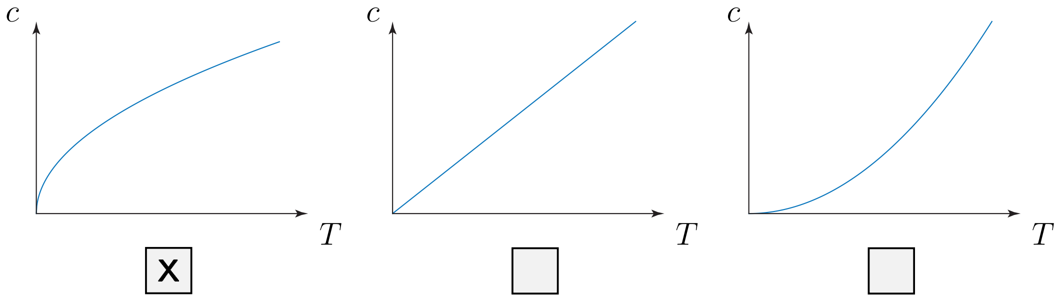
Lösungsvorschlag zur Klausur vom 04.08.2015

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [1 Punkt]

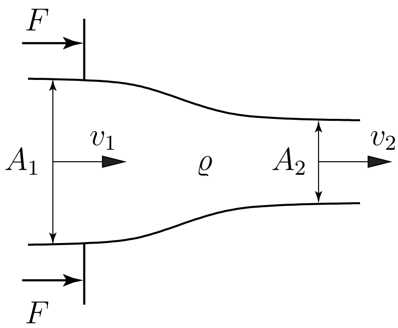
Wie ist der qualitative Zusammenhang zwischen der Vorspannkraft T und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c bei einer Saite mit konstanter Masse pro Länge μ? Kreuzen Sie den richtigen Verlauf an.



Aufgabe T2 [1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt wie skizziert durch ein Rohr mit variablem Querschnitt. Kreuzen Sie die richtige Aussage für die Kraft F an, die das System im Gleichgewicht hält.

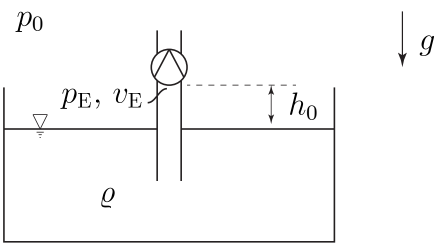
$F = 0$	$F > 0$	$F < 0$
☐	☒	☐



Aufgabe T3 [1 Punkt]

Eine Pumpe soll benutzt werden, um eine ideale Flüssigkeit wie abgebildet aus dem offenen Reservoir gegen die Schwerkraft zu fördern. In welcher Höhe h_0 muss die Pumpe angebracht werden, wenn der Druck am Einlauf der Pumpe p_E und die Fließgeschwindigkeit v_E betragen soll und der Umgebungsdruck einheitlich p_0 beträgt?

Gegeben: p_E, v_E, h_0, p_0, g, ϱ



Nebenrechnung:

$$p_0 = p_E + \frac{1}{2}\varrho v_E^2 + \varrho g h_0$$

$$h_0 = \frac{p_0 - p_E - \frac{1}{2}\varrho v_E^2}{\varrho g}$$

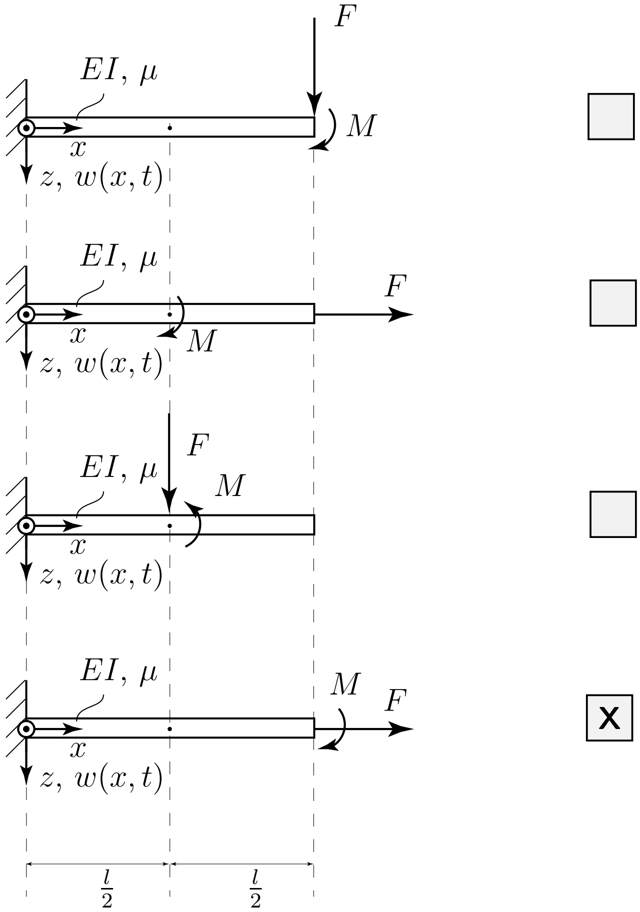
Aufgabe T4

[1 Punkt]

Für ein mechanisches System liefert das Prinzip von Hamilton folgenden Ausdruck:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu \dot{w}^2 - EIw'' - Fw'^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M \delta w'(l,t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

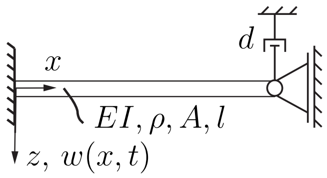
Für welche(s) der nachfolgend skizzierten Systeme ergibt sich dieser Ausdruck im Prinzip von Hamilton? Kreuzen Sie an.



Aufgabe T5

[2 Punkte]

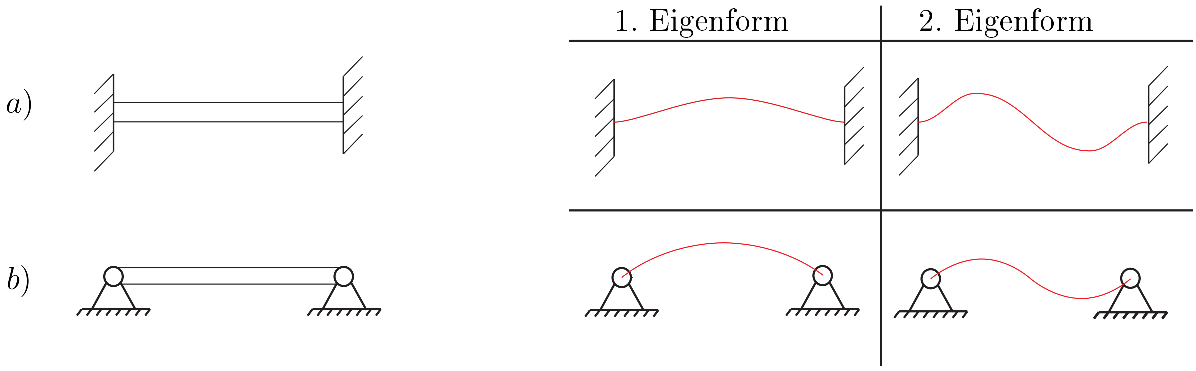
Geben Sie alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen für den skizzierten Euler-Bernoulli-Balken an.



$$w(0,t) = 0 \qquad w'(0,t) = 0$$
$$w''(l,t) = 0 \quad w'''(l,t) = \frac{d\dot{w}(l,t)}{EI}$$

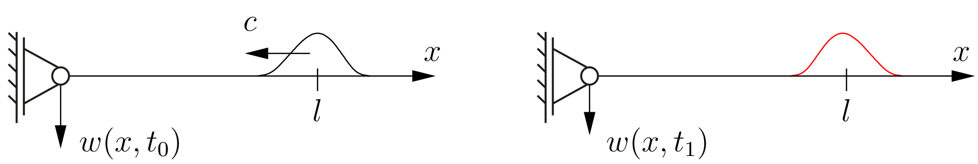
Aufgabe T6 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und die zweite Eigenform.



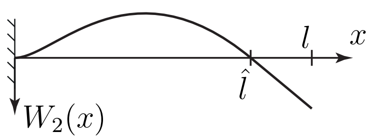
Aufgabe T7 [1 Punkt]

Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf die Lagerung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung $w(x, t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$.

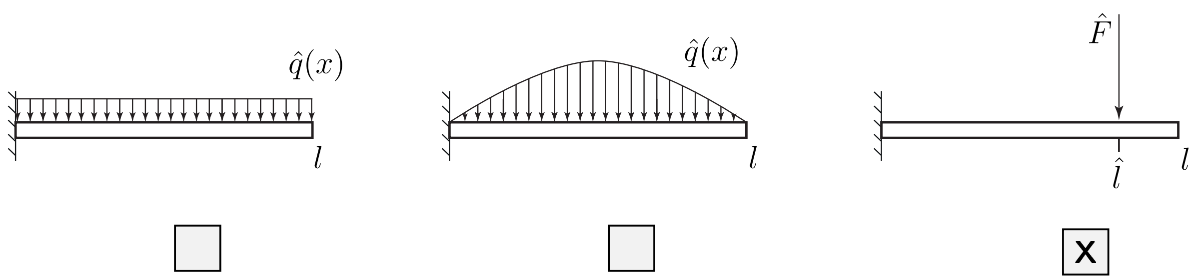


Aufgabe T8 [1 Punkt]

Ein einseitig fest eingespannter Euler Bernoulli-Balken besitzt die abgebildete 2. Eigenform $W_2(x)$ bei der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 und wird mit einer Streckenlast $q(x, t) = \hat{q}(x) \cos(\omega_2 t)$ bzw. mit einer Einzellast $F(t) = \hat{F} \cos(\omega_2 t)$ zu Schwingungen angeregt.



Kreuzen Sie die Belastung(en) an, die dabei **nicht** zu Resonanz führt/führen.

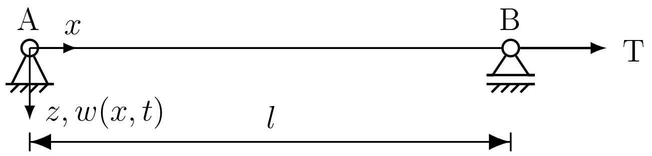


Aufgabe 1

[10 Punkte]

Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft T vorgespannt.

Gegeben: T, l, μ



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ?

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0$ 1

Randbedingungen: $w(0,t) = w(l,t) = 0$ 1

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit: $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 1

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen.

Nebenrechnung:

Ansatz: $w(x,t) = W(x)p(t)$

Lösung: $W(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$

Anpassen an Randbedingungen:
$W(0) = A = 0 \longrightarrow A = 0$ 1
$W(l) = B\sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \longrightarrow \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \longrightarrow \frac{\omega_k}{c}l = k\pi,\ k = 1, 2, \ldots$ 1

Eigenkreisfrequenzen:

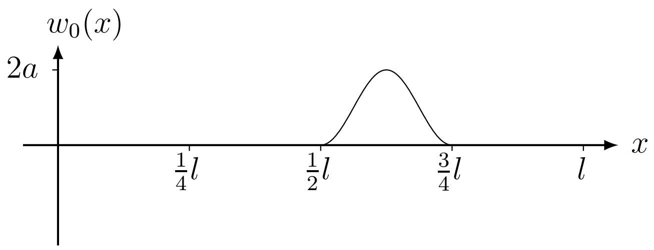
$\omega_k = \frac{k\pi c}{l},\ k = 1, 2, \ldots$

c) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für $t = 0$ gegeben:

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -a\cos\left[8\pi(\frac{x}{l} - \frac{1}{2})\right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

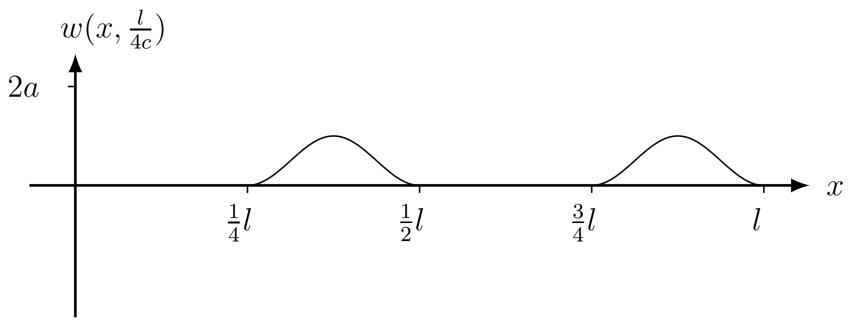
$$\dot{w}(x,0) = v_0(x) = 0$$

Skizze für $w_0(x)$:

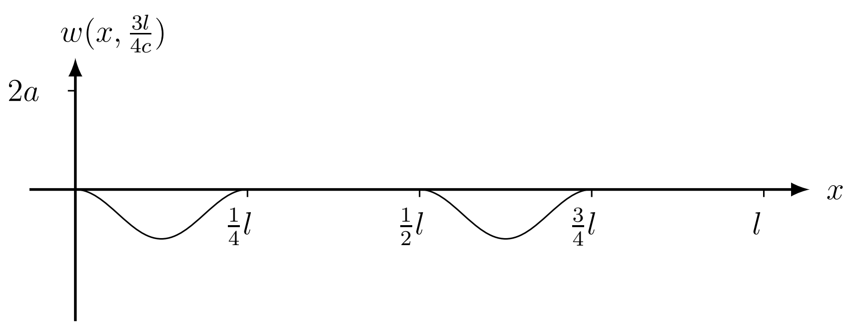


Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird nun als bekannt vorrausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = l/4c$ und zum Zeitpunkt $t = 3l/4c$.

Skizzen:



1



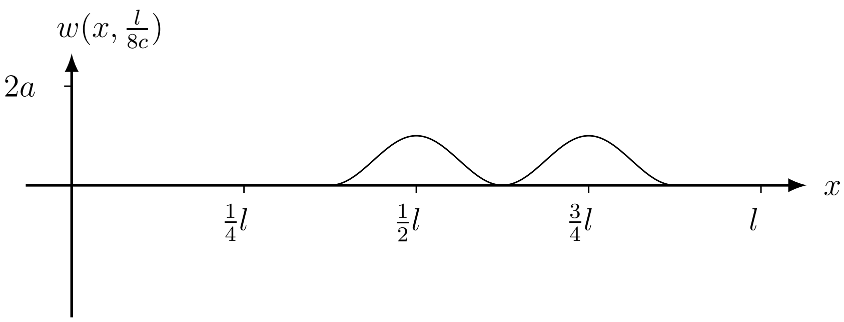
1

d) Für kleine Zeiten t kann die Verschiebung $w(x,t)$ mit der Formel

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\;\mathrm{d}\xi\right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit t^* ist diese Lösung gültig? Geben Sie $w(x,l/8c)$ an.

Nebenrechnung:



$t^* = \frac{l}{4c}$ 1

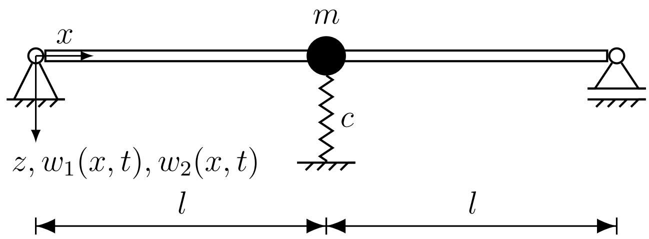
$$w(x,l/8c) = \begin{cases} -\frac{1}{2}a\cos\left[8\pi\left(\frac{x+l/8}{l}-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}a, \text{ falls } \frac{3}{8}l \le x \le \frac{5}{8}l \\ -\frac{1}{2}a\cos\left[8\pi\left(\frac{x-l/8}{l}-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}a, \text{ falls } \frac{5}{8}l \le x \le \frac{7}{8}l \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$ 2

Aufgabe 2

[11 Punkte]

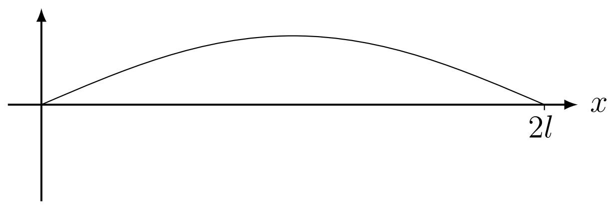
Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge $2l$, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ durch $w_1(x,t)$ und im Bereich $l \leq x \leq 2l$ durch $w_2(x,t)$ beschrieben. Der Balken wird an der Stelle $x = l$ durch eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w_1(l,t) = w_2(l,t) = 0$) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse m.

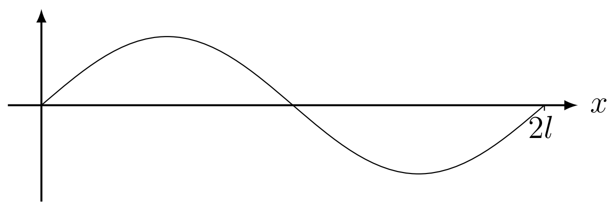
Gegeben: EI, l, μ, m, c



a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).

Skizzen:





1

b) Geben Sie die Feldgleichungen für $w_1(x,t)$ im Bereich $0 \leq x \leq l$ und $w_2(x,t)$ im Bereich $l \leq x \leq 2l$ an.

Feldgleichungen:

$0 \leq x \leq l: \; \ddot{w}_1(x,t) + \frac{EI}{\mu} w_1''''(x,t) = 0$ 1

$l \leq x \leq 2l: \; \ddot{w}_2(x,t) + \frac{EI}{\mu} w_2''''(x,t) = 0$ 1

c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle $x = l$ die Übergangsbedingungen an.

Nebenrechnung:

Rand und Übergangsbedingungen:

Randbedingungen:

$w_1(0,t) = 0$
$w_1''(0,t) = 0$ 1
$w_2(2l,t) = 0$
$w_2''(2l,t) = 0$

Übergangsbedingungen:

$w_1(l,t) = w_2(l,t)$
$w_1'(l,t) = w_2'(l,t)$ 1
$w_1''(l,t) = w_2''(l,t)$
$m\ddot{w}_1(l,t) + cw_1(l,t) + EI(w_2'''(l,t) - w_1'''(l,t)) = 0$ 1

d) Bestimmen Sie mit der Ansatzfunktion $W(x) = x(2l - x)$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotientens eine obere Schranke für die niedrigste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Sonderfall $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Nebenrechnung:

$$\int_0^{2l} EI(W''(x))^2 \, \mathrm{d}x = 4EI \int_0^{2l} \mathrm{d}x = 8lEI$$ 1

$$\int_0^{2l} \mu W^2(x) \, \mathrm{d}x = \mu \int_0^{2l} (4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4) \, \mathrm{d}x = \mu l^5 \left(\frac{32}{3} - \frac{64}{4} + \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{15}\mu l^5$$ 1

Ergebnis:

$$\omega_1^2 \le \frac{15EI}{2\mu l^4} \longrightarrow \omega_1 \le \sqrt{\frac{15}{2}}\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$ 1

e) Die jeweils niedrigste Eigenkreisfrequenz wird für die Fälle

- $m = 0$ und $c = 0$ mit $\widehat{\omega}_1$
- $m > 0$ und $c = 0$ mit $\overline{\omega}_1$
- $m = 0$ und $c > 0$ mit $\widetilde{\omega}_1$

bezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

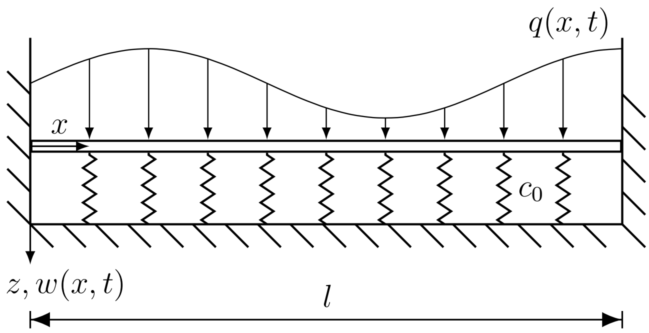
Nebenrechnung:

$\widehat{\omega}_1 < \overline{\omega}_1$	☐		$\widehat{\omega}_1 < \widetilde{\omega}_1$	X	
$\widehat{\omega}_1 = \overline{\omega}_1$	☐	1	$\widehat{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_1$	☐	1
$\widehat{\omega}_1 > \overline{\omega}_1$	X		$\widehat{\omega}_1 > \widetilde{\omega}_1$	☐	

Aufgabe 3 [11 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte beidseitig fest eingespannte schlanke Euler-Bernoulli Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI). Der Balken ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c_0) und wird durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung sowie die Randbedingungen zu bestimmen.

Gegeben: l, μ, EI, c_0, $q(x,t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EIw''^2(x,t) + c_0 w^2(x,t)\right)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

$$\delta W = \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$w(0,t) = 0$
$w'(0,t) = 0$ (1)

$w(l,t) = 0$
$w'(l,t) = 0$ (1)

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und -falls existierend- die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnung:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \left(EIw''^2(x,t) + c_0 w^2(x,t) \right)\ \mathrm{d}x + \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x \right]\ \mathrm{d}t \quad 1$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu \dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw''(x,t)\delta w''(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_0 w(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad 1$$

$$= \underbrace{\int_0^l \left[\mu\dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\right]_{t_0}^{t_1}\ \mathrm{d}x}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad 1$$

$$\underbrace{- \int_{t_0}^{t_1} \left[EIw''(x,t)\delta w'(x,t)\right]_0^l\ \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \left[EIw'''(x,t)\delta w(x,t)\right]_0^l\ \mathrm{d}t}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw''''(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad 2$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_0 w(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\mu\ddot{w}(x,t) + EIw''''w(x,t) + c_0 w(x,t) = q(x,t)$ 1

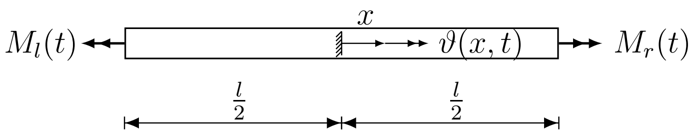
Aufgabe 4

[8 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte freie Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, Polares Flächenträgheitsmoment I_p), der an seinem linken Ende durch das Moment $M_l(t)$ und an seinem rechten Ende durch das Moment $M_r(t)$ belastet wird.
Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

Gegeben: l, ρ, G, I_p, $M_l(t)$, $M_r(t)$



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ an.

Nebenrechnung:

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0$ mit $c^2 = \frac{G}{\rho}$ 1

Randbedingungen:

$\vartheta'(-\frac{l}{2},t)GI_p = M_l(t)$ 1 $\vartheta'(\frac{l}{2},t)GI_p = M_r(t)$ 1

b) Bestimmen Sie für den Fall der freien Schwingung ($M_l(t) = M_r(t) = 0$) mit dem Ansatz $\vartheta(x,t) = \theta(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\theta(x)$ und geben Sie deren allgemeine Lösung sowie die zugehörigen Randbedingungen an.

Nebenrechnung:

Ansatz in Feldgleichung: $-\omega^2\Theta(x)\sin(\omega t) - c^2\Theta''(x)\sin(\omega t) = 0$

Differentialgleichung: $\Theta''(x) + (\frac{\omega}{c})^2\Theta(x) = 0$ 1

Lösung: $\Theta(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$ 1

Randbedingungen: $\Theta(-\frac{l}{2}) = \Theta(\frac{l}{2}) = 0$ 1

c) Als Lösung des Problems aus b) ergeben sich jeweils für $k = 1, 2, \ldots$ folgende Eigenkreisfrequenzen ω_{2k-1}, ω_{2k} und Eigenformen $\theta_{2k-1}(x)$, $\theta_{2k}(x)$

$$\omega_{2k-1} = (2k-1)\widetilde{C}, \qquad \theta_{2k-1}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right),$$
$$\omega_{2k} = 2k\widehat{C}, \qquad \theta_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right).$$

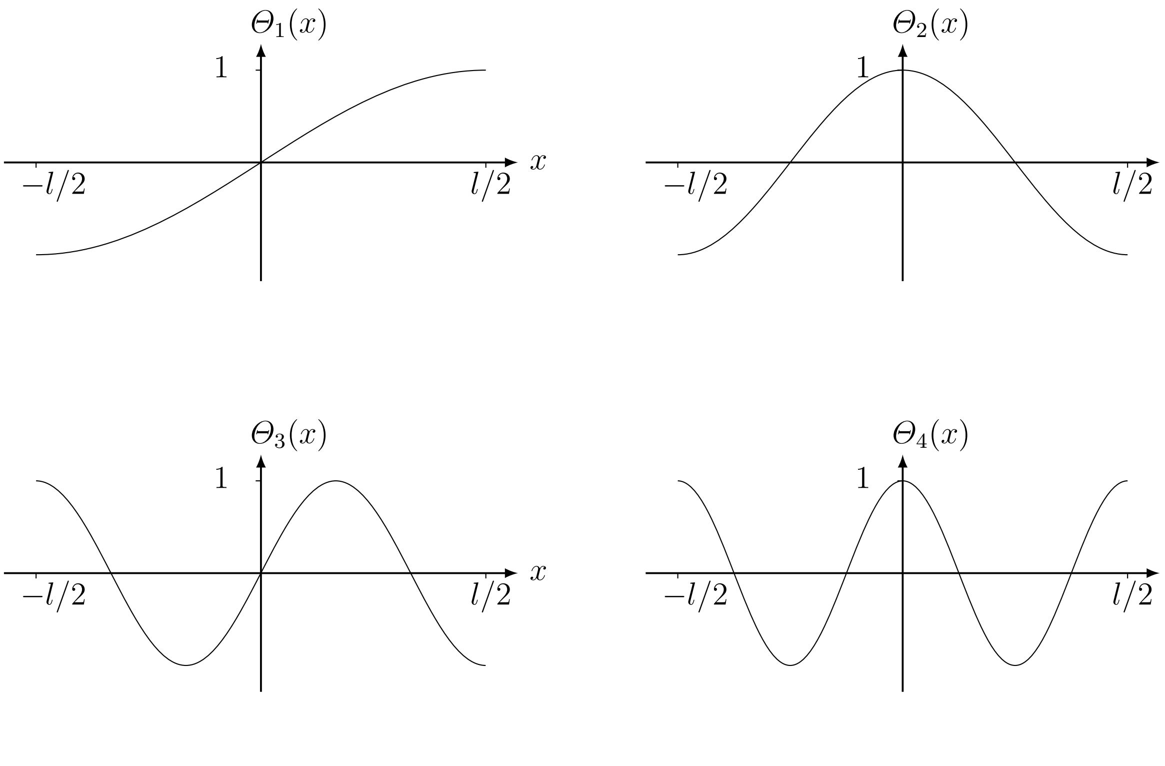
Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 an, für die es in den folgenden Fällen zu Resonanz kommt:

1. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t), \quad M_r(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$,
2. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_2 t), \quad M_r(t) = -M_0 \sin(\Omega_2 t)$.

Überlegen Sie dazu, welche der Eigenformen durch welche äußeren Momente angeregt werden können.

Nebenrechnung:

Anschaulich durch Interpretation der Eigenformen:



Erregerkreisfrequenzen Ω_1, Ω_2:

$\Omega_1 = \omega_{2k-1}$ 1

$\Omega_2 = \omega_{2k}$ 1