Kontinuumsmechanik VL 5

Allgemeine Lösung der Wellengleichung ist $w(x,t) = A_1\, f_1(x - ct) + A_2\, f_2(x + ct)$

Lösung bei Wellenausbreitung zu gegebenen Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &w(x,0) = w_0(x) \qquad \dot{w}(x,0) = v_0(x) \\ &w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{zunächst}\\ \text{ohne Ränder}\end{array}$$

Nach längerer Rechnung ergibt sich:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\, d\xi \right]$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\, d\xi \right]$$

Wenn $v_0(x) = 0$, dann $w(x,t) = \frac{1}{2} w_0(x-ct) + \frac{1}{2} w_0(x+ct)$

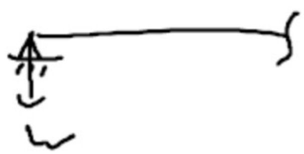
Eine „Hälfte“ wandert nach links, die andere „Hälfte“ nach rechts

1.1.7 Reflexion am freien und am festen Ende

Bisher erfüllt: Feldgleichung (Wellengleichung) und Anfangsbedingungen.
Was passiert an den Rändern?

Festes Ende

Saite



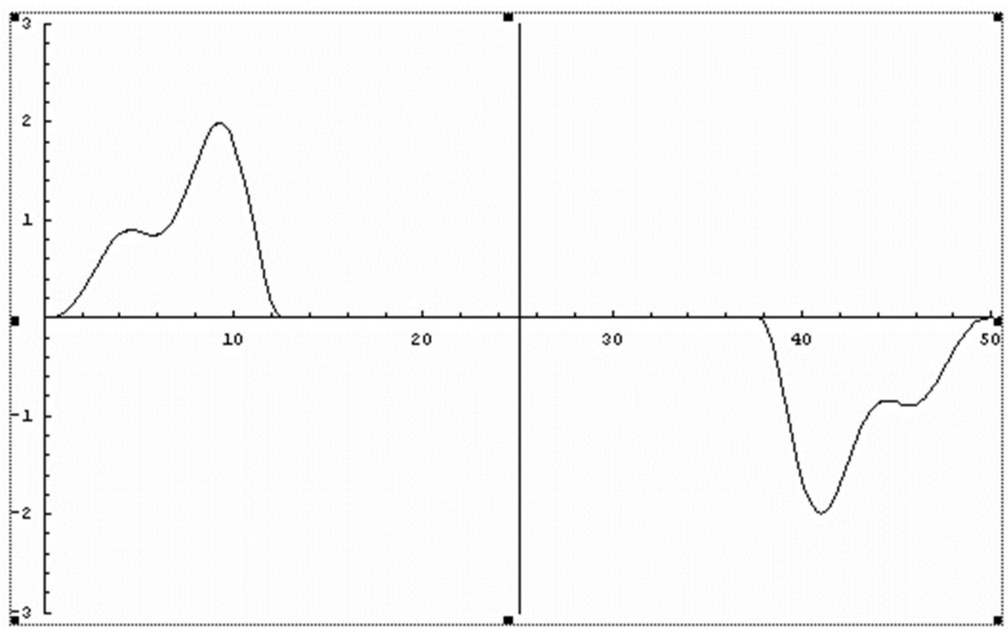
Stablängs- und Torsionsschwingungen

$u, \vartheta = 0$

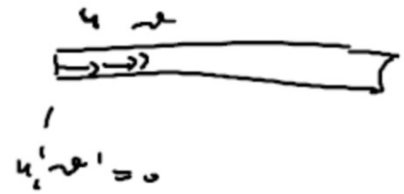
RB $\quad w = 0$

Zugehörige Lösung muss die Wellengleichung und die Randbedingungen erfüllen!

Dazu folgende Vorstellung:

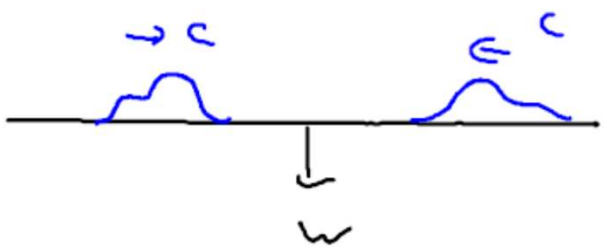


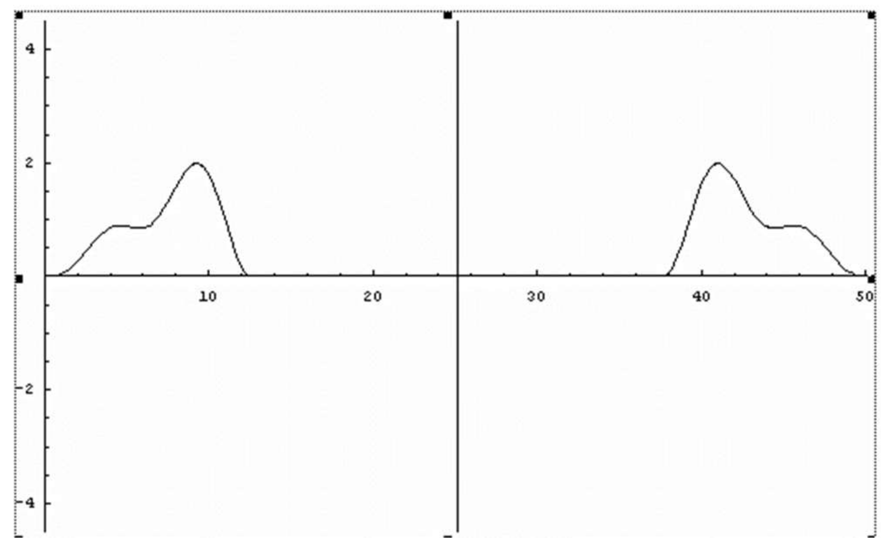
Freies Ende:



Reflexion am freien Ende:

$\Rightarrow$



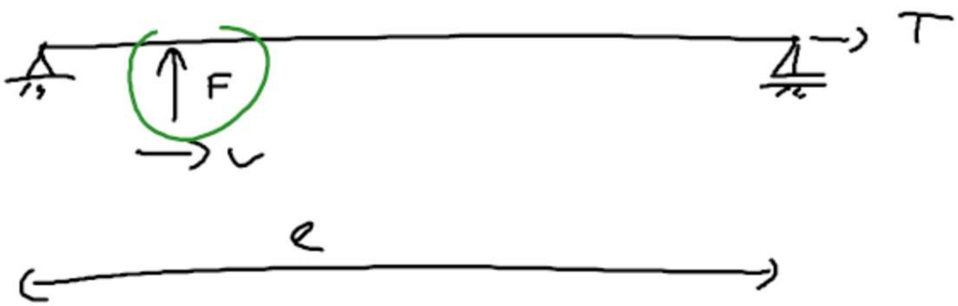


1.1.8 Beispiel Stromabnehmer/Oberleitung


24
2

1.1.8 Beispiel Stromabnehmer/Oberleitung

Einfachste Modellierung durch Saite mit Wanderlast



Feldgleichung für Saite

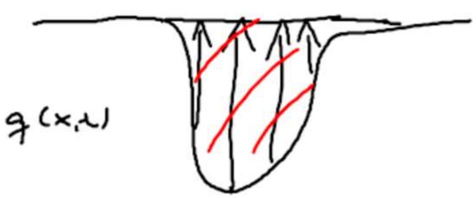
$$\mu \ddot{w}(x,t) - T w''(x,t) = q(x,t)$$

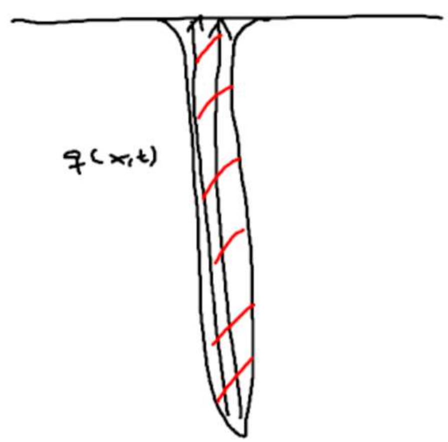
RBen $w(0,t) = 0 \qquad w(l,t) = 0$

ABen $w(x,0) = 0 \qquad \dot{w}(x,0) = 0$

Wie wandernde Einzellast darstellen?

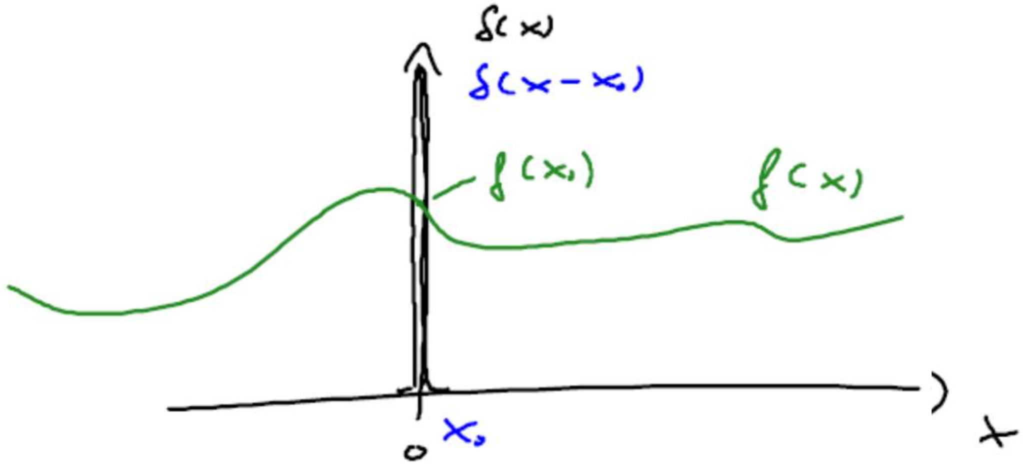
zunächst verteilte Kraft





Breite -> 0
Höhe -> ∞
so, dass die als Integral die Kraft *F*
herauskommt

Wird mathematisch durch die sogenannte Delta- oder Dirac-“funktion“ δ angegeben



$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Normierung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

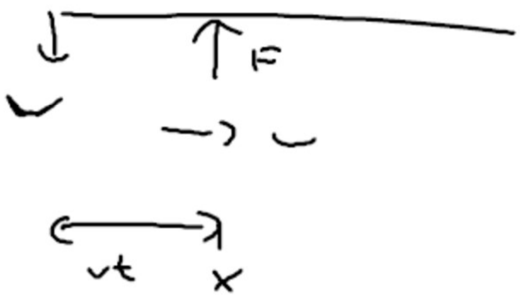
und so genannte Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = \underline{f(x_0)}$$

Also kann in unserem Fall die Streckenlast folgendermaßen angegeben werden:

$$q(x,t) = -F\,\delta(x - vt)$$

$$q(x,t) = -F\,\delta(x - vt)$$



Feldgl. $\mu \ddot{w}(x,t) - T w''(x,t) = -F\,\delta(x - vt)$

RBen $w(0,t) = w(l,t) = 0$

ABen $w(x,0) = 0 \qquad \dot{w}(x,0) = 0$

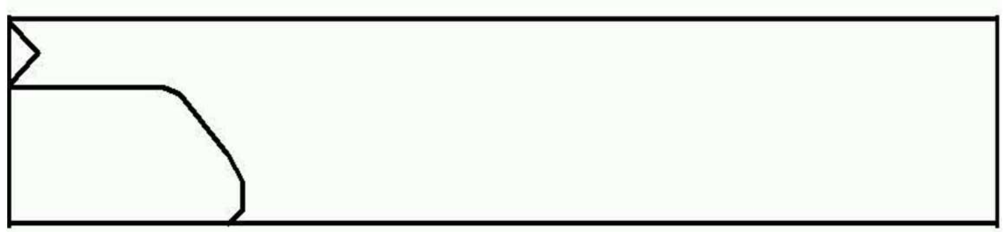
Lösung hier durch Ansatz

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{N} W_n(x)\, p_n(t)$$ gemischter Ritzansatz

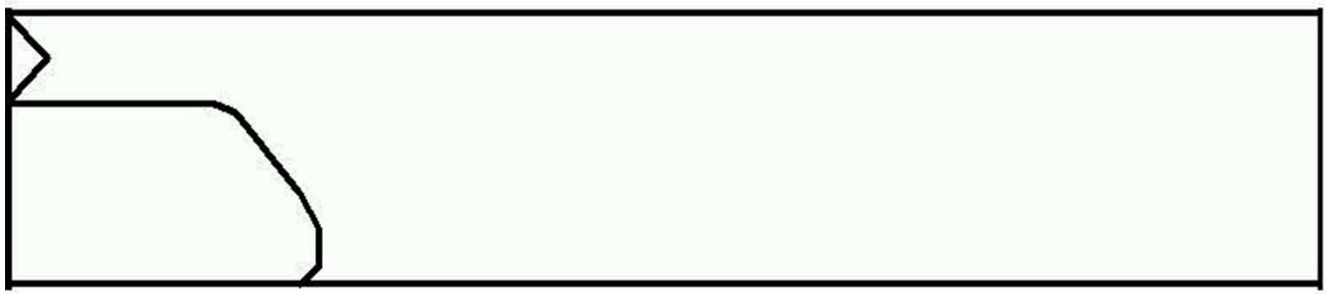
mit bekanntem $W_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$ (Eigenformen der Saite) Damit sind die RBen erfüllt!

Anfangsbedingungen werden erfüllt durch die Wahl von $p_n(0) = 0,\ \dot{p}_n(0) = 0 \qquad n = 1, \dots, N$

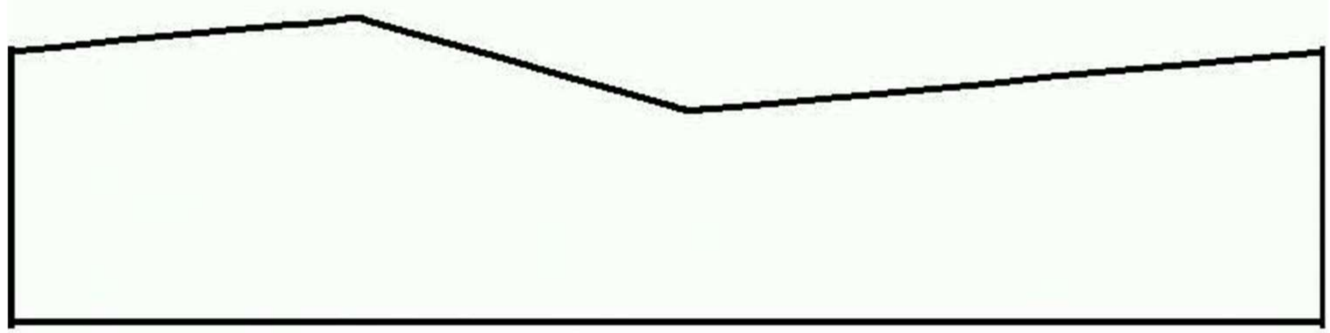
Vorgehensweise:
Ansatz in Feldgleichung einsetzen und anschließende Fehlerminimierung mit dem sogenannten Galerkin-Verfahren:
Projektion des Fehlers auf die Ansatzfunktion wird im integralen Mittel =0. Dies führt auf ein entkoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die $p_k(t)$. Diese können einzeln analytisch gelöst und an die ABen angepasst werden. Bewegt sich der Stromabnehmer mit v=c, tritt der Resonanzfall ein.



$$v = 0.3 \cdot v_{kritisch}$$



$$v = 0.8 \cdot v_{kritisch}$$



$$v = v_{kritisch}$$

[redacted]