MMD Mechatronische Maschinendynamik
Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner

Kontinuumsmechanik
Sommersemester 2015

Klausur vom 04.08.2015

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

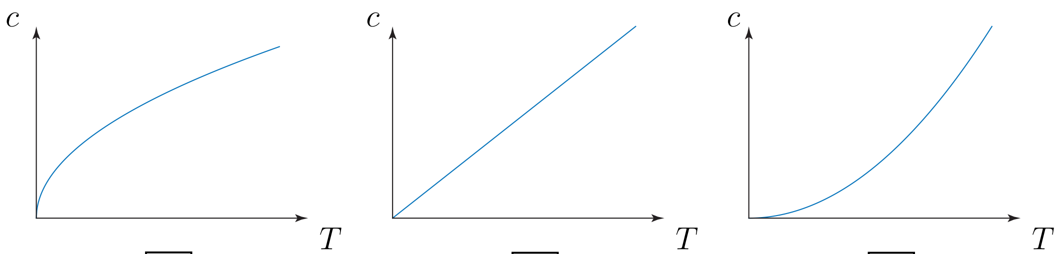
Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	10	11	11	8	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [1 Punkt]

Wie ist der qualitative Zusammenhang zwischen der Vorspannkraft T und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c bei einer Saite mit konstanter Masse pro Länge μ? Kreuzen Sie den richtigen Verlauf an.

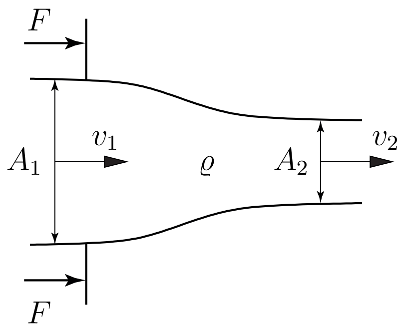


☐ ☐ ☐

Aufgabe T2 [1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt wie skizziert durch ein Rohr mit variablem Querschnitt. Kreuzen Sie die richtige Aussage für die Kraft F an, die das System im Gleichgewicht hält.

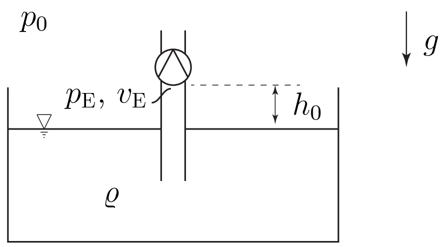
$F = 0$ ☐ $F > 0$ ☐ $F < 0$ ☐



Aufgabe T3 [1 Punkt]

Eine Pumpe soll benutzt werden, um eine ideale Flüssigkeit wie abgebildet aus dem offenen Reservoir gegen die Schwerkraft zu fördern. In welcher Höhe h_0 muss die Pumpe angebracht werden, wenn der Druck am Einlauf der Pumpe p_E und die Fließgeschwindigkeit v_E betragen soll und der Umgebungsdruck einheitlich p_0 beträgt?

Gegeben: p_E, v_E, h_0, p_0, g, ϱ



Nebenrechnung:

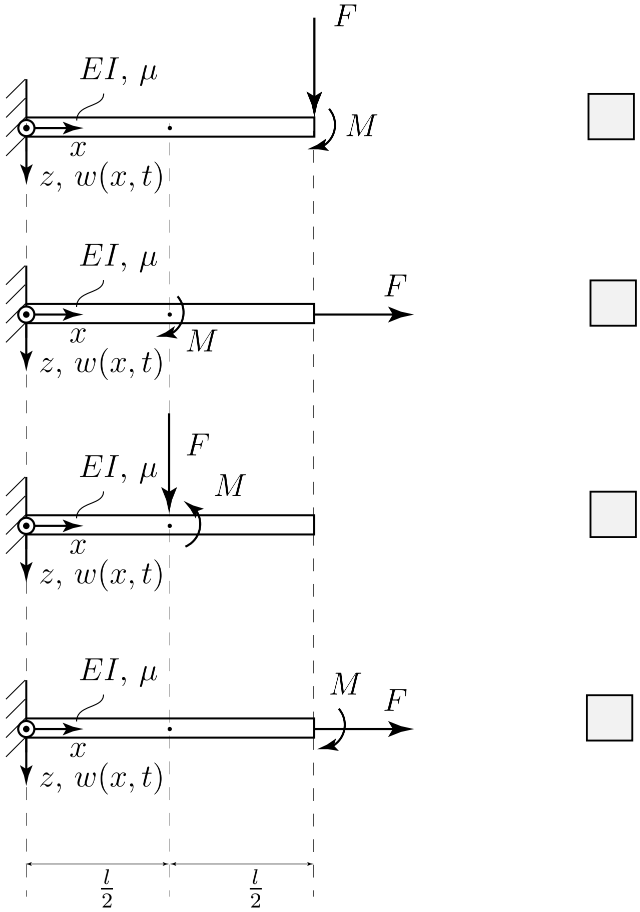
$h_0 =$

Aufgabe T4 [1 Punkt]

Für ein mechanisches System liefert das Prinzip von Hamilton folgenden Ausdruck:

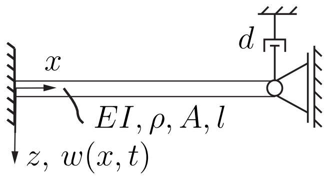
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu \dot{w}^2 - EIw'' - Fw'^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M \delta w'(l,t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Für welche(s) der nachfolgend skizzierten Systeme ergibt sich dieser Ausdruck im Prinzip von Hamilton? Kreuzen Sie an.



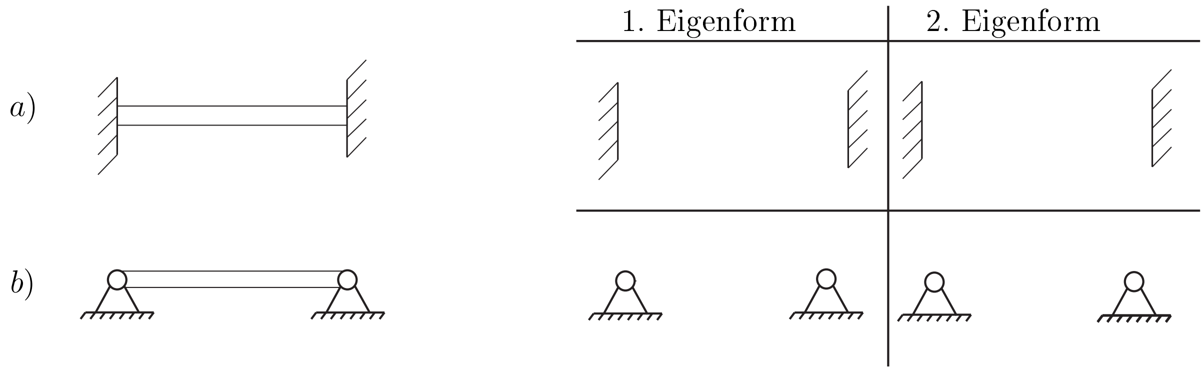
Aufgabe T5 [2 Punkte]

Geben Sie alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen für den skizzierten Euler-Bernoulli-Balken an.



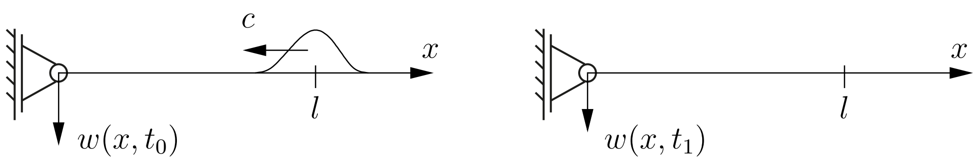
Aufgabe T6 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und die zweite Eigenform.



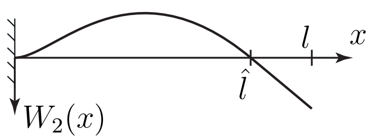
Aufgabe T7 [1 Punkt]

Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf die Lagerung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung $w(x, t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$.

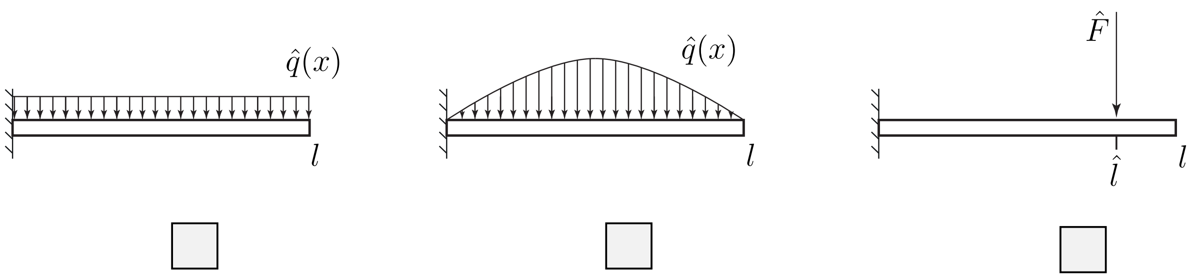


Aufgabe T8 [1 Punkt]

Ein einseitig fest eingespannter Euler Bernoulli-Balken besitzt die abgebildete 2. Eigenform $W_2(x)$ bei der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 und wird mit einer Streckenlast $q(x, t) = \hat{q}(x)\cos(\omega_2 t)$ bzw. mit einer Einzellast $F(t) = \hat{F}\cos(\omega_2 t)$ zu Schwingungen angeregt.



Kreuzen Sie die Belastung(en) an, die dabei **nicht** zu Resonanz führt/führen.

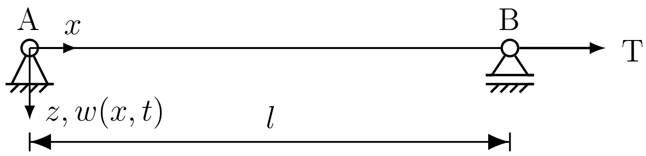


Aufgabe 1

[10 Punkte]

Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft T vorgespannt.

Gegeben: T, l, μ



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ?

Ergebnisse:

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen.

Nebenrechnung:

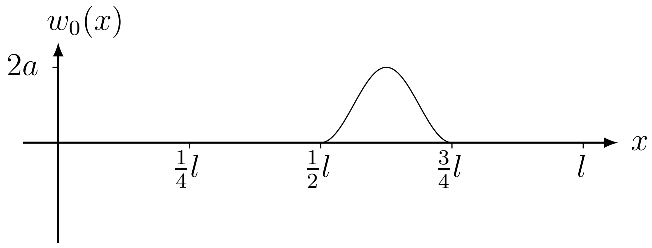
Eigenkreisfrequenzen:

c) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für $t = 0$ gegeben:

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -a\cos\left[8\pi(\frac{x}{l} - \frac{1}{2})\right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

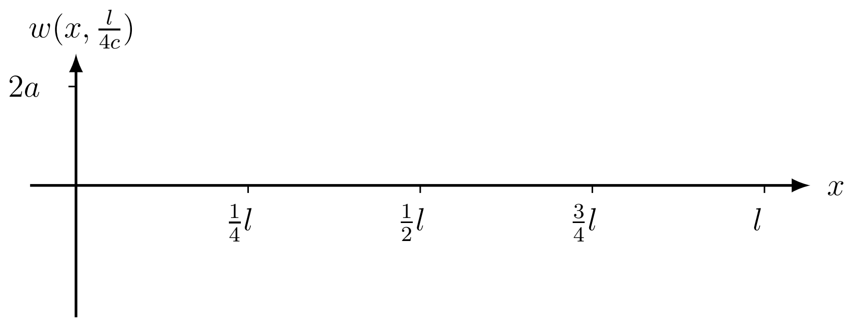
$$\dot{w}(x,0) = v_0(x) = 0$$

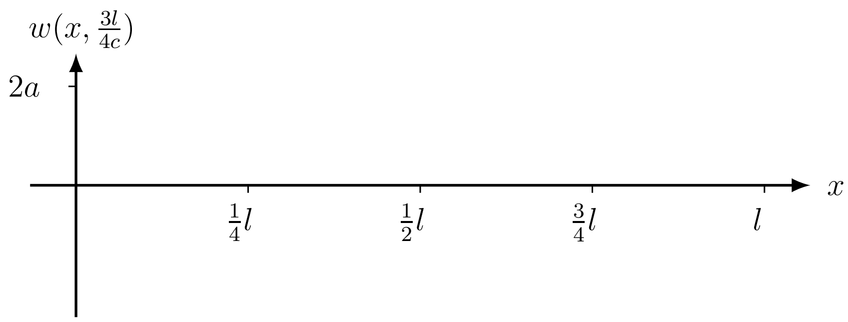
Skizze für $w_0(x)$:



Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird nun als bekannt vorrausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = l/4c$ und zum Zeitpunkt $t = 3l/4c$.

Skizzen:





d) Für kleine Zeiten t kann die Verschiebung $w(x,t)$ mit der Formel

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit t^* ist diese Lösung gültig? Geben Sie $w(x, l/8c)$ an.

Nebenrechnung:

$t^* =$

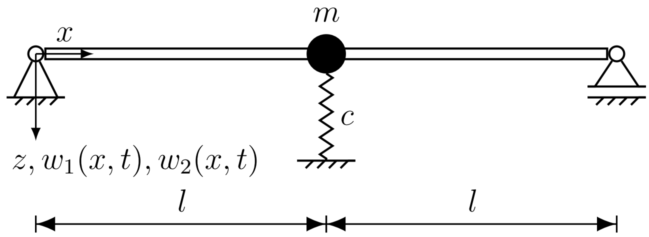
$w(x, l/8c) =$

Aufgabe 2

[11 Punkte]

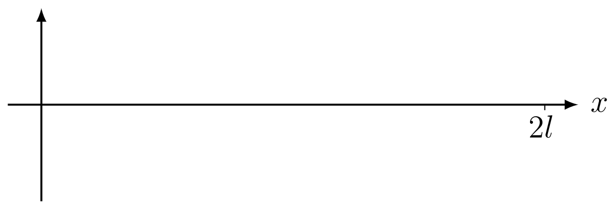
Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge $2l$, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ durch $w_1(x,t)$ und im Bereich $l \leq x \leq 2l$ durch $w_2(x,t)$ beschrieben. Der Balken wird an der Stelle $x = l$ durch eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w_1(l,t) = w_2(l,t) = 0$) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse m.

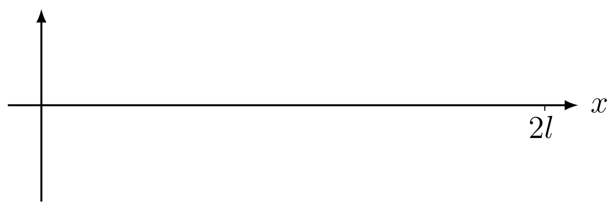
Gegeben: EI, l, μ, m, c



a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).

Skizzen:





b) Geben Sie die Feldgleichungen für $w_1(x,t)$ im Bereich $0 \leq x \leq l$ und $w_2(x,t)$ im Bereich $l \leq x \leq 2l$ an.

Feldgleichungen:

c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle $x = l$ die Übergangsbedingungen an.

Nebenrechnung:
Rand und Übergangsbedingungen:

d) Bestimmen Sie mit der Ansatzfunktion $W(x) = x(2l - x)$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotientens eine obere Schranke für die niedrigste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Sonderfall $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Nebenrechnung:
Ergebnis:

e) Die jeweils niedrigste Eigenkreisfrequenz wird für die Fälle

- $m = 0$ und $c = 0$ mit $\widehat{\omega}_1$
- $m > 0$ und $c = 0$ mit $\overline{\omega}_1$
- $m = 0$ und $c > 0$ mit $\widetilde{\omega}_1$

bezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

Nebenrechnung:

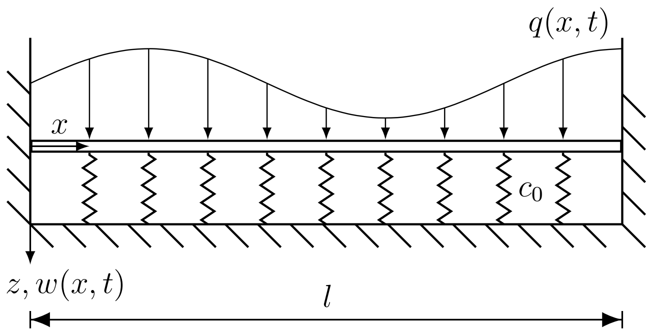
$\widehat{\omega}_1 < \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 < \widetilde{\omega}_1$	☐
$\widehat{\omega}_1 = \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_1$	☐
$\widehat{\omega}_1 > \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 > \widetilde{\omega}_1$	☐

Aufgabe 3

[11 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte beidseitig fest eingespannte schlanke Euler-Bernoulli Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI). Der Balken ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c_0) und wird durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung sowie die Randbedingungen zu bestimmen.

Gegeben: l, μ, EI, c_0, $q(x,t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$T =$

$U =$

$\delta W =$

b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und -falls existierend- die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnung:
Ergebnisse:

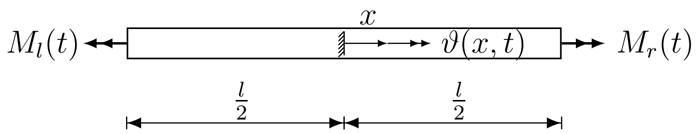
Aufgabe 4

[8 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte freie Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, Polares Flächenträgheitsmoment I_p), der an seinem linken Ende durch das Moment $M_l(t)$ und an seinem rechten Ende durch das Moment $M_r(t)$ belastet wird.
Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

Gegeben: l, ρ, G, I_p, $M_l(t)$, $M_r(t)$



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ an.

Nebenrechnung:

Ergebnisse:

b) Bestimmen Sie für den Fall der freien Schwingung ($M_l(t) = M_r(t) = 0$) mit dem Ansatz $\vartheta(x,t) = \theta(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\theta(x)$ und geben Sie deren allgemeine Lösung sowie die zugehörigen Randbedingungen an.

Nebenrechnung:

Differentialgleichung:

Lösung:

Randbedingungen:

c) Als Lösung des Problems aus b) ergeben sich jeweils für $k = 1, 2, \ldots$ folgende Eigenkreisfrequenzen ω_{2k-1}, ω_{2k} und Eigenformen $\theta_{2k-1}(x)$, $\theta_{2k}(x)$

$$\omega_{2k-1} = (2k-1)\widetilde{C}, \qquad \theta_{2k-1}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right),$$
$$\omega_{2k} = 2k\widehat{C}, \qquad \theta_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right).$$

Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 an, für die es in den folgenden Fällen zu Resonanz kommt:

1. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$, $\quad M_r(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$,
2. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_2 t)$, $\quad M_r(t) = -M_0 \sin(\Omega_2 t)$.

Überlegen Sie dazu, welche der Eigenformen durch welche äußeren Momente angeregt werden können.

Nebenrechnung:
Erregerkreisfrequenzen Ω_1, Ω_2: