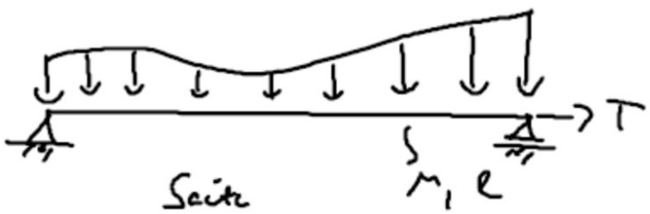
1.1.4.2 Erzwungene Schwingungen

$q(x) = Q(x)\sin\Omega t$ $\qquad$ $Q(x)$ zunächst noch beliebig



Zur Erinnerung:

- Ω „groß“ Omega: von außen vorgegebene Kreisfrequenz
- ω „klein“ omega: Eigenkreisfrequenz

Feldgleichung:

$$\mu\ddot{w} - T w'' = q(x,t) \quad \Big| : \mu$$

$$\boxed{\ddot{w} - c^2 w'' = \frac{1}{\mu} Q(x)\,\sin\Omega t}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0$$
$$w(l,t) = 0$$

$$\ddot{w} - c^2 w'' = \frac{1}{\mu} Q(x) \sin \Omega t$$

$$w(0,t) = 0$$
$$w(l,t) = 0$$

Ansatz $w(x,t) = W(x) \sin \Omega t$ (Partikulärlösung), in Feldgleichung

$$-\Omega^2 W(x) \cancel{\sin \Omega t} - c^2 W''(x) \cancel{\sin \Omega t} = \frac{1}{\mu} Q(x) \cancel{\sin \Omega t}$$

muss für jedes t gelten

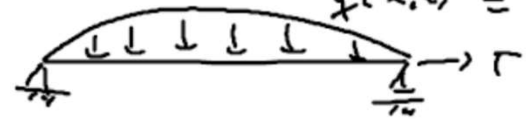
$$W''(x) + \left(\frac{\Omega^2}{c^2}\right) W(x) = -\frac{1}{\mu c^2} Q(x)$$

+ RBen $\quad W(0) = W(l) = 0$

zeitfreies Randwertproblem RWP

oft Reihenentwicklungen in Eigenformen

$$q(x,t) = Q_0 \sin \pi \frac{x}{\ell} \sin \Omega t$$



Hier gelöst für $Q(x) = Q_0 \sin \pi \frac{x}{\ell}$

$$w''(x) + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 w(x) = -\frac{Q_0}{\mu c^2} \sin \pi \frac{x}{\ell}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite $\quad W(x) = W_0 \sin \pi \frac{x}{\ell} \quad$ erfüllt die RBen!

$$-\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 W_0 \cancel{\sin \pi \frac{x}{\ell}} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 W_0 \cancel{\sin \pi \frac{x}{\ell}} = -\frac{Q_0}{\mu c^2} \cancel{\sin \pi \frac{x}{\ell}}$$

$$W_0 = -\frac{Q_0}{\mu c^2} \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2} = -\frac{Q_0}{\mu} \frac{1}{\Omega^2 - \left(\frac{\pi c}{\ell}\right)^2}$$

Erste Eigenkreisfrequenz war $\quad \omega_1 = \frac{\pi c}{\ell}$

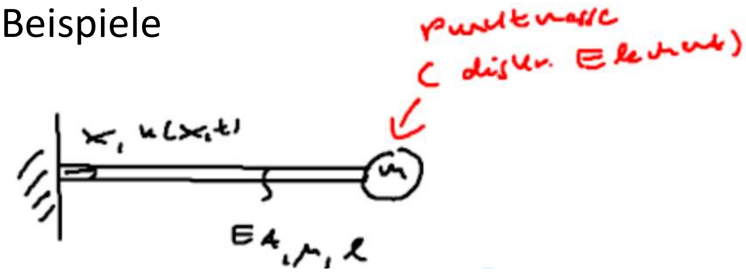
Anregungsform entspricht der ersten Eigenform mit Eigenkreisfrequenz ω_1. Wird mit $\Omega = \omega_1$ angeregt, geht $W_0 \to \infty$ (Resonanz)

Für die Lösung des gesamten Rand-Anfangswertproblem im Falle erzwungener Schwingungen muss die so berechnete Partikulärlösung mit der allgemeinen Lösung für die freien Schwingungen überlagert und dann an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

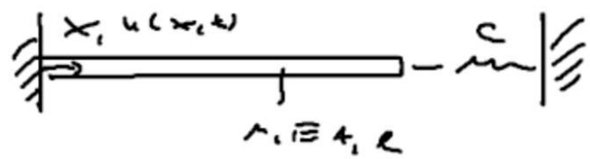
1.1.5 Kopplung mit diskreten Elementen

Gegensatz: diskret ⇔ kontinuierlich

2 Beispiele

1. 

wie vorher <-|-> geänderte RB

2. 

wie vorher <- |-> geänderte RB

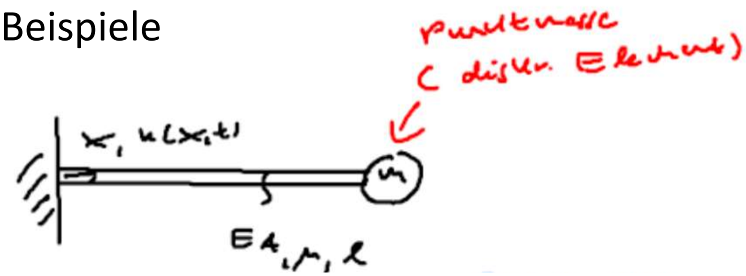
Wie sehen Feldgleichungen und Randbedingungen aus?

Feldgleichung $\rho A \ddot{u} - EA u'' = 0$

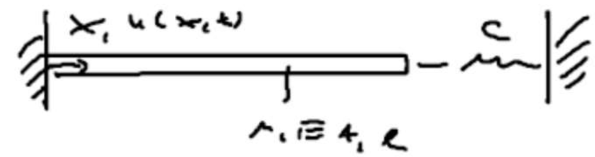
Randbedingung am linken Rand $u(0,t) = 0$

} unverändert gegenüber bisher

2 Beispiele

1. 

wie vorher <-|-> geänderte RB

2. 

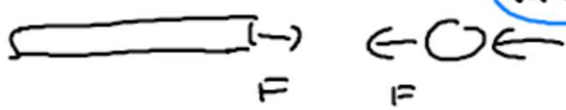
wie vorher <- |-> geänderte RB

Randbedingungen am rechten Rand?

Freischnitt

d'Alembert Trägheitskraft

$m\ddot{u}(\ell,t)$



$= \sigma(\ell,t)\, A$ $\quad \vdash\!\rightarrow u(\ell,t)$

$\sigma(\ell,t)\, A + m\ddot{u}(\ell,t) = 0$

$\parallel$

$E \cdot \varepsilon(\ell,t) = E\, u'(\ell,t)$

$$\boxed{EA\, u'(\ell,t) + m\, \ddot{u}(\ell,t) = 0}$$

aus Spannung wie im Fall 1

$EA\, u'(\ell,t)$ $\quad (\sigma \cdot A)$

$\longleftarrow\!|\!\longleftarrow \quad c\, u(\ell,t)$

$$\boxed{EA\, u'(\ell,t) + c\, u(\ell,t) = 0}$$

Dynamische Randbedingungen (aus Kräfte-/Momentengleichgewichten)!

1.1.6 D‘Alembertsche Lösung der Wellengleichung

Lösung für $\ddot{w} = c^2 w''$

Seien f_1 und f_2 zwei beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in *x* und *t*

Behauptung: Dann sind

$$f_1(z_-) = f_1(x - ct)$$

und $$f_2(z_+) = f_1(x + ct)$$ Lösungen der Wellengleichung

Zeigen für $z_{\mp}$

$$z_{\mp} = x \mp ct \qquad \frac{\partial z_{\mp}}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z_{\mp}}{\partial t} = \mp c$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z_{\mp}} \underbrace{\frac{\partial z_{\mp}}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial f_1}{\partial z_{\mp}} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial z_{\mp}} \underbrace{\frac{\partial z_{\mp}}{\partial t}}_{=\mp c} = \mp c \frac{\partial f_1}{\partial z_{\mp}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z_\mp}\underbrace{\left(\frac{\partial z_\mp}{\partial x}\right)}_{=1} = \frac{\partial f_1}{\partial z_\mp} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial z_\mp}\underbrace{\left(\frac{\partial z_\mp}{\partial t}\right)}_{=\mp c} = \mp c\,\frac{\partial f_1}{\partial z_\mp}$$

Also: $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \mp\frac{1}{c}\frac{\partial f_1}{\partial t}$$

Entsprechend gilt: $$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \underbrace{\left(\mp\frac{1}{c}\right)^2}_{=\frac{1}{c^2}}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$$ erfüllt also die Wellengleichung

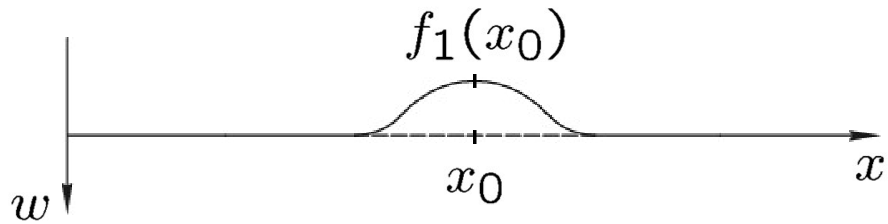
$f_1(x - ct)$, $f_2(x + ct)$ erfüllen also die Wellengleichung!

$f_1(x - ct)$ kennzeichnet Wellenausbreitung in positive x-Richtung mit Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c.

$f_2(x + ct)$ kennzeichnet Wellenausbreitung in negative x-Richtung mit Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c.

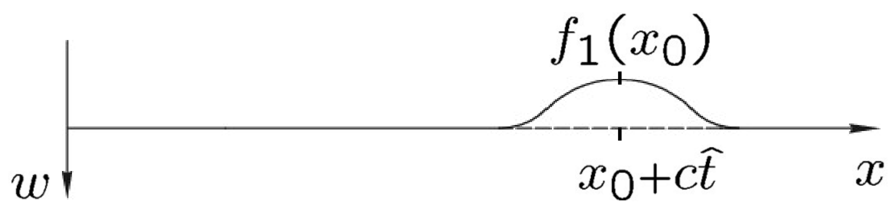
Saite: Lösung $\quad w(x,t) = f_1(x - ct)$

$t = 0 \qquad w(x_0, 0) = f_1(x_0 - c \cdot 0) = f_1(x_0)$



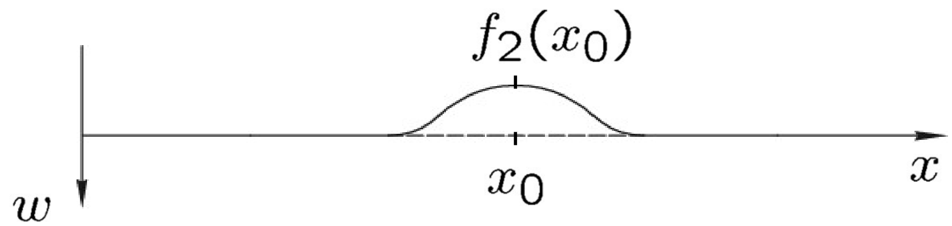
$t = \hat{t}$

$$w(x_0 + c\hat{t}, \hat{t}) = f_1(x_0 + c\hat{t} - c\hat{t})$$
$$= f_1(x_0)$$

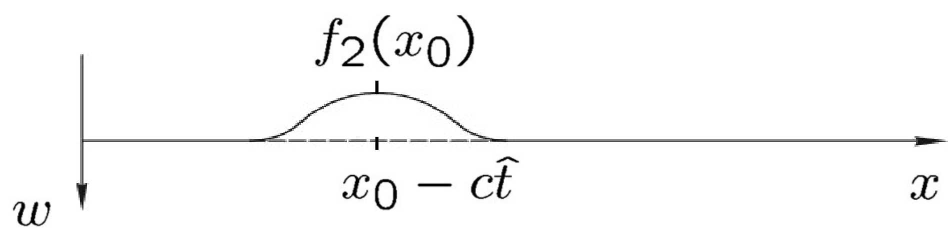


Saite Lösung $\quad w(x,t) = f_2(x+ct)$

$t = 0 \qquad w(x_0, 0) = f_2(x_0 + c \cdot 0) = f_2(x_0)$



$t = \hat{t} \qquad w(x_0 - c\hat{t}, \hat{t}) = f_2(x_0 - c\hat{t} + c\hat{t})$
$= f_2(x_0)$



Allgemeine Lösung ist $w(x,t) = A_1 f_1(x - ct) + A_2 f_2(x + ct)$

Wodurch wird *c* bestimmt?

Saite $c^2 = \frac{T}{\mu}$ abhängig von Vorspannung und Materialparametern

Stablängsschwingungen $c^2 = \frac{E}{\rho}$ abhängig Materialparametern

Torsionsschwingungen $c^2 = \frac{G}{\rho}$ abhängig Materialparametern

Erinnerung $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ also $G < E$

$c_{\text{Longitudinal}} > c_{\text{Torsion}}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druckwellen in Stahl und Aluminium

Stahl $E = 210 \frac{kN}{mm^2}$; $\rho = 7{,}85 \frac{kg}{dm^3} \rightarrow c = 5172 \frac{m}{s}$

Alu $E = 72{,}2 \frac{kN}{mm^2}$; $\rho = 2{,}7 \frac{kg}{dm^3} \rightarrow c = 5171 \frac{m}{s}$