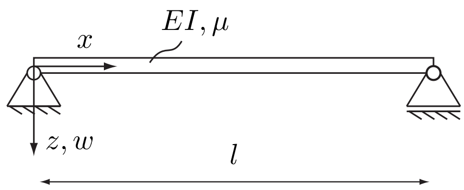
Aufgabenblatt 5

Aufgaben der Hörsaalübung

1. Gegeben ist skizzierter Biegebalken. Zu Bestimmen ist über den Rayleigh-Quotienten eine Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz. Gegeben sind die zwei Ansatzfunktionen für die Ortsfunktion:



$$W_1(x) = B(l^2 x - x^3) \tag{AF1}$$

$$W_2(x) = C \sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right) \tag{AF2}$$

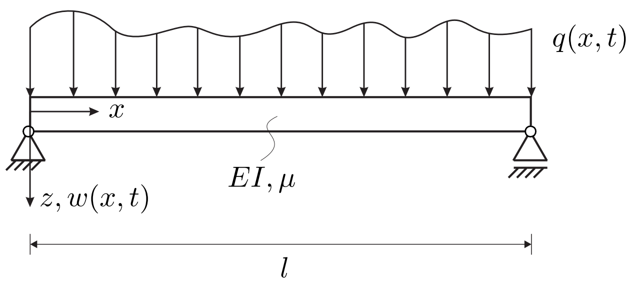
   (a) Wie lauten die geometrischen und dynamischen Randbedingungen für dieses System? Skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen.

   (b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Ansatzfunktionen die Bedingungen für den Rand erfüllen. Skizzieren Sie diese Funktionen.

   (c) Bestimmen Sie nun mit Hilfe des Rayleigh-Koeffizienten eine Näherung für die erste Eigenfrequenz für beide Ansatzfunktionen und vergleichen Sie beide.

   Geg.: EI, μ, l, B, C

2. Der wie skizziert gelagerte EULER-BERNOULLI Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ, Länge l) wird durch eine zeitlich veränderliche Streckenlast q in Biegeschwingungen versetzt. Im Folgenden soll ausschließlich die partikuläre Lösung des Sytems betrachtet werden.



   Geg.: $EI, \mu, l, q(x,t) = Q(x)\cos(\Omega t)$

   (a) Geben Sie die Feldgleichung und alle Randbedingungen an.

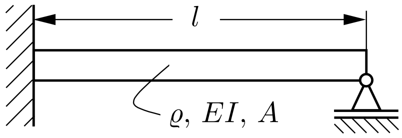
   (b) Benutzen Sie den Ansatz $w_p(x,t) = W(x)\cos(\Omega t)$ zur Herleitung einer gewöhnlichen DGL für die Ortsfunktion W.

   (c) Entwickeln Sie die Ortsfunktion W nach den Eigenfunktionen ($W_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{l}x)$) des homogenen Systems und berechnen Sie damit eine partikuläre Lösung. Für welche Werte von Ω kann es zu Resonanz kommen?

   (d) Sei nun $Q(x) = \hat{q}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$ und $\Omega = 16\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$. Zeigen Sie, dass keine Resonanz entsteht, obwohl die Anregerkreisfrequenz einer Eigenkreisfrequenz des homogenen Systems entspricht.

Tutoriumsaufgaben

3. Für den skizzierten einseitig fest eingespannten und am anderen Ende gelenkig gelagerten Balken ermittle man mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die erste Eigenkreisfrequenz und vergleiche sie mit dem auf zwei Nachkommastellen exakten Wert:



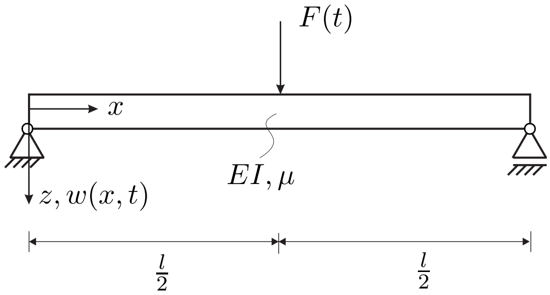
$$\omega_1 = 15,42\,\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\varrho A}}$$

Ansatzfunktion:

$$w(x,t) = Cx^2(l-x)^2 q(t)$$

Geg.: ϱ, A, EI, l, C

4. Der wie skizziert gelagerte Euler-Bernoulli Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ, Länge l) wird durch eine zeitlich veränderliche Einzellast F in Biegeschwingungen versetzt. Im Folgenden soll ausschließlich die partikuläre Lösung des Sytems betrachtet werden.



Geg.: $EI, \mu, l, F(t) = \hat{F}\cos(\Omega t)$

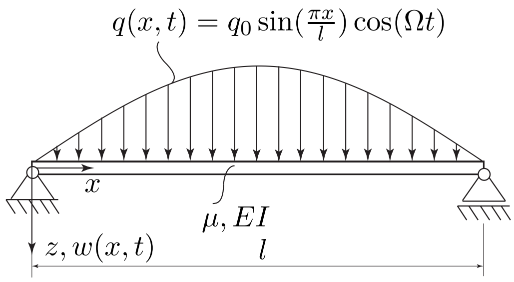
   (a) Geben Sie die Feldgleichung und alle Randbedingungen an.

   (b) Stellen Sie die Einzelkraft F mittels der Dirac-Distribution als Streckenlast dar. Leiten Sie dann mit dem Ansatz $w_p(x,t) = W(x)\cos(\Omega t)$ eine gewöhnliche DGL für die Ortsfunktion W her.

   (c) Entwickeln Sie die Ortsfunktion W nach den Eigenfunktionen ($W_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{l}x)$) des homogenen Systems und berechnen Sie damit eine partikuläre Lösung. Für welche Werte von Ω kommt es zu Resonanz?

Weitere Aufgaben

5. Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \cos(\Omega t)$ belastet.



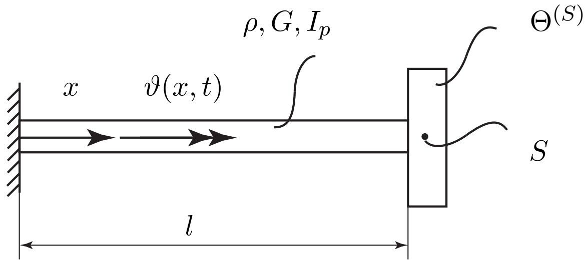
(a) Geben Sie die Feldgleichung und alle Randbedingungen (sowohl dynamische als auch geometrische) an.

(b) Es ist eine Partikulälöung mit dem Ansatz $w_p(x,t) = W(x) \cos(\Omega t)$ zu bestimmen. Setzen Sie dazu den Ansatz in die Feldgleichung ein und lösen Sie das entstehende zeitfreie Problem für $W(x)$ mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite. Zeigen Sie, dass $W(x)$ den Randbedingungen genügt.

(c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ (ohne Rechnung). Wie groß ist die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems?

Geg.: l, μ, EI, q_0, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{l}) \cos(\Omega t)$

6. Gegeben ist ein Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) mit einer starren homogenen Enddrehmasse (Massenträgheitsmoment $\Theta^{(S)}$). Mittels des Rayleigh-Quotienten ist eine Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz vorzunehmen.



(a) Geben Sie die Feldgleichung, die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c sowie die geometrische(n) Randbedingung(en) an.

(b) Geben Sie die dynamische(n) Randbedingung(en) an.

(c) Geben Sie das Randwertproblem für $\Theta^{(S)} = 0$ an. Berechnen Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$ (die Eigenform mit der niedrigsten Eigenkreisfrequenz ω_1) sowie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1. Skizzieren Sie die erste Eigenform $\Theta_1(x)$.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der im Aufgabenteil c) bestimmten ersten Eigenform $\Theta_1(x) = \tilde{\Theta}_1(x)$ als Ansatzfunktion eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Fall $\Theta^{(S)} > 0$ mittels des Rayleigh-Quotienten. Prüfen Sie für den Fall $\Theta^{(S)} = 0$ die Richtigkeit des Ergebnisses durch den Vergleich mit der ersten Eigenkreisfrequenz aus Aufgabenteil c).

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l GI_p \tilde{\Theta}_1'^2(x)\mathrm{dx}}{\int_0^l \rho I_p \tilde{\Theta}_1^2(x)\mathrm{dx} + \Theta^{(S)}\tilde{\Theta}_1^2(l)}$$

<u>Hinweis:</u>

$$\int \sin^2(ax)\mathrm{dx} = \frac{1}{2a}(ax - \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$
$$\int \cos^2(ax)\mathrm{dx} = \frac{1}{2a}(ax + \sin(ax)\cos(ax)), a = \text{konst.}$$

Geg.: l, ρ, G, I_p, $\Theta^{(S)}$.