Kontinuumsmechanik VL 12

2. Hydromechanik

Bisher ausschließlich Festkörper behandelt, jetzt Betrachtung von Fluiden. Ein Fluid ist eine Medium, welches einer Formänderung so gut wie keinen Widerstand entgegensetzt. Es nimmt z.B. die Form des jeweiligen Behältnisses an.

Fluid: Flüssigkeiten und Gase
Flüssigkeit: setzt einer Volumenänderung großen Widerstand entgegen $\rho \approx \text{konst.}$
Gas: setzt einer Volumenänderung keinen großen Widerstand entgegen.

Ideale Flüssigkeiten:

- Nicht kompressibel $\rho = \text{konst.}$,
- können keine Schubspannungen übertragen $\tau = 0$

Reale Flüssigkeiten sind dagegen viskos, d.h. sie können Schubspannungen übertragen und $\rho \approx \text{konst.}$

Im Weiteren ausschließlich ideale Flüssigkeiten betrachtet!

2.1 Grundgleichungen der Dynamik für ideale Flüssigkeiten

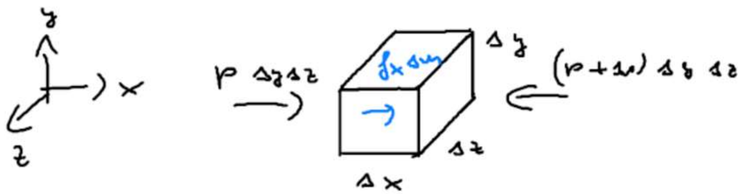
Erinnerung an Festigkeitslehre:

hydrostatischer Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \qquad \tau = 0$

unabhängig von Schnittfläche: $p \geq 0$

Druck p hängt im Allgemeinen vom Ort x,y,z und der Zeit t ab: $p(x,y,z,t)$

2. Newtonsches Gesetz angewendet auf ein Volumenelement:



f_x Massenkraft (Volumenkraft)

Kraft, die gleichmäßig auf das Volumen-/Massenelement verteilt ist, z.B. aufgrund von Schwerkraft

2. Newtonsches Gesetz für x-Ri.:

$m a = F$

$$\Delta m \frac{dv_x}{dt} = f_x \Delta m + \cancel{p\,\Delta y\,\Delta z} - (\cancel{p} + \Delta p)\underbrace{\Delta y\,\Delta z} = f_x \Delta m - \frac{\Delta p}{\Delta x}\Delta V$$

$$\Delta m \frac{dv_x}{dt} = f_x \Delta m + p \cancel{\Delta y} \Delta z - (\cancel{p} + \Delta p) \underbrace{\Delta y \Delta z} = f_x \Delta m - \frac{\Delta p}{\Delta x} \Delta V \quad \Big| : \Delta m$$

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\frac{dv_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{\Delta x} \qquad \Big| \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

entsprechend $\frac{dv_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{dv_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$

Diese 3 Gleichungen kann man vektoriell schreiben als

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p}$$

Eulersche Bewegungsgleichung

mit grad („Gradient")

$$\operatorname{grad} p(x, y, z, t) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z$$

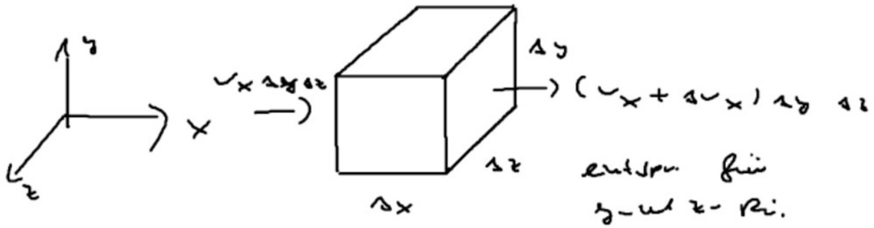
Dabei gilt:

$$\frac{d\vec v}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec v}{\partial t}}_{\substack{\text{lokale Änderung}\\ \text{der Geschw.}}} + \underbrace{\frac{\partial \vec v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}}_{\substack{\text{konvektive Terme}\\ \text{aufgrund der Strömung}}}$$

Dies ist Eulersche Betrachtungsweise: nicht Betrachtung eines einzelnen Masseteilchens (Lagrangesche Betrachtungsweise), sondern einer Stelle x, y, z, t

Eulersche Gl. (3 Glen.) reicht zur Berechnung von $\vec v$ (3 Unbekannte) und p (1 Unbekannte) nicht aus.

Weitere Gleichung aus Inkompressibilität



entspr. für y- und z-Ri.

Volumenstrom

$\dot V = v A \quad [\frac{m^3}{s}]$

Volumen / Zeit

Da Flüssigkeit inkompressibel, muss die Summe der ein- und ausgehenden Volumenströme Null sein.

$$v_x \Delta y \Delta z - (v_x + \Delta v_x)\Delta y \Delta z + v_y \Delta x \Delta z - (v_y + \Delta v_y)\Delta x \Delta z + v_z \Delta x \Delta y - (v_z + \Delta v_z)\Delta x \Delta y = 0 \qquad (\cdot -1) : (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

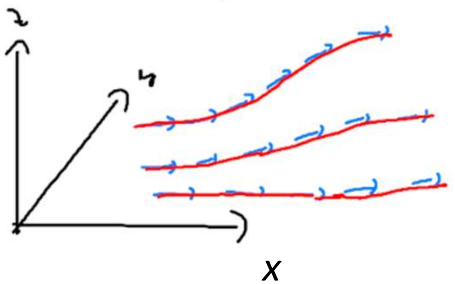
$$\frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta z} = 0 \qquad \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

Eulersche Gl. + Kontinuitätsgleichung + RBen + ABen ermöglichen Bestimmung von $\vec{v}$ und p.

2.2 Bernoullische Gleichung

Betrachtung sogenannter Stromlinien: Geschwindigkeitsfeld zu einem Zeitpunkt *t*

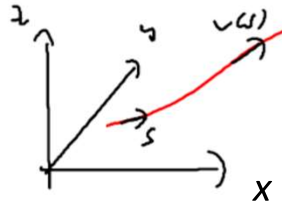


Stromlinien sind Kurven, die zu einem festen Zeitpunkt auf das Geschwindigkeitsfeld passen. Sie haben den lokalen Geschwindigkeitsvektor als Tangente.

Für stationäre Strömungen (nicht zeitabhängig) sind Teilchenbahnen und Stromlinien identisch.

Jetzt Fall betrachtet, dass die Schwerkraft die einzige Massenkraft ist, neg. z-Ri:

$$\vec f = -g\,\vec e_z$$



Bogenlinie s betrachtet

Einheitsvektor der Tangente ist

$$\vec e_t(s,t) := \frac{\vec v}{|\vec v|} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\quad \frac{\partial y}{\partial s}\quad \frac{\partial z}{\partial s}\right)^T$$

Nun Eulersche Gleichung $\quad \frac{d\vec v}{dt} = \vec f - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p \quad \Big|\cdot \vec e_t$

Skalare Geschwindigkeit entlang Stromlinie

$$\frac{d\vec v}{dt}\cdot\underbrace{\frac{\vec v}{|\vec v|}}_{\vec e_t} = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\vec f\,\vec e_t}_{-g\vec e_z\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s}\\ \vdots\end{pmatrix}} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right) = -g\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

Daraus Eulersche Gleichung für den Stromfaden mit $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{=v}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = -g\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{(auch instationär)}$$

Für den stationären Fall hängen aller Größen nur noch von *s* und nicht mehr von *t* ab: $\partial \to d$ für s

$$v \frac{dv}{ds} = -g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

Jetzt Integration entlang der Stromfaden von Ort „1" nach Ort „2" $\int ds$

$$v\,dv = -g\,dz - \frac{1}{\rho}\,dp \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = -gz \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{1}{\rho} p \Big|_{p_1}^{p_2}$$

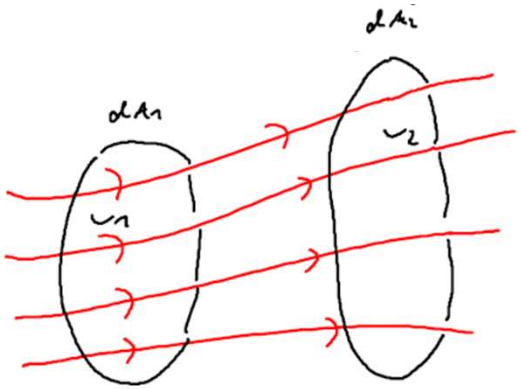
$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2}$$

Bernoullische Gleichung für stationäre Strömungen idealer Flüssigkeiten

Spezialfall der Hydrostatik $v \equiv 0$

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2$$

Jetzt noch Umformung der Kontinuitätsgleichung:



Betrachtung längs einer Stromröhre

Kontinuität $\quad v_1\, dA_1 = v_2\, dA_2$

Falls Geschwindigkeiten auf für endliche Flächen konstant sind gilt

$$\boxed{v_1 A_1 = v_2 A_2 = \dot{V}}$$

Kontinuitätsgleichung

2.3 Impulssatz für stationäre Strömungen

Wieder Betrachtung einer Stromröhre, bzw. einer „Flüssigkeitsscheibe" $dm = \rho\, A(s)\, ds$

Aus Impulssatz / 2. Newtonschen Gesetz folgt hieraus

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\, A(s)\, ds \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{=0} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right)$$

stationär

mit Volumenstrom $\dot V = A(s)\cdot v(s) =$ konst. und integrieren von Zustand 1 nach Zustand 2

$$\vec F = \vec F_2 - \vec F_1 = \rho \dot V \int_1^2 \underbrace{\frac{\partial v}{\partial s}\, ds}_{\text{stationär } \partial s \to ds} = \rho \dot V (\vec v_2 - \vec v_1)$$

$$\boxed{\vec F = \rho \dot V (\vec v_2 - \vec v_1)}$$

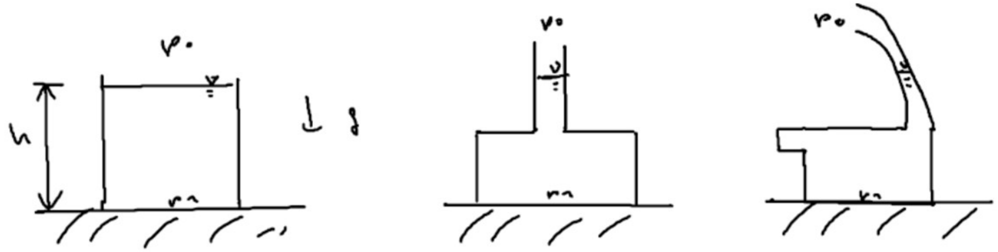
Impulssatz für stationäre Strömung idealer Flüssigkeiten wobei $\vec F$ die Summe der auf das Stromvolumen wirkenden Kräfte zwischen 1 und 2 ist.

2.4 Beispiele zur Hydromechanik

2.4.1 Hydrostatik

$v = 0$ Bernoullische Gleichung $\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2$

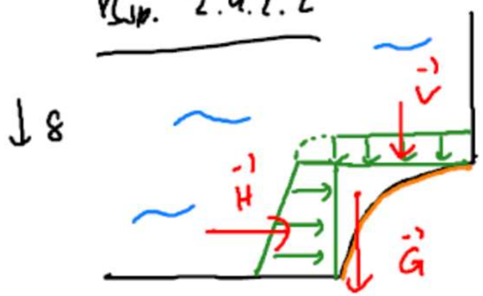
Bsp. 2.4.1.1 Druck in offenen Gefäßen unterschiedlicher Form



Auf dem Boden wirkt stets der gleiche Druck

$p_1 = \rho g h + p_0$

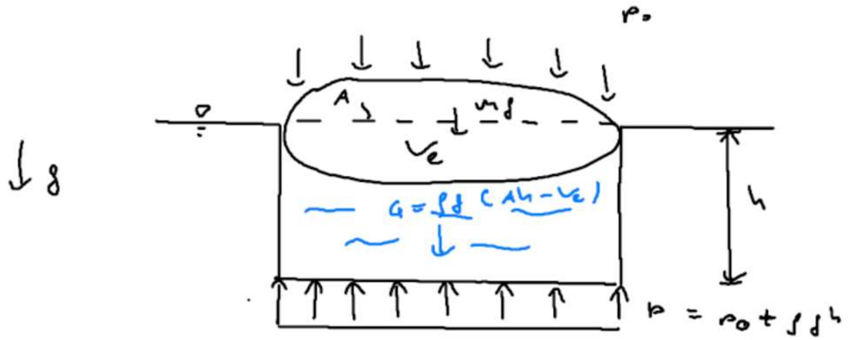
Bsp. 2.4.2.2



Kraft auf gelagertes Bauteil $\qquad \vec{R} = \vec{H} + \vec{V} + \vec{G}$

Bsp. 2.4.1.3

Auftrieb



V_e eingetauchtes Volumen des Körpers

Resultierende Kraft

$$R = p_0 A - \rho g \, (\cancel{Ah} - V_e) - \cancel{p_0 A} - mg$$

$$(\cancel{p_0} + \cancel{\rho g h})$$

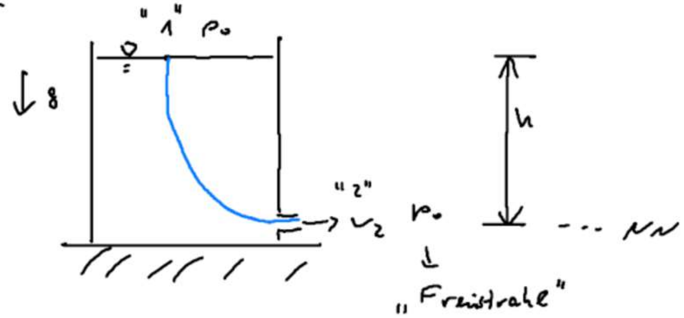
$$R = \rho g V_e - mg \overset{!}{=} 0 \quad \text{im Gleichgewicht}$$

Im Gleichgewicht Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit (Volumen V_e) gleich der Schwerkraft.

2.4.2 Hydrodynamik

Bsp. 2.4.2.1

Ges.: v_2



Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

hier:

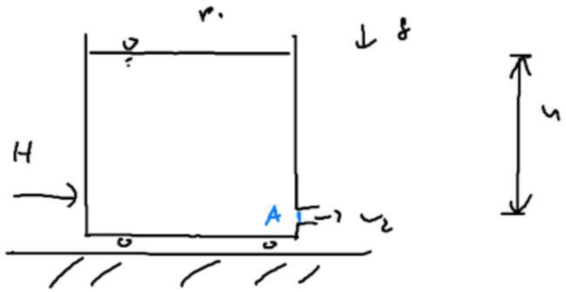
$$0 + \rho g h + \cancel{p_0} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 + \cancel{p_0}$$

$$\underline{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

vgl. freier Fall

Punktmasse

Bsp. 2.4.2.2



Gesucht: Haltekraft H

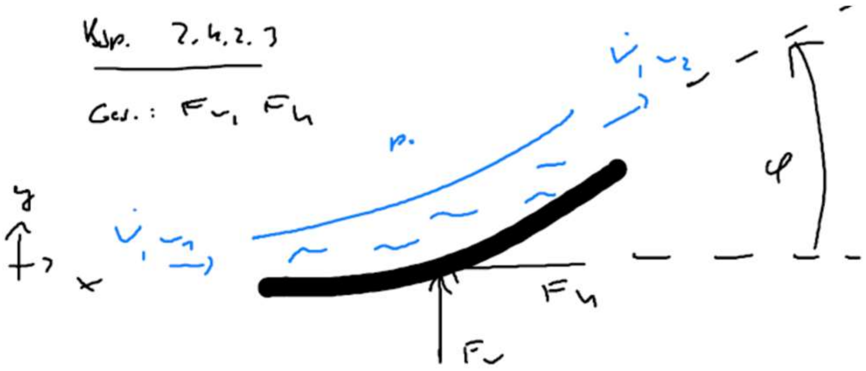
$$\vec{F} = \rho \dot{V} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\underline{H} = \rho \underbrace{A v_2}_{\dot{V}} (v_2 - 0) \qquad v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$= \rho A v_2^2 = \underline{2\rho g h A}$$

Bsp. 2.4.2.3

Ges.: F_v, F_h



Der Impulssatz $\vec F = \rho \dot V (\vec v_2 - \vec v_1)$

$$\begin{pmatrix} -F_h \\ F_v \end{pmatrix} = \rho \dot V \left(\begin{pmatrix} v \cos\varphi \\ v \sin\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Umlenkung eines Flüssigkeitsstrahls.

Höhenunterschiede werden vernachlässigt.

Bernoulli:

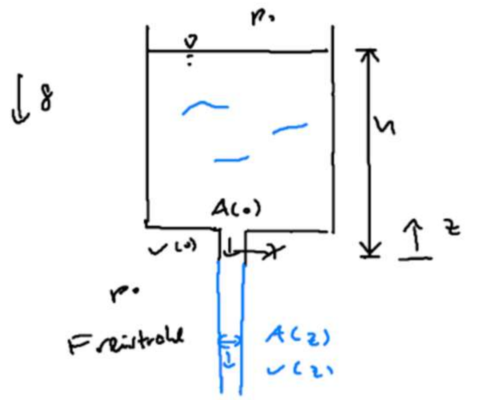
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g z_1} + \underbrace{p_1}_{=p_0} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g z_2} + \underbrace{p_2}_{=p_0}$$

$v_1 = v_2 = v$

Also $F_h = \rho \dot V (1 - \cos\varphi) v > 0$

$F_v = \rho \dot V v \sin\varphi > 0$

Bsp. 2.4.7.4



Strahl aus Zapfhahn   Ges.: $A(z)$, $v(z)$

Bereits bekannt $v(0) = \sqrt{2gh}$

Bernoulli - Gl.

im Strahl negativ

$$\frac{1}{2}\rho \underbrace{v^2(0)}_{2gh} + \rho \cancel{g}^{\,0} + \cancel{p_0} = \frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + \cancel{p_0}$$

$$v(z) = \sqrt{2g(h-z)}$$

negativ! Geschwindigkeit im Strahl nimmt weiter zu.

Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{konst.}$

hier $v(0)\,A(0) = v(z)\,A(z)$

bekannt   gesucht

$\vdots$

$$A(z) = \frac{A_0}{\sqrt{1-\frac{z}{h}}}$$ Querschnitt nimmt ab