisierungen nach folgenden Merkmalen:

- Form und Lage der Kontrollvolumen
- Lage der Unbekannten
- Approximation der Integrale und Ableitungen

Für jedes Kontrollvolumen wird eine Gleichung aufgestellt. Durch geeignete Rand- und Übergangsbedingungen stellt man die Abhängigkeit der Kontrollvolumen untereinander bzw. von der Umgebung dar. Wurden N unabhängige Gleichungen für N Unbekannte aufgestellt, so ist das Problem eindeutig bestimmt und kann anschließend gelöst werden.

Besonders verbreitet ist die FVM in der numerischen Thermo- und Fluidodynamik. Da diese Methode über eine integrale Form der Erhaltungsgleichung hergeleitet wird, darf die gesuchte Größe auch an endlich vielen Stellen unstetig sein. Insbesondere bei der Betrachtung von Stößen oder anderen unstetigen Vorgängen ist diese Eigenschaft von großer

Bedeutung. Die FVM ist zudem eine konservative Methode, da sie die Erhaltungseigenschaft in jedem Kontrollvolumen gewährleistet. Dies ist für ein numerisches Verfahren keinesfalls selbstverständlich. Der Grund für den Erhaltungscharakter der FVM ist, dass der Fluss in und aus einem Kontrollvolumen heraus für jedes Volumen einzeln bilanziert wird. Durch Übergangsbedingungen ist sichergestellt, dass in ein beliebiges Kontrollvolumen nur das hereinfließen kann, was aus den Nachbarvolumen herausgeflossen ist, und umgekehrt. Dies macht sich insbesondere bei der Diskretisierung von Energie- und Massebilanzen positiv bemerkbar, da durch Diskretisierungsfehler weder Masse noch Energie erzeugt oder vernichtet werden kann. Auch wenn also der Fehler aufgrund einer zu groben Diskretisierung sehr groß wird, ist trotzdem noch eine globale und lokale Erhaltung der Erhaltungsgröße über jedes Kontrollvolumen gewährleistet.

9. Beispiel: Temperaturverteilung in einer zweidimensionalen Platte

Um ein besseres Gefühl für das Vorgehen bei der Finiten-Volumen-Methode zu erhalten, wird ein einfaches Beispiel vorgestellt. Betrachtet wird die Temperaturverteilung in einer Platte. Die Dicke der Platte sei dabei so klein gegenüber den anderen Abmessungen, dass die Annahme einer konstanten Temperaturverteilung über die Dicke gerechtfertigt ist und das Problem somit als zweidimensional betrachtet werden kann. Eine Darstellung des Problems ist in Abbildung 9.1 gezeigt.

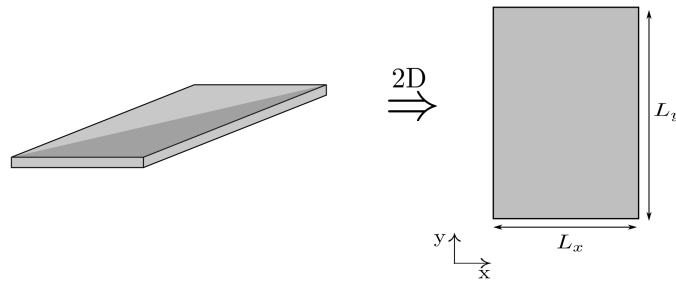


Abbildung 9.1: Beispiel einer zweidimensionalen Platte der Größe $L_x \times L_y$.

9.1. Diskretisierung des Rechengebiets

Um mithilfe der Finiten-Volumen-Methode eine Näherungslösung zu berechnen, wird das Rechengebiet zuerst diskretisiert. Für die Diskretisierung wird ein strukturiertes kartesisches Gitter gewählt, siehe Abbildung 9.2. Die Gitterabstände in x -Richtung seien dabei konstant mit $\Delta x = \frac{L_x}{n_x}$, wobei n_x die Anzahl der Zellen und L_x die Länge der Platte in x -Richtung bezeichnet. Analog ist $\Delta y = \frac{L_y}{n_y}$.

Die Rechenpunkte werden in diesem Beispiel nach der cell-centered FVM zugewiesen. Das bedeutet also, dass diese im Schwerpunkt der gerade eingeteilten Gitterzellen liegen.

Die Kontrollvolumen sind damit identisch zu den Gitterzellen. Die diskreten Rechenpunkte sind bei dem gewählten äquidistanten Gitter dann definiert durch

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot \Delta x - \frac{\Delta x}{2} \\ j \cdot \Delta y - \frac{\Delta y}{2} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

mit $i \in \{1, 2, \dots, n_x\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n_y\}$.

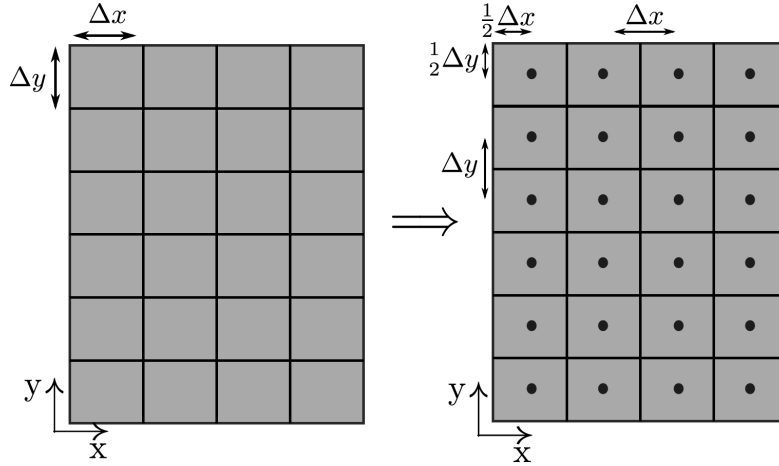


Abbildung 9.2: Diskretisierung nach der cell-centered FVM. Links sind die Gitterzellen und rechts die Rechenpunkte im Mittelpunkt der Gitterzellen zu sehen.

9.2. Stationärer Fall (räumliche Diskretisierung)

Im ersten Schritt wird nur die stationäre Temperaturverteilung betrachtet. Alle Gleichungen werden dabei also für den Fall $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ hergeleitet. Dies ist gerade der Gleichgewichtszustand, bei dem sich die Temperaturverteilung auf makroskopischer Ebene nicht mehr ändert. Die Erweiterung auf den instationären Fall kann durch wenige Änderungen erfolgen und wird im Anschluss erläutert.

Bei der Herleitung der Gleichungen für die einzelnen Kontrollvolumen unterscheidet man zwischen Randzellen und inneren Zellen. Innere Zellen sind Kontrollvolumen, die nicht am Rand liegen, und somit keine Randbedingungen erfüllen müssen. Da jede Kontrollvolumengleichung einer inneren Zelle dieselbe Struktur hat, spricht man von einer allgemeinen Kontrollvolumengleichung. Ausgangspunkt für die Herleitung ist die integrale Wärmeleitungsgleichung aus Gleichung (3.11). Diese lautet

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \oint_{\Gamma} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \pi d\Omega. \quad (9.2)$$

Wegen des festen räumlichen Gebietes wurde der Index t weggelassen. Da vorerst nur die stationäre Temperaturverteilung betrachtet wird, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$0 = \oint_{\Gamma} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \pi d\Omega. \quad (9.3)$$

Gesucht ist allgemein eine Funktion $T(x, y)$, welche sowohl die jeweiligen Randbedingungen, als auch Gleichung (9.3) selbst erfüllt. Wie im vorigen Abschnitt beschrieben muss die Erhaltungsgleichung für jedes beliebige Teilgebiet erfüllt sein, also insbesondere auch für jedes Kontrollvolumen. Somit gilt

$$0 = \oint_{\Gamma_{ij}} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega_{ij}} \pi d\Omega \quad (9.4)$$

für alle i, j , wobei Ω_{ij} die einzelnen Kontrollvolumen mit dem jeweiligen Rand Γ_{ij} bezeichnet.

Das Oberflächenintegral in Gleichung (9.4) kann in die Teilgebiete zerlegt werden, auf denen der Normaleneinheitsvektor \vec{n} konstant ist. Eine schematische Darstellung eines inneren Kontrollvolumens ist in Abbildung 9.3 unter Anwendung der Kompassnotation gezeigt.

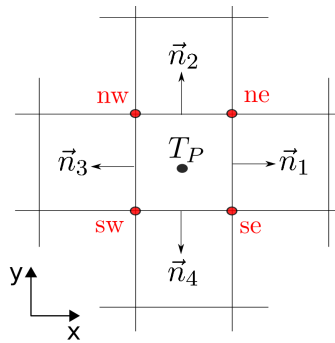


Abbildung 9.3: Kontrollvolumen mit den vier Normaleneinheitsvektoren an den Rändern.

Gleichung (9.4) lässt sich damit in der Form

$$0 = \sum_{k=1}^4 \left(\int_{\Gamma_{ij,k}} \lambda \nabla T \cdot \vec{n}_k d\Gamma \right) + \int_{\Omega_{ij}} \pi d\Omega \quad (9.5)$$

schreiben, wobei die Normaleneinheitsvektoren gegeben sind durch

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Setzt man nun Gleichung (9.6) in Gleichung (9.5) ein, multipliziert aus und beachtet die Kompassnotation, so ergibt dies

$$0 = \int_{se}^{ne} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_{ne}^{nw} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx - \int_{nw}^{sw} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_{sw}^{se} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx + \int_w^e \int_s^n \pi dy dx. \quad (9.7)$$

Bis hierhin ist die Gleichung noch mathematisch exakt. An dieser Stelle müssen geeignete Näherungen sowohl für die Integrale, als auch für die Ableitungen gefunden werden.

Benutzt man für die Approximation der Integrale die Mittelpunktsregel so wird aus Gleichung (9.7) nun

$$0 = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e \Delta y + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n \Delta x - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \Delta y - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s \Delta x + \pi_P \Delta x \Delta y + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2). \quad (9.8)$$

Der aufgrund der eingesetzten Approximationen gemachte Fehler wird in Gleichung (9.8) durch die Landau-Symbole berücksichtigt. Als Approximation für die Ableitungen wird aufgrund des diffusiven Charakters der Wärmeleitungsgleichung ein zentraler Differenzenquotient gewählt. Damit ergibt sich

$$0 = \lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta_e} \Delta y + \lambda_n \frac{T_N - T_P}{\delta_n} \Delta x + \lambda_w \frac{T_W - T_P}{\delta_w} \Delta y + \lambda_s \frac{T_S - T_P}{\delta_s} \Delta x + \pi_P \Delta x \Delta y + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) + \mathcal{O}(\delta_e^2) + \mathcal{O}(\delta_n^2) + \mathcal{O}(\delta_w^2) + \mathcal{O}(\delta_s^2). \quad (9.9)$$

Ist das Gitter in alle Richtungen äquidistant, d.h. gilt

$$\Delta x = \Delta y = \delta_e = \delta_n = \delta_w = \delta_s =: h, \quad (9.10)$$

kann der Fehlerterm zusammengefasst werden zu

$$\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) + \mathcal{O}(\delta_e^2) + \mathcal{O}(\delta_n^2) + \mathcal{O}(\delta_w^2) + \mathcal{O}(\delta_s^2) = \mathcal{O}(h^2). \quad (9.11)$$

Gleichung (9.9) ist nun die vollständig diskretisierte, stationäre Wärmeleitungsgleichung für ein beliebiges inneres Kontrollvolumen. Der unbekannte Temperaturverlauf wird nur noch durch diskrete Temperaturwerte im Schwerpunkt der Kontrollvolumen ausgedrückt und nicht mehr als stetige Funktion des Ortes.

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$a_E := \frac{\lambda_e}{\delta_e} \Delta y, \quad a_N := \frac{\lambda_n}{\delta_n} \Delta x, \quad a_W := \frac{\lambda_w}{\delta_w} \Delta y, \quad a_S := \frac{\lambda_s}{\delta_s} \Delta x \quad (9.12)$$

und

$$a_P := a_E + a_N + a_W + a_S \quad (9.13)$$

sowie

$$\tilde{S}_P := \pi_P \Delta x \Delta y \quad (9.14)$$

lässt sich die allgemeine Kontrollvolumengleichung (9.9) vereinfacht schreiben als

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_W T_W + a_S T_S + \tilde{S}_P, \quad (9.15)$$

wobei der Fehlerterm nicht mehr explizit aufgeschrieben wurde. Er ist aber selbstverständlich dennoch vorhanden.

9.3. Unterschiedliche Leitfähigkeiten

Bei der bisherigen Diskretisierung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass das gesamte zu diskretisierende Gebiet aus nur einem Material besteht. Aufgrund der verwendeten Approximationen soll auch weiterhin gelten, dass ein Kontrollvolumen jeweils nur aus einem Material besteht. Unterschiedliche Kontrollvolumen hingegen dürfen auch aus unterschiedlichen Materialien bestehen. Was geschieht nun aber, wenn zwei angrenzende Kontrollvolumen jeweils unterschiedliche Materialien enthalten? Betrachtet man noch einmal Gleichung (9.9), so wird deutlich, dass die Leitfähigkeiten λ genau am Rand der Kontrollvolumen ausgewertet werden. Bestehen die Kontrollvolumen aber aus unterschiedlichen Materialien, so hat die Funktion $\lambda(x, y)$ gerade an dieser Stelle einen Sprung. Die wohl intuitivste Lösung ist es, das arithmetische Mittel der Leitfähigkeiten zu bilden, also zum Beispiel

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2}. \quad (9.16)$$

Wenn λ_P und λ_E von derselben Größenordnung sind, ist dies eine sinnvolle Näherung. Bei großen Änderungen der Leitfähigkeit wird das Ergebnis durch diese Mitteilung allerdings stark verfälscht. Um zu verstehen, warum das arithmetische Mittel in diesem Fall keine sinnvolle Näherung darstellt, wollen wir den Fall betrachten, dass ein Baumaterial (z.B. Holz) an eine nahezu perfekte Dämmung angrenzt. Ist λ_P nun die Leitfähigkeit des Baumaterials und λ_E die Leitfähigkeit des Dämmmaterials, so gilt $\lambda_P \gg \lambda_E$. Für die gemittelte Leitfähigkeit λ_e würde dann aber gelten

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2} \approx \frac{\lambda_P}{2}. \quad (9.17)$$

Es käme also auf Grund der arithmetischen Mittelung noch zu einer beträchtlichen Wärmeübertragung zwischen den Kontrollvolumen. Insbesondere für solche Extremfälle stellt das harmonische Mittel eine wesentlich bessere Näherung dar. Mit diesem erhält man für die gemittelte Leitfähigkeit

$$\lambda_e = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_P} + \frac{1}{\lambda_E}} = \frac{2\lambda_P\lambda_E}{\lambda_E + \lambda_P}. \quad (9.18)$$

Ist nun also λ_E oder λ_P sehr klein, so ist auch λ_e entsprechend klein.

9.4. Randvolumengleichung

Mit der allgemeinen Kontrollvolumengleichung (9.15) kann nun für jedes innere Kontrollvolumen eine Gleichung zur Berechnung der unbekannten Temperatur aufgestellt werden. Um Gleichungen für die Randvolumen zu erhalten, müssen bei der Herleitung die im jeweiligen Problem gegebenen Randbedingungen berücksichtigt werden. Im Folgenden wird das Einbinden der drei für die Wärmeleitung typischen Randbedingungen exemplarisch vorgestellt.

9.4.1. Vorgegebene Temperatur (Dirichlet-Randbedingung)

Die Berücksichtigung einer Dirichlet-Randbedingung ist besonders einfach. Bei dieser Art von Randbedingung ist ein bestimmter Temperaturverlauf T_0 auf dem Rand vorgegeben. Für jedes Kontrollvolumen ist nur ein Temperaturwert im Schwerpunkt des Kontrollvolumens definiert, d.h. die Temperatur wird als konstant über das Kontrollvolumen angenommen. Ist also für ein Kontrollvolumen die Temperatur am Rand vorgegeben, so ist diese auch gleich der Temperatur für das gesamte Kontrollvolumen. Die Gleichung zur Berechnung der unbekannten Temperatur ist damit einfach

$$T_P = T_0. \quad (9.19)$$

9.4.2. Vorgegebene Wärmestromdichte (Neumann-/Robin-Randbedingung)

Bei Neumann- und Robin-Randbedingungen aus Gleichungen (4.2) und (4.3) wird die Wärmestromdichte \dot{q} über den Rand vorgegeben. Für die Herleitung der Randvolumengleichung geht man vollkommen analog zur Herleitung der allgemeinen Kontrollvolumengleichung vor. Der einzige Unterschied ist, dass man an gegebener Stelle die Randbedingung, also die vorgegebene Wärmestromdichte, in die Gleichung einsetzt, anstatt alle Wärme Flüsse über die Zellränder zu approximieren. Die letzte noch mathematisch exakte Gleichung ist Gleichung (9.7) mit

$$0 = \int_{se}^{ne} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_{ne}^{nw} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx - \int_{nw}^{sw} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_{sw}^{se} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx + \int_w^e \int_s^n \pi dy dx. \quad (9.20)$$

Mit dem Zusammenhang aus dem Fourierschen Gesetz aus Gleichung (3.2), der

$$\dot{\vec{q}} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -\lambda \nabla T \cdot \vec{n} \quad (9.21)$$

lautet, kann die über den Zellrand oder mehrere Zellränder gegebene Wärmestromdichte direkt in Gleichung (9.20) eingesetzt werden. Die Integrale und alle nicht vorgegebenen Wärme Flüsse (Ableitungen) werden wie in Abschnitt 9.2 gezeigt approximiert.

9.5. Entstehendes lineares Gleichungssystem

Wird mit den vorgestellten Methoden nun eine Gleichung für jedes Kontrollvolumen aufgestellt, so ergeben sich bei N Kontrollvolumen mit N zu berechnenden Temperaturwerten insgesamt N lineare Gleichungen. Diese Gleichungen können in einem linearen Gleichungssystem der Form

$$A\vec{T} = \vec{S} \quad (9.22)$$

zusammengefasst und nach \vec{T} gelöst werden. Der Vektor \vec{T} enthält die unbekannten Temperaturwerte und die rechte Seite \vec{S} alle bereits bekannten Werte, welche nicht von der Temperatur abhängen. Bei einem strukturierten Gitter ist die sich ergebende Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ eine dünnbesetzte Matrix (*sparse matrix*) mit einer Bandstruktur (*band*

matrix). Werden die Kontrollvolumen spaltenweise von oben links nach unten rechts durchnummeriert, hat die Matrix die Struktur

$$A = \begin{bmatrix} -a_P & a_S & & a_E & & 0 \\ a_N & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_E \\ a_W & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & a_S \\ 0 & & a_W & & a_N & -a_P \end{bmatrix}, \quad (9.23)$$

wobei hier noch keine Randbedingungen berücksichtigt wurden. Die Matrix A ist bis auf 5 Diagonalen nur mit Nullen besetzt. Der Vorteil solcher Matrizen ist, dass man diese im Gegensatz zu vollbesetzten Matrizen wesentlich platzsparender speichern und das zugehörige Gleichungssystem deutlich effizienter lösen kann.

9.6. Instationärer Fall (räumliche Diskretisierung und Zeitintegration)

Bis jetzt haben wir die stationäre Temperaturverteilung in der Platte betrachtet und mit Hilfe der Finiten-Volumen-Methode die Wärmeleitungsgleichung räumlich diskretisiert. Durch die Diskretisierung haben wir die partielle Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung überführt. Im Folgenden wird nun die Erweiterung auf den instationären Fall betrachtet. Wir starten erneut bei der Wärmeleitungsgleichung für ruhende Festkörper (3.11), die wir uns nochmal in Erinnerung rufen. Es gilt

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \oint_{\Gamma} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \pi d\Omega. \quad (9.24)$$

Die Diskretisierung der rechten Seite ist bereits bekannt aus Gleichung (9.15), sodass wir

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = -a_P T_P + a_E T_E + a_N T_N + a_W T_W + a_S T_S + \tilde{S}_P \quad (9.25)$$

erhalten, wobei die Fehlerterme direkt vernachlässigt wurden.

Unter der Annahme, dass sich sowohl die Dichte ρ als auch die spezifische Wärmekapazität c innerhalb eines Kontrollvolumens nicht ändert, können diese vor das Integral gezogen werden. Damit ergibt sich

$$\rho_{PCP} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = -a_P T_P + a_E T_E + a_N T_N + a_W T_W + a_S T_S + \tilde{S}_P. \quad (9.26)$$

Der Index P bei der Dichte und der Wärmekapazität verdeutlicht, dass die Werte jeweils innerhalb der betrachteten Zelle ausgewertet werden. Das auftretende Volumenintegral wird durch die Mittelpunktsregel approximiert und man erhält unter Vernachlässigung des Fehlerterms

$$\rho_{PCP} \frac{\partial T_P}{\partial t} \Delta x \Delta y = -a_P T_P + a_E T_E + a_N T_N + a_W T_W + a_S T_S + \tilde{S}_P. \quad (9.27)$$

Dies lässt sich umstellen zu

$$\frac{\partial T_P}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{PCP} \Delta x \Delta y} \left(-a_P T_P + a_E T_E + a_N T_N + a_W T_W + a_S T_S + \tilde{S}_P \right). \quad (9.28)$$

Eine solche Gleichung heißt semidiskret, weil sie im Raum bereits diskretisiert wurde, aber noch eine zeitliche Ableitung enthält. Sie kann daher als gewöhnliche Differentialgleichung betrachtet werden und mit allen bekannten Verfahren für solche gelöst werden, z.B. mit einem Runge-Kutta-Verfahren. Die hier betrachteten Verfahren beschränken sich auf die im Zusammenhang mit der FVM häufig verwendeten Verfahren, nämlich das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren.

9.6.1. Herleitung der verwendeten Zeitintegrationsverfahren

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t)). \quad (9.29)$$

Die gesuchte Funktion ist y . Bei einem Anfangswertproblem ist man an der zeitlichen Entwicklung der Funktion y ausgehend von einem Anfangswert interessiert. Sei der Wert von y zum Zeitpunkt t bekannt. Von Interesse ist nun der Wert der Funktion zum nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$. Man kennt also den aktuellen Wert und möchte wissen, wie sich dieser im nächsten Schritt verändert. Integration von Gleichung (9.29) liefert

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \int_t^{t+\Delta t} g(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (9.30)$$

Um den gesuchten Wert $y(t + \Delta t)$ zu berechnen, muss also Gleichung (9.29) über einen Zeitschritt Δt integriert werden. Dabei ist $y(t)$ der zuletzt bekannte Wert der Funktion. Da die Funktion y unbekannt ist, kann das Integral in der Regel nicht exakt gelöst werden. Für die Berechnung eines Näherungswertes wird angenommen, dass der Zeitschritt Δt so klein ist, dass die Funktion \dot{y} im Intervall $[t, t + \Delta t]$ monoton ist. Mit dieser Voraussetzung kann das Integral auch in der Form

$$\int_t^{t+\Delta t} g(\tau, y(\tau)) d\tau = \Delta t (\gamma g(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + (1 - \gamma)g(t, y(t))) \quad (9.31)$$

geschrieben werden. Dabei ist $\gamma \in [0, 1]$ ein Gewichtungsfaktor. Die Idee hinter dieser Schreibweise kann an Abbildung 9.4 nachvollzogen werden.

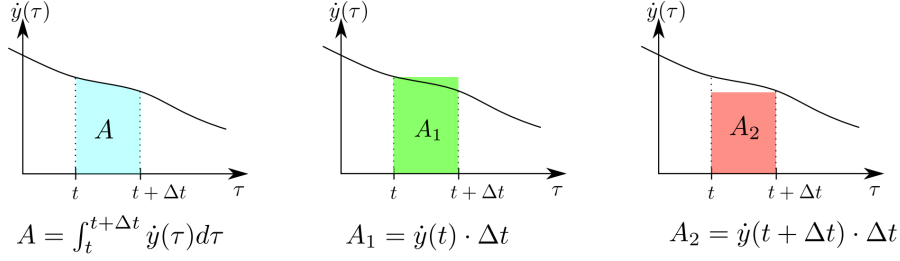
Wird Gleichung (9.31) in Gleichung (9.30) eingesetzt, ergibt sich

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t (\gamma g(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + (1 - \gamma)g(t, y(t))). \quad (9.32)$$

Abhängig vom Gewichtungsfaktor γ ergeben sich unterschiedliche numerische Verfahren. Drei Möglichkeiten sind dabei besonders bekannt:

- Explizites Euler-Verfahren mit $\gamma = 0$:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t g(t, y(t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (9.33)$$



Abbildungung 9.4: Links ist der exakte Wert des Integrals zu sehen. In der Mitte wird als Approximation die linksseitige Boxregel verwendet (ergibt explizites Euler-Verfahren). Rechts wird die rechtsseitige Boxregel verwendet (ergibt implizites Euler-Verfahren).

- Crank-Nicolson-Verfahren mit $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{2} (g(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + g(t, y(t))) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (9.34)$$

- Implizites Euler-Verfahren mit $\gamma = 1$:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t g(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (9.35)$$

Die angegebenen Konvergenzordnungen lassen sich mithilfe einer Taylorentwicklung zeigen.

Setzt man Gleichung (9.28) in Gleichung (9.32) ein, erhält man die allgemeine instationäre Kontrollvolumengleichung

$$T_P^1 = T_P^0 + \frac{\Delta t \gamma}{\rho_{PCP} \Delta x \Delta y} \left(-a_P T_P^1 + a_W T_W^1 + a_N T_N^1 + a_E T_E^1 + a_S T_S^1 + \tilde{S}_P^1 \right) + \frac{\Delta t (1 - \gamma)}{\rho_{PCP} \Delta x \Delta y} \left(-a_P T_P^0 + a_W T_W^0 + a_N T_N^0 + a_E T_E^0 + a_S T_S^0 + \tilde{S}_P^0 \right). \quad (9.36)$$

Die hochgestellten Indizes wurden für eine kompaktere Schreibweise gewählt, um auszudrücken, zu welchem Zeitpunkt die Temperaturen ausgewertet werden. Es gilt dabei $T(t) = T^0$ und $T(t + \Delta t) = T^1$.

9.7. Quelltermbehandlung

Bis jetzt wurde dem Quellterm keine besondere Beachtung geschenkt. Wir sind stillschweigend davon ausgegangen, dass nach Anwendung der Mittelpunktsregel einfach nur der Mittelwert der Quelldichte π über ein Kontrollvolumen betrachtet wird und haben diesen mit π_P bezeichnet. Der Quellterm selbst hängt aber im Allgemeinen von der Temperatur ab und ist nicht konstant. Die Abhängigkeit des Quellterms von der Temperatur kann dabei auch durchaus nichtlinear sein. Ist dies der Fall, kann die Nichtlinearität näherungsweise durch eine Linearisierung beschrieben werden, damit das zu lösende

Gleichungssystem noch linear bleibt. Alternativ kann das nichtlineare Gleichungssystem auch mit dem Newtonverfahren gelöst werden. Da im stationären Fall die Lösung für temperaturabhängige Quellterme sowieso iterativ bestimmt werden muss, ist die Linearisierung insbesondere für den instationären Fall von Interesse. Eine lineare Abhängigkeit des Quellterms von der jeweiligen Zelltemperatur kann allgemein ausgedrückt werden durch

$$\pi_P = a + bT_P \quad (9.37)$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Die Art und Weise der Quelltermlinearisierung kann allerdings Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten bei der Lösung des Gleichungssystems haben. Einige bei der FVM oft benutzte Löser wie das Gauß-Seidel-Verfahren benötigen als hinreichendes Kriterium die Diagonaldominanz der Matrix. Um die Diagonaldominanz der Matrix zu gewährleisten oder sogar zu verstärken, soll stets gelten $\pi_P \leq 0$. Möchte man eine nichtlineare Abhängigkeit der Temperatur implementieren, so gibt es verschiedene Möglichkeiten dies zu berücksichtigen. Zwei dieser Möglichkeiten sollen hier nachfolgend aufgezeigt werden. Als Beispiel wird der Quellterm $\pi(T) = 7 - 12T^4$ betrachtet.

1. Es wird ein bekannter Temperaturwert \hat{T}_P eingeführt. Dieser wird entweder aus der Anfangsbedingung oder aus der Lösung des zuletzt berechneten Zeitschritts gewonnen. Der Quellterm wird dann mit Hilfe des bekannten Wertes so approximiert, dass die gesuchte Temperatur nur noch linear auftritt, also

$$\pi_P(T_P) = 7 - 12T_P^4 \approx \underbrace{7}_a + \underbrace{(-12\hat{T}_P^3)}_b T_P. \quad (9.38)$$

2. Es wird eine Taylorentwicklung durchgeführt, wobei die Reihe nach dem linearen Glied abgebrochen wird, also

$$\pi_P(T_P) \approx \pi(\hat{T}_P) + \frac{\partial \pi(\hat{T}_P)}{\partial T} (T_P - \hat{T}_P). \quad (9.39)$$

Auf das Beispiel angewendet ergibt sich

$$\pi_P(T_P) = 7 - 12\hat{T}_P^4 - 48\hat{T}_P^3(T_P - \hat{T}_P) = \underbrace{7 + 36\hat{T}_P^4}_a + \underbrace{(-48\hat{T}_P^3)}_b T_P. \quad (9.40)$$

Dabei ist \hat{T}_P wieder der Temperaturwert aus dem vorausgehenden Zeitschritt.

9.8. Stabilität der Verfahren

Im Folgenden werden die im Abschnitt 9.6.1 hergeleiteten Zeitintegrationsverfahren auf ihre Stabilität untersucht. Stabilität bedeutet nicht, dass die erhaltenen Ergebnisse sinnvoll oder physikalisch richtig sind. Es bedeutet lediglich, dass sich numerische Fehler bei fortschreitender Berechnung nicht verstärken, sondern gedämpft werden. Unter dieser Forderung bleibt auch die numerische Lösung beschränkt, solange die exakte Lösung beschränkt ist. Für die Untersuchung der Stabilität wird hier die Von-Neumann-Stabilitätsanalyse verwendet. Diese ist ein in diesem Zusammenhang häufig verwendetes Verfahren.

9.8.1. Von-Neumann-Stabilitätsanalyse

Die Von-Neumann-Stabilitätsanalyse untersucht die Fehlerentwicklung eines numerischen Verfahrens auf einem strukturierten äquidistanten Gitter mit fortschreitender Zeit. Der Rundungsfehler E als Differenz zwischen exakter Lösung der diskretisierten Wärmeleitungsgleichung und der Lösung, die man erhält, wenn mit endlichen vielen Nachkommastellen gerechnet wird (*finite precision arithmetic*), erfüllt dabei auch wieder die diskretisierte Wärmeleitungsgleichung selbst. Mit der Annahme periodischer Randbedingungen, kann der Fehler in Form einer Fourierreihe entwickelt werden. Für den eindimensionalen Fall hat man

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(t) \cdot e^{ik_n x}. \quad (9.41)$$

Dabei ist $x = j\Delta x$ mit $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Ferner ist i die imaginäre Einheit, k_n die Wellenzahl und V_n die Amplitude des Fehlers. Im zweidimensionalen Fall, der hier nicht weiter verfolgt wird, lautet die Fourierreihe

$$E(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(t) \cdot e^{if_n x} \cdot e^{ig_n y} \quad (9.42)$$

mit $x = j\Delta x$, $y = k\Delta y$ und Wellenzahlen f_n und g_n .

Der Übersichtlichkeit halber wird der Quellterm vernachlässigt. Ausgangspunkt ist die instationäre Kontrollvolumengleichung

$$\begin{aligned} T_P^1 &= T_P^0 + \frac{\Delta t \gamma}{\rho_P c_P \Delta x} (-a_P T_P^1 + a_W T_W^1 + a_E T_E^1) \\ &\quad + \frac{\Delta t (1 - \gamma)}{\rho_P c_P \Delta x} (-a_P T_P^0 + a_W T_W^0 + a_E T_E^0). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Mit der Voraussetzung eines äquidistanten Gitters und einer konstanten Leitfähigkeit, ergibt sich für die Koeffizienten

$$a_E = a_W = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad \text{und} \quad a_P = \frac{2\lambda}{\Delta x}. \quad (9.44)$$

Führt man die Abkürzung $r = \frac{\lambda \Delta t}{\rho_P c_P \Delta x^2} > 0$ ein, wird Gleichung (9.43) zu

$$T_P^1 = T_P^0 + \gamma r (-2T_P^1 + T_W^1 + T_E^1) + (1 - \gamma) r (-2T_P^0 + T_W^0 + T_E^0). \quad (9.45)$$

Gleichung (9.45) wird nun sowohl von der numerisch bestimmten Lösung für die Temperatur als auch vom Fehler E gelöst (siehe erster Absatz). Da Gleichung (9.45) linear ist und sich somit jeder Term der Reihe in Gleichung (9.41) gleich verhält, genügt es einen einzelnen Term mit der Wellenlänge k_n zu betrachten, also

$$E_n(x, t) = V_n(t) \cdot e^{ik_n x}. \quad (9.46)$$

Setzt man den Fehler aus Gleichung (9.46) in Gleichung (9.45) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} V_n(t + \Delta t)e^{ik_n j \Delta x} &= V_n(t)e^{ik_n j \Delta x} \\ &+ \gamma r V_n(t + \Delta t) \left(e^{ik_n(j-1)\Delta x} - 2e^{ik_n j \Delta x} + e^{ik_n(j+1)\Delta x} \right) \\ &+ (1 - \gamma)r V_n(t) \left(e^{ik_n(j-1)\Delta x} - 2e^{ik_n j \Delta x} + e^{ik_n(j+1)\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} &V_n(t + \Delta t) \left(1 - \gamma r \left(e^{-ik_n \Delta x} - 2 + e^{ik_n \Delta x} \right) \right) \\ &= V_n(t) \left(1 + (1 - \gamma)r \left(e^{-ik_n \Delta x} - 2 + e^{ik_n \Delta x} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Für die relative Fehlerverstärkung $G(k_n)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G(k_n) &:= \frac{V_n(t + \Delta t)}{V_n(t)} = \frac{1 + (1 - \gamma)r \left(e^{-ik_n \Delta x} - 2 + e^{ik_n \Delta x} \right)}{1 - \gamma r \left(e^{-ik_n \Delta x} - 2 + e^{ik_n \Delta x} \right)} \\ &= \frac{1 + 2r(1 - \gamma)(\cos(k_n \Delta x) - 1)}{1 - 2r\gamma(\cos(k_n \Delta x) - 1)}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Damit ein Verfahren stabil, also die Lösung beschränkt ist, muss für die relative Fehlerverstärkung der Zusammenhang

$$|G(k_n)| \leq 1 \quad (9.50)$$

gelten. Daraus folgt für die Stabilität der drei Verfahren:

1. Explizites Euler-Verfahren, d.h. $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} G(k_n) &= 1 + 2r(\cos(k_n \Delta x) - 1) \\ \Rightarrow |G(k_n)| \leq 1 &\Leftrightarrow 0 < r \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9.51)$$

Stabilitätskriterium: $r = \frac{\lambda \Delta t}{\rho_{PCP} \Delta x^2} \in (0, \frac{1}{2}]$. In 2D folgt bei analoger Vorgehensweise $r \in (0, \frac{1}{4}]$.

2. Crank-Nicolson-Verfahren, d.h. $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} G(k_n) &= \frac{1 + r(\cos(k_n \Delta x) - 1)}{1 - r(\cos(k_n \Delta x) - 1)} = \frac{1 - r(1 - \cos(k_n \Delta x))}{1 + r(1 - \cos(k_n \Delta x))} \\ \Rightarrow |G(k_n)| &\leq 1 \quad \forall r > 0 \end{aligned} \quad (9.52)$$

Das Verfahren ist bedingungslos stabil. Dasselbe gilt in 2D. Bei zu großen Zeitschrittweiten neigt dieses Verfahren allerdings zu Oszillationen!

3. Implizites Euler-Verfahren, d.h. $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} G(k_n) &= \frac{1}{1 - 2r(\cos(k_n \Delta x) - 1)} \\ \Rightarrow |G(k_n)| &\leq 1 \quad \forall r > 0 \end{aligned} \quad (9.53)$$

Das Verfahren ist bedingungslos stabil. Dasselbe gilt in 2D.