1. Klausur Kontinuumsmechanik SoSe 08, Prof. Dr. U. von Wagner

Bitte deutlich schreiben!

T	
1	
2	
3	
4	
$\sum$	

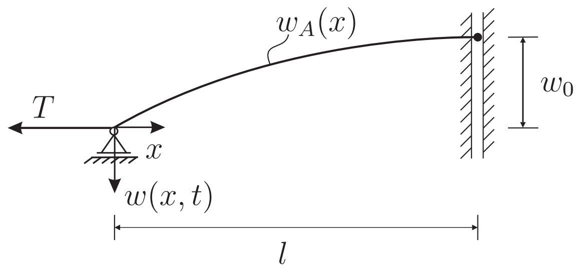
Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

1 (9 Punkte)

Eine Saite der Länge l (Masse pro Länge μ) ist beidseitig gelagert und mit der Kraft T vorgespannt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist sie wie skizziert sinusförmig mit $w_A(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.



(a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen $w(x, t = 0)$, $\dot{w}(x, t = 0)$ an.

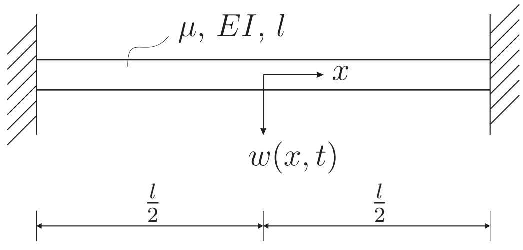
(b) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{\mu}{T}}$ mit dem Lösungsansatz nach d'Alembert (eine Herleitung ist nicht erforderlich).

(c) Prüfen Sie ob die Lösung $w(x, t)$ die Randbedingungen erfüllt. Überführen Sie dazu die Lösung nach d'Alembert in die Form $w(x, t) = W(x) \cdot p(t)$ und nutzen Sie dafür die Zusammenhänge $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

Geg.: l, T, μ, w_0

2 (11 Punkte)

Gegeben ist der skizzierte beidseitig eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l).



(a) Skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen (die beiden Eigenformen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen).

(b) Es soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz über den Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Als Ansatzfunktion soll ein Polynom

$$\tilde{W}_1(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$$

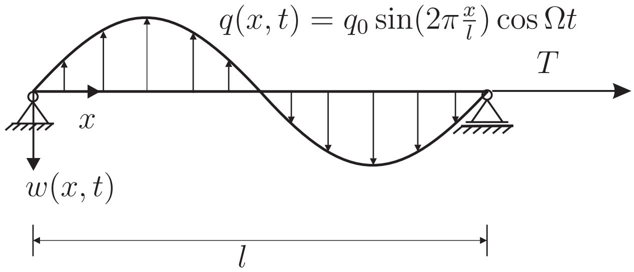
gewählt werden. Bestimmen Sie α und β aus der Anpassung an die geometrischen Randbedingungen. Beachten Sie dafür das gewählte Koordinatensystem und die Symmetrie des Systems. Zeigen Sie, dass $\tilde{W}_1$ alle geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(c) Geben Sie damit eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 an.
Hinweis: Der nach Einsetzen der Integralgrenzen für $\tilde{\omega}_1$ entstandene Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden.

Geg.: μ, EI, l

3 **(9 Punkte)**

Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Masse pro Länge μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x) \cos \Omega t$ zu bestimmen.



(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

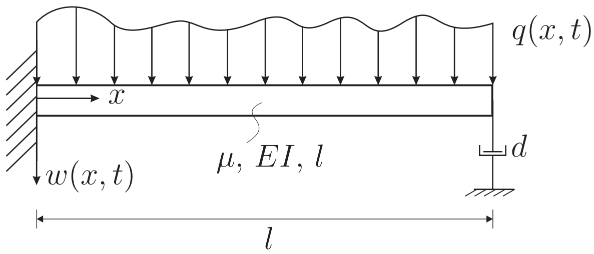
(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Feldgleichung einsetzen und für $W(x)$ einen <u>Ansatz vom Typ der rechten Seite</u> aufstellen. Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: l, T, μ, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$

4 **(11 Punkte)**

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l) ist linksseitig eingespannt, an seinem rechten Ende mit einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden, sowie durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet.



(a) Ermitteln Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente δW für Biegeschwingungen $w(x,t)$.

(b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

(c) Bestimmen Sie über das Prinzip von Hamilton die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen.

Geg.: μ, EI, l, $q(x,t)$, d

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenbelegung μ	
Biegesteifigkeit EI	
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c	

(1 Punkt)

2. Gegeben ist die Feldgleichung für Torsionsschwingungen eines Stabs

$$\rho\ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0.$$

Wieviele Randbedingungen und wieviele Anfangsbedingungen werden benötigt um $\vartheta(x,t)$ zu bestimmen?

Zahl Randbedingungen $\square$ Zahl Anfangsbedingungen $\square$

(1 Punkt)

3. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die folgende Gestalt:

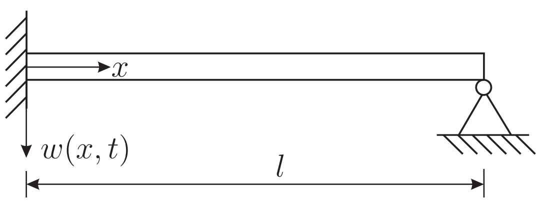
$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt dabei die in negative x-Richtung laufende Welle?

$\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ $\square$ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ $\square$ f_1 $\square$ f_2 $\square$

(1 Punkt)

4. Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Balken. Geben Sie für die Biegeschwingung $w(x,t)$ die Feldgleichung, die geometrischen sowie die dynamischen Randbedingungen an.



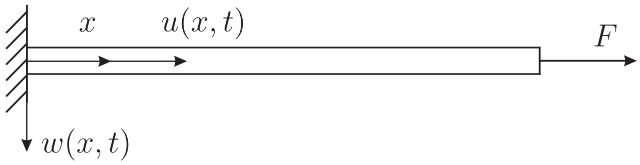
Feldgleichung:

geometrische RBed.:

dynamischen RBed.:

(2 Punkte)

5. Gegeben ist ein Stab/Balken unter konstanter Vorspannkraft $F > 0$.

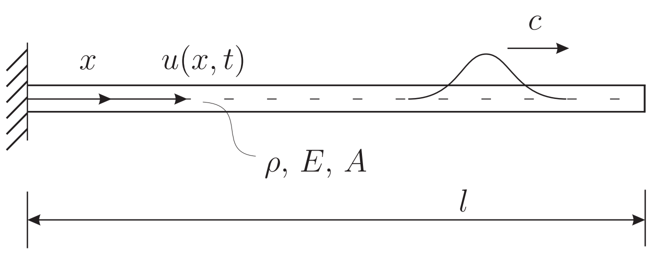


Welchen Einfluss hat F auf die Eigenkreisfrequenzen ω der Stablängsschwingungen bzw. der Biegeschwingungen?

	Stablängsschwingungen	Biegeschwingungen
die Eigenkreisfrequenzen nehmen ab	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen bleiben gleich	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen nehmen zu	☐	☐

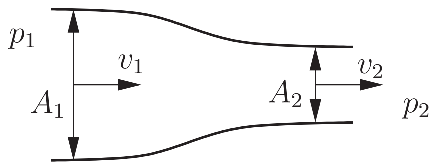
(2 Punkte)

6. In einem Stab (Dichte ρ, E-Modul E, Fläche A) läuft eine Welle auf das freie Ende zu. Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x = l, t)$ während der Wellenreflexion?



(1 Punkt)

7. Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt A. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2!



Geg.: Querschnittsflächen A_1 und A_2, p_1, v_1

(2 Punkte)