Technische Universität Berlin Sommersemester 25
Fakultät II; Institut für Mathematik
M. Karow

Numerische Mathematik I für Ingenieurwissenschaften

3. Übungsblatt zur Vorlesung

MATLAB-Tipp: Beenden eines laufenden Programms. Manchmal gerät ein Programm in eine Endlosschleife. In diesem Fall (und auch sonst) kann ein Programm folgendermaßen beendet werden: Command-Window aktivieren (anklicken). Dann Steuerung+C drücken (vielleicht mehrmals).

Aufgabe 1

Ü) Stelle die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit Steigung $a \in \mathbb{R}$ auf, und berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse. Leite daraus die Iterationvorschriften für das Newton-Verfahren, das Sekantenverfahren und Regula Falsi her.

H) **Erste Programmieraufgabe:** Schreibe eine Funktion `regulafalsi(f,a,b,tol)`, welche eine Nullstelle der Funktion `f` im Intervall `[a,b]` mit der Regula Falsi berechnet. Die Iteration soll wiederholt werden, solange der Abstand zweier aufeinander folgender Iterationswerte größer als `tol` ist (siehe Vorlesungsfolien). Berechne so die kleinste positive Nullstelle der Funktion $f(x) = 1 + \cos(x)\cosh(x)$ mit Regula Falsi auf zehn Stellen genau. Hinweise:

- Mache zunächst einen Plot der Funktion f um geeignete Startwerte zu finden.
- `abs` ist die MATLAB-Anweisung für den Betrag.
- Wenn man in MATLAB an eine Funktion eine andere Funktion als Parameter übergibt, muss vor dem Namen der übergebenen Funktion ein `@` stehen. Beispiel: Will man Regula Falsi auf die Cosinus-Funktion im Intervall $[1, 2]$ mit Toleranz 0.01 anwenden, dann muss man schreiben `regulafalsi(@cos,1,2,0.01)`.

Aufgabe 2 — 2 Punkte

Ü) Die Gleichung $x = -2\ln(x)$ hat genau eine Lösung x_*. Diese Lösung liegt im Intervall $]0, 1[$. Sie kann aber mit der Fixpunktiteration $x_{k+1} = -2\ln(x_k)$ nicht berechnet werden (warum nicht?). Finde eine Iteration, die gegen x_* konvergiert.
H) Zeige, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 12$ genau zwei Fixpunkte hat. Sind die Fixpunkte anziehend oder abstoßend? Kann man sie mit Hilfe des Iterationsverfahrens $x_{k+1} = g(x_k)$ berechnen?

Aufgabe 3 — 6 Punkte

Sei $a > 0$.
Ü) Zeige, dass das Heron-Verfahren

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \qquad x_0 > 0 \qquad (*)$$

das Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ ist. Zeige, dass dieses Verfahren Konvergenzordnung 2 hat.
Ha) Zeige, dass das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)\,x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right), \qquad x_0 > 0$$

das Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ ist. Die zugrunde liegende Funktion ist $f(x) = x^n - a$.
Hb) Zeige, dass das folgende Iterationsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$ die Konvergenzordnung 3 hat.

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) - \frac{(x_k^2 - a)^2}{8\,x_k^3}, \qquad x_0 > 0. \qquad (**)$$

Hc) Wieviele Iterationen braucht man um mit dem Verfahren (∗∗) die Zahl $\sqrt{5}$ auf 15 Dezimalstellen genau zu bestimmen, wenn man mit dem Wert $x_0 = 5$ startet? Wieviele Iterationen benötigt man für dieselbe Aufgabe, wenn man das Newton-Verfahren (∗) benutzt. (Zur Rechnung darf Matlab, Python oder ein Taschenrechner benutzt werden)

Aufgabe 4 **2 Punkte**

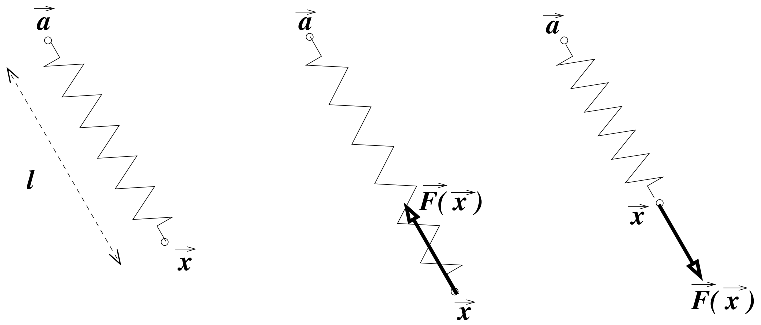
Formuliere das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f und berechne die erste Iterierte für den Startvektor $[x_0\ y_0]^T = [1\ \ 1]^T$.

$$\text{Ü)} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy + x - y - 1 \\ xy^2 + 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{H)} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^3 + y - 2 \\ x + \frac{1}{y} \end{bmatrix}.$$

Zweite Programmieraufgabe. Vorbemerkung: Wir betrachten eine Feder, die im $\mathbb{R}^2$ liegt und an einem ihrer Endpunkte $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ frei drehbar befestigt ist. Die Federsteifigkeit sei $s > 0$ und die Länge der Feder im entspannten Zustand sei $\ell > 0$. Sei $\vec{F}(\vec{x})$ die Kraft, welche die Feder auf ihren zweiten Endpunkt $\vec{x}$ ausübt. Nach dem Hookeschen Gesetz ist

$$\vec{F}(\vec{x}) \quad = \quad -s\,(\|\vec{x}-\vec{a}\|_2 - \ell)\,\frac{\vec{x}-\vec{a}}{\|\vec{x}-\vec{a}\|_2} = s\left(\frac{\ell}{\|\vec{x}-\vec{a}\|_2} - 1\right)(\vec{x}-\vec{a}).$$

Erläuterung: der Kraftvektor $\vec{F}(\vec{x})$ liegt auf der Verbindungsgerade der beiden Endpunkte und der Betrag der Kraft ist das Produkt der Federsteifigkeit mit der Abweichung der aktuellen Federlänge von der Federlänge im entspannten Zustand, also $\|\vec{F}(\vec{x})\|_2 = s\,|\|\vec{x}-\vec{a}\|_2 - \ell|$. Die Kraft zeigt zum Punkt $\vec{a}$, wenn die Feder gestreckt ist. Sie zeigt vom Punkt $\vec{a}$ weg, wenn die Feder gestaucht ist. Siehe Skizze (links: entspannte Feder, mitte: gestreckte Feder, rechts: gestauchte Feder).



Die Jacobi-Matrix der Kraftfunktion $\vec{F}$ ist

$$\vec{F}'(\vec{x}) = s\left(\left(\frac{\ell}{\|\vec{x}-\vec{a}\|_2} - 1\right)I - \ell\,\frac{(\vec{x}-\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^\top}{\|\vec{x}-\vec{a}\|_2^3}\right).$$

Zur Notation: I bezeichnet die Einheitsmatrix, $\vec{x}-\vec{a}$ ist ein Spaltenvektor, $(\vec{x}-\vec{a})^\top$ (Transposition) ist folglich ein Zeilenvektor. Das Produkt $(\vec{x}-\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^\top$ (Matrixmultiplikation) ist eine quadratische Matrix.
Wir betrachten nun eine Masse m deren Mittelpunkt sich am Ort $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ befindet, und die an zwei Federn mit den Steifigkeiten $s_1, s_2 > 0$ aufgehängt ist (siehe Bild auf der nächsten Seite). Die Federn sind an den Punkten $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ befestigt. Die Längen der entspannten Federn sind ℓ_1, ℓ_2. Auf die Masse wirken insgesamt drei Kräfte, nämlich die beiden Federkräfte

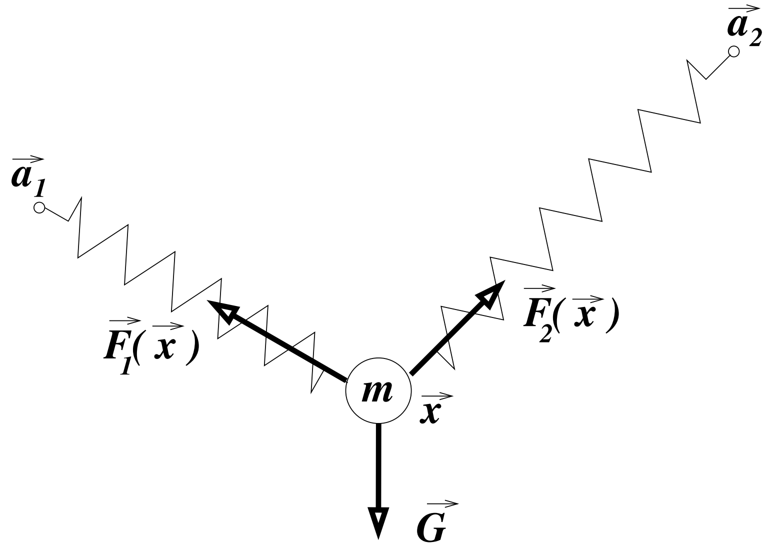
$$\vec{F}_k(\vec{x}) = -s_k\,(\|\vec{x}-\vec{a}_k\| - \ell_k)\,\frac{\vec{x}-\vec{a}_k}{\|\vec{x}-\vec{a}_k\|} = s_k\left(\frac{\ell_k}{\|\vec{x}-\vec{a}_k\|} - 1\right)(\vec{x}-\vec{a}_k), \qquad k = 1,2$$

und die Gewichtskraft

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\,m \end{bmatrix}, \qquad g = 9.81\,m/s^2 \text{ (Fallbeschleunigung).}$$

Die Gesamtkraft auf die Masse am Ort $\vec{x}$ ist also

$$\vec{F}_{gesamt}(\vec{x}) = \vec{F}_1(\vec{x}) + \vec{F}_2(\vec{x}) + \vec{G}.$$



Aufgabe: Berechne mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Gleichgewichtslage $\vec{x}$ für die Masse m, also den Ort $\vec{x}$ mit $\vec{F}_{gesamt}(\vec{x}) = \vec{0}$. Die zugrunde liegenden Daten sind dabei

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s_1 = s_2 = 10, \qquad \ell_1 = \ell_1 = 2, \qquad m = 1.$$

Wähle als Startpunkt für das Newton-Verfahren $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ und (bei einem zweiten Aufruf) $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Wie sind die unterschiedlichen Ergebnisse zu erklären?