MMD Mechatronische Maschinendynamik
Prof. Dr.-Ing. U. von Wagner

Kontinuumsmechanik

Formelblatt 1

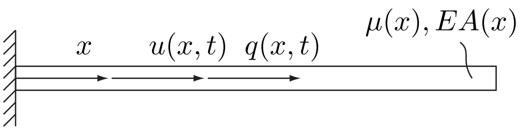
Eindimensionale Wellengleichung: Bernoullische Lösung

$$\boxed{\ddot{w}(x,t) = c^2 w''(x,t)} \qquad (*) \qquad \text{Eindimensionale Wellengleichung}$$

$\dot{(\;)} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\quad (\;)' = \frac{\partial}{\partial x}$, $\qquad c$ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Masse pro Länge (Massenbelegung): $\mu(x) = A(x)\varrho(x)$

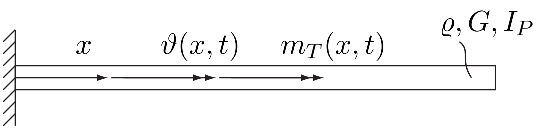
Längsschwingung von Stäben:



$$\boxed{\mu(x)\ddot{u}(x,t) - \big(EA(x)u'(x,t)\big)' = q(x,t)}$$

μ, EA konstant: $c^2 = \frac{EA}{\mu} = \frac{E}{\varrho}$

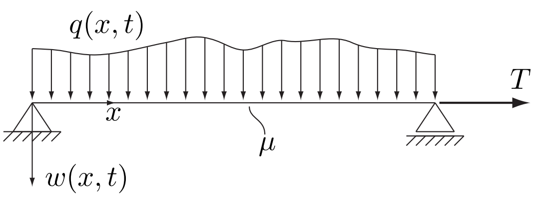
Torsionsschwingung von Stäben: konstanter kreisförmiger Querschnitt, homogen



$$\boxed{\varrho I_P \ddot{\vartheta}(x,t) - G I_P \vartheta''(x,t) = m_T(x,t)}$$

$c^2 = \frac{G}{\varrho}$

Querschwingung von Saiten: μ konstant, Vorspannung T



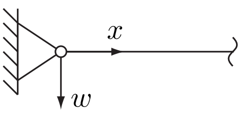
$$\boxed{\mu\ddot{w}(x,t) - T w''(x,t) = q(x,t)}$$

$c^2 = \frac{T}{\mu}$

Randbedingungen

geometrische Randbedingungen (Lagerung)

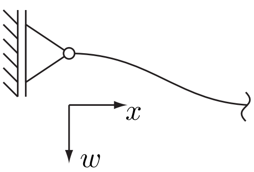
z.B. Saite



$w(0,t) = 0$ (festes Ende der Saite)

dynamische Randbedingungen (Kräfte- /Momentenbilanzen)

z.B. Saite



$w'(0,t) = 0$ (freies Ende der Saite)

Anfangs-Randwert-Problem ist gegeben durch

- Feldgleichung, z.B. $\ddot{w}(x,t) = c^2 w''(x,t)$
- Randbedingungen, z.B. $w(0,t) = 0, \quad w'(l,t) = 0$
- Anfangsbedingungen, z.B. $w(x,0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

Bernoullische Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $(*)$:

$$\boxed{w(x,t) = W(x)\,p(t)}$$

Produktansatz

in $(*)$ ergibt mit $\frac{\ddot{p}(t)}{p(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)} = \text{konst} =: -\omega^2$

$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0$ Anfangsproblem (AWP)

$W''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W(x) = 0$ Randwertproblem (RWP)

Lösen und Anpassen an Randbedingungen und Anfangsbedingungen
Eigenkreisfrequenzen ω_i und Eigenformen $W_i(x)$ aus Randwertproblem

Lösung der Form:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) p_i(t)$$

mit Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen:

$$\int_0^l W_i(x) W_j(x) \mathrm{d}x \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq j \\ \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases}$$