Kontinuumsmechanik VL 8

1.2.4 Prinzip von Hamilton

Energiemethode in der Kontinuumsmechanik

$$\boxed{\delta \int_{t_0}^{t_1} L \,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \,\mathrm{d}t = 0}$$

Prinzip von Hamilton

$$L = T - U$$

L	Langrangefunktion, kinetisches Potential
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
δW	virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte und Momente

Einschub Energiemethoden:

δ, $\cancel{d}$, $\cancel{\partial}$ differentiell/infinitesimal klein

(, virtuelle Verschiebungen/Verdrehungen

virt. Versch. virt. Verdr.

δw, $\delta\varphi$

virtuelle Geschwindigkeiten/Winkelgeschwindigkeiten $\delta v, \delta\omega$

virtuelle Arbeit $\delta W = F\ \delta w$, $\delta W = M\ \delta\varphi$

Regeln für virtuelle Größen:

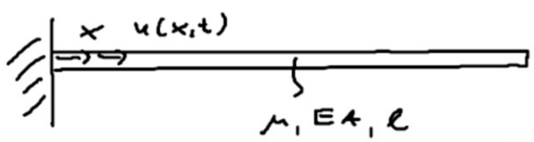
- Sind infinitesimal klein
- Virtuelle Verschiebungen/Verdrehungen/Geschwindigkeiten/Winkelgeschwindigkeiten sind verträglich mit den Bindungen des Systems
- Bei festgehaltener Zeit (evtl. Zwangsbewegungen werden „eingefroren“)
- Ansonsten beliebig
- Rechenregeln wie beim Ableiten

Herleitung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit unter Verwendung des Impulssatzes für ein kleines Volumenelement dV und der Gleichgewichtsbedingungen an den Oberflächen.

Bei der Herleitung wird festgelegt (willkürlich aber praktisch), dass alle Variationen von Koordinaten an den Zeitgrenzen verschwinden, z.B.

$$\delta w(t_1) = \delta w(t_0) = 0$$

Einfaches Beispiel: Stablängsschwingungen



$\mu = \rho A$

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\int_0^l \underbrace{\rho\, A\, \dot{u}^2\, dx}_{dm}$

potentielle Energie: $U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\, u'^2\, dx$

aus Energiemethoden der Mechanik

$\delta W = 0$, keine potentiallosen Kräfte und Momente

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \,\mathrm{d}t = 0$$

Prinzip von Hamilton

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \underbrace{\rho A \dot{u}^2 \, dx}_{dm} \qquad U = \frac{1}{2} \int_0^l E A u'^2 \, dx \qquad \delta W = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 - \frac{1}{2} E A u'^2 \right) dx \, dt = 0$$

Ziel in der Kontinuumsmechanik ist in der Regel die Herleitung der Feldgleichungen und der dynamischen Randbedingungen unter Vorgabe der geometrischen Randbedingungen.

Dazu Vorgehen nach dem folgenden „Kochrezept“:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\tfrac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 - \tfrac{1}{2} E A u'^2 \right) dx\, dt = 0$$

1. Durchführen der Variation δ(…), Rechenregeln wie beim Ableiten.

$$\delta \left(\tfrac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 \right) = \rho A \dot{u}\, \delta \dot{u} \qquad \delta \left(\tfrac{1}{2} E A u'^2 \right) = E A u'\, \delta u'$$

also:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(\underline{\rho A \dot{u}\, \delta \dot{u}} - \underline{E A u'\, \delta u'} \right) dx\, dt = 0$$

2. Partielle Integration + geometrische Randbedingungen: $\delta \dot{u}, \delta u' \to \delta u$

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \rho A \underset{②}{\dot{u}}\, \underset{①}{\delta \dot{u}}\, dt\, dx = \underbrace{\int_0^l \rho A \dot{u}\, \cancel{\delta u \Big|_{t_0}^{t_1}}\, dx}_{=0} - \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \rho A \ddot{u}\, \delta u\, dt\, dx$$

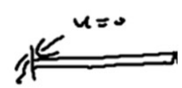
partiell nach der Zeit integrieren, weil $\delta \dot{u}$

Keine Variation an den Zeiträndern gemäß getroffener Festlegung bei der Herleitung!

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(\rho A \ddot{u}\,\delta u - EA u'\,\delta u'\right) dx\, dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l - EA u'\,\delta u'\, dx\, dt = \int_{t_0}^{t_1} -EA u'\,\underbrace{\delta u}_{=0}\Big|_0^l\, dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EA u''\,\delta u\, dx\, dt$$

Partielle Integration nach x,
weil $\delta u'$

Geometrische Randbedingung: 

$u(0,t) = 0$ (2) $\delta u(0) = 0$

3. Sortieren/Auswerten:

$$\int_0^{t_1}\int_0^l \left(-\rho A \ddot{u} + EA u''\right)\delta u\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1} EA u'(l)\,\delta u(l)\, dt = 0$$

$\delta u(x)$ sind beliebig und unabhängig voneinander, deswegen $\iint \underbrace{(\dots)}_{=0}\,\delta u\, dx - \int \underbrace{(\dots)}_{=0}\,\delta u(l)\, dt = 0$

unabhängig/
beliebig

Also muss gelten

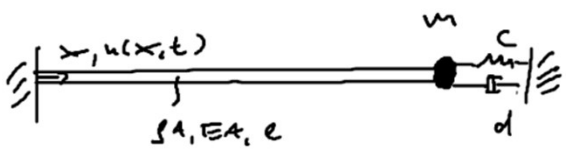
Feldgleichung: $-\rho A \ddot{u} + EA u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = c^2 u''$ ① $\qquad c^2 = \dfrac{E}{\rho}$

Dynamische RB: $-EA\, u'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(l,t) = 0$ ③

Randwertproblem
Feldgl. ① + geometr. RB ②
+ dyn. RB ③

Prinzip von Hamilton insbesondere bei der Herleitung komplizierter Feldgleichungen und dynamischer Randbedingungen geeignet.

Leicht abgewandeltes Beispiel:



$$T = \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2}\rho A \dot{u}^2 \, dx}_{\text{Stab}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{u}^2(l,t)}_{\text{Punktmasse}}$$

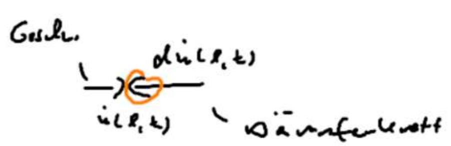
$$U = \underbrace{\int_0^l \frac{1}{2} EA u'^2 \, dx}_{\text{Stab}} + \underbrace{\frac{1}{2} c\, u^2(l,t)}_{\text{Feder}}$$

Stab

Punktmasse

Feder

Virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte:



neg. x-Ri.

$\rightarrow \delta u$ pos. x-Ri.

$$\delta W = (-)\, d\, \dot{u}(l,t)\, \delta u(l)$$

Dämpfer

In Prinzip von Hamilton $\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \, \mathrm{d}t = 0$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} \left(\tfrac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 - \tfrac{1}{2} E A u'^2 \right) dx\, dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\tfrac{1}{2} m \dot{u}^2(\ell,t) - \tfrac{1}{2} c u^2(\ell,t) \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} d \dot{u}(\ell,t)\, \delta u(\ell)\, dt = 0$$

1. Durchführen der Variation $\delta(\ldots)$:

$$\delta\left(\tfrac{1}{2} m \dot{u}^2(\ell,t) \right) = m \dot{u}(\ell,t)\, \delta \dot{u}(\ell) \qquad \delta\left(\tfrac{1}{2} c u^2(\ell,t) \right) = c u(\ell,t)\, \delta u(\ell)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} \left(\rho A \dot{u}\, \delta \dot{u} - E A u' \delta u' \right) dx\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(m \dot{u}(\ell,t)\, \delta \dot{u}(\ell) - c u(\ell,t)\, \delta u(\ell) - d \dot{u}(\ell,t)\, \delta u(\ell) \right) dt = 0$$

2. Partielle Integration + geometrische Randbedingungen:

$\Rightarrow u(0,t) = 0 \quad \delta u(0) = 0$ 2

wie vorher + geometr. RB und wie vorher

$\delta \dot{u}(\ell)$ auf $\delta u(\ell)$ zurückführen durch partielle Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} m\,\dot u(l,t)\,\delta\dot u(l)\,dt = \underbrace{\cancel{m\,\dot u(l,t)\,\delta u(l)\Big|_{t_0}^{t_1}}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} m\,\ddot u(l,t)\,\delta u(l)\,dt$$

Keine Variation an Zeitgrenzen

3. Sortieren/Auswerten:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \underbrace{\left(-\rho A\ddot u + EA u''\right)}_{\overset{!}{=}0} \delta u\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(-EA u'(l,t) - m\ddot u(l,t) - c\,u(l,t) - d\,\dot u(l,t)\right)}_{\overset{!}{=}0} \delta u(l)\,dt = 0$$

δu, $\delta u(l)$ willkürlich / beliebig

Also Feldgleichung:

$$EA u'' = \rho A \ddot u \Rightarrow \ddot u = c^2 u'' \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

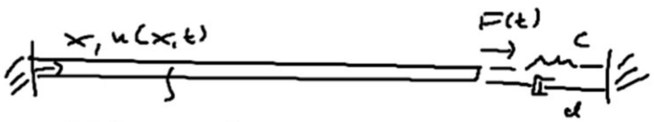
Dyn. RB:

$$EA u'(l,t) + m\ddot u(l,t) + d\,\dot u(l,t) + c\,u(l,t) = 0 \quad (3)$$

Randwertproblem: Feldgl. (1), geometr. RB (2), dyn. RB (3)

Zusammenfassung gebräuchlicher Terme:

Längsdehnung von Stäben:



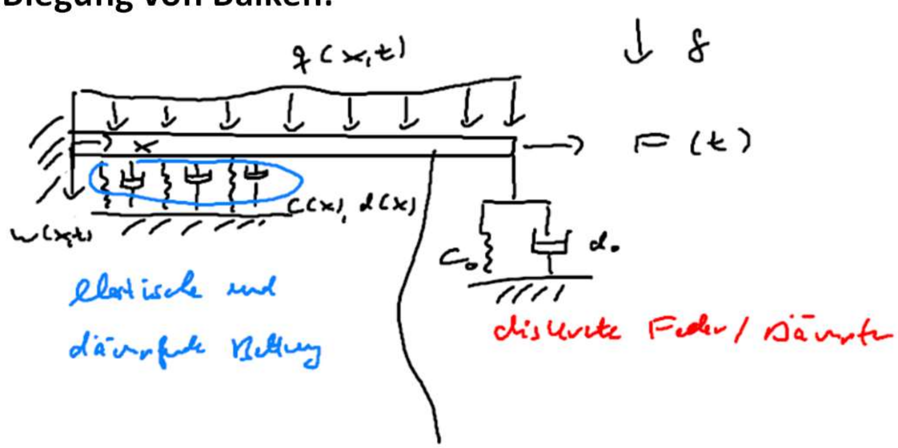
$\mu(x) = \rho A(x),\ EA(x),\ l$

$$T = \int_0^l \tfrac{1}{2}\mu(x)\, \dot{u}^2(x,t)\, dx$$

$$U = \int_0^l \tfrac{1}{2} EA\, u'^2(x,t)\, dx + \tfrac{1}{2} c\, u^2(l,t)$$

$$\delta W = F(t)\, \delta u(l) - d\, \dot{u}(l,t)\, \delta u(l)$$

Biegung von Balken:



$\mu(x),\ EI(x),\ l$

$$T = \int_0^l \tfrac{1}{2}\mu(x)\, \dot{w}^2(x,t)\, dx$$

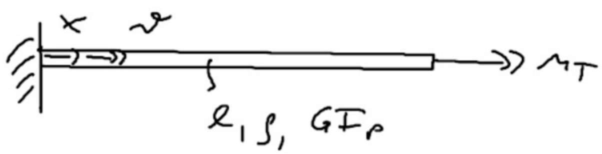
$$U = \underbrace{\int_0^l \tfrac{1}{2} EI(x)\, w''^2\, dx}_{\text{Elastizität Balken}} + \underbrace{\int_0^l -\mu(x) g\, w(x,t)\, dx}_{\text{Schwerkraft}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^l \tfrac{1}{2} c(x)\, w^2(x,t)\, dx}_{\text{elast. Bettung}} + \underbrace{\int_0^l \tfrac{1}{2} F(t)\, w'^2(x,t)\, dx}_{\text{Vorspannung (wie bei Saite)}}$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2} c_0\, w^2(l,t)}_{\text{diskrete Feder}}$$

$$\delta W = \underbrace{\int_0^l q(x,t)\, \delta w(x)\, dx}_{\text{Streckenlast}} + \underbrace{\int_0^l -d(x)\, \dot{w}(x,t)\, \delta w(x)}_{\text{verteilte Dämpfung}} \underbrace{- d_0\, \dot{w}(l,t)\, \delta w(l)}_{\text{diskrete Dämpfer}}$$

Torsion von Stäben mit Kreisquerschnitt:



$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho I_p \dot{\vartheta}^2(x,t)\, dx$$

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} G I_p \vartheta'^2(x,t)\, dx$$

$$\delta W = M_T\, \delta \vartheta(l)$$