Vorlesung: Numerik 1 für Ingenieure

Version 13.11.2018

Michael Karow

7. Vorlesung

Nichtlineare Gleichungen und Iterationsverfahren in $\mathbb{R}^n$

Beispiel: ein Minimierungsproblem in mehreren Veriablen

Aufgabe: Finde das Minimum der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = e^{5\,x_1} + \sin^4(x_1 + 2\,x_2) + \cosh(x_2)$$

Die Stelle, an der das Minimum angenommen wird, ist eine Nullstelle des Gradienten

$$f(x) := \nabla g(x) = \begin{bmatrix} 5\,e^{5\,x_1} + 4\sin^3(x_1 + 2\,x_2)\cos(x_1 + 2\,x_2) \\ 8\,\sin^3(x_1 + 2\,x_2)\cos(x_1 + 2\,x_2) + \sinh(x_2) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Man sucht also eine Nullstelle x_* der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Die Nullstelle wiederum ist ein Fixpunkt der Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi(x) = x + B(x)\,f(x),$$

wobei $B(x)$ eine invertierbare Matrix ist. Man kann also x_* finden, indem man die Fixpunkte von ϕ bestimmt.

Bemerkung: Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Minimalstelle x_* zu bestimmen.

Fixpunktiteration in $\mathbb{R}^n$.

Gegeben sei eine Teilmenge G von $\mathbb{R}^n$ und eine Selbstabbildung $\phi : G \to G$.

Iterationsfolge:

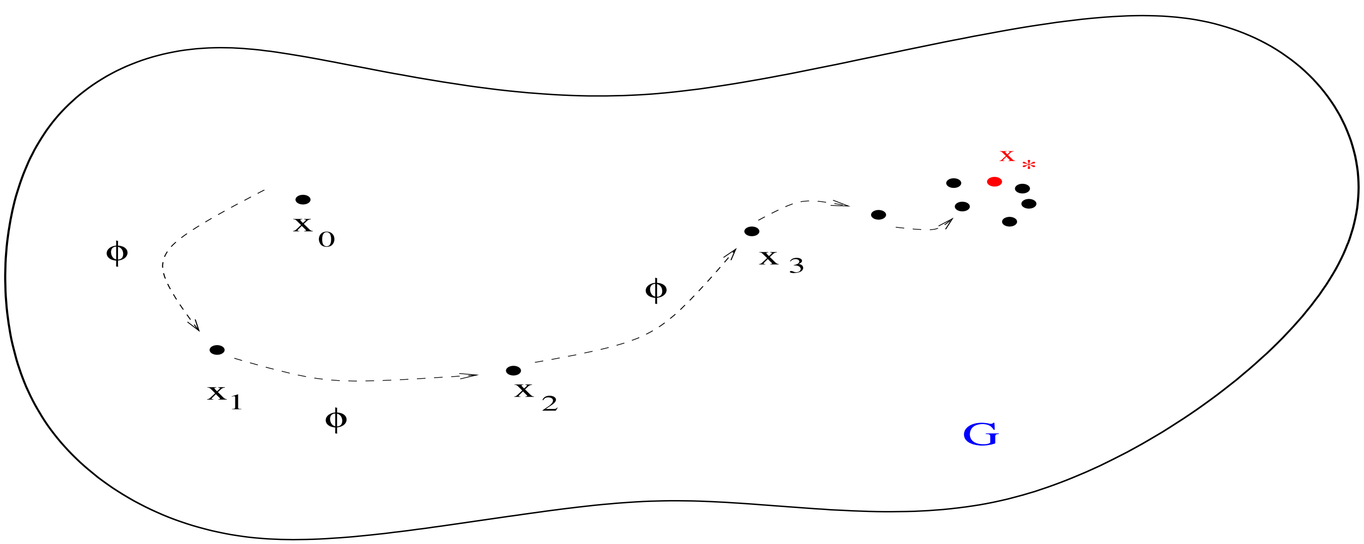
(1) Wähle einen Startwert $x_0 \in G$.

(2) Setze $x_{k+1} := \phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$.

Es gilt: Wenn ϕ stetig ist und die Iterationsfolge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ konvergiert, dann ist der Grenzwert ein Fixpunkt von ϕ.

Beweis: Sei $x_* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Dann

$$\phi(x_*) = \phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} x_k = x_*.$$



Anziehende Fixpunkte bei Iteration in $\mathbb{R}^n$

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : G \to G$ eine Selbstabbildung und x_* ein Fixpunkt von ϕ.
Wenn eine Umgebung $U_\epsilon = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \ \|z - x_*\| < \epsilon\ \} \cap G$ von x_* und eine Konstante $L < 1$ existiert, so dass

$$\|\phi(x) - x_*\| \le L\,\|x - x_*\| \qquad \text{für alle } x \in U_\epsilon \qquad (*)$$

dann nennt man x_* **anziehend**.

Folgerung:

Wenn eine Iterationsfolge $x_{k+1} = \phi(x_k)$ in U_ϵ startet, dann konvergiert sie gegen x_*, denn aus $(*)$ folgt

$$\|x_k - x_*\| \le L^k\,\|x_0 - x_*\| \to 0.$$

Rechnung dazu:

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_*\| &= \|\phi(x_0) - x_*\| \le L\,\|x_0 - x_*\| \\
\|x_2 - x_*\| &= \|\phi(x_1) - x_*\| \le L\,\|x_1 - x_*\| \le L^2\,\|x_0 - x_*\| \\
\|x_3 - x_*\| &= \|\phi(x_2) - x_*\| \le L\,\|x_2 - x_*\| \le L^3\,\|x_0 - x_*\| \\
& usw.
\end{aligned}$$

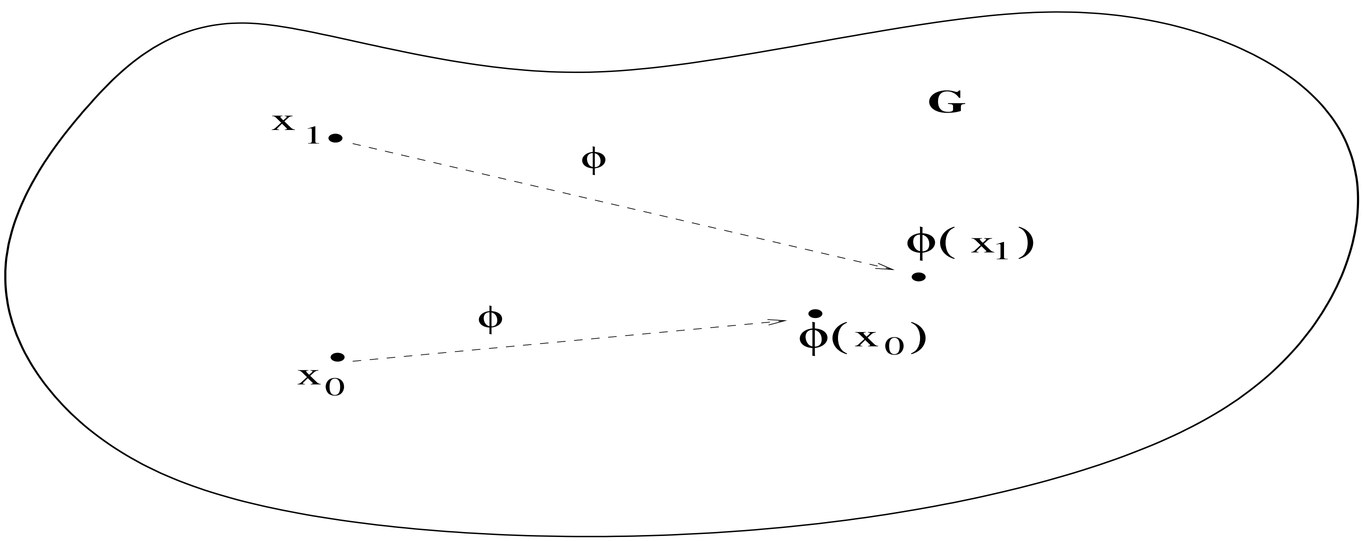
Lipschitz-stetige Abbildungen und Kontraktionen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Eine Selbstabbildung $\phi : G \to G$ des Gebiets G heisst **Lipschitz-stetig** (dehnungsbeschränkt), wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_0)\| \le L \, \|x_1 - x_0\| \qquad \text{für alle } x_0, x_1 \in G.$$

L heisst **Lipschitz-Konstante**. Wenn $L < 1$, dann nennt man ϕ **kontrahierend**.

Dass ϕ kontrahierend ist, bedeutet also:
Der Abstand zwischen den Bildpunkten $\phi(x_1)$ und $\phi(x_0)$ ist mindestens um den Faktor $L < 1$ geringer als der Abstand zwischen den Urbildern x_1 und x_0.



Der Banachsche Fixpunktsatz (in $\mathbb{R}^n$)

Vorbemerkung: eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **abgeschlossen**, falls jeder Randpunkt von G in G enthalten ist.

Der **Banachsche Fixpunktsatz** lautet:

Sei G eine **abgeschlossene** Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Sei $\phi : G \to G$ eine **kontrahierende** Selbstabbildung mit Kontraktionskonstante $0 \leq L < 1$.
Dann gilt

1. ϕ besitzt genau einen Fixpunkt $x_* \in G$.
2. Jede Iterationsfolge $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $x_0 \in G$, konvergiert gegen x_*.
3. Der Abstand von x_k zum Fixpunkt x_* erfüllt die Ungleichungen

$$\|x_k - x_*\| \leq L^k \|x_0 - x_*\|. \qquad \text{(lineare Konvergenz)}$$

und

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \qquad \text{(a priori Abschätzung)}$$

und

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|. \qquad \text{(a posteriori Abschätzung)}$$

Praktische Relevanz der letzten beiden Ungleichungen:
Aus den Abständen $\|x_k - x_{k-1}\|$, $\|x_1 - x_0\|$ und L kann man den Abstand von x_k zum Fixpunkt abschätzen ohne den Fixpunkt zu kennen.

Beweis auf den folgenden Seiten.

Vorbereitung zum Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

Geometrische Summenformel, geometrische Reihe

Sei $L \in \mathbb{C}$, $L \neq 1$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{m-1} L^j = 1 + L + L^2 + \ldots + L^{m-2} + L^{m-1} = \frac{1 - L^m}{1 - L}.$$

Wenn $|L| < 1$, dann folgt durch Grenzübergang,

$$\sum_{j=0}^{\infty} L^j = \frac{1}{1 - L}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(1 - L)(1 + L + L^2 + \ldots + L^{m-2} + L^{m-1}) \\
&= 1 + L + L^2 + \ldots + L^{m-2} + L^{m-1} \\
&\quad -(L + L^2 + L^3 + \ \ldots\ + L^{m-1} + L^m) \\
&= 1 - L^m.
\end{aligned}$$

Vorbereitung zum Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

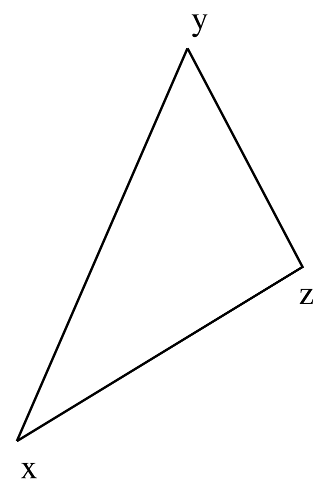
Dreiecksungleichung

Nach Definition einer Norm gilt die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Hieraus folgt die Dreicksungleichung für Differenzen:

$$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$



Vorbereitung zum Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

Cauchy-Folgen und Grenzwerte

Eine Folge $x_0, x_1, x_2 \ldots \in \mathbb{R}^n$ heißt **Cauchy-Folge** falls es zu jeder noch so kleinen Zahl $\epsilon > 0$ einen index k gibt, so dass

$$|x_{k+m} - x_k\| < \epsilon \qquad \text{für alle } m = 1, 2, 3 \ldots$$

Anschauung: Dies bedeutet, dass die Folge sich mit wachsendem k immer mehr verdichtet.

Satz. Jede Cauchy-Folge konvergiert (d.h. hat einen Grenzwert).

Bemerkung: Für $n = 1$ ist dieser Satz ein Axiom (Grundannahme).

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

Seien x_*^1, x_*^2 Fixpunkte von ϕ. Dann,

$\|x_*^1 - x_*^2\| = \|\phi(x_*^1) - \phi(x_*^2)\| \leq L\,\|x_*^1 - x_*^2\| \quad \Rightarrow \quad \|x_*^1 - x_*^2\| = 0$ (wegen $L < 1$) $\quad \Rightarrow \quad x_*^1 = x_*^2$.

Also hat ϕ höchstens einen Fixpunkt. Für die Itertionsfolge $x_{k+1} = \phi(x_k)$ haben wir

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1+j} - x_{k+j}\| &= \|\phi(x_{k+1+j-1}) - \phi(x_{k+j-1})\| \\
&\leq L\,\|x_{k+1+j-1} - x_{k+j-1}\| \\
&= L\,\|\phi(x_{k+1+j-2}) - \phi(x_{k+j-2})\| \\
&\leq L\ L\,\|x_{k+1+j-2} - x_{k+j-2}\| \\
&\vdots \\
&\leq L^j\,\|x_{k+1} - x_k\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x_{k+m} - x_k\| &\leq \|x_{k+m} - x_{k+m-1}\| + \|x_{k+m-1} - x_{k+m-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + 1)\,\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq \frac{1}{1-L}\,\|x_{k+1} - x_k\| \qquad (*) \\
&\leq \frac{1}{1-L}\,L^k\,\|x_1 - x_0\| \qquad (**)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite wird beliebig klein $\Rightarrow$ Folge ist Cauchy-Folge mit Grenzwert x_*.

$(**) \quad \Rightarrow \quad \|x_* - x_k\| \leq \dfrac{L^k}{1-L}\,\|x_1 - x_0\|.$

$(*) \quad \Rightarrow \quad \|x_* - x_k\| \leq \dfrac{1}{1-L}\,\|x_{k+1} - x_k\| \leq \dfrac{L}{1-L}\,\|x_k - x_{k-1}\|$

Frage: Wie kann man feststellen, ob

- eine Abbildung $\phi : G \to G$ Lipschitz-stetig oder sogar kontrahierend ist?
- ein Fixpunkt x_* von ϕ anziehend ist?

Antwort: Indem man die induzierte Matrixnorm der Jacobi-Matrix von ϕ berechnet.

Jacobi-Matrix:

$$\phi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Norm:

$$\|\phi'(x)\| = \max_{v \neq 0} \frac{\|\phi'(x)v\|}{\|v\|} = \max_{\|v\|=1} \|\phi'(x)v\|.$$

Um mit Hilfe der Norm der Jacobi-Matrix etwas darüber auszusagen, ob ϕ Lipschitz-stetig etc. ist, braucht man das **Schrankenlemma** (siehe nächste Seite).

Das Schrankenlemma

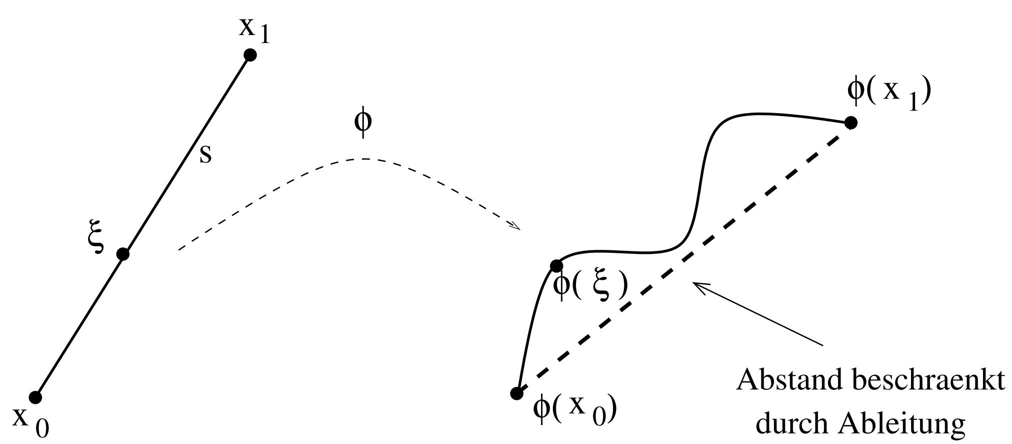
Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to G \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung.
Wenn

1) die Verbindungsstrecke s von x_0 und x_1 in G enthalten ist,

2) $\|\phi'(\xi)\| \leq L$ für alle $\xi \in s$,

dann ist

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_0)\| \leq L \, \|x_1 - x_0\|.$$



Beweis des Schrankenlemmas:

Der Wert von ϕ an Punkten auf der Verbindungsstrecke ist

$$g(t) := \phi(x_0 + t\,(x_1 - x_0)), \qquad t \in [0,1]$$

Kettenregel:

$$g'(t) = \underbrace{\phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))}_{Matrix}\ \underbrace{(x_1 - x_0)}_{Vektor}.$$

Es folgt

$$\phi(x_1) - \phi(x_0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = \int_0^1 \phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))\,(x_1 - x_0)\,dt.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_0)\| &= \left\| \int_0^1 \phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))\,(x_1 - x_0)\,dt \right\| \\
&\le \int_0^1 \|\phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))\,(x_1 - x_0)\|\,dt \quad \left(\text{weil } \left\|\int f(t)\,dt\right\| \le \int \|f(t)\|\,dt\right) \\
&\le \int_0^1 \|\phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))\|\,\|x_1 - x_0\|\,dt \\
&= \int_0^1 \|\phi'(x_0 + t\,(x_1 - x_0))\|\,dt \quad \|x_1 - x_0\| \\
&= \|\phi'(x_0 + \theta\,(x_1 - x_0))\| \ \ \|x_1 - x_0\| \quad \theta \in [0,1] \quad \begin{pmatrix}\text{Mittelwertsatz der} \\ \text{Ingegralrechnung}\end{pmatrix} \\
&= \|\phi'(\xi)\| \ \ \|x_1 - x_0\|, \qquad \xi = x_0 + \theta\,(x_1 - x_0) \in s.
\end{aligned}$$

1. Folgerung aus dem Schrankenlemma

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Gebiet, das mit je zwei Punkten x_0, x_1 auch immer die ganze Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten enthält (ein solches Gebiet nennt man **konvex**). Sei ausserdem $\phi : G \to G$ stetig differenzierbar. Angenommen, $L > 0$ ist eine obere Grenze für die Norm der Ableitung ϕ', d.h.

$$\|\phi'(\xi)\| \leq L \qquad \text{für alle } \xi \in G$$

Dann ist ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L, d.h. es ist

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_0)\| \leq L\,\|x_1 - x_0\| \qquad \text{für alle } x_0, x_1 \in G.$$

Wenn $L < 1$, dann ist ϕ kontrahierend. Wenn G außerdem abgeschlossen ist, dann sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und es existiert genau ein Fixpunkt x_*, gegen den jede Iterationsfolge konvergiert.

2. Folgerung aus dem Schrankenlemma

Sei $\phi : G \to G$ stetig differenzierbar mit Fixpunkt x_* und

$$\|\phi'(x_*)\| < L.$$

Dann gibt es wegen der Stetigkeit von ϕ' eine Umgebung $U \subset G$ von x_*, so dass

$$\|\phi'(x)\| < L \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Wenn U die Verbindungsstrecke von x und x_* enthält, dann folgt

$$\|\phi(x) - x_*\| \le \|\phi(x) - \phi(x_*)\| \le L \, \|x - x_*\|.$$

Wenn U konvex ist, also alle Verbindungsstrecken enthält, und ausserdem $L < 1$ ist, dann ist der Fixpunkt anziehend.

Ein Satz über quadratische Konvergenz

Sei $\phi : G \to G$ zweimal stetig differenzierbar mit Fixpunkt x_* und

$$\phi'(x_*) = 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung U von x_* mit folgender Eigenschaft:
Jede Iterationsfolge $x_{k+1} = \phi(x_k)$ mit Startpunkt $x_0 \in U$ konvergiert gegen x_*, und es gibt eine Konstante L, so dass

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq L \, \|x_k - x_*\|^2.$$

Nullstellenprobleme in $\mathbb{R}^n$ und das Newton-Verfahren

Gegeben: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ mit Nullstelle x_*.

Problem: Berechnung von x_*.

Äquivalente Gleichung:

$$x_* = \phi(x_*), \qquad \text{wobei} \qquad \phi(x) = x + B(x)\, f(x)$$

mit einer Matrix $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $det(B(x)) \neq 0$.
Quadratische Konvergenz des zugehörigen Iterationsverfahrens hat man für

$$B(x) = -f'(x)^{-1}$$

Dann ist nämlich $\phi'(x_*) = 0$. Die zugehörige Iterationsvorschrift ist

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1}\, f(x_k).$$

Dies ist das **Newtonverfahren in $\mathbb{R}^n$**.

Voraussetzung für quadratische Konvergenz ist allerdings $det(f'(x_*)) \neq 0$.
Aber auch ohne diese Voraussetzung kann die Folge schnell gegen x_* konvergieren.

Nachteile des Verfahrens: Man muss $f'(x)$ ausrechnen oder approximieren.
Konvergenz hat man oft nur, wenn der Startwert nahe an der Nullstelle ist.

In der Literatur findet man zahlreiche Varianten und Verbesserungen des Newton-Verfahrens, z.B. das gedämpfte: $x_{k+1} = x_k - \lambda(x_k)\, f'(x_k)^{-1}\, f(x_k), \qquad \lambda(x_k) \in (0,1).$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz werden 3 zentrale Sätze der Analysis bewiesen.

1. Der Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit differenzierbarer Funktionen (kurz: Umkehrsatz).

2. Der Satz über implizite Funktionen.

3. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen von Picard-Lindelöff.

Umkehrsatz.

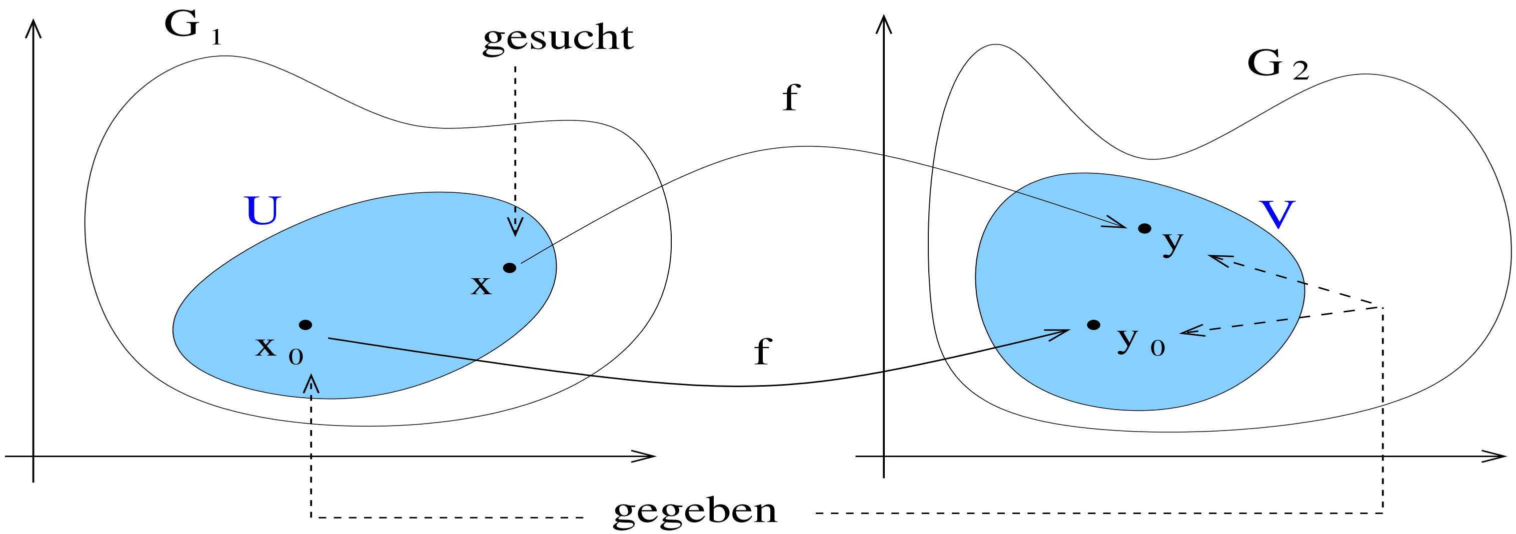
Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $f : G_1 \to G_2$ stetig differenzierbar mit Jacobi Matrizen $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) \text{ invertierbar}$$

Dann gibt es offene Umgebungen $\mathcal{U}$ von x_0 und $\mathcal{V}$ von y_0 so dass gilt:
Zu jedem $y \in \mathcal{V}$ gibt es genau ein $x \in \mathcal{U}$ so dass

$$f(x) = y.$$

Setze $f^{-1}(y) := x$. Dann ist $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ die (lokale) Umkehrfunktion von f.
f^{-1} is genauso oft differenzierbar wie f.



Beweisidee: Um x mit $f(x) = y$ zu finden verwende vereinfachte Newton-Iteration

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k - f'(x_0)(f(x_k) - y)}_{\phi(x_k)}$$

Es ist $\phi'(x_0) = 0$, also $\|\phi'(x)\| < 1$, wenn x hinreiched nah an x_0.

Der Satz über implizite Funktionen

Sei $g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ invertierbar}.$$

(Dabei ist $\frac{\partial g}{\partial y}$ die Jacobi Matrix aller partiellen Ableitungen in die y-Richtungen.)

Dann gibt es offene Umgebungen $\mathcal{U}$ von x_0 und $\mathcal{V}$ von y_0 so dass gilt:

Zu jedem $x \in \mathcal{U}$ gibt es genau ein $y \in \mathcal{V}$, so dass

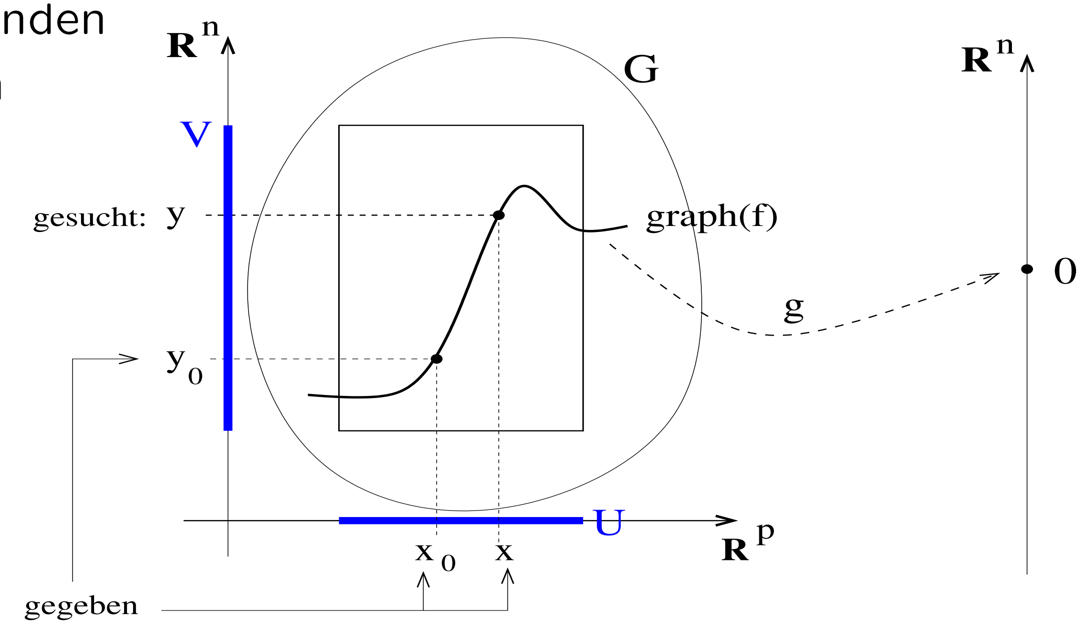
$$g(x, y) = 0.$$

Setze $f(x) := y$. Man hat dann eine differenzierbare Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ definiert.

Beweisidee: Um y mit $g(x, y) = 0$ zu finden verwende vereinfachte Newton-Iteration

$$y_{k+1} = \underbrace{y_k - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\, g(x, y_k)}_{\phi(y_k)}$$

Es ist $\phi'(y_0) = 0$, also $\|\phi'(y)\| < 1$, wenn (x, y) hinreiched nah an (x_0, y_0).



Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Problem: Berechne x_*, so dass $Ax_* = b$.

Äquivalente Gleichung:

$$x_* = \phi(x_*), \qquad \text{wobei} \qquad \phi(x) = x - B^{-1}(Ax - b)$$

mit einer invertierbaren Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man hat

$$x = \phi(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad b - Ax = 0 \qquad x = x_*$$

Problem dabei: Wie muss man B wählen, damit die Iterationsfolge

$$x_{k+1} = \phi(x_x) = x_k - B^{-1}(Ax_k - b)$$

für jeden Startwert x_0 (möglichst schnell) konvergiert?
Eine gute Wahl von B hängt von A ab.

Weiteres Kriterium für die Auswahl von B:
Gleichungssysteme mit der Matrix B müssen leichter lösbar sein, als Gleichungssyteme mit A, denn sonst hat man vom Aufwand her nichts gewonnen, weil man ja $B^{-1}(Ax - b)$ ausrechnen muss. Insbesondere ist die Wahl von $B = A$ ausgeschlossen.

Wann konvergiert ein Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen?

Iterationsverfahren zur Lösung von $Ax = b$: $x_{k+1} = \phi(x_k)$, wobei

$$\phi(x) = x - B^{-1}(Ax - b) = \underbrace{(I - B^{-1}A)}_{C} x + B^{-1}b$$

Man hat

$$\phi(x) - \phi(y) = (Cx + B^{-1}b) - (Cy + B^{-1}b) = C(x - y) \qquad (*)$$

Insbesonde für x_*:

$$\phi(x) - x_* = \phi(x) - \phi(x_*) = C(x - x_*) \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt für eine jede Vektornorm und die zugehörige Matrixnorm:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \|C\| \, \|y - x\|, \qquad \|\phi(x) - x_*\| \leq \|C\| \, \|x - x_*\|$$

Folgerung: Das Verfahren konvergiert sicher dann, wenn für eine induzierte Matrixnorm die Ungleichnung $\|C\| < 1$ gilt.

Es gibt aber ein normunabhängiges Konvergenzkriterium.

Satz: Das Verfahren konvergiert genau dann für jeden Startwert x_0 und jede rechte Seite b gegen x_*, wenn alle Eigenwerte von C einen kleineren Betrag als 1 haben.

Beweisidee: Aus $(**)$ folgt $x_{k+1} - x_* = C^k(x_0 - x_*)$. Wenn alle Eigenwerte von C einen kleineren Betrag als 1 haben, dann konvergiert die Matrixfolge C^k gegen die Nullmatrix.

Implementation und die wichtigsten Beispiele:

Iterationsvorschrift: $x_{k+1} = x_k - B^{-1}(Ax_k - b)$

Die praktische Berechnung von x_{k+1} geht in 2 Teilschritten:

$$\begin{aligned} \text{Löse } B\,h &= Ax_k - b \\ \text{Setze } x_{k+1} &= x_k - h, \end{aligned}$$

Für die Matrix B kann man z.B. nehmen:

- $B = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \to$ Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

- $B = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\omega} & & & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{\omega} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \frac{a_{nn}}{\omega} \end{bmatrix} \to$ relaxiertes Gauss-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren)

Das Jacobi-Verfahren konvergiert für strikt diagonaldominante Matrizen, d.h. für Matrizen A, die die Bedingung

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{k,j}| \qquad \text{für alle } j$$

erfüllen. Das relaxiertes Gauss-Seidel-Verfahren konvergiert für symmetrische und positiv definite Matrizen, wenn für den Relaxationsparameter gilt: $0 < \omega < 2$.

Mehr darüber in jedem guten Numerik-Buch.