Vorlesung 1
02.11.2020

Ziele:

1. Maßtheorie → Lebesgue-Maß
   (Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bestimmen)

2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   → Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)

3. Version des Hauptsatzes → Satz von Gauß

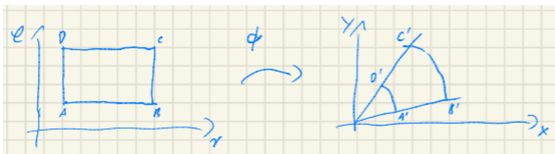
I Der Transformationssatz

Def. I.1
Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$,$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt C^1-Diffeomorphismus, falls Φ bijektiv ist und Φ, Φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

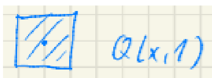
Bsp.: (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$)
$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) = \mathcal{U} \to \mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$

$\Phi(r, \mathcal{C}) = (r \cos(\mathcal{C}), r \sin(\mathcal{C}))$
$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{cases} (r, \arccos(\frac{x}{r})) & \text{, falls } y \geq 0 \\ (r, 2\pi - \arccos(\frac{x}{r})) & \text{, falls } y < 0 \end{cases}$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Für $x < 0$ filt alternativ $\Phi^{-1}(x, y) = (r, \frac{\pi}{2} + \arccos(\frac{x}{r}))$
$\implies \Phi^{-1}$ glatt auf ganz $\mathcal{V} \implies \Phi^{C^1}$ Diffeomorphismus.



Bem.: (Notation)
$x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$
$Q(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x||_\infty \leq \delta\}, ||x||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$



Lemma I.2
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathcal{U}$ und $\Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ mit $D\Phi(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Gegeben sei eine Folte $Q_j = Q(x_j, \phi_j) \subseteq \mathcal{U}$ mit $\phi_j \to 0$ und $x_0 \in Q_j \ \forall \ j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(Q_j))}{\lambda^n(Q_j)} \leq |det D\Phi(x_0)|$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.3 (Transformationsformel)
$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} C^1$-Diffeomorphismus. Ist $A \subseteq \mathcal{U}$ λ^n-messbar, so ist auch $\Phi(A)$ λ^n-messbar und es gilt:

1. $\lambda^n(\Phi(A)) = \int\limits_A |\det D\Phi(x)| dx$

Weiter gilt für jede λ^n-messbare Funktion $f : \mathcal{V} \to \bar{\mathbb{R}}$:

2. $\int\limits_{\mathcal{V}} f(y)dy = \int\limits_{\mathcal{U}} f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|dx \quad (dy \mathrel{\hat{=}} d\lambda^n(y))$

falls eines der Integrale definiert ist.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Vorlesung 20
22.01.2021

Bsp.:

1.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-||(x,y)||^2}$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy)dx = (\int\limits_{\mathbb{R}}^{-x^2} dx)^2$$

Für Polarkoordinaten $\Phi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ gilt:
$$\det D\Phi(r, \Theta) = r$$

Da $\{(x,0) \mid x \geq 0\}$ eine λ^2-Nullmenge ist, folgt aus der Transformationsformel:
$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 &= \int\limits_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} d\lambda^2(r,\Theta) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-r^2} r(\int\limits_0^{2\pi} d\Theta)dr \\
&= 2\pi \int\limits_0^\infty e^{-r^2} r dr \\
&= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_{r=0}^{r=\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$
$$\implies \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{x}$$

2. Spezialfall $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} C^1$-Diffeomorphismus ist Einschränkung einer linearen Abbildung.

$$\begin{aligned} &\implies \Phi(x) = Sx \text{ mit } S \in GL_n(\mathbb{R}) \\ &\implies D\Phi(x) = S \ \forall \ x \in \mathcal{U} \\ &\overset{Trafo}{\implies} \lambda^n(S(D)) = |\det S| \lambda^n(D) \text{ (siehe Satz ???)} \end{aligned}$$

$$\text{bzw. } \int_{\mathcal{V}} f(y) d\lambda^n(y) = |\det S| \int_{\mathcal{U}} f(Sx) d\lambda^n(x)$$

3. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(r, \Theta, \phi) = (r\sin(\Theta)\cos(\phi), r\sin(\Theta)\sin(\phi), r\cos(\Theta))$$

ist C^∞-Diffeomorphismus der offenen Mengen $\mathcal{U} = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ und $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}$
Inverse:
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \Theta = \arccos(\frac{z}{r})$
$\phi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{, für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{, für } y \leq 0 \end{cases}$
$D\Phi(r, \Theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\Theta)\cos(\phi) & r\cos(\Theta)\cos(\phi) & -r\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ \sin(\Theta)\sin(\phi) & r\cos(\Theta)\sin(\phi) & r\sin(\Theta)\cos(\phi) \\ \cos(\Theta) & -r\sin(\Theta) & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\implies \det D\Phi = r^2 \sin(\Theta) \\ E &:= [r_1, r_2] \times [\Theta_1, \Theta_2] \times [\phi_1, \phi_2] \end{aligned}$$

$$\lambda^3(\Phi(E)) = \int_{r1}^{r2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin(\Theta) d\phi d\Theta dr = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos(\Theta_1) - \cos(\Theta_2))(\phi_2 - \phi_1)$$

Bem.:
Ziel: Umrechnung von Differentialoperatoren
Begriff: $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} C^k$-Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ offen.
Gramsche Matrix $g \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n \times n}), g = (g_{i,j})$

$$g(x) = D\Phi(x)^\top D\Phi(x) \text{ bzw.} g_{i,j}(x) = < \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) >$$

Für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(g_{i,j}(r, \Theta, \phi))_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\Theta) \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:
$g(x)$ ist symmetrisch und strikt positiv definit, denn

$$< g(x)v, v > = < D\Phi(x)^\top D\Phi(x)v, v > = |D\Phi(x)v|^2 > 0$$

für $v \neq 0$ und $D\Phi(x) \in GL_n(\mathbb{R}) \implies g(x)$ ist invertierbar.

Wir setzen: $g^{ij}(x) = (g(x)^{-1})_{ij}$
... (Rest siehe Aufschrieb)