

Ziele:

1. Maßtheorie \rightarrow Lebesgue-Maß
(Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^n bestimmen)
2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 \rightarrow Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)
3. Version des Hauptsatzes \rightarrow Satz von Gauß

I Maße und messbare Funktionen

Notation:

Menge X , Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Def. I.1

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Algebra**, falls:

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar (X, \mathcal{A}) heißt dann **messbarer Raum**.

Bem.:

1. $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$
Denn: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X \setminus A_i \right)$
2. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
Denn: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

Bsp.:

1. $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra, $\{\emptyset, X\}$ ist σ -Algebra
2. später: Menge aller messbaren Mengen eines äußeren Maßes bildet eine σ -Algebra.

Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ -Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ -Algebra.

Beweis. $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von σ -Algebren bezüglich X .

Offensichtlich gilt: $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Sei $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \implies A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Analog für die abzählbare Vereinigung. □

Def. I.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von \mathcal{E} **erzeugte σ -Algebra**. Man nennt \mathcal{E} das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Bem.:

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Bsp.:

1. Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\} \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$
2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei das System der offenen Mengen. Die von \mathcal{O} erzeugte σ -Algebra heißt **Borel- σ -Algebra** $\mathbb{B}(\mathcal{O}) = \mathbb{B}$. Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.
3. Seien $X \neq \emptyset$, (Y, \mathcal{C}) messbarer Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und das Urbild von $C \subseteq Y$: $f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\}$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ eine σ -Algebra bzgl. X .

Begründung:

- $X \in f^{-1}(\mathcal{C})$, denn $f^{-1}(Y) = X$ und $Y \in \mathcal{C}$
 - $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \iff C \in \mathcal{C}$,
 $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
 - Erinnerung: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. Sei X eine beliebige Menge und $(\mathcal{E}_i)_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme, dann gilt:

$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Begründung:

- Klar: \subseteq
- Andererseits enthält $\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$ das System $\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$ und ist eine σ -Algebra
$$\implies \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$$

Notation:

$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit $-\infty < a < +\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Def. I.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

- (i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß
- (ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß
- (iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in \mathbb{R} konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Bsp.:

- s_k monoton $\implies s_k$ konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$
- $a_k \geq 0 \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \bar{\mathbb{R}}$
- Eine Menge $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann offen, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Fall $+\infty \in U$ (bzw. $-\infty \in U$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a, \infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$) ist.
- Die Borel- σ -Algebra $\bar{\mathbb{B}}$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ wird durch die offenen Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ erzeugt. Es gilt:
 $\bar{\mathbb{B}} = \{B \cup E \mid B \in \mathbb{B}, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$

Notation:

Addition:	+	$-\infty$	\mathbb{R}	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	/
	\mathbb{R}	$-\infty$	\mathbb{R}	$+\infty$
	$+\infty$	/	$+\infty$	$+\infty$

$\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := +\infty$ konsistent mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gilt $A \subseteq B \implies \sup A < \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$

Def. I.5

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß** auf \mathcal{A} , falls:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) für beliebige paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt **Maßraum**.

Bem.:

1. Für endlich viele paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, \dots$ setzt: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
2. Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{A}$ und **σ -endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Bsp.:

1. Sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, für $x \in X$ sei $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
(**Dirac-Maß**)

- Es gilt $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$, $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(X) = 1$.
- Sei $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gegeben mit A_k paarweise disjunkt und $x \in A \implies x \in A_k$ für genau ein $k \in \mathbb{N} \implies \sigma$ -Additivität.
- Für $x \notin A$ gilt sowieso $\delta_x A = 0$

\implies Das Dirac-Maß ist ein Wahrscheinlichkeits-Maß

2. **Zählmaß:** X beliebige Menge

Vorlesung 2

06.11.2020

$$\text{card} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\text{card}(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ endlich und paarweise disjunkt ist die σ -Additivität klar.

Sei A unendlich und $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

- (a) nur endlich viele A_k nicht-trivial
 $\implies \exists k_0 : A_{k_0}$ ist unendlich
- (b) abzählbar viele A_k sind nicht-trivial \implies Behauptung

\implies Behauptung

Zählmaß ist σ -endlich $\Leftrightarrow X$ ist abzählbar

Zählmaß ist endlich $\Leftrightarrow X$ ist endlich

Bsp.:

X beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ -Algebra, $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$

Satz I.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

- (i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ folgt: $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- (ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

$$(iii) \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Bem.:

1. (i) Stetigkeit von unten
(ii) Stetigkeit von oben
(iii) σ -Subadditivität von μ
2. Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.

Begründung:

$$A_k = k, k+1, \dots \subseteq \mathbb{N}$$

$$\text{card}(A_k) = \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Aber: } \text{card}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \text{card}(\emptyset) = 0$$

Beweis.

$$(i) \tilde{A}_1 := A_1, \tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \geq 2$$

\tilde{A}_i sind paarweise disjunkt.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k \mu(\tilde{A}_i)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

$$(ii) A'_k := A_1 \setminus A_k \implies A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq \dots$$

$$\text{Es gilt: } \mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)$$

$$\implies \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A'_k) \stackrel{(i)}{=} \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A'_k\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$(iii) \text{ Es genügt, die Folge } B_1 = A_1, B_i \stackrel{i \geq 2}{=} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \text{ zu betrachten.}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \text{ und } (B_i) \text{ ist paarweise disjunkt.}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

□

Def. I.8

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum.

Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ -Nullmenge**. Das System aller μ -Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mu)$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.:

Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \quad \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen:

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum und \mathcal{T}_μ sei das System aller Mengen $N \subseteq X$ für die keine μ -Nullmenge $B \in \mathcal{N}(\mu)$ existiert mit $N \subseteq B$. Es gilt:

$$\mu \text{ vollständig} \Leftrightarrow \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$$

Definiere auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$ die Mengenfunktion $\bar{\mu}$ durch $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$

Bem.:

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit $A, B \in \mathcal{A}, P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$

Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$

$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf \mathcal{A} übereinstimmt.

Beweis. Offensichtlich:

1. $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\mu$
2. \mathcal{T}_μ ist abgeschlossen unter Abz. \cup

\mathcal{A} ist auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

Sei $x \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$. Für $E \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ex. ein $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$ und $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq B$ mit $\mu(B) = 0$, sodass $E = A \cup N$

$\implies B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$

$\implies X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ist σ -Algebra

$\bar{\mu}$ ist Maß (ist klar)

Sei $M \subseteq B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$ und $\bar{\mu}(B) = \mu(A) = 0$

Aus $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_{mu} \cup \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mu}$ ist vollständig. □

Satz I.10

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei (X, \mathcal{B}, ν) ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} folgt: $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu) \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu$
 ν vollständig $\implies \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{B} \implies \bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$
Da $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ vollständig durch μ auf \mathcal{A} bestimmt ist, folgt sofort $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, da $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . \square

Def. I.11

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **\mathcal{A} - \mathcal{C} -messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Notation:

Falls \mathcal{A}, \mathcal{C} klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar.

Bsp.:

1. $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ beliebige messbare Räume.
Sei $y_0 \in Y$ und $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_0 \ \forall x \in X$
 $\implies f$ ist \mathcal{A} - \mathcal{C} -messbar
2. $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \subseteq X \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
 \mathbb{R} wird versehen mit Borel- σ -Algebra \mathcal{B} . Für (X, \mathcal{A}) messbarer Raum gilt:
 χ_E \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar $\Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$
3. Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.
 $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C}), (Z, \mathcal{D})$ messbare Räume.
 $f : X \rightarrow Y$ \mathcal{A} - \mathcal{C} -messbar
 $g : Y \rightarrow Z$ \mathcal{C} - \mathcal{D} -messbar
 $\implies g \circ f : X \rightarrow Z$ ist \mathcal{A} - \mathcal{D} -messbar, denn:
 $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist \mathcal{A} - \mathcal{C} -messbar.

Beweis. Es gilt: $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \stackrel{s.Blatt 1}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ \square

Bsp.:

1. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist \mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n -messbar
(man sagt: f ist **borel-messbar**).
Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)
2. Sei $X \neq \emptyset$ Menge, (Y, \mathcal{C}) messbarer Raum, $f : X \rightarrow Y$ Abbildung.
Nach Bsp. aus 1. Vorlesung ist $f^{-1}(\mathcal{C})$ σ -Algebra.
Offensichtlich ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ -Algebra und f messbar.

Notation:

Multiplikation und Division in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$s * (\pm\infty) = (\pm\infty) * s = \begin{cases} \pm\infty & , \text{ falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & , \text{ falls } s = 0 \\ \mp\infty & , \text{ falls } s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} = 0 \text{ für } t = \pm\infty$$

Def. I.13

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist \mathcal{A} - $\bar{\mathbb{B}}^1$ -messbar
- (ii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$
- (iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$

Beweis. $\bar{\mathbb{B}}^1$ wird erzeugt durch die offenen Mengen und $\pm\infty \implies (i) \Leftrightarrow (ii)$

(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) denn:

$$(iv) \implies (iii): f \leq s = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < s + \frac{1}{k}\}$$

$$(iii) \implies (vi): \{f > s\} = D \setminus \{f \leq s\}$$

$$(vi) \implies (v): \{f \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > s - \frac{1}{k}\}$$

$$(v) \implies (iv): \{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}$$

$$(ii) \implies (vi), \text{ denn: } \{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$$

Für ein offenes Intervall (a, b) gilt: $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$

Eine der Aussagen (und damit alle) (iii) - (vi) gelte.

Mann kann zeigen: Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ schreiben (siehe Blatt 2).

$$\begin{aligned} \implies f^{-1}(\mathcal{U}) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A} \\ f^{-1}(\{\infty\}) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > k\} \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < -k\} \in \mathcal{A} \implies \text{(ii)} \quad \square \end{aligned}$$

Bem.:

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Vorlesung 3
09.11.20

Lemma I.15

Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus \mathcal{A} .

Beweis. Es gilt: $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < g\} \cap \{g > q\}) \in \mathcal{A}$, denn:

$\{f < g\}, \{g > q\} \in \mathcal{A}$ (s. Lemma I.14)

$$\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A} \quad \square$$

Bem.:

Im folgenden Satz sind die Grenzfunktionen paarweise definiert, z.B.:

$\liminf f_k : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist definiert durch: $(\liminf f_k)(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$

Satz I.16

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Folge von \mathcal{A} -messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen \mathcal{A} -messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}, \text{ denn nach Lemma I.14 ist } \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$$

$$\{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \leq s\} \in \mathcal{A}$$

$\xRightarrow{\text{Lemma I.14}} \inf f_k, \sup f_k$ sind \mathcal{A} -messbar

$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{l \geq k} f_l)$ ist \mathcal{A} -messbar.

$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{l \geq k} f_l)$ ist \mathcal{A} -messbar. \square

Notation:

Seien $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, dann sind $f^\pm : D \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch:

$$f^+ := \max(f, 0) \geq 0 \text{ und } f^- := \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \geq 0$$

$$\implies f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

Satz I.17

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g, \alpha f, f^{\pm}, \max(f, g), \min(f, g), |f|, fg, \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in \mathcal{A} liegen \mathcal{A} -messbar.

Beweis.

1. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

- $\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r + s < t}} \{f < r\} \cap \{g < s\} \in \mathcal{A}$
 $\{-f < t\} = \{f > -t\} \in \mathcal{A}$
 $\implies f + g, -f$ \mathcal{A} -messbar. Ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$
- Für $\mathcal{C} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{C} \circ f$ messbar, denn für $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})$ offen und damit $(\mathcal{C} \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{A}$
 $\implies f^{\pm}$ sind \mathcal{A} -messbar (wähle $\mathcal{C}(s) = \max(\pm s, 0)$)
 $\implies |f| = f^{+} + f^{-}$,
 $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und
 $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ sind \mathcal{A} -messbar
- $f^2 = \mathcal{C} \circ f$ mit $\mathcal{C}(s) = s^2$ und
 $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ \mathcal{A} -messbar
- $\frac{1}{g}$ ist \mathcal{A} -messbar, denn:

$$\left\{ \frac{1}{g} < s \right\} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{s} < g < 0 \right\} & , s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{2}\} & s > 0 \end{cases}$$

2. f, g beliebig

$$\text{Betrachte } f_k(x) = \begin{cases} k & , f(x) \geq k \\ -k & , f(x) \leq -k \in \mathbb{R} \\ f(x) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Analog $g_k(x)$. f_k, g_k sind \mathcal{A} -messbar $\forall k$

Punktweise gilt: $f_k(x) \rightarrow f(x), g_k(x) \rightarrow g(x)$

Ebenso: $f_k + g_k \rightarrow f + g, \alpha f_k \rightarrow \alpha f, \dots, f_k g_k \rightarrow fg$ punktweise.

Der Allgemeine Fall folgt aus 1. und Satz I.16. □

Notation:

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ -fast alle $x \in M \in \mathcal{A}$** oder **μ -fast überall** auf M , falls es eine μ -Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu \mathcal{A} gehört.

Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „ $f(x) \leq g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.

Eine Funktion h ist „ μ -fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.

Bsp.:

Eine Folge von Funktionen $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ -fast überall gegen $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in D \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

Ziel:

Messbarkeit für Funktionen, die nur μ -fast überall definiert sind.

Def. I.18

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ -messbar (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und $f|_D$ -messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D \mid A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

Bem.:

1. Unterscheiden zwischen \mathcal{A} -messbaren Funktionen (auf X), die überall auf X definiert sind, und μ -messbaren Funktionen (auf X), die in der Regel nur μ -fast überall definiert sind.
2. Analog zu \mathcal{A} -Messbarkeit verwenden wir μ -Messbarkeit auf für Funktionen, die nur auf Teilmengen definiert sind:
Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum, $D \in \mathcal{A}$. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ -messbar** (auf D), wenn $E \subseteq D$ in \mathcal{A} liegt mit $\mu(D \setminus E) = 0$ und $f|_E$ -messbar.
3. „ $f = g$ μ -fast überall“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen
4. Sei $D \in \mathcal{A}$, $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -messbar. Dann ex. eine \mathcal{A} -messbare Funktion $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D , z.B.: $g = \begin{cases} f & , \text{ auf } D \\ 0 & , \text{ auf } X \setminus D \end{cases}$
Somit übertragen sich die Sätze I.16 und I.17 auf μ -messbare Funktionen.

Lemma I.19

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum. f μ -messbar auf X . Dann ist auch jede Funktion \tilde{f} mit $\tilde{f} = f$ μ -fast überall μ -messbar.

Beweis. Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$ und sei \tilde{f} auf $\tilde{D} \subseteq X$ definiert.

Vor. $\implies \exists$ Nullmenge N mit $X \setminus N \subseteq \cap \tilde{D}$ und $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in X \setminus N$

$\implies X \setminus \tilde{D} \subseteq N$

$\xRightarrow{\mu\text{-vollständig}} X \setminus \tilde{D} \in \mathcal{A} \implies \tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Weiter gilt:

$$\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} = \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) \mid \tilde{f}(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \cap (X \setminus N) \mid f(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \mid f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N \mid f(x) < s\}$$

$$=: A \cup B$$

Da f μ -messbar ist, folgt, dass $B \in \mathcal{A}$

μ -vollständig $\implies A \in \mathcal{A} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A} \forall s$

Weiter ist $\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \subseteq \tilde{D} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}|_{\tilde{D}}$

$\xLeftrightarrow{\text{Lemma I.14}} \tilde{f}$ μ -messbar □

Satz I.20

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ -messbar. Falls f_k punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ -messbar.

Beweis. Sei f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert. Dann sind alle $f_k, k \in \mathbb{N}$, auf $D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$ definiert und $X \setminus D$ ist μ -Nullmenge $E := \{x \in D \mid \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \neq f(x)\}$ und betrachte

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k \xRightarrow{\text{Satz I.16}} \tilde{f}$ ist \mathcal{A} -messbar

Vor.: $(X \setminus D) \cup E$ ist μ -Nullmenge $\xRightarrow{\text{Lemma I.14}} f$ ist μ -messbar. □

Satz I.21 (Egorov)

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ -messbare, μ -fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

- (i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf B

Beweis. $E := \{x \in D \mid f_n(x), f(x) \text{ sind endlich und } f_n(x) \rightarrow f(x)\}$

Vor. $\implies \exists \mu$ -Nullmenge N mit $D \setminus E \subseteq N$

O.B. $E = D$ (sonst ersetze D durch $D \setminus N$)

Sei $C_{i,j} := \bigcup_{n=j}^{\infty} \{x \in D \mid |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$

Satz I.17 $\implies C_{i,j} \in \mathcal{A}$ und $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}$

$\mu(D) < \infty \xrightarrow{\text{Satz I.7}} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_{i,j}\right) = 0$, denn $f_n \rightarrow f$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben

$\implies \forall i \in \mathbb{N} \exists N(i) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon \cdot 2^{-i}$

Setze $B := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$ und $\mu(D \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)}\right) \stackrel{\text{Satz I.7}}{\leq} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon$

$\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in B \forall n > N(i)$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \implies f_n \rightarrow f$ auf B

□

II Äußere Maße

Def. II.1

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X , falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Bem.:

1. Die Begriffe σ -additiv, σ -subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ -fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall \mathcal{A} durch $\mathcal{P}(X)$)
2. Ein äußeres Maß ist monoton, σ -subadditiv und insbesondere endlich subadditiv (d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$)

Def. II.2

Sei μ äußeres Maß auf X . Die Menge $A \subseteq X$ heißt **μ -messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ -messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

Bem.:

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) = \mu(S) \quad \forall S \subseteq X$

Bsp.:

Jedes auf $\mathcal{P}(X)$ definierte Maß ist ein äußeres Maß (Satz I.7), also sind das DiracMaß und das Zählmaß äußere Maße.

Satz II.3

Sei \mathcal{Q} ein System von Teilmengen einer Menge X , welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf \mathcal{Q} mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion $\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right\}$.

Dann ist μ ein äußeres Maß. ($\inf \emptyset = \infty$)

Beweis. Mit $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{Q}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$.

Sei $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ mit $E, E_i \subseteq X$ und $\mu(E_i) < \infty$.

z.z.: $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$

Wähle Überdeckungen $E_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$, so dass zu $\epsilon > 0$ gegeben gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\implies E \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} P_{i,j} \text{ und damit } \mu(E) \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) + \epsilon$$

Mit $\epsilon > 0$ folgt $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$ □

Satz II.4

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ äußeres Maß auf X . Für $M \subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu_{\perp M} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \mu_{\perp M}(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu_{\perp M}$ auf X , welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.

Es gilt:

$$A \text{ } \mu\text{-messbar} \implies A \text{ } \mu_{\perp M}\text{-messbar}$$

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu_{\perp M}$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subseteq X$ μ -messbar und $S \subseteq X$ beliebig:

$$\begin{aligned} \mu_{\perp M}(S) &= \mu(S \cap M) \\ &\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\ &= \mu_{\perp M}(S \cap A) + \mu_{\perp M}(S \setminus A) \end{aligned}$$

\implies Behauptung □

Satz II.5

μ äußeres Maß auf X . Dann gilt:

$$\begin{aligned} N \text{ } \mu\text{-Nullmenge} &\implies N \text{ } \mu\text{-messbar} \\ N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} &\implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \text{ } \mu\text{-Nullmenge} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subseteq X$ folgt aus Monotonie:

$$\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0, \mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N) \implies N \text{ } \mu\text{-messbar}$$

Zweite Behauptung folgt aus σ -Subadditivität. \square

Bem.:

$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ -messbar sind.

Bsp.:

Auf X bel. definiere: $\beta(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$ β ist äußeres Maß.

Es sind nur \emptyset und X β -messbar, denn für $X = S$ folgt aus der Annahme, dass A β -messbar ist: $1 \geq \beta(A) + \beta(X \setminus A)$

Vorlesung 5
16.11.20

Lemma II.6

Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, \dots, k$, paarweise disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$

Beweis. $k = 1$: trivial

$k \geq 2$: A_k μ -messbar

$$\begin{aligned} \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) &= \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_k) + \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \setminus A_k) \\ &= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) \end{aligned}$$

\square

Satz II.7

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ -Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Notation: Schreibe \mathcal{M} statt $\mathcal{M}(\mu)$

Es gilt:

- $x \in \mathcal{M}$, denn: $\forall S \subseteq X$ ist:

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$$
- Sei $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$$

Als nächstes zeigen wir:

$A, B \in \mathcal{M} \implies A \cap B \in \mathcal{M} \forall S \subseteq X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \\ \mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A) \end{aligned}$$

$$\implies \mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$$

$\implies A \cup B \in \mathcal{M}$, denn:

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$$

Per Induktion:

\mathcal{M} ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen.

Jetzt: μ ist σ -additiv auf \mathcal{M} .

Seien $A_j, j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $A_j \in \mathcal{M} \forall j \in \mathbb{N}$

Wähle $S = A_1 \cup A_2$ und benutze $A_1 \in \mathcal{M}$

$$\implies \mu(S) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad (= \mu(S \cap A_1) + \mu(S \setminus A_1))$$

Induktion: Dasselbe gilt für endliche disjunkte Vereinigungen.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \end{aligned}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \implies \text{Behauptung}$$

Als letztes: \mathcal{M} ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen

Seien $A_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$. O.B. seien A_j paarweise disjunkt, sonst betrachte

$$\tilde{A}_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$$

Für $S \subseteq X$ folgt mit $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i) \\ &\stackrel{\text{Lemma II.6}}{\geq} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lasse $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(S) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S \cap A_i)\right) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &= \mu(S \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Vollständigkeit von μ : siehe Lemma II.5 □

Lemma II.8

μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.

Dann gelten:

- i) Aus $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$ folgt $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- ii) Aus $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

Beweis. Folgt aus Satz I.7 und Satz II.7 □

Def. II.9

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **U-stabil** (bzw. **∩-stabil**, **\-stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

Bem.:

U-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso ∩-stabil.

Def. II.10

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X , falls:

- i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

\mathcal{R} heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Bsp.:

- i) Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ ein Ring, aber für $A \neq X$ keine Algebra.
- ii) System aller endlichen Teilmengen einer bel. Menge ist ein Ring.
- iii) Ebenso System aller höchstens abzählbaren Teilmengen.

Bem.:

Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$

Ringe sind \cup -stabil, \cap -stabil, \setminus -stabil

Def. II.11

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf \mathcal{R} , falls:

- i) $\lambda(\emptyset) = 0$
- ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$$\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

Bem.:

σ -subadditiv, subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Bsp.:

- i) \mathcal{R} Ring über X . $\lambda(A) = \begin{cases} 0 & H = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- ii) \mathcal{R} sei Ring der endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge X und $\lambda = \text{card}|_{\mathcal{R}}$ ist Prämaß
- iii) Alle Maße sind Prämaße. Insbesondere äußere Maße eingeschränkt auf die messbaren Mengen.

Def. II.12

λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf \mathcal{A}) heißt **Fortsetzung** von λ , falls gilt:

- i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$
- ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ -messbar

Satz II.13 (Caratheodory-Fortsetzung)

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus \mathcal{R} konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ .

μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ .

Beweis.

- i) $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$

Wir haben $\mu(A) \leq \lambda(A)$ aus Def. mit $A_1 = A, A_2 = \dots = \emptyset$

Für $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht es zz, dass:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ mit } A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

Betrachte paarweise disjunkte Mengen $B_i = (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$

$$\implies \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

- ii) Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ -messbar.

Sei $A \in \mathcal{R}, S \subseteq X$ bel. mit $\mu(S) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, sodass $S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap A)$ und $S \setminus A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A)$

$$\begin{aligned} \implies \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \epsilon \end{aligned}$$

Lasse $\epsilon \downarrow 0 \implies A \in \mathcal{M}(\mu)$

Für $\mu(S) = \infty$ ist das trivial.

□

Lemma II.14

μ sei Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem Ring \mathcal{R} über X . Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf \mathcal{R} , dann gilt $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$:

$$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

Beweis. $\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{R}$

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(P_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i)$$

Bilde Infimum über alle solche Überdeckungen

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

□