MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2019

Schriftlicher Test vom 15.07.2019

Name, Vorname ______________________ Matrikelnummer ______________________

Studiengang ______________________

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines **einseitig** beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Mobiltelefone. Skizzen, Rechnungen und Ergebnisse müssen mit dokumentenechten Stiften (keine Blei- oder Buntstifte) erstellt werden. Rotstifte dürfen nicht verwendet werden.

Ich bestätige hiermit meine Prüfungsfähigkeit.

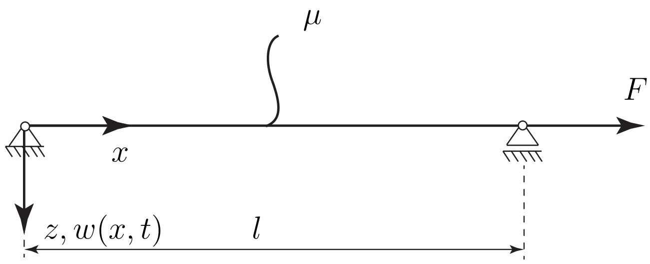
Unterschrift ______________________

Tragen Sie die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Die Endergebnisse sind ausschließlich in gegebenen Größen anzugegeben. Integrale und Differentiale sind, falls möglich, aufzulösen.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Erreichte Punkte					
Handzeichen					

Aufgabe 1

[13 Punkte]

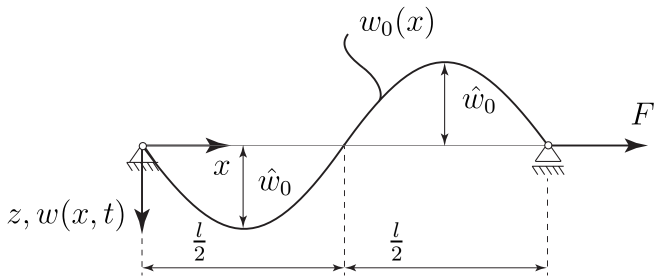


Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft F vorgespannt.
Geg.: l, μ, F

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c an.

Ergebnisse:

b) Die Saite wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wie skizziert **sinusförmig** mit $w_0(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.
Geg.: $\hat{w}_0$, l



Geben Sie die Anfangsbedingungen an.

Ergebnisse:

$w(x, 0) =$

$\dot{w}(x, 0) =$

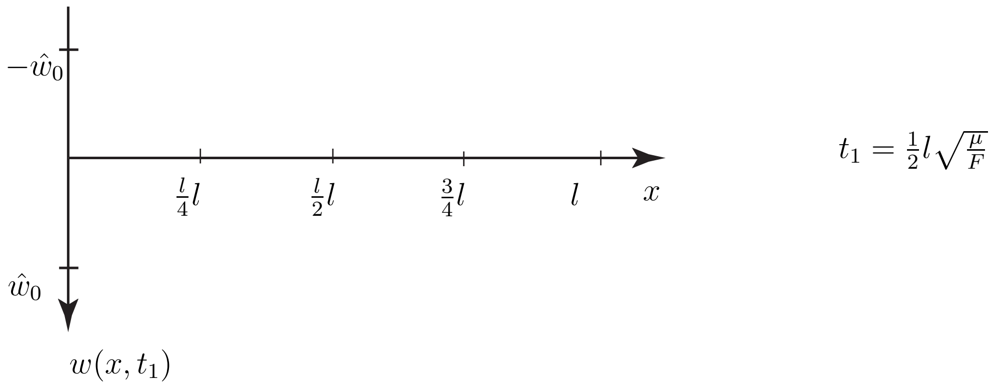
c) Bestimmen Sie mittels des Verfahrens der Wellenausbreitung (d'Alembertsche Lösung) die Lösung zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{\mu}{F}}$. Skizzieren Sie diese.

Rechnung:

Ergebnis:

$w(x, t_1) =$

Skizze:

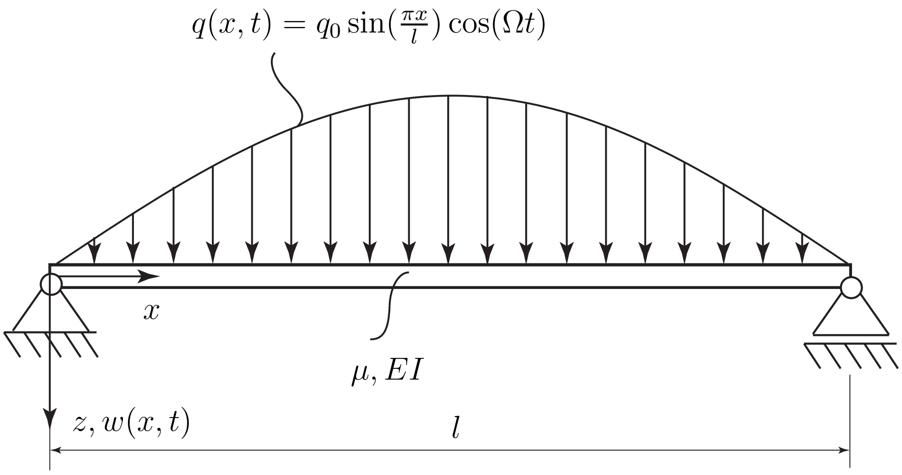


d) Nach welcher Zeit T ist erstmals wieder die gleiche Auslenkung und Geschwindigkeit wie bei $t = 0$ erreicht? Die wievielte Eigenkreisfrequenz können Sie daraus bestimmen und wie groß ist sie?

$T =$

$\omega_2 =$

Aufgabe 2 [20 Punkte]



Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \cos(\Omega t)$ belastet.
Geg: l, μ, EI, q_0, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \cos(\Omega t)$

a) Geben Sie die Feldgleichung und alle Randbedingungen (sowohl dynamische als auch geometrische) an.

Ergebnisse:

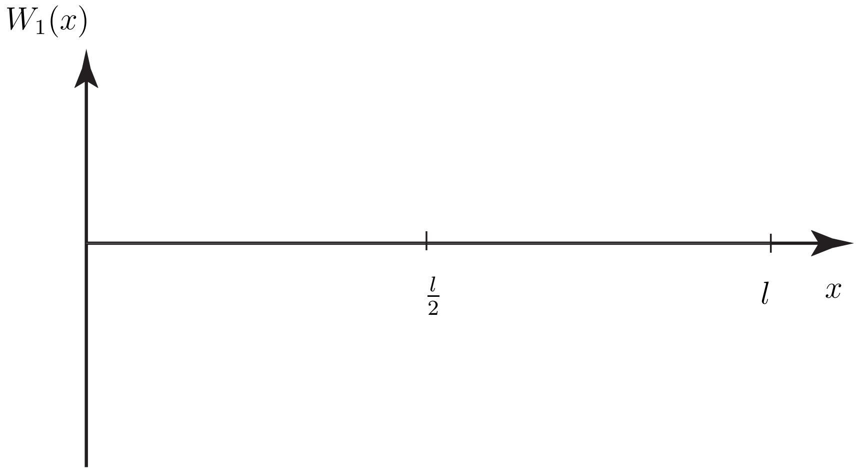
b) Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w_p(x,t) = W(x)\cos(\Omega t)$ zu bestimmen. Setzen Sie dazu den Ansatz in die Feldgleichung ein und lösen Sie das entstehende zeitfreie Problem für $W(x)$ mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite. Zeigen Sie, dass die Lösung $W(x)$ den Randbedingungen genügt.

Rechnung:

Rechnung/Ergebnisse:

c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ (ohne Rechnung). Wie groß ist die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems?
Hinweis: Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 lässt sich aus der Lösung der Teilaufgabe 2b) ermitteln.

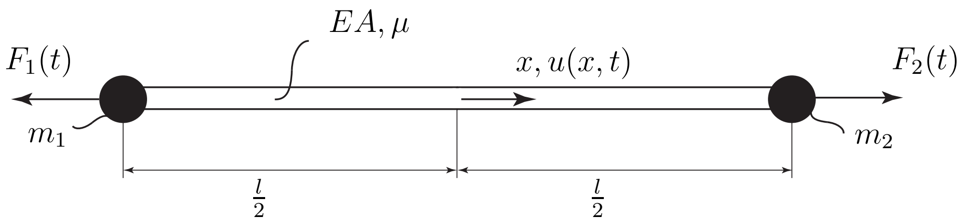
Skizze:



Erste Eigenkreisfrequenz ω_1:

Aufgabe 3

[21 Punkte]



Der freie (nicht gelagerte) Dehnstab (Länge l, Masse pro Länge μ, Dehnsteifigkei EA) ist an seinem Ende bei $x = -\frac{l}{2}$ mit einer Punktmasse m_1 und an seinem Ende bei $x = \frac{l}{2}$ mit einer Punktmasse m_2 verbunden. Es wirken außerdem die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$. Mit dem **Prinzip von Hamilton** sollen die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

Geg.: l, m_1, m_2, μ, EA, $F_1(t)$, $F_2(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

$T =$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

$U =$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW potentialloser Kräfte und Momente an.

$\delta W =$

d) Existieren geometrische Randbedingungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

Ergebnis:

e) Bestimmen Sie mit **Prinzip von Hamilton** die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen.

Rechnung:

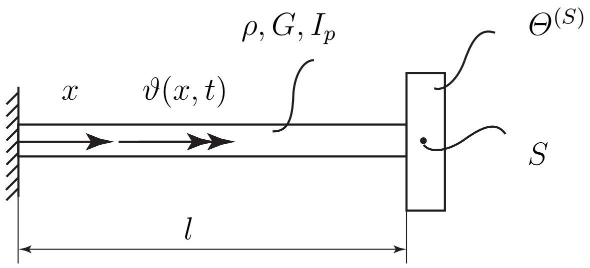
Rechnung:

Rechnung:

Feldgleichung:

dynamische Randbedingung(en):

Aufgabe 4 [21 Punkte]



Gegeben ist ein Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) mit einer starren homogenen Enddrehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(S)}$). Mittels des Rayleigh-Quotienten ist eine Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz vorzunehmen.
Geg: l, μ, ρ, GI_p, $\Theta^{(S)}$.

a) Geben Sie die Feldgleichung, die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c sowie die geometrische(n) Randbedingung(en) an.

Ergebnisse:

b) Geben Sie die dynamische(n) Randbedingung(en) an.

Ergebnis(se):

c) Geben Sie das Randwertproblem für $\boldsymbol{\Theta}^{(\boldsymbol{S})} = \mathbf{0}$ an. Berechnen Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$ (die Eigenform der niedrigsten Eigenkreisfrequenz ω_1) sowie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1. Skizzieren Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$.

Rechnung:

Rechnung:

Ergebnisse:

$\omega_1 =$

$\Theta_1(x) =$

Skizze:

d) Berechnen Sie mit Hilfe der im Aufgabenteil c) bestimmten ersten Eigenform $\Theta_1(x)$ als Ansatzfunktion eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Fall $\boldsymbol{\Theta^{(S)} > 0}$ mittels des Rayleigh-Quotienten. Prüfen Sie für den Fall $\boldsymbol{\Theta^{(S)} = 0}$ die Richtigkeit des Ergebnisses aus Aufgabenteil c) für die erste Eigenkreisfrequenz.
Der Rayleigh-Quotient ist gegeben mit:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int\limits_0^l GI_p\Theta_1'^2(x)\mathrm{dx}}{\int\limits_0^l \rho I_p\Theta_1^2(x)\mathrm{dx} + \Theta^{(S)}\Theta_1^2(l)}$$

Hinweis:

$$\int \sin^2(ax)\mathrm{dx} = \frac{1}{2a}(ax - \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$
$$\int \cos^2(ax)\mathrm{dx} = \frac{1}{2a}(ax + \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$

Rechnung:

Rechnung:

Rechnung:

$\tilde{\omega}_1$ für $\Theta^{(S)} > 0$:

$\tilde{\omega}_1$ für $\Theta^{(S)} = 0$: