Lösungsvorschlag zur Klausur vom 23.07.2013

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben

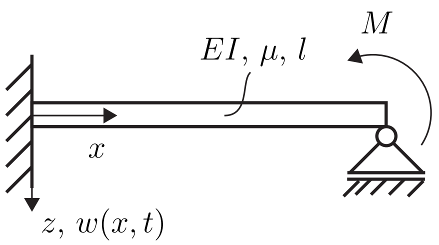
[10 Punkte]

Aufgabe T1

[2 Punkte]

Geben Sie alle Randbedingungen der skizzierten Systeme an. Unterscheiden Sie dabei zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen (RB).

Biegeschwingungen $w(x,t)$



geometrische RB:

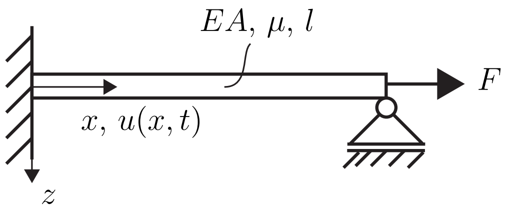
$$w(0,t) = 0$$
$$w'(0,t) = 0$$
$$w(l,t) = 0$$

1

dynamische RB:

$$-EIw''(l,t) = M$$

Längsschwingungen $u(x,t)$



geometrische RB:

$$u(0,t) = 0$$

dynamische RB:

1

$$EAu'(l,t) = F$$

Aufgabe T2 [1 Punkt]

Die Lösung nach d'Alembert der eindimensionalen Wellengleichung hat die Gestalt

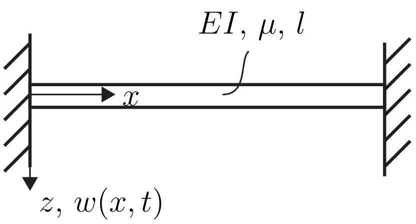
$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

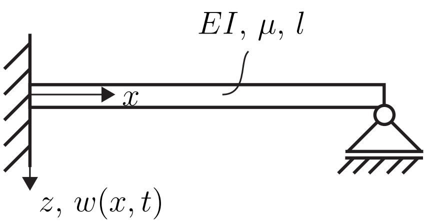
Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in negative x-Richtung laufende Welle? Bitte kreuzen Sie an

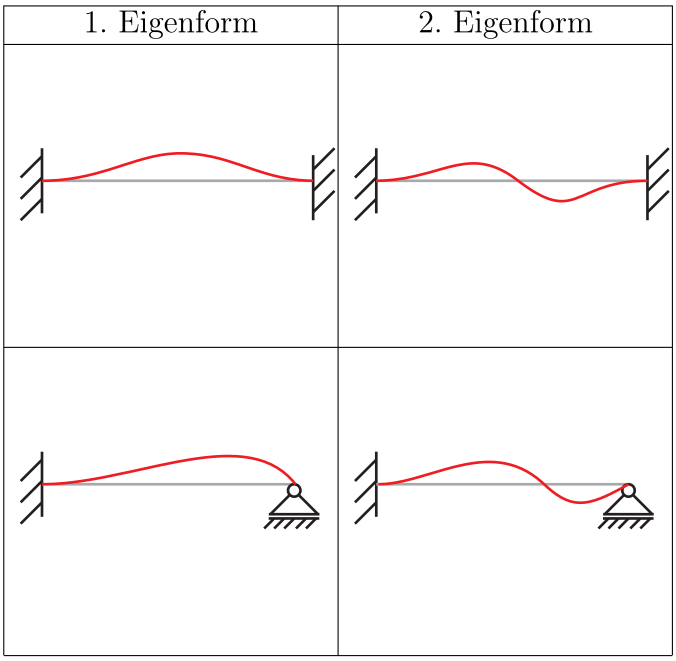
☐ f_1	☒ f_2	☐ $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$	☐ $\frac{1}{2}(f_1-f_2)$

Aufgabe T3 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und zweite Eigenform.





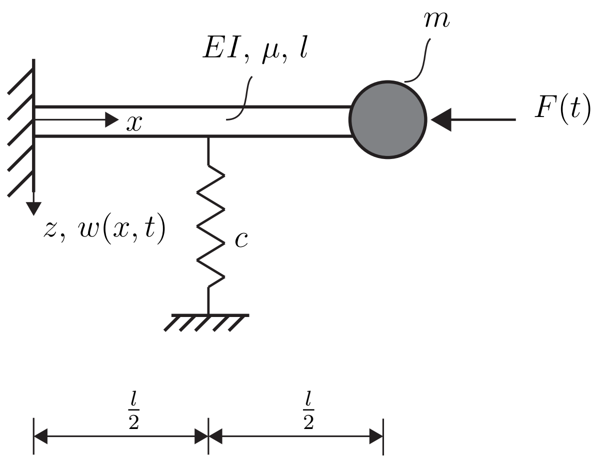


1

1

Aufgabe T4 [2 Punkte]

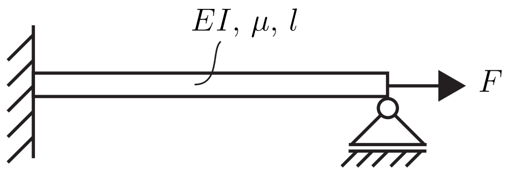
Für das skizzierte System sollen mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen für die Biegeschwingungen $w(x,t)$ bestimmt werden. Kreuzen Sie den korrekten Ausdruck für das Prinzip von Hamilton an.



☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}m\dot{w}^2(l)-\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=0$
☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}m\dot{w}^2(l)-\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}cw^2(\frac{l}{2})\right)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}F(t)\delta w(l)\mathrm{d}t=0$
☒	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}m\dot{w}^2(l)-\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}cw^2(\frac{l}{2})-\frac{1}{2}\int_0^l F(t)w'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=0$
☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}m\dot{w}^2(l)-\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^l F(t)w'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ $+\int_{t_0}^{t_1}\left(F(t)\delta w(l)-cw(\frac{l}{2})\delta w(\frac{l}{2})\right)\mathrm{d}t=0$

Aufgabe T5 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante **positive** Vorspannkraft F auf die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems?

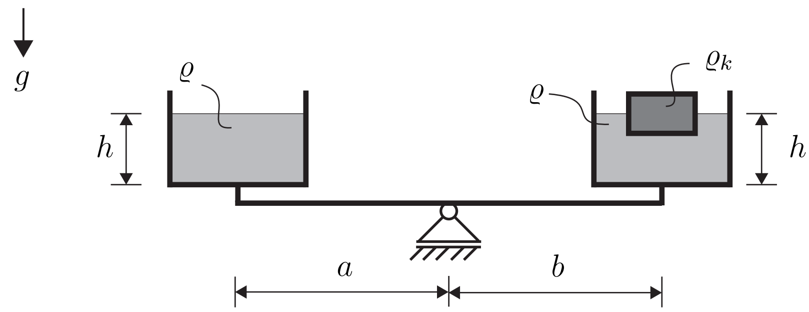


Die Eigenkreisfrequenzen

☒ werden größer.	☐ werden kleiner.	☐ bleiben gleich.

Aufgabe T6 [2 Punkte]

Auf der skizzierten Waage im Gleichgewicht befinden sich die beiden identischen, mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllten Behälter mit gleichen Füllständen h. Im rechten Behälter schwimmt zudem ein Körper mit Dichte ϱ_K. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.



a) Für die Dichten ϱ, ϱ_K gilt:

☒ $\varrho > \varrho_K$	☐ $\varrho < \varrho_K$

1

b) Für die Hebelarme a, b gilt:

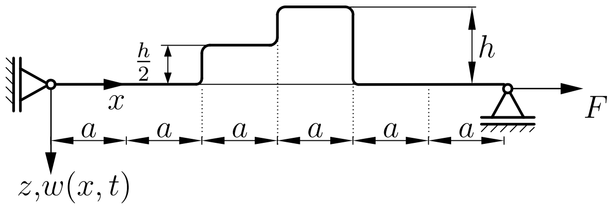
☒ $a = b$	☐ $a > b$	☐ $a < b$

1

Aufgabe 1

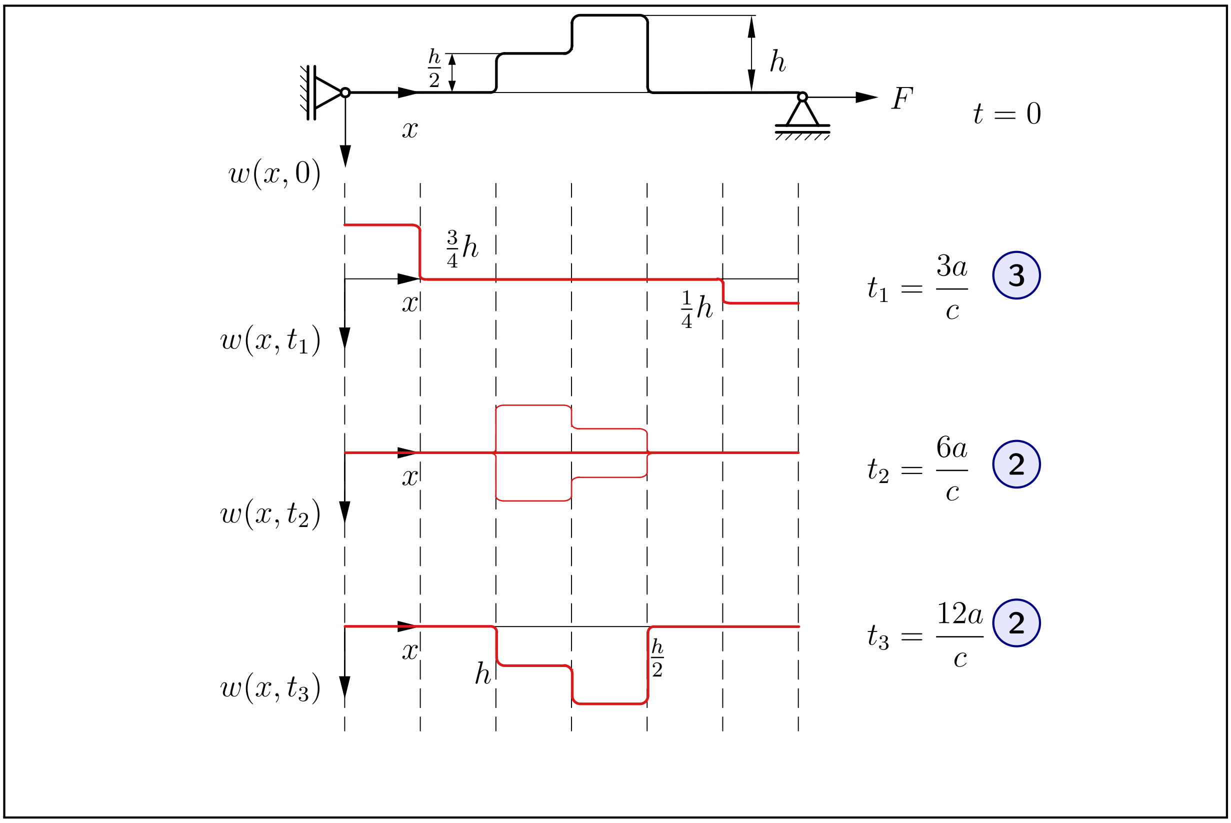
[10 Punkte]

Die vorgespannte, frei-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$, Vorspannkraft F) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h, F

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=3a/c$, $t_2=6a/c$, $t_3=12a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

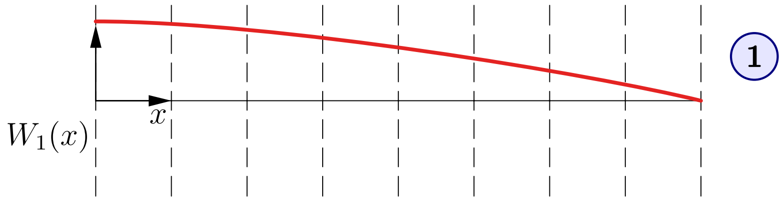
$$T = \frac{24a}{c} \quad 1$$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{12a} \quad 1$$

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

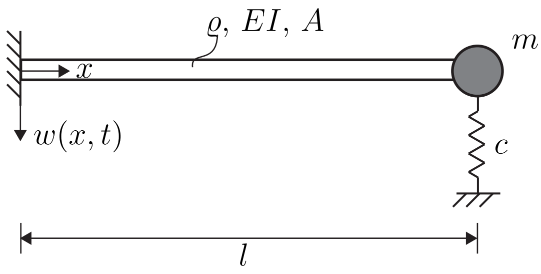
1. Eigenform



Aufgabe 2

[10 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI, Länge l, Querschnittsfläche A) mit einer diskreten Punktmasse (Masse m), die sich über eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w(l,t) = 0$) abstützt.



Gegeben: ϱ, A, EI, l, m, c

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

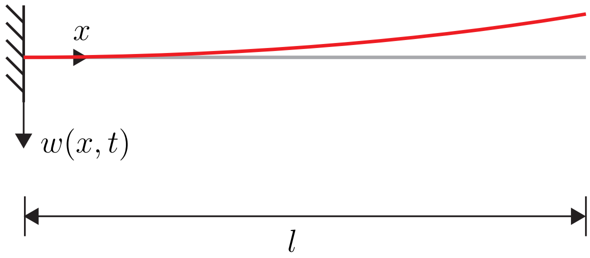
$$\varrho A\ddot{w}(x,t) + EIw^{(4)} = q(x,t) = 0 \quad 1$$

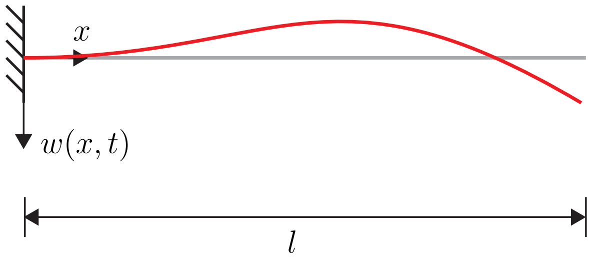
Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w'(0,t) &= 0 \\ w''(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$EIw'''(l,t) = m\ddot{w}(l,t) + cw(l,t) \quad 1$$

b) Skizzieren Sie die zwei Schwingungsformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen.





1

c) Welche der folgenden Ansatzfunktionen ist für die Bestimmung der niedrigsten Eigenkreisfrequenz mithilfe des Rayleigh-Quotienten geeignet?

[ ] $W(x) = x$

[X] $W(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^2}$ 2

[ ] $W(x) = A\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)$

[ ] $W(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$

d) Bestimmen Sie mit der Funktion $W(x) = 5\frac{x^2}{l}$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Spezialfall $\boldsymbol{m = 0}$, $\boldsymbol{c = 0}$.

Nebenrechnung:

$$\omega_1^2 \leq \frac{\int_0^l EIW''^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho AW^2(x)\mathrm{d}x}$$

$$\left.\begin{aligned} W''(x) &= 10\frac{1}{l} \\ W''^2(x) &= 100\frac{1}{l^2} \\ W^2(x) &= 25\frac{x^4}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l EIW''^2(x)\mathrm{d}x &= 100\frac{1}{l}EI \\ \int_0^l \varrho AW^2(x)\mathrm{d}x &= 5l^3\varrho A \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$\omega_1^2 \leq 20\frac{1}{l^4}\frac{EI}{\varrho A} \quad 1$$

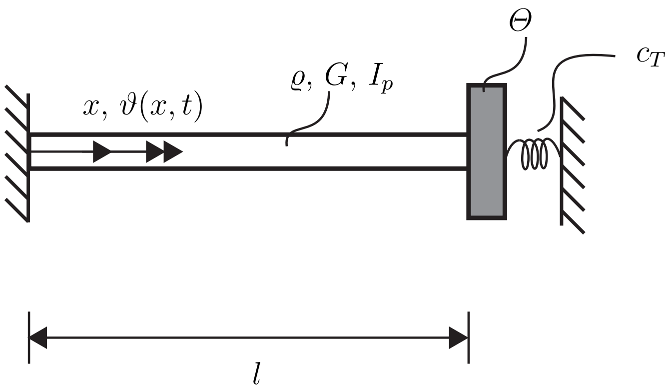
$$\omega_1 \leq \sqrt{20}\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\varrho A}} \quad 1$$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

An einem Torsionsstab (Dichte ϱ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) ist eine starre Scheibe (Massenträgheitsmoment bzgl. x-Achse Θ) angebracht. Die Scheibe ist über eine für $\vartheta(l,t) = 0$ entspannte Torsionsfeder (Drehfedersteifigkeit c_T) mit der Umgebung verbunden. Mit dem Prinzip von Hamilton ist das Randwertproblem für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ zu formulieren.

Gegeben: ϱ, G, I_p, l, Θ, c_T



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Theta\dot{\vartheta}^2(l) \quad 1$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l G I_p \vartheta'^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}c_T\vartheta^2(l) \quad 1$$

$$\delta W = 0 \quad 1$$

b) Geben Sie die geometrische(n) Randbedingung(en) für $\vartheta(x,t)$ an.

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1$$

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung für $\vartheta(x,t)$ sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnungen:
Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0$$

Variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \Theta \dot{\vartheta}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \vartheta'^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c_T \vartheta^2(l) \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta} \delta \dot{\vartheta} \mathrm{d}x \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \Theta \dot{\vartheta}(l) \delta \dot{\vartheta}(l) \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta' \delta \vartheta' \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 1$$

partielle Integration

$$\int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta} \underbrace{\delta \vartheta \,\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta \mathrm{d}x \mathrm{d}t + \Theta \dot{\vartheta}(l) \underbrace{\delta \vartheta(l) \,\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta' \delta \vartheta \,\Big|_0^l \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta'(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} G I_p \underbrace{\vartheta'(0)}_{=0} \delta \vartheta(0) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 2$$

sortieren

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\varrho I_p \ddot{\vartheta} - G I_p \vartheta'' \right] \delta \vartheta \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Theta \ddot{\vartheta}(l) + G I_p \vartheta'(l) + c_T \vartheta(l) \right] \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 2$$

Hinweis: Bitte das Ergebnis auf der nächsten Seite eintragen.

Feldgleichung:

$\varrho I_p \ddot{\vartheta}(x,t) - G I_p \vartheta''(x,t) = 0$

dynamische Randbedingung:

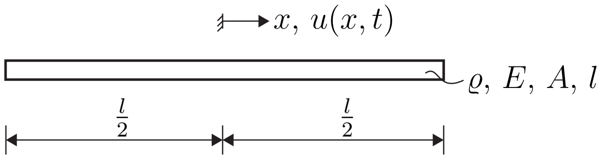
$\Theta \ddot{\vartheta}(l) + G I_p \vartheta'(l) + c_T \vartheta(l) = 0$

1

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Gegeben ist ein freier Stab (Länge l, Dichte ϱ, E-Modul E, Querschnittsfläche A), der freie Längsschwingungen $u(x,t)$ ausführen kann.



Gegeben: ϱ, E, A, l

Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

a) Geben Sie die Feldgleichung für $u(x,t)$ und die Randbedingungen für $x = -\frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ an. Verwenden Sie dabei **ausschließlich das eingezeichnete Koordinatensystem** ($x = 0$ in der Mitte des Stabes).

Feldgleichung:

$$\varrho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0 \quad 1$$

Randbedingungen:

$$u'\left(-\frac{l}{2}, t\right) = 0, \qquad u'\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0 \quad 1$$

b) Leiten Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $U(x)$ her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

Nebenrechnung:

$$(-\varrho A\omega^2 U(x) - EAU''(x))\sin(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow U''(x) + \underbrace{\frac{\omega^2 \varrho A}{EA}}_{=\frac{\omega^2}{c^2}} U(x) = 0$$

Differentialgleichung:

$$U''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}U(x) = 0 \quad 1$$

allgemeine Lösung:

$$U(x) = A\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1$$

c) Bestimmen Sie die Eigenformen $U_k(x)$ und die Eigenkreisfrequenzen ω_k.

Nebenrechnung:

$$U'(x) = -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

Anpassen an Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
U'\left(\frac{l}{2}\right) &= -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0\\
&\Rightarrow -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0\\
U'\left(-\frac{l}{2}\right) &= -A\frac{\omega}{c}\sin\left(-\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(-\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0\\
&\underbrace{=}_{Hinweis} A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0\\
&\Rightarrow A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad 1$$

für nicht-triviale Lösungen sind zwei Fälle möglich: 1

i) $A = 0,\ B \neq 0\ :$

$$B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\omega}{c}\frac{l}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{l} \ \Rightarrow\ \omega_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l},\quad k = 1, 2, \ldots \quad 1$$

ii) $A \neq 0,\ B = 0\ :$

$$A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \omega_k = \frac{2k\pi c}{l},\quad k = 1, 2, \ldots \quad 1$$

Eigenformen:

$\widehat{U}_k(x) = B_k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right)$ und $\tilde{U}_k(x) = A_k\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)$ 1

Eigenkreisfrequenzen:

$\widehat{\omega}_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l}$ und $\tilde{\omega}_k = \frac{2k\pi c}{l}$ 1