Kontinuumsmechanik VL 3

1.1.4.1 Freie Schwingungen

Freie Schwingungen: keine Anregung, d.h. $q(x,t) \equiv 0$

Zu lösen ist die Wellengleichung: $\ddot{w} = c^2 w''$ $\quad \dot{(\ )} = \frac{\partial}{\partial t}$; $(\ )' = \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad c^2 = \frac{T}{\mu}$ Seite

Ansatz: Trennung der Veränderlichen mittels des Produktansatz

$$w(x,t) = W(x)\, p(t)$$

$$w''(x,t) = W''(x)\, p(t)$$

$$\ddot{w}(x,t) = W(x)\, \ddot{p}(t)$$

Einsetzen in Wellengleichung

$$W(x)\, \ddot{p}(t) = c^2 W''(x)\, p(t) \qquad \Big| : p(t),\ W(x)$$

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)} = \text{konst.} = -\omega^2$$

Linke Seite ist nur von *t* abhängig, rechte Seite nur von *x*: nur dann für alle *x, t* erfüllbar wenn konstant

$$\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2 \frac{w''(x)}{w(x)} = -\omega^2$$

Ausdruck muss konstant sein, also weder von *x* noch *t* abhängig. Die Konstante wird (willkürlich, aber sinnvoll) $-\omega^2$ genannt .

Ergebnis bis jetzt also 2 Gleichungen, eine in *t* und eine in *x*

$$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0$$

Lösung: $p(t) = \hat{A} \sin \omega t + \hat{B} \cos \omega t$

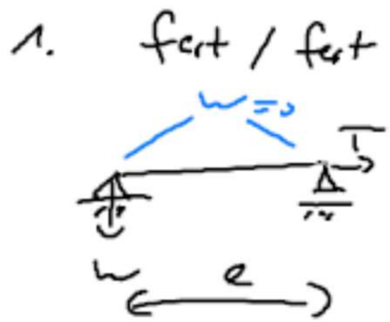
ω ist eine Eigenkreisfrequenz! Bezeichnung der Konstanten also offenbar sinnvoll gewählt!

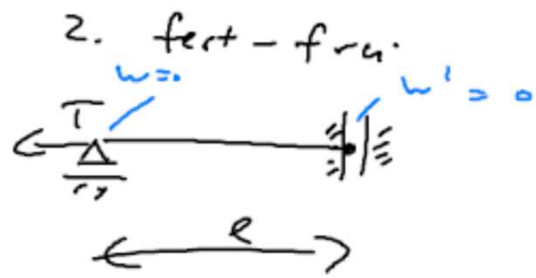
$$w''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 w(x) = 0$$

Lösung: $w(x) = C \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + D \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right)$

Betrachtet wird im Folgenden dieses **Randwertproblem**. Zu bestimmen sind die Konstanten *C* und *D* sowie die Eigenkreisfrequenzen ω.

Es werden 2 Fälle von Randbedingungen betrachtet:





1. fest/fest $\quad w(0,t) = w(l,t) = 0$

mit Ansatz $\quad w(x,t) = W(x)\, p(t) \quad \Rightarrow \quad W(0) = 0 \;;\; W(l) = 0$

außerdem Lösung $W(x) = C \sin\frac{\omega}{c}x + D \cos\frac{\omega}{c}x$ anpassen

$$W(0) = \underline{D = 0}$$

$$W(l) = C \sin\frac{\omega}{c}l = 0$$

ω noch unbekannt

Lösung $C = 0 \;\rightarrow W(x) \equiv 0$ „triviale Lösung“ -> nicht weiter betrachtet

$$w(l) = C \sin\frac{\omega}{c} l = 0$$

Nichttriviale Lösungen (*C* nicht Null) $\sin\frac{\omega}{c} l = 0$ Gleichung hat „abzählbar“ unendlich viele Lösungen

nämlich $\frac{\omega}{c} l = k\pi$ $\quad k = (0) 1, 2, \ldots$

triviale Lösung

Also $\underline{\omega_k = \frac{k\pi c}{l}}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$ **Eigenkreisfrequenzen** der Saite mit Randbedingungen fest/fest

Zur Erinnerung: Frequenz/Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad f = \frac{1}{T}$

Kreisfrequenz, in Regel in Berechnung, [1/s]

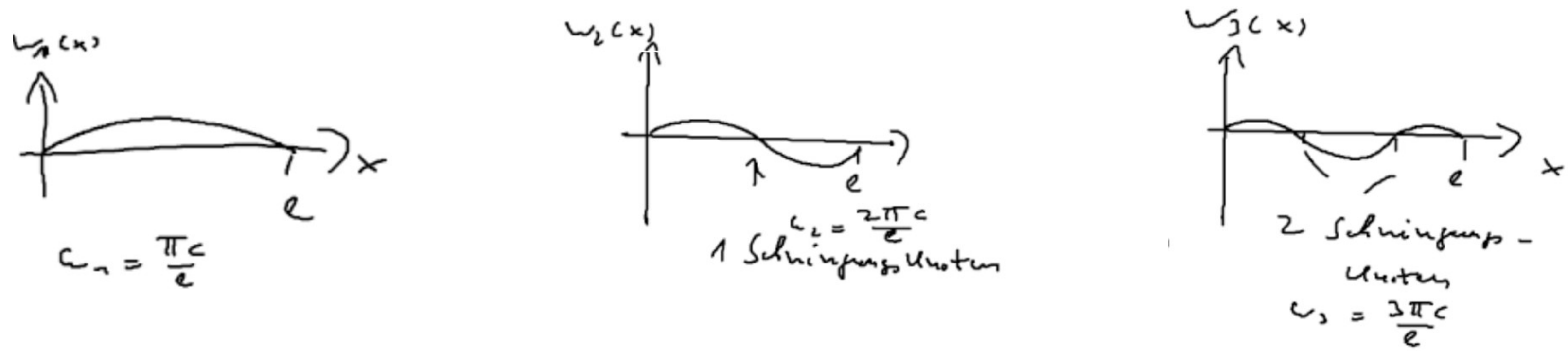
Frequenz, in Regel bei Messung, [Hz]

entsprechend

$w_k(x) = C \sin\left(k\pi \frac{x}{l}\right)$

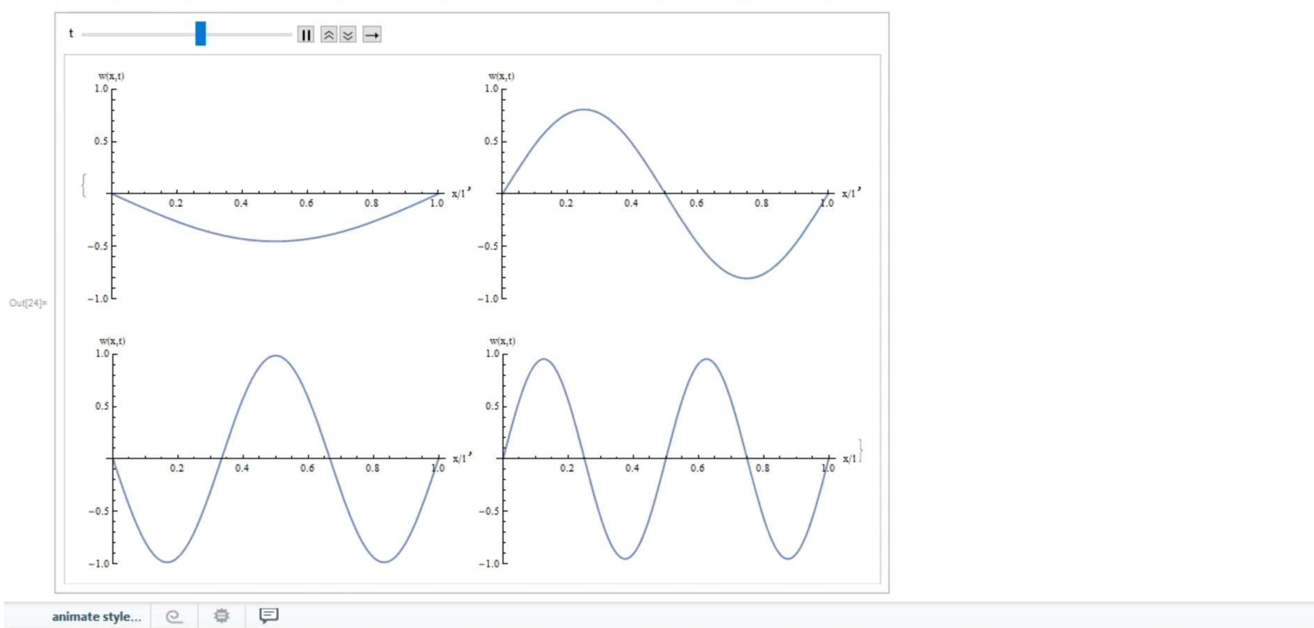
Eigenformen der Saite mit Randbedingungen fest/fest.
Konstante *C* lässt sich aus dem Randwertproblem nicht bestimmen.

Skizzen der Eigenformen:

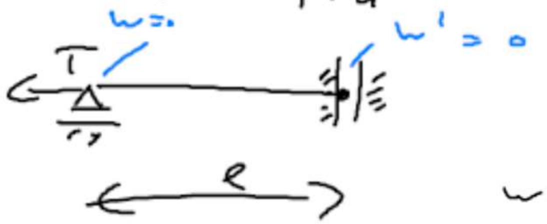


In[24]:=
```
Animate[Plot[#, {x, 0, 1}, PlotRange → {All, {-1, 1}}, AxesLabel → {"x/l", "w(x,t)"}, ImageSize → Medium] & /@ Evaluate[eigenformen Sin[eigenwerte t]], {t, 0, 2 Pi / eigenwerte[[1]]}]
```
animiere | stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich | alle | Achsenbeschriftung | Bildgröße | mittelgroß | werte aus | Sinus | Kreiszahl π

Out[24]=



2. fest – frei



$$w(0,t) = 0 \ , \quad w'(\ell,t) = 0$$

$$w(x,t) = W(x)\,p(t) \Rightarrow W(0) = 0 \ ; \quad W'(\ell) = 0$$

$$W(x) = \underbrace{C \sin\frac{\omega}{c}x + D \cos\frac{\omega}{c}x}$$ Anpassen

$$W(0) = 0 = D$$

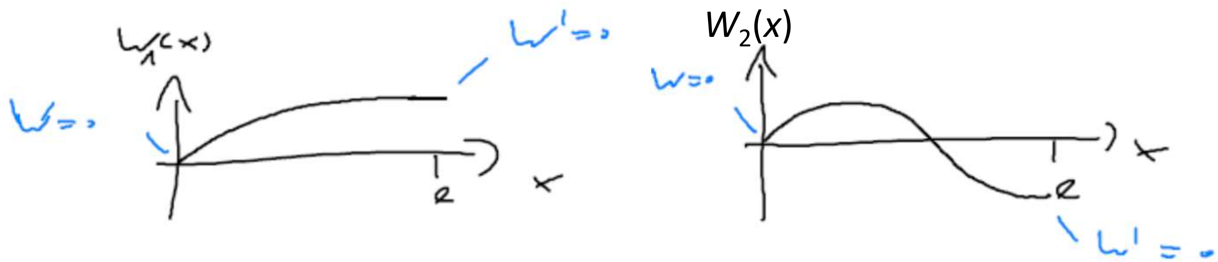
$$W'(x) = C\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}x$$ ( )', $D = 0$

$$W'(\ell) = \underbrace{C\frac{\omega}{c}}_{\overset{!}{\neq} 0 \text{ für nichttriviale Lösung}} \cos\frac{\omega}{c}\ell = 0$$

Also $\cos\frac{\omega}{c}\ell = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}\ell = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ $\quad k = 1, 2, \dots$

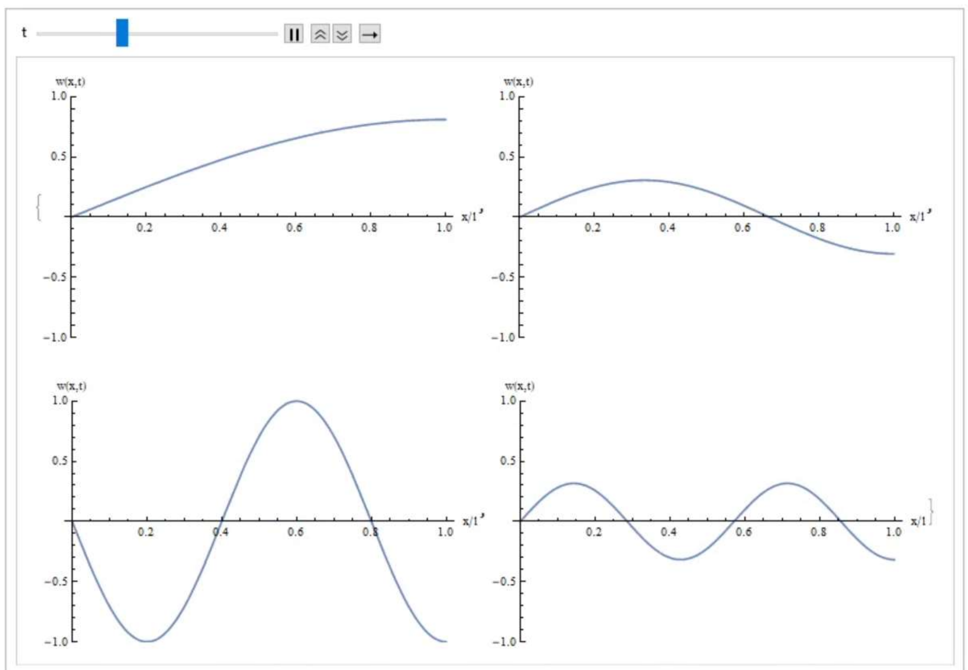
$$\omega_k = \frac{2k-1}{2}\pi\,\frac{c}{\ell}$$ Eigenkreisfrequenzen

$$W_k(x) = C \sin\frac{(2k-1)}{2}\pi\,\frac{x}{\ell}$$ Eigenformen



In[32]:=
```
Animate[Plot[#, {x, 0, 1}, PlotRange → {All, {-1, 1}}, AxesLabel → {"x/l", "w(x,t)"}, ImageSize → Medium] & /@ Evaluate[eigenformen Sin[eigenwerte t]], {t, 0, 2 Pi / eigenwerte[[1]]}]
```
animiere | stelle Funktion graphisc··· | Koordinatenber··· | alle | Achsenbeschriftung | Bildgröße | mittelgroß | werte aus | Sinus | Kreiszahl π

Out[32]=



Jetzt Lösung des kompletten Anfangs-Randwertproblems für den Fall fest/fest

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\pi \frac{x}{\ell}$$

Überlagerung der Lösungen W_k zu $\sum W_k$

und Gesamtlösung

$$w(x,t) = W(x)\cdot p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \sin k\pi \frac{x}{\ell}\right)\left(\hat{A}_k \sin \omega_k t + \hat{B}_k \cos \omega_k t\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\underset{\substack{\| \\ C_k \hat{A}_k}}{A_k} \sin \overbrace{k\pi \frac{c}{\ell}}^{\omega_k} t + \underset{\substack{\| \\ C_k \hat{B}_k}}{B_k} \cos \overbrace{k\pi \frac{c}{\ell}}^{\omega_k} t \Big) \sin k\pi \frac{x}{\ell}$$

Daraus für Anpassung an ABen

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k k\pi \frac{c}{\ell} \cos k\pi \frac{c}{\ell} t - B_k k\pi \frac{c}{\ell} \sin k\pi \frac{c}{\ell} t \right) \sin k\pi \frac{x}{\ell}$$

Anpassen an Anfangsbedingungen (ABen)

$$w(x,0) = w_0(x) \quad ; \quad \dot{w}(x,0) = v_0(x)$$

müssen verträglich sein mit RBen!

also

$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\pi \frac{x}{\ell} = w_0(x)$$

$$\dot{w}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{k\pi c}{\ell} \sin k\pi \frac{x}{\ell} = v_0(x)$$

Bestimmung der A_k, B_k (Fourierreihe)

$$\int_0^{\ell} w_0(x) \sin j\pi \frac{x}{\ell}\, dx = \int_0^{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin k\pi \frac{x}{\ell}\right) \sin j\pi \frac{x}{\ell}\, dx \qquad j = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^{\ell} \left(\sin k\pi \frac{x}{\ell} \sin j\pi \frac{x}{\ell}\right) dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & j \neq k \\ \frac{\ell}{2} & j = k \end{array} \right\}$$ Orthogonalität der Eigenformen

Also ist $$B_j = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell w_0(x) \sin j\pi \frac{x}{\ell}\, dx \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Ebenso ist $$A_j = \frac{2}{\ell \omega_j} \int_0^\ell v_0(x) \sin j\pi \frac{x}{\ell}\, dx$$