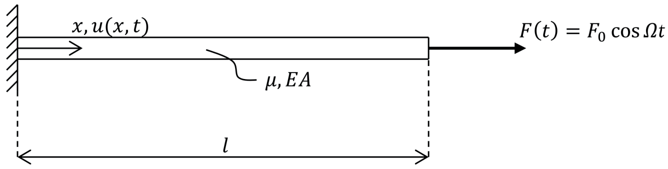
Aufgabenblatt 2

Aufgaben der Hörsaalübung

1. Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Stab (Masse pro Länge μ, Dehnsteifigkeit EA, Länge l), der durch die Kraft $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ zu Längsschwingungen angeregt wird.



   (a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

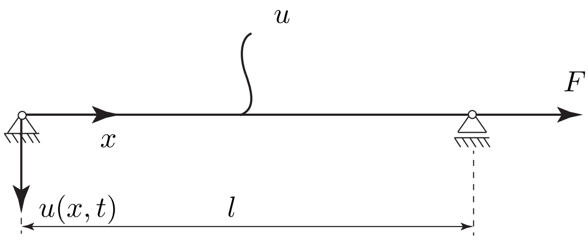
   (b) Bestimmen Sie für $F(t) \equiv 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_k und die Eigenformen $U_k(x)$ des Stabs.

   (c) Sei $F(t)$ nun mit $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ gegeben. Bestimmen Sie mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite $u_p(x,t) = U_p(x) \cos(\Omega t)$ eine Lösung für die Zwangsschwingung.

   (d) Für welche Erregerkreisfrequenz Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

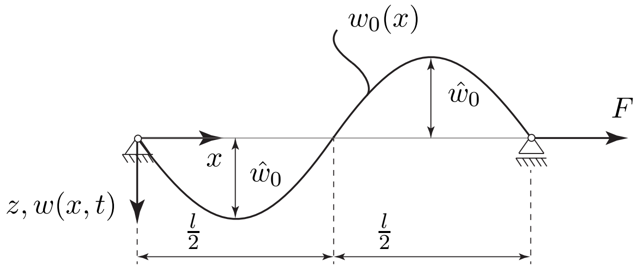
   Geg.: A, E, l, F_0, ρ , Ω

2. Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft F vorgespannt.



   (a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

   (b) Die Saite wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wie skizziert **sinusförmig** mit $w_0(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit. Nehmen Sie die Amplitude der Auslenkung $\hat{w}_0$ als gegeben an. Geben Sie die Anfangsbedingungen $w(x,0)$ und $\dot{w}(x,0)$ an.



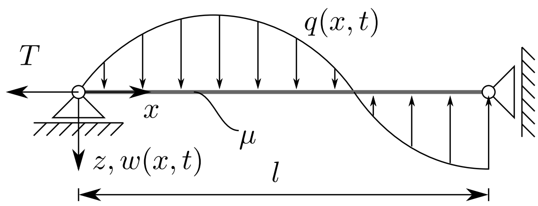
   (c) Bestimmen Sie mittels des Verfahrens der Wellenausbreitung (d'Alembertsche Lösung) die Lösung $w(x,t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{\mu}{F}}$. Skizzieren Sie diese.

   (d) Nach welcher Zeit T ist erstmals wieder die gleiche Auslenkung und Geschwindigkeit wie bei $t = 0$ erreicht? Die wievielte Eigenkreisfrequenz ω_i können Sie daraus bestimmen und wie groß ist sie?

   Geg.: l, μ, F

Tutoriumsaufgaben

3. Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Massenbelegung μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\cos(\Omega t)$ angeregt wird.



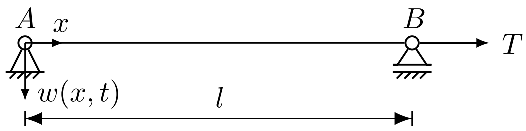
Geg.: $T,\ \mu,\ l,\ \Omega,\ q(x,t) = q_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\cos(\Omega t)$

(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichung für $w(x,t)$ und alle Randbedingungen des skizzierten Systems.

(b) Nutzen Sie einen geeigneten Ansatz (vom Typ der rechten Seite) um die partikuläre Lösung der Differentialgleichung für den eingeschwungenen Zustand zu ermitteln. Zeigen Sie, dass diese Lösung zu jeder Zeit die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

4. Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft T vorgespannt.



(a) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für $t = 0$ gegeben:

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -a\cos\left[8\pi\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right)\right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\dot{w}(x,0) = v_0(x) = 0$$

Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird nun als bekannt vorrausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = l/4c$ und zum Zeitpunkt $t = 3l/4c$.

(b) Für kleine Zeiten t kann die Verschiebung $w(x,t)$ mit der Formel

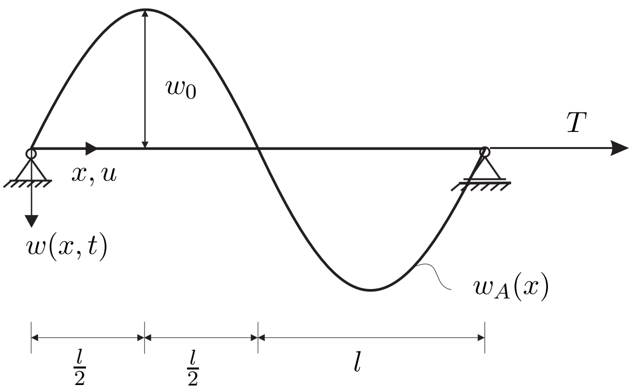
$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit t^* ist diese Lösung gültig? Geben Sie $w(x, l/8c)$ an.

Geg.: T, l, μ

Weitere Aufgaben

5. Eine Saite der Länge $2l$ (Masse pro Länge μ) ist beidseitig gelagert und mit der Kraft T vorgespannt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist sie wie skizziert sinusförmig mit $w_A(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.



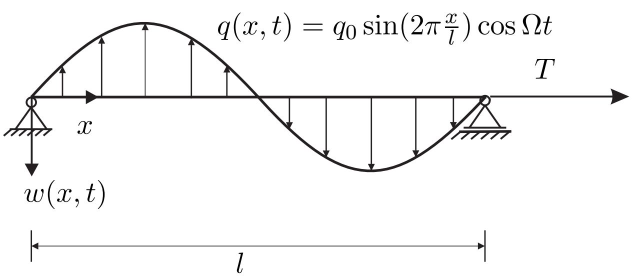
(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

(b) Geben Sie die Anfangsbedingungen an und bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ zum Zeitpunkt $t_1 = l\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ mit dem Lösungsansatz nach d'Alembert (eine Herleitung ist nicht erforderlich).

(c) Prüfen Sie ob die Lösung $w(x,t)$ die Randbedingungen erfüllt. Überführen Sie dazu die Lösung nach d'Alembert in die Form $w(x,t) = W(x) \cdot p(t)$, nutzen Sie dafür den Zusammenhang
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

Geg.: l, T, μ, w_0.

6. Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Masse pro Länge μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi\frac{x}{l})\cos\Omega t$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x)\cos\Omega t$ zu bestimmen.



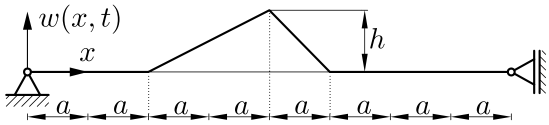
(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Feldgleichung einsetzen und für $W(x)$ einen Ansatz vom Typ der rechten Seite aufstellen. Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

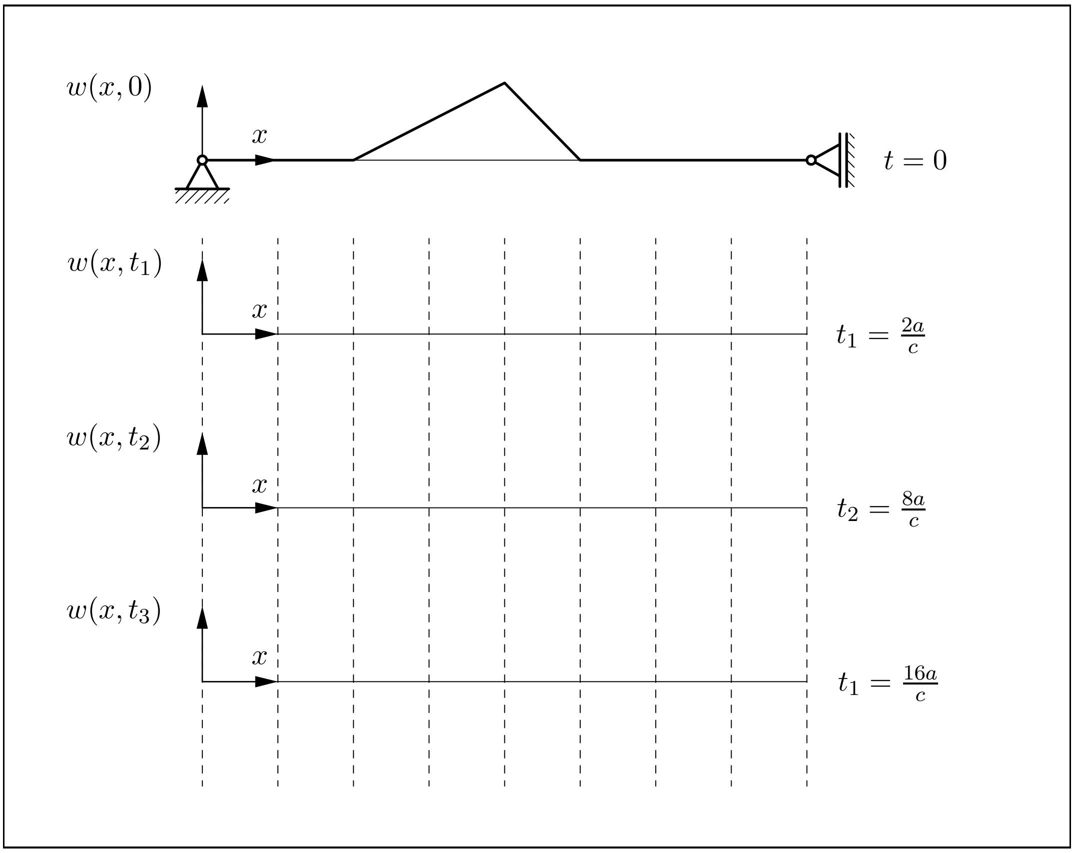
Geg.: l, T, μ, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi\frac{x}{l})\cos\Omega t$

7. Die fest-frei gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Geg.: c, a

(a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=8a/c$, $t_3=16a/c$ einzeichnen.



(b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

(c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

(d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.