Vorlesung 1
02.11.2020

Ziele:

1. Maßtheorie $\rightarrow$ Lebesgue-Maß
   (Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bestimmen)

2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
   $\rightarrow$ Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)

3. Version des Hauptsatzes $\rightarrow$ Satz von Gauß

I Maße und messbare Funktionen

Notation:
Menge X, Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Def. I.1
Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt dann **messbarer Raum**.

Bem.:

1. $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$
   Denn: $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus (\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X \setminus A_i)$
2. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
   Denn: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

Bsp.:

1. $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra, $\{\emptyset, X\}$ ist σ-Algebra
2. später: Menge aller messbaren Mengen eines äußeren Maßes bildet eine σ-Algebra.

Satz I.2
Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Beweis. $(A_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von σ-Algebren bezüglich X.
Offensichtlich gilt: $X \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$
Sei $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i \implies A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies X \setminus A \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$
Analog für die abzählbare Vereinigung. $\square$

Def. I.3
Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A}|\mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**. Man nennt $\mathcal{E}$ das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Bem.:
Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Bsp.:

1. Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\} \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$
2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei das System der offenen Mengen. Die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borel-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $\mathbb{B}(\mathcal{O}) = \mathbb{B}$. Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.
3. Seien $X \neq \emptyset$, $(Y, \mathcal{C})$ messbarer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und das Urbild von $C \subseteq Y$: $f^{-1}(C) := \{x \in X | f(x) \in C\}$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C)|C \in \mathcal{C}\}$ eine σ-Algebra bzgl. X.
   Begründung:
   - $X \in f^{-1}(\mathcal{C})$, denn $f^{-1}(Y) = X$ und $Y \in \mathcal{C}$
   - $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \iff C \in \mathcal{C}$,
     $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
   - Erinnerung: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. Sei X eine beliebige Menge und $(E)_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme, dann gilt: $\sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i) = \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i))$
   Begründung:
   - Klar: $\subseteq$
   - Andererseits enthält $\sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i)$ das System $\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$ und ist eine σ-Algebra $\implies \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)) \subseteq \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i)$

Notation:
$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit $-\infty < a < +\infty,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Def. I.4
Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

(i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß

(ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß

(iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Bsp.:

- s_k monoton $\implies$ s_k konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$
- $a_k \geq 0 \implies \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k \in \bar{\mathbb{R}}$
- Eine Menge $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann offen, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Fall $+\infty \in U$ (bzw. $-\infty \in U$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a, \infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$) ist.
- Die Borel-σ-Algebra $\bar{\mathbb{B}}$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ wird durch die offenen Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ erzeugt. Es gilt: $\bar{\mathbb{B}} = \{B \cup E | B \in \mathbb{B}, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$

Notation:

Addition:

$+$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	/
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$+\infty$	/	$+\infty$	$+\infty$

$\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := +\infty$ konsistent mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gilt $A \subseteq B \implies \sup A < \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$

Def. I.5
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für beliebige paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ (σ-Additivität)

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bem.:

1. Für endlich viele paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, ...$ setzt: $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
2. Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty\ \forall A \in \mathcal{A}$ und **σ-endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Bsp.:

1. Sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, für $x \in X$ sei $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

   (**Dirac-Maß**)

   - Es gilt $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$, $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(X) = 1$.
   - Sei $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gegeben mit A_k paarweiße disjunkt und $x \in A \implies x \in A_k$ für genau ein $k \in \mathbb{N} \implies$ σ-Additivität.
   - Für $x \notin A$ gilt sowieso $\delta_x A = 0$

   $\implies$ Das Dirac-Maß ist ein Wahrscheinlichkeits-Maß

2. **Zählmaß:** X beliebige Menge

   Vorlesung 2
   06.11.2020

   $card : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$
   $card(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von A}, & \text{falls A endlich} \\ \infty, sonst \end{cases}$
   Für $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ endlich und paarweiße disjunkt ist die σ-Additivität klar.

   Sei A unendlich und $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

   (a) nur endlich viele A_k nicht-trivial
   $\implies \exists k_0 : A_{k_0}$ ist unendlich
   (b) abzählbar viele A_k sind nicht-trivial $\implies$ Behauptung

   $\implies$ Behauptung

   Zählmaß ist σ-endlich $\Leftrightarrow X$ ist abzählbar
   Zählmaß ist endlich $\Leftrightarrow X$ ist endlich

Bsp.:
X beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$

Satz I.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ folgt: $\mu(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bem.:

1. (i) Stetigkeit von unten
   (ii) Stetigkeit von oben
   (iii) σ-Subadditivität von μ
2. Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
   Begründung:
   $A_k = k, k+1, ... \subseteq \mathbb{N}$
   $card(A_k) = \infty\ \forall k \in \mathbb{N}$
   Aber: $card(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = card(\emptyset) = 0$

Beweis.

(i) $\tilde{A_1} := A_1,\ \tilde{A_k} := A_k \setminus A_{k-1},\ k \geq 2$
$\tilde{A_i}$ sind paarweiße disjunkt.
$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \tilde{A_i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$
$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \tilde{A_i}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{A_i}) = \lim_{k\to\infty} (\sum_{i=1}^{k} \mu(\tilde{A_i})) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$

(ii) $A'_k := A_1 \setminus A_k \implies A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq ...$
Es gilt: $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)$
$\implies \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) \overset{(i)}{=} \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_i) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}})$
$= \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$

(iii) Es genügt, die Folge $B_1 = A_1,\ B_i \overset{i\geq 2}{=} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ zu betrachten.
$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ und (B_i) ist paarweiße disjunkt.
$\implies \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

□

Def. I.8
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **$\boldsymbol{\mu}$-Nullmenge**. Das System aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu)}$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \qquad \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.:
Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)\ \mu(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $\mathcal{T}_\mu$ sei das System aller Mengen $N \subseteq X$ für die keine μ-Nullmenge $B \in \mathcal{N}(\mu)$ existiert mit $N \subseteq B$. Es gilt:

$$\mu \text{ vollständig } \Leftrightarrow \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$$

Definiere auf $\bar{A}_\mu := \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$ die Mengenfunktion $\bar{\mu}$ durch $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$

Bem.:
$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit $A, B \in \mathcal{A},\ P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 :$
$P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$
Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$
$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Beweis. Offensichtlich:

1. $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\mu$
2. $\mathcal{T}_\mu$ ist abgeschlossen unter Abz. $\bigcup$

$\mathcal{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung
$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung
Sei $x \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$. Für $E \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ex. ein $A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{T}_\mu$ und $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq B$ mit $\mu(B) = 0$, sodass $E = A \cup N$
$\implies B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$
$\implies X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$
$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ist σ-Algebra
$\bar{\mu}$ ist Maß (ist klar)
Sei $M \subseteq B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$ und $\bar{\mu}(B) = \mu(A) = 0$
Aus $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_{mu} \cup \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$
$\implies \bar{\mu}$ ist vollständig. □

Satz I.10
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$ folgt: $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu) \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\mu$
ν vollständig $\implies \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{B} \implies \bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$
Da $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ vollständig durch μ auf $\mathcal{A}$ bestimmt ist, folgt sofort $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, da $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. □

Def. I.11
$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **$\mathcal{A}-\mathcal{C}-$messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Notation:
Falls $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar.

Bsp.:

1. $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ beliebige messbare Räume.
   Sei $y_0 \in Y$ und $f : X \to Y,\ f(x) = y_0\ \forall x \in X$
   $\implies f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}-$messbar
2. $\chi_R : X \to \mathbb{R}, \chi_R(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in E \subseteq X \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$
   $\mathbb{R}$ wird versehen mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Für $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum gilt:
   χ_R $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar $\Leftrightarrow$ $E \in \mathcal{A}$
3. Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.
   $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C}), (Z, \mathcal{D})$ messbare Räume.
   $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar
   $g : Y \to Z$ $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$-messbar
   $\implies g \circ f : X \to Z$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{D}$-messbar, denn:
   $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Lemma I.12
$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar.

Beweis. Es gilt: $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \overset{s.Blatt1}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ □

Bsp.:

1. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{B}^n$-$\mathbb{B}^n$-messbar
   (man sagt: f ist **borel-messbar**).
   Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)
2. Sei $X \neq \emptyset$ Menge, $(Y, \mathcal{C})$ messbarer Raum, $f : X \to Y$ Abbildung.
   Nach Bsp. aus 1. Vorlesung ist $f^{-1}(\mathcal{C})$ σ-Algebra.
   Offensichtlich ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra und f messbar.

Notation:
Multiplikation und Division in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$s * (\pm\infty) = (\pm\infty) * s = \begin{cases} \pm\infty & \text{, falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & \text{, falls } s = 0 \\ \mp\infty & \text{, falls } s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$\frac{1}{t} = 0$ für $t = \pm\infty$

Def. I.13
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.
Eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathbb{B}}^1$-messbar

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

Beweis. $\bar{\mathbb{B}}^1$ wird erzeugt durch die offenen Mengen und $\pm\infty \implies$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) denn:
(iv) $\implies$ (iii): $f \leq s = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \{f < s + \frac{1}{k}\}$
(iii) $\implies$ (vi): $\{f > s\} = D \setminus \{f \leq s\}$
(vi) $\implies$ (v): $\{f \geq \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \{f > s - \frac{1}{k}\}\}$
(v) $\implies$ (iv): $\{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}$

(ii) $\implies$ (vi), denn: $\{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$

Für ein offenes Intervall (a, b) gilt: $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$
Eine der Aussagen (und damit alle) (iii) - (vi) gelte.
Mann kann zeigen: Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$ von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ schreiben (siehe Blatt 2).

$\implies f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$
$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f > k\} \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f < -k\} \in \mathcal{A} \quad \implies$ (ii) □

Bem.:
In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:
$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ s>q}} \{f > q\}$

Vorlesung 3
09.11.20

Lemma I.15
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt: $\{f < g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f < g\} \cap \{g > q\}) \in \mathcal{A}$, denn:
$\{f < g\}, \{g > q\} \in \mathcal{A}$ (s. Lemma I.14)
$\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A}$ □

Bem.:
Im folgenden Satz sind die Grenzfunktionen paarweiße definiert, z.B.:
$\liminf f_x : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist definiert durch: $(\liminf_{k\to\infty} f_k)(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$

Satz I.16
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:
$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$, denn nach Lemma I.14 ist $\{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$
$\{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \leq s\} \in \mathcal{A}$
$\overset{\text{Lemma I.14}}{\implies} \inf f_k, \sup f_k$ sind $\mathcal{A}$-messbar
$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\inf_{l\geq k} f_l)$ ist $\mathcal{A}$-messbar.
$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} (\sup_{l\geq k} f_l)$ ist $\mathcal{A}$-messbar. □

Notation:
Seien $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$, dann sind $f^{\pm} : D \to [0, \infty]$ definiert durch:
$f^+ := max(f, 0) \geq 0$ und $f^- := max(-f, 0) = -min(f, 0) \geq 0$
$\implies f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-$

Satz I.17
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis.

1. $\underline{f, g : D \to \mathbb{R}}$
   - $\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s<t}} \{f < r\} \cap \{g < s\} \in \mathcal{A}$
     $\{-f < t\} = \{f > -t\} \in \mathcal{A}$
     $\implies f + g, -f \mathcal{A}$-messbar. Ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Für $\mathcal{C} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{C} \circ f$ messbar, denn für $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})$ offen und damit $(\mathcal{C} \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{A}$
     $\implies f^{\pm}$ sind $\mathcal{A}$-messbar (wähle $\mathcal{C}(s)) = max(\pm s, 0))$
     $\implies |f| = f^{+} + f^{-}$,
     $max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und
     $min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ sind $\mathcal{A}$-messbar
   - $f^2 = \mathcal{C} \circ f$ mit $\mathcal{C}(s) = s^2$ und
     $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ $\mathcal{A}$-messbar
   - $\frac{1}{g}$ ist $\mathcal{A}$-messbar, denn:
     $$\{\frac{1}{g} < s\} = \begin{cases} \{\frac{1}{s} < g < 0\} & , s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{2}\} & s > 0 \end{cases}$$
2. $\underline{f, g \text{ beliebig}}$
   Betrachte $f_k(x) = \begin{cases} k & , f(x) \geq k \\ -k & , f(x) \leq -k \in \mathbb{R} \\ f(x) & \text{, sonst} \end{cases}$
   Analog $g_k(x)$. f_k, g_k sind $\mathcal{A}$-messbar $\forall k$
   Punktweise gilt: $f_k(x) \to f(x), g_k(x) \to g(x)$
   Ebenso: $f_k + g_k \to f + g, \alpha f_k \to \alpha f, ..., f_k g_k \to fg$ punktweise.

Der Allgemeine Fall folgt aus 1. und Satz I.16. □

Notation:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ-fast alle** $x \in M \in \mathcal{A}$ oder **μ-fast überall** auf M, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört.
Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$", dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.
Eine Funktion h ist „μ-fast überall auf X definiert", wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.

Bsp.:
Eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ-fast überall gegen $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in D \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$

Ziel:
Messbarkeit für Funktionen, die nur μ-fast überall definiert sind.

Def. I.18
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_{\mathcal{D}}$-messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

Bem.:

1. Unterscheiden zwischen $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen (auf X), die überall auf X definiert sind, und μ-messbaren Funktionen (auf X), die in der Regel nur μ-fast überall definiert sind.

2. Analog zu $\mathcal{A}$-Messbarkeit verwenden wir μ-Messbarkeit auf für Funktionen, die nur auf Teilmengen definiert sind:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$. $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ-messbar** (auf D), wenn $E \subseteq D$ in $\mathcal{A}$ liegt mit $\mu(D \setminus E) = 0$ und f $\mathcal{A}|_E$-messbar.

3. „$f = g\mu$-fast überall"ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen

4. Sei $D \in \mathcal{A}, f : D \to \bar{\mathbb{R}}\mu$-messbar. Dann ex. eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D, z.B.: $g = \begin{cases} f & \text{, auf } D \\ 0 & \text{, auf } X \setminus D \end{cases}$
Somit übertragen sich die Sätze I.16 und I.17 auf μ-messbare Funktionen.

Vorlesung 4
13.11.20

Lemma I.19
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall μ-messbar.

Beweis. Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$ und sei $\tilde{f}$ auf $\tilde{D} \subseteq X$ definiert.
Vor. $\implies \exists$ Nullmenge N mit $X \setminus N \subseteq \cap\tilde{D}$ und $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in X \setminus N$
$\implies X \setminus \tilde{D} \subseteq N$
$\overset{\mu\text{-vollständig}}{\implies} X \setminus \tilde{D} \in \mathcal{A} \implies \tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Weiter gilt:
$\{x \in \tilde{D} | \tilde{f}(x) < s\} = \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) |\ \tilde{f}(x) < s\}$
$= \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \cap (X \setminus N) |\ f(x) < s\}$
$= \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D |\ f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N |\ f(x) < s\}$
$=: A \cup B$
Da f μ-messbar ist, folgt, dass $B \in \mathcal{A}$
μ-vollständig $\implies A \in \mathcal{A} \implies \{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}\ \forall s$

Weiter ist $\{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \subseteq \tilde{D} \implies \{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}|_{\tilde{D}}$
$\overset{\text{Lemma I.14}}{\Leftrightarrow} \tilde{f}$ μ-messbar ☐

Satz I.20
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.

Beweis. Sei f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert. Dann sind alle f_k, $k \in \mathbb{N}$, auf $D := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} D_k$ definiert und $X \setminus D$ ist μ-Nullmenge $E := \{x \in D |\ \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) \neq f(x)\}$ und betrachte

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & ,\forall x \in D \setminus E \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases},\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ,\forall x \in D \setminus E \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{f} = \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{f}_k \overset{\text{Satz I.16}}{\implies} \tilde{f}$ ist $\mathcal{A}$-messbar
Vor.: $(X \setminus D) \cup E$ ist μ-Nullmenge $\overset{\text{Lemma I.14}}{\implies} f$ ist μ-messbar. ☐

Satz I.21 (Egorov)
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

(i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \to f$ gleichmäßig auf B

Beweis. $E := \{x \in D|\ f_n(x), f(x)$ sind endlich und $f_n(x) \to f(x)\}$
Vor. $\implies \exists\ \mu$-Nullmenge N mit $D \setminus E \subseteq N$
O.B. $E = D$ (sonst erstetze D durch $D \setminus N$)
Sei $C_{i,j} := \bigcup\limits_{n=j}^{\infty} \{x \in D|\ |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\},\ i, j \in \mathbb{N}$
Satz I.17 $\implies C_{i,j} \in \mathcal{A}$ und $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j}\ \forall i, j \in \mathbb{N}$
$\mu(D) < \infty \overset{\text{Satz I.7}}{\implies} \lim\limits_{j\to\infty} \mu(C_{i,j}) = \mu(\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j}) = 0$, denn $f_n \to f$
Sei $\epsilon > 0$ gegeben
$\implies \forall i \in \mathbb{N}\ \exists N(i) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon * 2^{-i}$
Setze $B := D \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$ und $\mu(D \setminus B) = \mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} C_{i,N(i)}) \overset{\text{Satz I.7}}{\leq} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon$
$\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x \in B\ \forall n > N(i)$ gilt:
$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \implies f_n \to f$ auf B □

II Äußere Maße

Def. II.1
Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X, falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Bem.:

1. Die Begriffe σ-additiv, σ-subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ-fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{P}(X)$)
2. Ein äußeres Maß ist monoton, σ-subadditiv und insbesondere endlich subadditiv (d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$)

Def. II.2
Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subseteq X$ heißt **μ-messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ-messbaren Mengen wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mu)}$ bezeichnet.

Bem.:
Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$ $\forall S \subseteq X$

Bsp.:
Jedes auf $\mathcal{P}(X)$ definierte Maß ist ein äußeres Maß (Satz I.7), also sind das DiracMaß und das Zählmaß äußere Maße.

Satz II.3
Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion $\mu(E) := \inf\{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) |\ P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} P_i\}$.
Dann ist μ ein äußeres Maß. $(\inf \emptyset = \infty)$

Beweis. Mit $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{Q}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$.
Sei $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$ mit $E, E_i \subseteq X$ und $\mu(E_i) < \infty$.

<u>z.z.:</u> $\mu(E) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$

Wähle Überdeckungen $E_i \subseteq \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$, so dass zu $\epsilon > 0$ gegeben gilt:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon \text{ , } \forall i \in \mathbb{N}$$

$\implies E \subseteq \bigcup\limits_{i,j\in\mathbb{N}} P_{i,j}$ und damit $\mu(E) \leq \sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} (\mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i) + \epsilon$
Mit $\epsilon > 0$ folgt $\mu(E) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$ □

Satz II.4
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß auf X. Für M $\subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X, welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.
Es gilt:

$$A \ \mu\text{-messbar} \implies A \ \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu \llcorner M$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subseteq X$ μ-messbar und $S \subseteq X$ beliebig:

$$\begin{aligned}
\mu \llcorner M(S) &= \mu(S \cap M) \\
&\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A) \\
&= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\
&= \mu \llcorner M(S \cap A) + \mu \llcorner M(S \setminus A)
\end{aligned}$$

$\implies$ Behauptung □

Satz II.5
μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$N\ \mu\text{-Nullmenge} \implies N\ \mu\text{-messbar}$$
$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k\ \mu\text{-Nullmenge}$$

Beweis. Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subseteq X$ folgt aus Monotonie:
$\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0$, $\mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N) \implies N$ μ-messbar
Zweite Behauptung folgt aus σ-Subadditivität. □

Bem.:
$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ-messbar sind.

Bsp.:
Auf X bel. definiere: $\beta(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$ β ist äußeres Maß.
Es sind nur $\emptyset$ und X β-messbar, denn für $X = S$ folgt aus der Annahme, dass A β-messbar ist: $1 \geq \beta(A) + \beta(X \setminus A)$

Vorlesung 5
16.11.20

Lemma II.6
Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, ..., k$, paarweiße disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$

Beweis. <u>$k = 1$:</u> trivial
<u>$k \geq 2$:</u> A_k μ-messbar

$$\begin{aligned}
\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) &= \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_k) + \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \setminus A_k) \\
&= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_k) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)
\end{aligned}$$

□

Satz II.7
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Notation: Schreibe $\mathcal{M}$ statt $\mathcal{M}(\mu)$
Es gilt:

- $x \in \mathcal{M}$, denn: $\forall S \subseteq X$ ist:
  $\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$
- Sei $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn $\forall S \subset X$ gilt:
  $\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$

Als nächstes zeigen wir:
$A, B \in \mathcal{M} \implies A \cap B \in \mathcal{M}$ $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\
\mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \\
\mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\
&= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A)
\end{aligned}$$

$\implies \mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$
$\implies A \cup B \in \mathcal{M}$, denn:
$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$

Per Induktion:
$\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen.

<u>Jetzt:</u> μ ist σ-additiv auf $\mathcal{M}$.
Seien $A_j, j \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $A_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$
Wähle $S = A_1 \cup A_2$ und benutze $A_1 \in \mathcal{M}$
$\implies \mu(S) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ $(= \mu(S \cap A_1) + \mu(S \setminus A_1))$

Induktion: Dasselbe gilt für endliche disjunkte Vereinigungen.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \\
\leq \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) \overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)
\end{aligned}$$

$\implies \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \implies$ Behauptung

Als letztes: $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen
Seien $A_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$. O.B. seien A_j paarweise disjunkt, sonst betrachte

$\tilde{A}_i := A_i \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{i-1})$

Für $S \subseteq X$ folgt mit $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \\
&\overset{\text{Lemma II.6}}{\geq} \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Lasse $k \to \infty$

$$\begin{aligned}
\implies \mu(S) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\
&\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S \cap A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\
&= \mu(S \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\
&\implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Vollständigkeit von μ: siehe Lemma II.5 □

Lemma II.8
μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.
Dann gelten:

i) Aus $A_1 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ folgt $\mu(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

ii) Aus $A_1 \supseteq ... \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Beweis. Folgt aus Satz I.7 und Satz II.7 □

Def. II.9
Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **$\bigcup$-stabil** (bzw. **$\bigcap$-stabil**, **$\setminus$-stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

Bem.:
$\bigcup$-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso $\bigcap$-stabil.

Def. II.10
Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$

iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Bsp.:

i) Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ ein Ring, aber für $A \neq X$ keine Algebra.

ii) System aller endlichen Teilmengen einer bel. Menge ist ein Ring.

iii) Ebenso System aller höchstens abzählbaren Teilmengen.

Bem.:
Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$
Ringe sind $\bigcup$-stabil, $\bigcap$-stabil, $\setminus$-stabil

Def. II.11
Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{R}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Bem.:
σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Bsp.:

i) $\mathcal{R}$ Ring über X. $\lambda(A) = \begin{cases} 0 & H = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

ii) $\mathcal{R}$ sei Ring der endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge X und $\lambda = card|_{\mathcal{R}}$ ist Prämaß

iii) Alle Maße sind Prämaße. Inbesondere äußere Maße eingeschränkt auf die messbaren Mengen.

Def. II.12
λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf $\mathcal{A}$) heißt **Fortsetzung** von λ, falls gilt:

i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$

ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ-messbar

Satz II.13 (Caratheodory-Fortsetzung)
$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.
μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ.

Beweis.

i) $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$
Wir haben $\mu(A) \leq \lambda(A)$ aus Def. mit $A_1 = A, A_2 = ... = \emptyset$
Für $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht es zz, dass:
$A \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$
Betrachte paarweise disjunkte Mengen $B_i = (A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$
$\implies \lambda(A) = \lambda(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} B_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

ii) Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ-messbar.
Sei $A \in \mathcal{R}, S \subseteq X$ bel. mit $\mu(S) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, sodass $S \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap A)$ und $S \setminus A \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A)$

$$\begin{aligned}\implies \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \epsilon\end{aligned}$$

Lasse $s \downarrow 0 \implies A \in \mathcal{M}(\mu)$
Für $\mu(S) = \infty$ ist das trivial.

$\square$

Lemma II.14
μ sei Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X. Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf $\mathcal{R}$, dann gilt $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$:

$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$

Beweis. $\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : E \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{R}$
$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(P_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i)$
Bilde Infimum über alle solche Überdeckungen
$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$ □