| | |
|---|---|
| MMD Mechatronische Maschinendynamik<br>Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner | Kontinuumsmechanik<br>Sommersemester 2017 |

# Klausur vom 28.07.2017

Name

Vorname

Studiengang

Matrikelnummer

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

**Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.**

| Aufgabe | T | A1 | A2 | A3 | A4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | |
| Erreichte Punkte | | | | | | |
| Handzeichen | | | | | | |

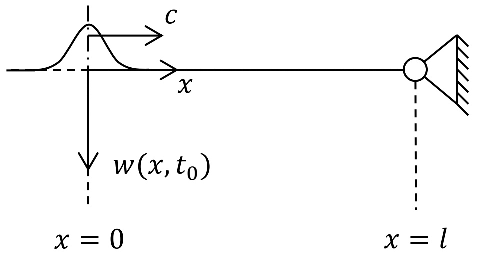
# Theorieaufgaben

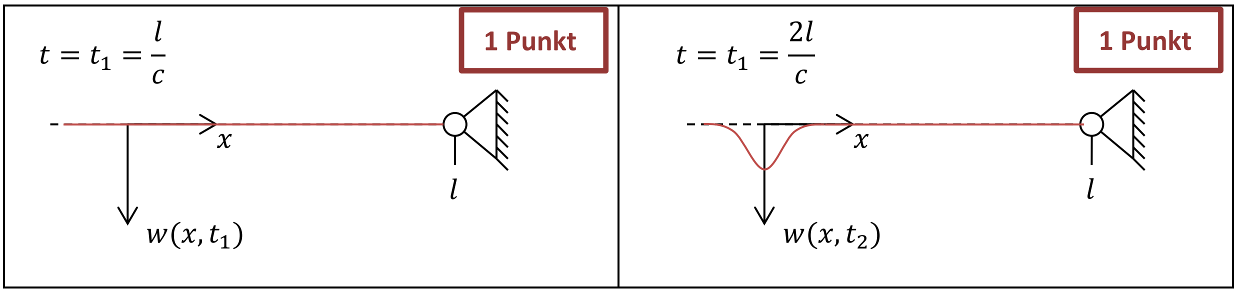
[10 Punkte]

## Aufgabe T1

[2 Punkte]

In einer Saite läuft die skizzierte Transversalwelle mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c$ auf das Lager bei $x = l$ zu. Ihr Maximum ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $x = 0$. Skizzieren Sie in den beiden unteren Diagrammen die Verschiebungen $w(x, t_1)$ mit $t_1 = \frac{l}{c}$ bzw. $w(x, t_2)$ mit $t_2 = \frac{2l}{c}$.




## Aufgabe T2

[1 Punkt]

Die eindimensionale Wellengleichung $\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0$ besitzt die Lösung $w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Was beschreibt der Ausdruck $f_2(x + ct)$ dabei anschaulich? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

**1 Punkt**

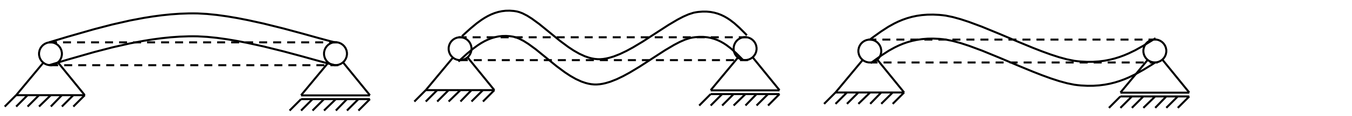
- ■ eine mit der Geschwindigkeit $c$ in negative $x$-Richtung laufende Welle
- ☐ eine mit der Geschwindigkeit $c$ in positive $x$-Richtung laufende Welle
- ☐ eine Schwingung mit steigender Amplitude
- ☐ eine Schwingung mit fallender Amplitude

## Aufgabe T3

[1 Punkt]

Der skizzierte Balken besitzt die niedrigsten drei Eigenfrequenzen 100 Hz, 400 Hz und 900 Hz. Ordnen Sie die jeweiligen Eigenfrequenzen den unten abgebildeten Schwingformen zu.

**1 Punkt**

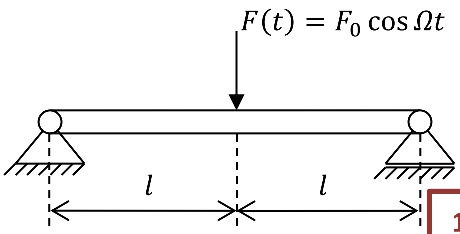


| | | |
|---|---|---|
| $f$ = 100 Hz | $f$ = 900 Hz | $f$ = 400 Hz |

## Aufgabe T4

[1 Punkt]

Gegeben ist der rechts skizzierte statisch bestimmt gelagerte homogene Euler-Bernoulli-Balken mit konstantem Querschnitt, welcher mittig mit der Einzellast $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Schwingungen angeregt wird. Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.



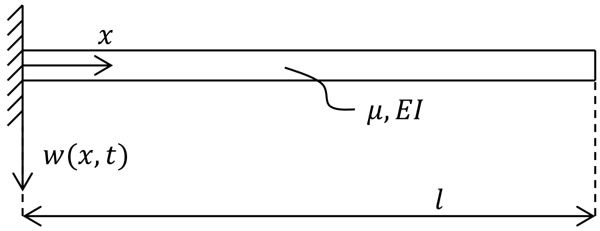

**1 Punkt**

| | |
|---|---|
| ■ | Wenn die Erregerkreisfrequenz $\Omega$ gleich der ersten Eigenkreisfrequenz $\omega_1$ ist, tritt Resonanz auf. |
| □ | Wenn die Erregerkreisfrequenz $\Omega$ gleich der zweiten Eigenkreisfrequenz $\omega_2$ ist, tritt Resonanz auf. |
| □ | eine Erhöhung der Amplitude $F_0$ führt zu einer Erhöhung der Eigenkreisfrequenz $\omega_1$ |
| □ | eine Erhöhung der Amplitude $F_0$ führt zu einer Verringerung der Eigenkreisfrequenz $\omega_1$ |

## Aufgabe T5

[1 Punkt]

Gegeben ist der skizzierte Euler Bernoulli Balken mit einer festen Einspannung bei $x = 0$ und der Länge $l$. Unter Verwendung des Rayleigh-Quotienten soll eine Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingung gemacht werden. Geben Sie eine zulässige Ansatzfunktion $\widetilde{W}_1(x)$ an



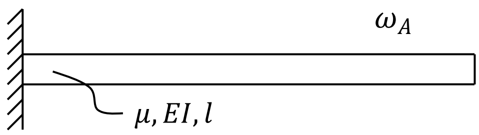

**1 Punkt**

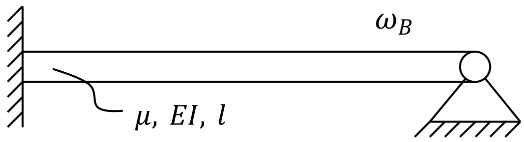
z.B. $\widetilde{W}_1(x) = x^2$, $\widetilde{W}_1(x) = x^4$, alles wenn gilt: $\widetilde{W}_1(0) = 0$ und $\widetilde{W}_1{}'(0) = 0$

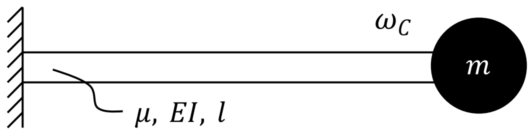
## Aufgabe T8

[1 Punkt]

Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich lediglich in ihren Randbedingungen. Die zu jedem System gehörende erste Eigenkreisfrequenz sei jeweils $\omega_A, \omega_B$ bzw. $\omega_C$. Sortieren Sie diese nach Ihrer Größe.



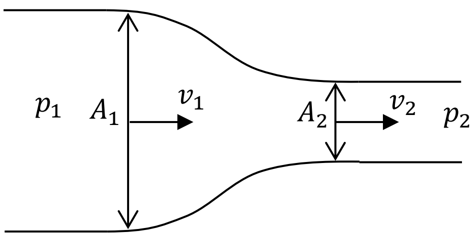

**1 Punkt**

$\omega_C$ < $\omega_A$ < $\omega_B$

## Aufgabe T6

[1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt $A_1 > A_2$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.



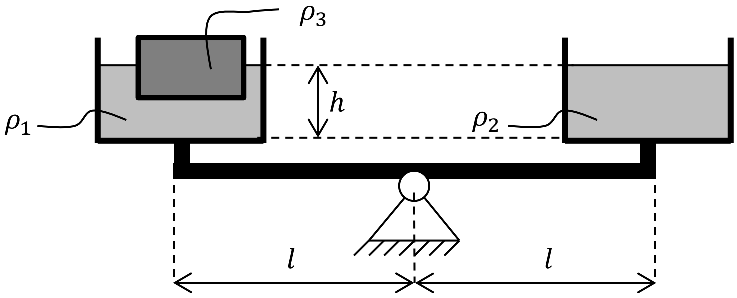

| | | |
|---|---|---|
| ■ $v_1 < v_2$ | □ $v_1 > v_2$ | □ $v_1 = v_2$ |

1 Punkt

## Aufgabe T7

[2 Punkte]

Die unten skizzierte Waage befindet sich im Gleichgewicht. Beide Behälter sind identisch und mit Flüssigkeiten (Dichte $\rho_1$ bzw. $\rho_2$) mit gleichem Füllstand $h$ gefüllt. Im linken Behälter schwimmt zusätzlich ein Körper mit der Dichte $\rho_3$.




Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

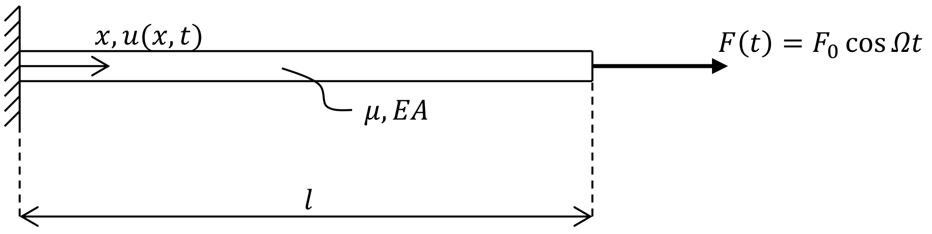
1 Punkt

| | | |
|---|---|---|
| □ $\rho_1 < \rho_3$ | ■ $\rho_1 > \rho_3$ | □ $\rho_1 = \rho_3$ |
| □ $\rho_1 < \rho_2$ | □ $\rho_1 > \rho_2$ | ■ $\rho_1 = \rho_2$ |

1 Punkt

## Aufgabe 1

[12 Punkte]




Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Stab (Masse pro Länge $\mu = \rho A$, Dehnsteifigkeit $EA$, Länge $l$), der durch die Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Längsschwingungen $u(x,t)$ angeregt wird.

Gegeben: $A, E, l, \rho, F_0, \Omega$

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an (Herleitung ist nicht notwendig).

Ergebnis:

Feldgleichung: **1 Punkt**

$$\rho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = q(x,t) = 0$$

oder

$$\mu \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = q(x,t) = 0$$

Randbedingungen

RB1: $u(0,t) = 0$ **1 Punkt**

RB2: $EAu'(l,t) = F(t)$

b) Bestimmen Sie für $F(t) \equiv 0$ die Eigenkreisfrequenzen $\omega_k$ und die Eigenformen $U_k(x)$ des Stabs.

Rechnung:

Den Ansatz

$$u(x,t) = U(x)p(t)$$ **1 Punkt**

in die Feldgleichung eingesetzt führt zu

$$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0$$

$$U''(x) + \frac{\rho}{E}\omega^2 U(x) = 0.$$

Anpassen des Ansatzes

$$U(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right)$$ **1 Punkt**

an die Randbedingung. Aus RB1 folgt

$$U(0) = 0$$

weshalb

$$A_1 = 0$$ **1 Punkt**

gilt.

Aus RB2 folgt mit $F(t) \equiv 0$

$$U'(l) = 0$$

weshalb

$$A_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega l\right) = 0$$ **1 Punkt**

gilt. Für die nichttriviale Lösung muss damit gelten

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega_k l = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k-1)\frac{\pi}{2} \qquad k = 1,..,\infty$$

$$\Rightarrow \omega_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

| **1 Punkt** | **1 Punkt** |
|---|---|
| $\omega_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ | $U_k(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}x\right) \qquad k = 1,..,\infty$ |

c) $F(t)$ sei nun mit $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ gegeben. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x) \cos \Omega t$ eine Lösung für die Zwangsschwingungen.

Rechnung:

Ansatz einsetzen in die Feldgleichung

$$-\Omega^2 \rho A U(x) \cos \Omega t - EAU''(x) \cos \Omega t = 0$$

führt auf

$$U''(x) + \frac{\rho}{E} \Omega^2 U(x) = 0$$

**1 Punkt**

Anpassen der Lösung

$$U(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \Omega x\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \Omega x\right)$$

an die Randbedingungen.

Aus RB1 folgt

$$U(0) = 0$$

weshalb

$$A_1 = 0$$

gilt.

Aus RB2 $EAu'(l,t)$ folgt

$$EAU'(l) \cos \Omega t = F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow EAA_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} \Omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \Omega l\right) = F_0$$

**1 Punkt**

$$\Rightarrow A_2 = \frac{F_0}{\sqrt{E\rho} A \, \Omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \Omega l\right)}$$

$$u(x,t) = \frac{F_0}{\sqrt{E\rho}A\,\Omega\,\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega x\right)\cos\Omega t$$

**1 Punkt**

d) Für welche Erregerkreisfrequenzen $\Omega$ tritt Resonanz auf?

Rechnung:

$$\sqrt{E\rho}A\,\Omega\,\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right) = 0$$

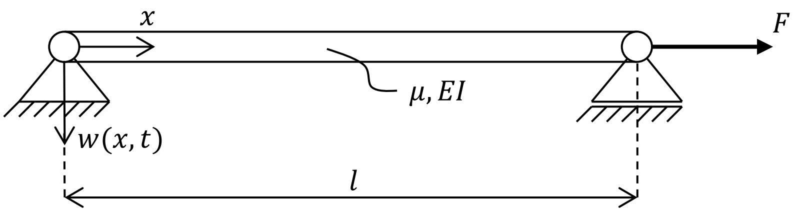
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 1, 2, .., \infty$$

$$\Omega = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \omega_k$$

**1 Punkt**

## Aufgabe 2

[8 Punkte]




Gegeben ist der skizzierte mit der Kraft $F$ vorgespannte Balken (Masse pro Länge $\mu$, Biegesteifigkeit $EI$, Länge $l$). Seine Feldgleichung ist

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) - Fw^{II}(x,t) = 0$$

<u>Gegeben:</u> $\mu, EI, l, F$

a) Geben Sie die Randbedingungen an.

Ergebnis:

$w(0,t) = 0$
$w''(0,t) = 0$ **für zwei jeweils 1 Punkt**
$w(l,t) = 0$
$w''(l,t) = 0$ **für zwei jeweils 1 Punkt**

b) Mit der Funktion $\widetilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$ soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Zeigen Sie, dass $\widetilde{W}_1(x)$ eine zulässige Funktion ist.

Ergebnis:

Es muss gelten

$$\widetilde{W}_1(0) = 0$$
$$\Rightarrow \sin\left(\pi\frac{0}{l}\right) = 0$$

**1 Punkt**

und

$$\widetilde{W}_1(l) = 0$$
$$\Rightarrow \sin\left(\pi\frac{l}{l}\right) = 0$$

**1 Punkt**

c) Gegeben sei nun der Rayleigh-Quotient mit

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\tilde{W}_1''^2(x) + F\tilde{W}_1'^2(x)\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \mu \tilde{W}_1^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Bestimmen Sie $\tilde{\omega}_1$ unter Verwendung der Ansatzfunktion $\tilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$.

Hinweis:

1) $\int \sin^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$
2) $\int \cos^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$

Rechnung:

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\frac{\pi^4}{l^4}\sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right) + F\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \mu\sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x}$$

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)dx + F\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)dx}{\mu\int_0^l \sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x}$$

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4}\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} - \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l + F\frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} + \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l}{\mu\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} - \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l}$$

**1 Punkt**

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + F\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}$$

Anmerkung: Da $\tilde{W}_1(x)$ die erste Eigenform ist, ist $\tilde{\omega}_1$ exakt die erste Eigenkreisfrequenz $\omega_1$

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + F\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}}$$

**1 Punkt**

d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus c) die zugehörige Knicklast $\tilde{F}_{\text{krit}}$.

Rechnung:

**1 Punkt**

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + \tilde{F}_{\text{krit}}\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}} = 0$$

$$EI\frac{\pi^4}{l^4} + \tilde{F}_{\text{krit}}\frac{\pi^2}{l^2} = 0$$

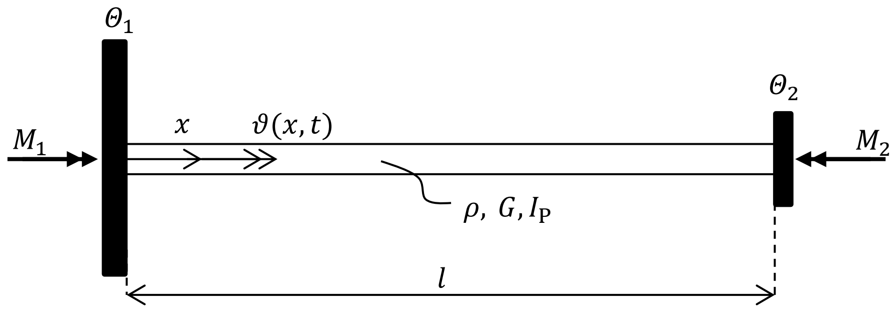
$$\tilde{F}_{\text{krit}} = -EI\frac{\pi^2}{l^2}$$

**1 Punkt**

$$\tilde{F}_{\text{krit}} = -EI\frac{\pi^2}{l^2}$$

## Aufgabe 3

[9 Punkte]




Das skizzierte Modell eines Antriebsstrangs besteht aus zwei diskreten Drehmassen (starre Körper, Massenträgheitsmoment $\Theta_1$ bzw. $\Theta_2$ bezüglich der Drehachse) sowie dem dargestellten Torsionsstab (Dichte $\rho$, Schubmodul $G$, polares Flächenträgheitsmoment $I_P$, Länge $l$). Er wird bei $x = 0$ mit dem Moment $M_1$ und bei $x = l$ mit dem Moment $M_2$ belastet. Mit dem **Prinzip von Hamilton** sollen die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

Gegeben: $\rho, G, I_P, l, M_1, M_2, \Theta_1, \Theta_2,$

a) Geben Sie die kinetische Energie $T$ und die potentielle Energie $U$ des Systems an.

Hinweis: Für einen starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und dem Massenträgheitsmoment $\Theta$ bezüglich der Drehachse ist die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l \rho I_P \dot{\vartheta}^2(x,t)\,\mathrm{d}x}_{\text{1 Punkte}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Theta_1\dot{\vartheta}^2(0,t) + \frac{1}{2}\Theta_2\dot{\vartheta}^2(l,t)}_{\text{1 Punkte}}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l G I_P \vartheta'^2(x,t)\,\mathrm{d}x$$ **1 Punkt**

b) Formulieren Sie die virtuelle Arbeit $\delta W$ der potentiallosen Kräfte und Momente.

$$\delta W = M_1 \delta\,\vartheta(0,t) - M_2 \delta\,\vartheta(l,t)$$ **1 Punkt**

c) Existieren geometrische Randbedingungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

Ergebnis:

nein **1 Punkt**

d) Bestimmen Sie mit dem **Prinzip von Hamilton** die Feldgleichung sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Rechnung:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^l \rho I_\mathrm{P} \dot{\vartheta}(x,t)\delta\dot{\vartheta}(x,t) - GI_\mathrm{P}\vartheta'(x,t)\delta\vartheta'(x,t)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}t \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left( \Theta_1 \dot{\vartheta}(0,t)\delta\dot{\vartheta}(0,t) + \Theta_2\dot{\vartheta}(0,t)\delta\dot{\vartheta}(l,t)\right)\mathrm{d}t \\ + \int_{t_0}^{t_1} \big(M_1 \delta\vartheta(0,t) - M_2\delta\vartheta(l,t)\big)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

**1 Punkt**

Durch Partielle Integration

$$\begin{aligned}\left.\int_{t_0}^{t_1} -GI_\mathrm{P}\vartheta'(x,t)\delta\vartheta(x,t)\mathrm{d}t\right]_0^l - \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^l \rho I_\mathrm{P} \ddot{\vartheta}(x,t)\delta\vartheta(x,t) - GI_\mathrm{P}\vartheta''(x,t)\delta\vartheta(x,t)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}t \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left( \Theta_1 \ddot{\vartheta}(0,t)\delta\vartheta(0,t) + \Theta_2\ddot{\vartheta}(0,t)\delta\vartheta(l,t)\right)\mathrm{d}t \\ + \int_{t_0}^{t_1} \big(M_1 \delta\vartheta(0,t) - M_2\delta\vartheta(l,t)\big)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

**1 Punkt**

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \big[-GI_\mathrm{P}\vartheta'(l,t) - \Theta_2\ddot{\vartheta}(0,t) - M_2\big]\delta\vartheta(l,t) + \big[GI_\mathrm{P}\vartheta'(0,t) - \Theta_1\ddot{\vartheta}(0,t) + M_1\big]\delta\vartheta(0,t)\mathrm{d}t \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^l \big[\rho I_\mathrm{P} \ddot{\vartheta}(x,t)\delta\vartheta(x,t) - GI_\mathrm{P}\vartheta''(x,t)\delta\vartheta(x,t)\big]\ \mathrm{d}x \right)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Rechnung:

Rechnung:

Feldgleichung:

**1 Punkt**

$$\rho I_\mathrm{P}\ddot{\vartheta}(x,t) - GI_\mathrm{P}\vartheta''(x,t) = 0$$

dynamische Randbedingung(en):

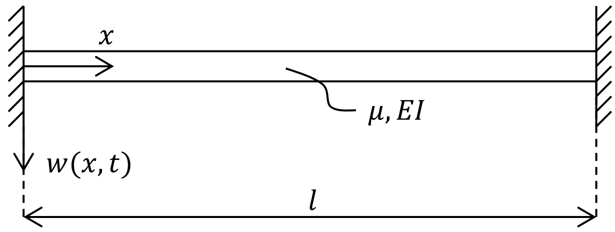
**1 Punkt**

$$GI_\mathrm{P}\vartheta'(0,t) - \Theta_1\ddot{\vartheta}(0,t) + M_1 = 0$$

$$-GI_\mathrm{P}\vartheta'(l,t) - \Theta_2\ddot{\vartheta}(l,t) - M_2 = 0$$

## Aufgabe 4

[11 Punkte]




Gegeben ist der skizzierte, beidseitig fest eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (Masse pro Länge $\mu$, Biegesteifigkeit $EI$, Länge $l$)

<u>Gegeben:</u> $\mu, EI, l$

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) = 0$$

**1 Punkt**

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0$$
$$w'(0,t) = 0$$

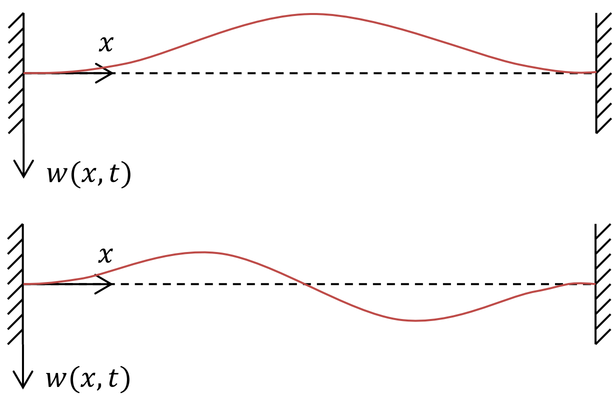
**für zwei jeweils 1 Punkt**

$$w(l,t) = 0$$
$$w'(l,t) = 0$$

**für zwei jeweils 1 Punkt**

b) Skizzieren Sie die zwei Eigenformen, die zu den beiden niedrigsten Eigenkreisfrequenzen gehören (ohne Rechnung).

Skizze:




**1 Punkt**

c) Setzen Sie den Ansatz $w(x,t) = W(x)\sin(\omega t)$ in die Feldgleichungen, und bestimmen Sie die Differentialgleichung für $W(x)$.

Rechnung:

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) = 0$$

$$-\omega^2\mu W(x)\sin(\omega t) + EIW^{IV}(x)\sin(\omega t) = 0$$

$$W^{IV}(x) - \omega^2\frac{\mu}{EI}W(x) = 0$$

Differentialgleichung:

$$W^{IV}(x) - \omega^2\frac{\mu}{EI}W(x) = 0$$

**1 Punkt**

d) Geben Sie die allgemeine Lösung für $W(x)$ an. Verwenden Sie dabei die Abkürzung $\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}$

$$W(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x)$$

**1 Punkt**

e) Berechnen Sie die Charakteristische Gleichung für die Bestimmung von $\lambda$ durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen.

Hinweise:

1) $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$
   $1 = \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha)$
2) Ein lineares Gleichungssystem der Form $\underline{A}\vec{r} = \vec{0}$ hat dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von $\underline{A}$ Null ist.

Rechnung:

$$W(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x)$$

Anpassen an die Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \rightarrow W(0) = 0 \rightarrow A + C = 0 \rightarrow C = -A$$

$$w'^{(0,t)} = 0 \rightarrow W'(0) = 0 \rightarrow B + D = 0 \rightarrow D = -B$$

$$w(l,t) = 0 \rightarrow W(l) = 0$$

$$w'(l,t) = 0 \rightarrow W'(l) = 0$$

**1 Punkt**

Aus $W(l) = 0$ folgt

$$A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) - A\cosh(\lambda l) - B\sinh(\lambda l) = 0.$$

**1 Punkt**

Aus $W'(l) = 0$ folgt

$$-A\sin(\lambda l) + B\cos(\lambda l) - A\sinh(\lambda l) - B\cosh(\lambda l) = 0.$$

**1 Punkt**

In Matrixschreibweise $\underline{A}\vec{r} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) & \sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l) \\ -\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l) & \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Determinanten von $\underline{A}$

$$\det(\underline{A}) = (\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l))(\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l)) - (-\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l))(\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l))$$

**1 Punkt**

$$\det(\underline{A}) = \cos^2(\lambda l) - 2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + \cosh^2(\lambda l) + \sin^2(\lambda l) - \sinh^2(\lambda l)$$

$$\det(\underline{A}) = -2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + 2$$

Charakteristische Gleichung:

$$-2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + 2 = 0$$

**1 Punkt**