

**Ziele:**

1. Maßtheorie  $\rightarrow$  Lebesgue-Maß  
(Volumen von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  bestimmen)
2. Integralrechnung für Funktionen  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\rightarrow$  Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)
3. Version des Hauptsatzes  $\rightarrow$  Satz von Gauß

# I Maße und messbare Funktionen

## Notation:

Menge  $X$ , Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$ , eine Teilmenge von  $\mathcal{P}(X)$  heißt Mengensystem

### Def. I.1

Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt  **$\sigma$ -Algebra**, falls:

- (i)  $X \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii)  $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar  $(X, \mathcal{A})$  heißt dann **messbarer Raum**.

### Bem.:

1.  $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$   
Denn:  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X \setminus A_i \right)$
2.  $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$   
Denn:  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

### Bsp.:

1.  $\mathcal{P}(X)$  ist  $\sigma$ -Algebra,  $\{\emptyset, X\}$  ist  $\sigma$ -Algebra
2. später: Menge aller messbaren Mengen eines äußeren Maßes bildet eine  $\sigma$ -Algebra.

### Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen)  $\sigma$ -Algebren auf der selben Menge  $X$  ist wieder eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.*  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  sei eine Familie von  $\sigma$ -Algebren bezüglich  $X$ .

Offensichtlich gilt:  $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Sei  $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \implies A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Analog für die abzählbare Vereinigung. □

**Def. 1.3**

Für ein Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt  $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$  die von  $\mathcal{E}$  **erzeugte  $\sigma$ -Algebra**. Man nennt  $\mathcal{E}$  das **erzeugende System** von  $\sigma(\mathcal{E})$ .

**Bem.:**

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn  $\mathcal{P}(X)$  ist  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

**Bsp.:**

1. Ist  $E \subseteq X$  und  $\mathcal{E} = \{E\} \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$
2. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$  sei das System der offenen Mengen. Die von  $\mathcal{O}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt **Borel- $\sigma$ -Algebra**  $\mathbb{B}(\mathcal{O}) = \mathbb{B}$ . Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.
3. Seien  $X \neq \emptyset$ ,  $(Y, \mathcal{C})$  messbarer Raum,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und das Urbild von  $C \subseteq Y$ :  $f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\}$ . Dann ist  $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra bzgl.  $X$ .

Begründung:

- $X \in f^{-1}(\mathcal{C})$ , denn  $f^{-1}(Y) = X$  und  $Y \in \mathcal{C}$
  - $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \iff C \in \mathcal{C}$ ,  
 $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
  - Erinnerung:  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $(\mathcal{E})_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $i \in I$ , Mengensysteme, dann gilt:  
$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Begründung:

- Klar:  $\subseteq$
- Andererseits enthält  $\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$  das System  $\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$  und ist eine  $\sigma$ -Algebra  
$$\implies \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$$

**Notation:**

$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  mit  $-\infty < a < +\infty$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Def. I.4**

Eine Folge  $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) konvergiert gegen  $s \in \bar{\mathbb{R}}$ , falls eine der folgenden Alternativen gilt:

- (i)  $s \in \mathbb{R}$  und  $\forall \epsilon > 0$  gilt:  $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$  für  $k$  hinreichend groß
  - (ii)  $s = \infty$  und  $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$  für  $k$  hinreichend groß
  - (iii)  $s = -\infty$  und  $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$  für  $k$  hinreichend groß
- $(s_k) \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann in  $\bar{\mathbb{R}}$  konvergent, wenn sie entweder in  $\mathbb{R}$  konvergiert, oder bestimmt gegen  $\pm\infty$  divergiert.

**Bsp.:**

- $s_k$  monoton  $\implies s_k$  konvergiert in  $\bar{\mathbb{R}}$
- $a_k \geq 0 \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \bar{\mathbb{R}}$
- Eine Menge  $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  ist genau dann offen, wenn  $U \cap \mathbb{R}$  offen ist und im Fall  $+\infty \in U$  (bzw.  $-\infty \in U$ ) ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $(a, \infty] \subseteq U$  (bzw.  $[-\infty, a) \subset U$ ) ist.
- Die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\bar{\mathbb{B}}$  auf  $\bar{\mathbb{R}}$  wird durch die offenen Mengen in  $\bar{\mathbb{R}}$  erzeugt. Es gilt:  $\bar{\mathbb{B}} = \{B \cup E \mid B \in \mathbb{B}, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$

**Notation:**

<u>Addition:</u>	+	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	/
	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	/	$+\infty$	$+\infty$

$\sup \emptyset := -\infty$ ,  $\inf \emptyset := +\infty$  konsistent mit  $A, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  gilt  $A \subseteq B \implies \sup A < \sup B$  und  $\inf A \geq \inf B$

**Def. I.5**

Sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  heißt **Maß** auf  $\mathcal{A}$ , falls:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) für beliebige paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Das Tripel  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  heißt **Maßraum**.

**Bem.:**

1. Für endlich viele paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , folgt aus (ii) indem man  $A_i = \emptyset$  für  $i = n + 1, \dots$  setzt:  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

2. Monotonie des Maßes:  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

**Def. I.6**

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  heißt **endlich**, wenn  $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{A}$  und  **$\sigma$ -endlich**, wenn es eine Folge  $(X_i) \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(X_i) < \infty$  gibt, sodass  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ .

Falls  $\mu(X) = 1$ , so wird  $\mu$  **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

**Bsp.:**

1. Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ , für  $x \in X$  sei  $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$   
(**Dirac-Maß**)

- Es gilt  $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$ ,  $\delta_x(\emptyset) = 0$ ,  $\delta_x(X) = 1$ .
- Sei  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  gegeben mit  $A_k$  paarweise disjunkt und  $x \in A \implies x \in A_k$  für genau ein  $k \in \mathbb{N} \implies \sigma$ -Additivität.
- Für  $x \notin A$  gilt sowieso  $\delta_x A = 0$

$\implies$  Das Dirac-Maß ist ein Wahrscheinlichkeits-Maß

2. **Zählmaß:**  $X$  beliebige Menge

Vorlesung 2

06.11.2020

$$\text{card} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\text{card}(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  endlich und paarweise disjunkt ist die  $\sigma$ -Additivität klar.

Sei  $A$  unendlich und  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .

- (a) nur endlich viele  $A_k$  nicht-trivial  
 $\implies \exists k_0 : A_{k_0}$  ist unendlich
- (b) abzählbar viele  $A_k$  sind nicht-trivial  $\implies$  Behauptung

$\implies$  Behauptung

Zählmaß ist  $\sigma$ -endlich  $\Leftrightarrow X$  ist abzählbar

Zählmaß ist endlich  $\Leftrightarrow X$  ist endlich

**Bsp.:**

$X$  beliebige Menge,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$   $\sigma$ -Algebra,  $\mu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{A}$

**Satz I.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)**

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum. Dann gelten für Mengen  $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$  folgende Aussagen:

- (i) Aus  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  folgt:  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- (ii) Aus  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$  mit  $\mu(A_1) < \infty$ , folgt:  $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- (iii)  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

**Bem.:**

1. (i) Stetigkeit von unten  
(ii) Stetigkeit von oben  
(iii)  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu$
2. Bedingung  $\mu(A_i) \leq \infty$  in (ii) kann durch  $\mu(A_k) \leq \infty$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.  
Begründung:  
 $A_k = k, k+1, \dots \subseteq \mathbb{N}$   
 $\text{card}(A_k) = \infty \forall k \in \mathbb{N}$   
Aber:  $\text{card}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \text{card}(\emptyset) = 0$

*Beweis.*

- (i)  $\tilde{A}_1 := A_1, \tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}, k \geq 2$   
 $\tilde{A}_i$  sind paarweise disjunkt.  
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$   
$$\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^k \mu(\tilde{A}_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$
- (ii)  $A'_k := A_1 \setminus A_k \implies A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq \dots$   
Es gilt:  $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)$   
$$\implies \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A'_k) \stackrel{(i)}{=} \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A'_k) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$
  
$$= \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$

- (iii) Es genügt, die Folge  $B_1 = A_1, B_i \stackrel{i \geq 2}{=} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$  zu betrachten.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \text{ und } (B_i) \text{ ist paarweise disjunkt.}$$

$$\implies \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

□

**Def. I.8**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum.

Jede Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) = 0$  heißt  **$\mu$ -Nullmenge**. Das System aller  $\mu$ -Nullmengen bezeichnen wir mit  $\mathcal{N}(\mu)$ . Das Maß  $\mu$  heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

**Bem.:**

Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \quad \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen:

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum und  $\mathcal{T}_\mu$  sei das System aller Mengen  $N \subseteq X$  für die keine  $\mu$ -Nullmenge  $B \in \mathcal{N}(\mu)$  existiert mit  $N \subseteq B$ . Es gilt:

$$\mu \text{ vollständig} \Leftrightarrow \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$$

Definiere auf  $\bar{\mathcal{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$  die Mengenfunktion  $\bar{\mu}$  durch  $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$

**Bem.:**

$\bar{\mu}$  ist wohldefiniert:  $A \cup N = B \cup P$  mit  $A, B \in \mathcal{A}, P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$

Symm  $\implies \mu(A) = \mu(B)$

$\bar{\mu}$  heißt **Vervollständigung** von  $\mu$

**Satz I.9**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum. Dann ist  $\bar{\mathcal{A}}_\mu$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\bar{\mu}$  ein vollständiges Maß auf  $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ , welches mit  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$  übereinstimmt.

*Beweis.* Offensichtlich:

1.  $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\mu$
2.  $\mathcal{T}_\mu$  ist abgeschlossen unter Abz.  $\cup$

$\mathcal{A}$  ist auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$  abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

Sei  $x \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ . Für  $E \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$  ex. ein  $A \in \mathcal{A}$ ,  $N \in \mathcal{T}_\mu$  und  $B \in \mathcal{A}$  und  $N \subseteq B$  mit  $\mu(B) = 0$ , sodass  $E = A \cup N$

$\implies B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$

$\implies X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$  ist  $\sigma$ -Algebra

$\bar{\mu}$  ist Maß (ist klar)

Sei  $M \subseteq B = A \cup N$  mit  $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$  und  $\bar{\mu}(B) = \mu(A) = 0$

Aus  $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_\mu \cup \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mu}$  ist vollständig. □

**Satz I.10**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum und  $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$  sei Vervollständigung. Ferner sei  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  ein vollständiger Maßraum mit  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  und  $\mu = \nu$  auf  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$  und  $\bar{\mu} = \nu$  auf  $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ .

*Beweis.* Aus  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  und  $\mu = \nu$  auf  $\mathcal{A}$  folgt:  $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu) \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu$

$\nu$  vollständig  $\implies \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{B} \implies \bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$

Da  $\bar{\mu}$  auf  $\bar{\mathcal{A}}_\mu$  vollständig durch  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$  bestimmt ist, folgt sofort  $\bar{\mu} = \nu$  auf  $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ , da  $\mu = \nu$  auf  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Def. I.11**

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$  messbare Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt  **$\mathcal{A}$ – $\mathcal{C}$ –messbar**, falls  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

**Notation:**

Falls  $\mathcal{A}, \mathcal{C}$  klar sind, bezeichnen wir  $f$  einfach als messbar.

**Bsp.:**

1.  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$  beliebige messbare Räume.

Sei  $y_0 \in Y$  und  $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_0 \forall x \in X$

$\implies f$  ist  $\mathcal{A}$ – $\mathcal{C}$ –messbar

2.  $\chi_R : X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \subseteq X \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathbb{R}$  wird versehen mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ . Für  $(X, \mathcal{A})$  messbarer Raum gilt:

$\chi_R$   $\mathcal{A}$ – $\mathcal{B}$ –messbar  $\Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$

3. Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C}), (Z, \mathcal{D})$  messbare Räume.

$f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ – $\mathcal{C}$ –messbar

$g : Y \rightarrow Z$   $\mathcal{C}$ – $\mathcal{D}$ –messbar

$\implies g \circ f : X \rightarrow Z$  ist  $\mathcal{A}$ – $\mathcal{D}$ –messbar, denn:

$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

**Lemma I.12**

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$  messbare Räume und  $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$ . Jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$  ist  $\mathcal{A}$ – $\mathcal{C}$ –messbar.

*Beweis.* Es gilt:  $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \stackrel{s. Blatt 1}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$   $\square$

**Bsp.:**

1. Jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $\mathbb{B}^n$ – $\mathbb{B}^n$ –messbar

(man sagt:  $f$  ist **borel-messbar**).

Denn  $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$  und Urbilder offener Mengen sind offen für  $f$  stetig (siehe. Ana 1)



2. Sei  $X \neq \emptyset$  Menge,  $(Y, \mathcal{C})$  messbarer Raum,  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung.  
Nach Bsp. aus 1. Vorlesung ist  $f^{-1}(\mathcal{C})$   $\sigma$ -Algebra.  
Offensichtlich ist  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(X)$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra und  $f$  messbar.

**Notation:**

Multiplikation und Division in  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$s * (\pm\infty) = (\pm\infty) * s = \begin{cases} \pm\infty & , \text{ falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & , \text{ falls } s = 0 \\ \mp\infty & , \text{ falls } s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} = 0 \text{ f\"ur } t = \pm\infty$$

**Def. I.13**

$(X, \mathcal{A})$  messbarer Raum und  $D \in \mathcal{A}$ .

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt **numerische Funktion**.

**Lemma I.14**

$(X, \mathcal{A})$  messbarer Raum,  $D \in \mathcal{A}$  und  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

Dann sind folgende Aussagen quivalent:

- (i)  $f$  ist  $\mathcal{A}$ - $\bar{\mathbb{B}}^1$ -messbar
- (ii)  $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$  offen ist  $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$  und  $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$
- (iii)  $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (iv)  $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (v)  $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (vi)  $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$

*Beweis.*  $\bar{\mathbb{B}}^1$  wird erzeugt durch die offenen Mengen und  $\pm\infty \implies (i) \Leftrightarrow (ii)$

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)  $\Leftrightarrow$  (v)  $\Leftrightarrow$  (vi) denn:

$$(iv) \implies (iii): f \leq s = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < s + \frac{1}{k}\}$$

$$(iii) \implies (vi): \{f > s\} = D \setminus \{f \leq s\}$$

$$(vi) \implies (v): \{f \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > s - \frac{1}{k}\}$$

$$(v) \implies (iv): \{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}$$

$$(ii) \implies (vi), \text{ denn: } \{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$$

Für ein offenes Intervall  $(a, b)$  gilt:  $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$

Eine der Aussagen (und damit alle) (iii) - (vi) gelte.

Mann kann zeigen: Jede offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  lässt sich als abzählbare Vereinigung  $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$  von offenen Intervallen  $I_k = (a_k, b_k)$  schreiben (siehe Blatt 2).

$$\implies f^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > k\} \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < -k\} \in \mathcal{A} \implies \text{(ii)} \quad \square$$

**Bem.:**

In (iii) - (vi) reicht es aus,  $s \in \mathbb{Q}$ , statt  $s \in \mathbb{R}$  zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Vorlesung 3  
09.11.20

**Lemma I.15**

Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $D \in \mathcal{A}$  und  $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -messbar. Dann sind die Mengen  $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$  und  $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$  Elemente aus  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* Es gilt:  $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < g\} \cap \{g > q\}) \in \mathcal{A}$ , denn:

$$\{f < g\}, \{g > q\} \in \mathcal{A} \text{ (s. Lemma I.14)}$$

$$\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A} \quad \square$$

**Bem.:**

Im folgenden Satz sind die Grenzfunktionen paarweise definiert, z.B.:

$$\liminf f_x : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ ist definiert durch: } (\liminf f_k)(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

**Satz I.16**

$(X, \mathcal{A})$  messbarer Raum,  $D \in \mathcal{A}$  und  $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  Folge von  $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen  $\mathcal{A}$ -messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

*Beweis.* Für  $s \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}, \text{ denn nach Lemma I.14 ist } \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$$

$$\{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \leq s\} \in \mathcal{A}$$

$\xRightarrow{\text{Lemma I.14}} \inf f_k, \sup f_k$  sind  $\mathcal{A}$ -messbar

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{l \geq k} f_l) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar.}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{l \geq k} f_l) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar.} \quad \square$$

**Notation:**

Seien  $D \in \mathcal{A}$  und  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , dann sind  $f^\pm : D \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch:

$$f^+ := \max(f, 0) \geq 0 \text{ und } f^- := \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \geq 0$$

$$\implies f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

**Satz I.17**

$(X, \mathcal{A})$  messbarer Raum,  $D \in \mathcal{A}$ ,  $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -messbar,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
Dann sind die Funktionen

$$f + g, \alpha f, f^{\pm}, \max(f, g), \min(f, g), |f|, fg, \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in  $\mathcal{A}$  liegen  $\mathcal{A}$ -messbar.

*Beweis.*

1.  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

- $\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r + s < t}} \{f < r\} \cap \{g < s\} \in \mathcal{A}$   
 $\{-f < t\} = \{f > -t\} \in \mathcal{A}$   
 $\implies f + g, -f$   $\mathcal{A}$ -messbar. Ebenso  $\alpha f$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$
- Für  $\mathcal{C} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  ist  $\mathcal{C} \circ f$  messbar, denn für  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$  offen ist  $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})$  offen und damit  $(\mathcal{C} \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{A}$   
 $\implies f^{\pm}$  sind  $\mathcal{A}$ -messbar (wähle  $\mathcal{C}(s) = \max(\pm s, 0)$ )  
 $\implies |f| = f^{+} + f^{-}$ ,  
 $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$  und  
 $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$  sind  $\mathcal{A}$ -messbar
- $f^2 = \mathcal{C} \circ f$  mit  $\mathcal{C}(s) = s^2$  und  
 $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$   $\mathcal{A}$ -messbar
- $\frac{1}{g}$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar, denn:  

$$\left\{ \frac{1}{g} < s \right\} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{s} < g < 0 \right\} & , s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{2}\} & s > 0 \end{cases}$$

2.  $f, g$  beliebig

$$\text{Betrachte } f_k(x) = \begin{cases} k & , f(x) \geq k \\ -k & , f(x) \leq -k \in \mathbb{R} \\ f(x) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Analog  $g_k(x)$ .  $f_k, g_k$  sind  $\mathcal{A}$ -messbar  $\forall k$

Punktweise gilt:  $f_k(x) \rightarrow f(x), g_k(x) \rightarrow g(x)$

Ebenso:  $f_k + g_k \rightarrow f + g, \alpha f_k \rightarrow \alpha f, \dots, f_k g_k \rightarrow fg$  punktweise.

Der Allgemeine Fall folgt aus 1. und Satz I.16. □

**Notation:**

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum. Man sagt, die Aussage  $A[x]$  ist wahr **für  $\mu$ -fast alle  $x \in M \in \mathcal{A}$**  oder  **$\mu$ -fast überall** auf  $M$ , falls es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass  $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$  selbst zu  $\mathcal{A}$  gehört.

Zum Beispiel bedeutet für Funktionen  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  die Aussage „ $f(x) \leq g(x)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge  $N$  gibt, so dass  $\forall x \in X \setminus N$  gilt:  $f(x) \leq g(x)$ .

Eine Funktion  $h$  ist „ $\mu$ -fast überall auf  $X$  definiert“, wenn  $h$  auf  $D \in \mathcal{A}$  definiert ist und  $\mu(X \setminus D) = 0$ .

**Bsp.: („Konvergenz  $\mu$ -fast überall“)**

Eine Folge von Funktionen  $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  konvergiert punktweise  $\mu$ -fast überall gegen  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , wenn es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  gibt, so dass  $\forall x \in D \setminus N$  gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

**Ziel:**

Messbarkeit für Funktionen, die nur  $\mu$ -fast überall definiert sind.

**Def. I.18**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum. Eine auf  $D \in \mathcal{A}$  definierte Funktion  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt  **$\mu$ -messbar** (auf  $X$ ), wenn  $\mu(X \setminus D) = 0$  und  $f|_D$ -messbar ist.  
( $\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$ , siehe Blatt 1)

**Bem.:**

1. Unterscheiden zwischen  $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen (auf  $X$ ), die überall auf  $X$  definiert sind, und  $\mu$ -messbaren Funktionen (auf  $X$ ), die in der Regel nur  $\mu$ -fast überall definiert sind.
2. Analog zu  $\mathcal{A}$ -Messbarkeit verwenden wir  $\mu$ -Messbarkeit auf für Funktionen, die nur auf Teilmengen definiert sind:  
Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum,  $D \in \mathcal{A}$ .  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt  **$\mu$ -messbar** (auf  $D$ ), wenn  $E \subseteq D$  in  $\mathcal{A}$  liegt mit  $\mu(D \setminus E) = 0$  und  $f|_E$ -messbar.
3. „ $f = g$   $\mu$ -fast überall“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen
4. Sei  $D \in \mathcal{A}$ ,  $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   $\mu$ -messbar. Dann ex. eine  $\mathcal{A}$ -messbare Funktion  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $f = g$  auf  $D$ , z.B.:  $g = \begin{cases} f & , \text{ auf } D \\ 0 & , \text{ auf } X \setminus D \end{cases}$   
Somit übertragen sich die Sätze I.16 und I.17 auf  $\mu$ -messbare Funktionen.

**Lemma I.19**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  vollständiger Maßraum.  $f$   $\mu$ -messbar auf  $X$ . Dann ist auch jede Funktion  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{f} = f$   $\mu$ -fast überall  $\mu$ -messbar.

*Beweis.* Sei  $f$  auf  $D \in \mathcal{A}$  definiert mit  $\mu(X \setminus D) = 0$  und sei  $\tilde{f}$  auf  $\tilde{D} \subseteq X$  definiert.

Vor.  $\implies \exists$  Nullmenge  $N$  mit  $X \setminus N \subseteq \cap \tilde{D}$  und  $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in X \setminus N$

$\implies X \setminus \tilde{D} \subseteq N$

$\mu$ -vollständig  $\implies X \setminus \tilde{D} \in \mathcal{A} \implies \tilde{D} \in \mathcal{A}$ .

Weiter gilt:

$$\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} = \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) \mid \tilde{f}(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid f(x) < s\} \cup \{x \in D \cap (X \setminus N) \mid f(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \mid f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N \mid f(x) < s\}$$

$$=: A \cup B$$

Da  $f$   $\mu$ -messbar ist, folgt, dass  $B \in \mathcal{A}$

$$\mu\text{-vollständig} \implies A \in \mathcal{A} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A} \forall s$$

Weiter ist  $\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \subseteq \tilde{D} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}|_{\tilde{D}}$

$\stackrel{\text{Lemma I.14}}{\iff} \tilde{f}$   $\mu$ -messbar

□

**Satz I.20**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  vollständiger Maßraum und seien  $f_k, k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$ -messbar. Falls  $f_k$  punktweise  $\mu$ -fast überall gegen  $f$  konvergiert, dann ist  $f$  auch  $\mu$ -messbar.

*Beweis.* Sei  $f_k$  auf  $D_k \in \mathcal{A}$  definiert. Dann sind alle  $f_k, k \in \mathbb{N}$ , auf  $D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$  definiert und  $X \setminus D$  ist  $\mu$ -Nullmenge  $E := \{x \in D \mid \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \neq f(x)\}$  und betrachte

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt  $\tilde{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k \stackrel{\text{Satz I.16}}{\implies} \tilde{f}$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar

Vor.:  $(X \setminus D) \cup E$  ist  $\mu$ -Nullmenge  $\stackrel{\text{Lemma I.14}}{\implies} f$  ist  $\mu$ -messbar.

□

**Satz I.21 (Egorov)**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum,  $D \in \mathcal{A}$  Menge mit  $\mu(D) < \infty$  und  $f_n, f$   $\mu$ -messbare,  $\mu$ -fast überall endliche Funktionen auf  $D$  mit  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -fast überall. Dann existiert  $\forall \epsilon > 0$  eine Menge  $B \in \mathcal{A}$  mit  $B \subseteq D$  und

- (i)  $\mu(D \setminus B) < \epsilon$
- (ii)  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $B$

*Beweis.*  $E := \{x \in D \mid f_n(x), f(x) \text{ sind endlich und } f_n(x) \rightarrow f(x)\}$

Vor.  $\implies \exists \mu$ -Nullmenge  $N$  mit  $D \setminus E \subseteq N$

O.B.  $E = D$  (sonst ersetze  $D$  durch  $D \setminus N$ )

Sei  $C_{i,j} := \bigcup_{n=j}^{\infty} \{x \in D \mid |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$

Satz I.17  $\implies C_{i,j} \in \mathcal{A}$  und  $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}$

$\mu(D) < \infty \xrightarrow{\text{Satz I.7}} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_{i,j}\right) = 0$ , denn  $f_n \rightarrow f$

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben

$\implies \forall i \in \mathbb{N} \exists N(i) \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon \cdot 2^{-i}$

Setze  $B := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$  und  $\mu(D \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)}\right) \stackrel{\text{Satz I.7}}{\leq} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon$

$\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in B \forall n > N(i)$  gilt:

$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \implies f_n \rightarrow f$  auf  $B$

□

## II Äußere Maße

### Def. II.1

Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$  heißt **äußeres Maß** auf  $X$ , falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

### Bem.:

1. Die Begriffe  $\sigma$ -additiv,  $\sigma$ -subadditiv,  $\sigma$ -endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und  $\mu$ -fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall  $\mathcal{A}$  durch  $\mathcal{P}(X)$ )
2. Ein äußeres Maß ist monoton,  $\sigma$ -subadditiv und insbesondere endlich subadditiv (d.h.  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ )

### Def. II.2

Sei  $\mu$  äußeres Maß auf  $X$ . Die Menge  $A \subseteq X$  heißt  **$\mu$ -messbar**, falls  $\forall S \subseteq X$  gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller  $\mu$ -messbaren Mengen wird mit  $\mathcal{M}(\mu)$  bezeichnet.

### Bem.:

Da  $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$  folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.:  $A$  messbar  $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) = \mu(S) \quad \forall S \subseteq X$

### Bsp.:

Jedes auf  $\mathcal{P}(X)$  definierte Maß ist ein äußeres Maß (Satz I.7), also sind das DiracMaß und das Zählmaß äußere Maße.

**Satz II.3**

Sei  $\mathcal{Q}$  ein System von Teilmengen einer Menge  $X$ , welches die leere Menge enthält, und sei  $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$  eine Mengenfunktion auf  $\mathcal{Q}$  mit  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Definiere die Mengenfunktion  $\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right\}$ .

Dann ist  $\mu$  ein äußeres Maß. ( $\inf \emptyset = \infty$ )

*Beweis.* Mit  $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{Q}$  folgt  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Sei  $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$  mit  $E, E_i \subseteq X$  und  $\mu(E_i) < \infty$ .

z.z.:  $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$

Wähle Überdeckungen  $E_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_{i,j}$  mit  $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$ , so dass zu  $\epsilon > 0$  gegeben gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\implies E \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} P_{i,j} \text{ und damit } \mu(E) \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) + \epsilon$$

Mit  $\epsilon > 0$  folgt  $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$  □

**Satz II.4**

Sei  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  äußeres Maß auf  $X$ . Für  $M \subseteq X$  gegeben erhält man durch  $\mu_{\perp M} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \mu_{\perp M}(A) := \mu(A \cap M)$  ein äußeres Maß  $\mu_{\perp M}$  auf  $X$ , welches wir **Einschränkung** von  $\mu$  auf  $M$  nennen.

Es gilt:

$$A \text{ } \mu\text{-messbar} \implies A \text{ } \mu_{\perp M}\text{-messbar}$$

*Beweis.* Aus der Definition folgt sofort, dass  $\mu_{\perp M}$  ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für  $A \subseteq X$   $\mu$ -messbar und  $S \subseteq X$  beliebig:

$$\begin{aligned} \mu_{\perp M}(S) &= \mu(S \cap M) \\ &\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\ &= \mu_{\perp M}(S \cap A) + \mu_{\perp M}(S \setminus A) \end{aligned}$$

$\implies$  Behauptung □



**Satz II.5**

$\mu$  äußeres Maß auf  $X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} N \text{ } \mu\text{-Nullmenge} &\implies N \text{ } \mu\text{-messbar} \\ N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} &\implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \text{ } \mu\text{-Nullmenge} \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $\mu(N) = 0$ . Für  $S \subseteq X$  folgt aus Monotonie:

$$\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0, \mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N) \implies N \text{ } \mu\text{-messbar}$$

Zweite Behauptung folgt aus  $\sigma$ -Subadditivität.  $\square$

**Bem.:**

$\mathcal{M}(\mu)$  enthält alle Nullmengen  $N \subseteq X$  und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen  $\mu$ -messbar sind.

**Bsp.:**

Auf  $X$  bel. definiere:  $\beta(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$   $\beta$  ist äußeres Maß.

Es sind nur  $\emptyset$  und  $X$   $\beta$ -messbar, denn für  $X = S$  folgt aus der Annahme, dass  $A$   $\beta$ -messbar ist:  $1 \geq \beta(A) + \beta(X \setminus A)$

Vorlesung 5  
16.11.20

**Lemma II.6**

Seien  $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , paarweise disjunkt und  $\mu$  äußeres Maß. Dann gilt  $\forall S \subseteq X$ :

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$

*Beweis.*  $k = 1$ : trivial

$k \geq 2$ :  $A_k$   $\mu$ -messbar

$$\begin{aligned} \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) &= \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_k) + \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \setminus A_k) \\ &= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) \end{aligned}$$

$\square$

**Satz II.7**

Sei  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  ein äußeres Maß. Dann ist  $\mathcal{M}(\mu)$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu$  ist ein vollständiges Maß auf  $\mathcal{M}(\mu)$ .

*Beweis.* Notation: Schreibe  $\mathcal{M}$  statt  $\mathcal{M}(\mu)$

Es gilt:

- $x \in \mathcal{M}$ , denn:  $\forall S \subseteq X$  ist:  

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$$
- Sei  $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$ , denn  $\forall S \subseteq X$  gilt:  

$$\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$$

Als nächstes zeigen wir:

$A, B \in \mathcal{M} \implies A \cap B \in \mathcal{M} \forall S \subseteq X$  gilt:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \\ \mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A) \end{aligned}$$

$$\implies \mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$$

$\implies A \cup B \in \mathcal{M}$ , denn:

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$$

Per Induktion:

$\mathcal{M}$  ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen.

Jetzt:  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{M}$ .

Seien  $A_j, j \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt mit  $A_j \in \mathcal{M} \forall j \in \mathbb{N}$

Wähle  $S = A_1 \cup A_2$  und benutze  $A_1 \in \mathcal{M}$

$$\implies \mu(S) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad (= \mu(S \cap A_1) + \mu(S \setminus A_1))$$

Induktion: Dasselbe gilt für endliche disjunkte Vereinigungen.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \end{aligned}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \implies \text{Behauptung}$$

Als letztes:  $\mathcal{M}$  ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen

Seien  $A_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$ . O.B. seien  $A_j$  paarweise disjunkt, sonst betrachte

$$\tilde{A}_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$$

Für  $S \subseteq X$  folgt mit  $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i) \\ &\stackrel{\text{Lemma II.6}}{\geq} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lasse  $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(S) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S \cap A_i)\right) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &= \mu(S \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Vollständigkeit von  $\mu$ : siehe Lemma II.5 □

### Lemma II.8

$\mu$  äußeres Maß,  $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$ .

Dann gelten:

- i) Aus  $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$  folgt  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- ii) Aus  $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$  mit  $\mu(A_1) < \infty$  folgt  $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

*Beweis.* Folgt aus Satz I.7 und Satz II.7 □

### Def. II.9

Ein Mengensystem  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt **U-stabil** (bzw. **∩-stabil**, **\-stabil**), wenn  $A \cup B \in \mathcal{A}$  (bzw.  $A \cap B \in \mathcal{A}$ ,  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ )  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  gilt.

**Bem.:**

U-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso ∩-stabil.

**Def. II.10**

Ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt **Ring** über  $X$ , falls:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{R}$
- ii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- iii)  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$  heißt **Algebra**, falls zusätzlich  $X \in \mathcal{R}$ .

**Bsp.:**

- i) Für  $A \subset X$  ist  $\{\emptyset, A\}$  ein Ring, aber für  $A \neq X$  keine Algebra.
- ii) System aller endlichen Teilmengen einer bel. Menge ist ein Ring.
- iii) Ebenso System aller höchstens abzählbaren Teilmengen.

**Bem.:**

Für  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt:  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$

Ringe sind  $\cup$ -stabil,  $\cap$ -stabil,  $\setminus$ -stabil

**Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10)**

Sei  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$  Ring. Eine Funktion  $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  heißt **Prämaß** auf  $\mathcal{R}$ , falls:

- i)  $\lambda(\emptyset) = 0$
- ii) Für  $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt mit  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$  gilt:  
$$\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

**Bem.:**

$\sigma$ -subadditiv, subadditiv,  $\sigma$ -endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

**Bsp.:**

- i)  $\mathcal{R}$  Ring über  $X$ .  $\lambda(A) = \begin{cases} 0 & H = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- ii)  $\mathcal{R}$  sei Ring der endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge  $X$  und  $\lambda = \text{card}|_{\mathcal{R}}$  ist Prämaß
- iii) Alle Maße sind Prämaße. Insbesondere äußere Maße eingeschränkt auf die messbaren Mengen.

**Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11)**

$\lambda$  Prämaß auf Ring  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Ein äußeres Maß  $\mu$  auf  $X$  (bzw. ein Maß auf  $\mathcal{A}$ ) heißt **Fortsetzung** von  $\lambda$ , falls gilt:

- i)  $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$ , d.h.  $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$
- ii)  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$  (bzw.  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ ), d.h. alle  $A \in \mathcal{R}$  sind  $\mu$ -messbar

**Satz II.13 (Caratheodory-Fortsetzung — Im Aufschrieb II.12)**

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  Prämaß auf Ring  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Sei  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  das in Satz II.3 aus  $\mathcal{R}$  konstruierte äußere Maß, d.h.  $\forall E \subseteq X$  :

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist  $\mu$  eine Fortsetzung von  $\lambda$ .

$\mu$  heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von  $\lambda$ .

*Beweis.*

- i)  $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$

Wir haben  $\mu(A) \leq \lambda(A)$  aus Def. mit  $A_1 = A, A_2 = \dots = \emptyset$

Für  $\lambda(A) \leq \mu(A)$  reicht es zz, dass:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ mit } A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

$$\text{Betrachte paarweise disjunkte Mengen } B_i = (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$$

$$\implies \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

- ii) Jedes  $A \in \mathcal{R}$  ist  $\mu$ -messbar.

Sei  $A \in \mathcal{R}, S \subseteq X$  bel. mit  $\mu(S) < \infty$ . Zu  $\epsilon > 0$  wähle  $A_i \in \mathcal{R}$ , sodass  $S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap A)$  und  $S \setminus A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A)$

$$\begin{aligned} \implies \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \epsilon \end{aligned}$$

Lasse  $s \downarrow 0 \implies A \in \mathcal{M}(\mu)$

Für  $\mu(S) = \infty$  ist das trivial.

□

**Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)**

$\mu$  sei Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes  $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  auf dem Ring  $\mathcal{R}$  über  $X$ . Sei  $\tilde{\mu}$  ein Maß auf  $\sigma(\mathcal{R})$  mit  $\tilde{\mu} = \mu$  auf  $\mathcal{R}$ , dann gilt  $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$ :

$$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

*Beweis.*  $\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$  mit  $P_i \in \mathcal{R}$

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(P_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i)$$

Bilde Infimum über alle solche Überdeckungen

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

□

Vorlesung 6  
20.11.20

**Satz II.15 (Im Aufschrieb II.14)**

Sei  $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  Prämaß auf Ring  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann ex. ein Maß  $\mu$  auf  $\sigma(\mathcal{R})$  mit  $\mu = \lambda$  auf  $\mathcal{R}$ . Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls  $\lambda$   $\sigma$ -endlich ist.

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz II.16 (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung — i.A. II.15)**

Sei  $\mu$  Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes  $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  auf Ring  $\mathcal{R}$  über  $X$ . Dann ex.  $\forall D \subseteq X$  ein  $E \in \sigma(\mathcal{R})$  mit  $E \supseteq D$  und  $\mu(E) = \mu(D)$ .  
( $\mu$  ist „reguläres“ äußeres Maß)

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz II.17 (i.A. II.16)**

Sei  $\lambda$  ein  $\sigma$ -endliches Prämaß auf Ring  $\mathcal{R}$  über  $X$  und sei  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  die Caratheodory-Fortsetzung von  $\lambda$ . Dann ist  $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$  die Vervollständigung von  $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$  und  $\mathcal{M}(\mu)$  ist die vervollständigte  $\sigma$ -Algebra von  $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$ .

D.h.  $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$ . Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von  $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  zu einem vollständigen Maß auf  $\mathcal{M}(\mu)$ .

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Lemma II.18 (i.A. II.17)**

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$   $\sigma$ -endliches Prämaß auf Ring  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit Caratheodory-Fortsetzung  $\mu$ .  $D \subseteq X$  ist genau dann  $\mu$ -messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- i)  $\exists E \in \sigma(\mathcal{R})$  mit  $E \supseteq D$  und  $\mu(E \setminus D) = 0$
- ii)  $\exists C \in \sigma(\mathcal{R})$  mit  $C \subseteq D$  und  $\mu(D \setminus C) = 0$

**Def. II.19**

Ein Mengensystem  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt **Halbring** über  $X$ , falls:

- i)  $\emptyset \in \mathcal{Q}$
- ii)  $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$
- iii)  $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^k P_i$  mit endlich vielen paarweise disjunkten  $P_i \in \mathcal{Q}$

**Bsp.:**

$X$  beliebige Menge.  $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$

**Bem.:**

$I \subseteq \mathbb{R}$  heißt **Intervall**, wenn es  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  gibt, sodass:  $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$ . Das System aller Intervalle bezeichnen wir mit  $\mathcal{I}$ .

Ein achsenparalleler  $n$ -dim. **Quader** (kurz: Quader) ist Produkt  $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$  von Intervallen. Das System aller Quader wird mit  $\mathcal{Q}^n$  bezeichnet.

**Satz II.20 (i.A. II.19)**

$\mathcal{I}$  ist ein Halbring.

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz II.21 (i.A. II.20)**

Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $\mathcal{Q}_i$  Halbring über  $X_i$ . Dann ist  $\mathcal{Q} := \{P_1 \times \dots \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$  ein Halbring über  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz II.22 (i.A. II.21)**

$\mathcal{Q}^n$  ist ein Halbring.

**Satz II.23 (i.A. II.22)**

$\mathcal{Q}$  Halbring über  $X$  und  $\mathcal{F}$  sei das System aller endlichen Vereinigungen  $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$  von Mengen  $P_i \in \mathcal{Q}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  der von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Ring.

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Bsp.:**

1.  $\mathcal{Q}^n$  alle Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$   
 $\implies$  erzeugt Ring  $\mathcal{F}^n$ . Elemente davon nennen wir **Figuren**.
2.  $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$   
 $\implies$  erzeugt Ring  $\mathcal{F}$ : Ring der endlichen Teilmengen von  $X$ .

**Lemma II.24 (i.A. II.23)**

$\mathcal{Q}$  Halbring über  $X$ ,  $\mathcal{F}$  der von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Ring.  $\implies \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma II.25 (i.A. II.24)**

$\mathcal{Q}$  Halbring über  $X$ ,  $\mathcal{F}$  der von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Ring. Zu jedem  $F \in \mathcal{F}$  existieren paarweise disjunkte  $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{Q}$  mit  $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Def. II.26 (i.A. II.25)**

Sei  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$  Halbring. Eine Funktion  $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$  heißt **Inhalt** auf  $\mathcal{Q}$ , falls:

i)  $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für  $A_i \in \mathcal{Q}$  paarweise disjunkt mit  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{Q}$  gilt:  $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$

$\lambda$  heißt **Prämaß** auf  $\mathcal{Q}$ , falls  $\lambda$   $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{Q}$  ist.

D.h. für  $A_i \in \mathcal{Q}$  paarweise disjunkt ( $i \in \mathbb{N}$ ) mit  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{Q}$ :  $\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

**Bem.:**

$\sigma$ -subadditiv, subadditiv,  $\sigma$ -endlich, endlich, monoton, ... sind wie vorher definiert.

Ist  $\mathcal{Q}$  in Def. II.26 [i.A. II.25] ein Ring, so stimmt die Definition des Prämaßes mit Def. II.11 [i.A. II.10] überein.



**Satz II.27 (i.A. II.26)**

$\lambda$  Inhalt auf Halbring  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{F}$  der von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Ring. Dann ex. genau ein Inhalt  $\bar{\lambda} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\bar{\lambda}(Q) = \lambda(Q) \ \forall Q \in \mathcal{Q}$ .

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma II.28 (i.A. II.27)**

$\lambda$  Inhalt auf Halbring  $\mathcal{Q}$  über  $X$   
 $\implies \lambda$  ist monoton und subadditiv

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Bsp.:**

Auf  $\mathcal{Q}^n$  elementargeometrisches Volumen  $vol^n$ .

Sei  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q = I_1 \times \dots \times I_n, I_j \subseteq \mathbb{R}$  Intervall mit Intervallgrenzen  $a_j \leq b_j$

$$vol^n(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \geq 0$$

**Satz II.29 (i.A. II.28)**

$vol^n(\cdot)$  ist ein Inhalt auf  $\mathcal{Q}^n$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz II.30 (i.A. II.29)**

$\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$  Prämaß auf Halbring  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $\mathcal{R}$  der von  $\mathcal{Q}$  erzeugte Ring und  $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  der eindeutig bestimmte Inhalt auf  $\mathcal{R}$  mit  $\bar{\lambda}|_{\mathcal{Q}} = \lambda$  (Satz II.27 / i.A. II.26), so ist  $\bar{\lambda}$  ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ .

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

Vorlesung 8  
27.11.20

**Bem.:**

Satz II.27 (i.A. II.26)  $\implies \bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^n \lambda(Q_i)$  für  $F \in \mathcal{R}$  mit  $F = \bigcup_{i=1}^n Q_i$  mit paarweise disjunkten  $Q_i \in \mathcal{Q}$  (Lemma II.25 / i.A. II.24). Betrachte äußere Maße für  $\lambda$  auf  $\mathcal{Q}$  und  $\bar{\lambda}$  auf  $\mathcal{R}$  aus Satz II.3.

Es gilt:  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}, \lambda = \bar{\lambda}$  auf  $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\} \\ & \geq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(\bar{F}_i) \mid F_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right\} \\ & = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{j_i} \lambda(Q_{i,j}) \mid F_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j}, Q_{i,j} \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j} \right\} \\ & = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\} \end{aligned}$$

**Satz II.31 ((i.A. II.30))**

$\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$  Prämaß auf Halbring  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Sei  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  das in Satz II.3 aus  $\mathcal{Q}$  konstruierte äußere Maß, d.h.  $\forall E \subseteq X$  ist:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist  $\mu$  eine Fortsetzung von  $\lambda$ .

**Bem.:**

Satz II.16 (i.A. II.15)  $\implies \mu$  ist reguläres äußere Maß

Satz II.7  $\implies \mu$  ist vollständiges Maß auf  $\mathcal{M}(\mu)$

$(X, \mathcal{M}(\mu), \mu|_{\mathcal{M}(\mu)})$  ist Vervollständigung von  $(X, \sigma(\mathcal{Q}), \mu|_{\sigma(\mathcal{Q})})$  und ist auf  $\mathcal{M}(\mu)$  eindeutig bestimmt (Satz II.17 / i.A. II.16).

Speziell:  $D \subseteq X$   $\mu$ -messbar  $\Leftrightarrow \exists C \in \sigma(\mathcal{Q})$  mit  $C \subseteq D$  und  $\mu(D \setminus C) = 0$  (Lemma II.18 / i.A. II.17)

**Satz II.32 ((i.A. II.31))**

Für einen Inhalt  $\lambda$  auf Ring  $\mathcal{R}$  und  $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$ , betrachte:

- i)  $\lambda$  ist Prämaß auf  $\mathcal{R}$
- ii) Für  $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$  mit  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$  gilt:  $\lambda(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$
- iii) Für  $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$  mit  $\lambda(A_1) < \infty$  und  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$  gilt:  

$$\lambda(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$$
- iv) Für  $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$  mit  $\lambda(A_1) < \infty$  und  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$  gilt:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(A_i) = 0$

Dann gilt: i)  $\Leftrightarrow$  ii)  $\implies$  iii)  $\implies$  iv)

Ist  $\lambda$  endlich, d.h.  $\lambda(A) < \infty \forall A \in \mathcal{R}$ , dann sind i) - iv) äquivalent.

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

### III Das Lebesgue-Maß

#### Lemma III.1

Der elementargeometrische Inhalt  $vol^n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, \infty]$  ist ein Prämaß auf dem Halbring  $\mathcal{Q}^n$  im  $\mathbb{R}^n$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

#### Def. III.2

Das **n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß** einer Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\lambda^n(E) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} vol^n(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\}$$

$\lambda^n|_{\mathcal{M}(\lambda^n)}$  ist das **n-dimensionale Lebesguemaß**.

**Bem.:**

Bem nach Satz II.31 (i.A. II.30)  $\implies \lambda^n$  regulär und vollständig auf  $\mathcal{M}(\lambda^n)$

#### Lemma III.3

Betrachte für  $k \in \mathbb{N}_0$  die Würfelfamilie  $\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0, 1]^n) \mid m \in \mathbb{R}^n\}$  und definiere für  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  die Mengen

$$F_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subseteq E\} \quad F^k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

- i)  $F_k(E)$  und  $F^k(E)$  sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Quadern mit paarweise disjunktem Inneren.
- ii)  $F_1(E) \subseteq F_2(E) \subseteq \dots \subseteq E \subseteq \dots \subseteq F^2(E) \subseteq F^1(E)$
- iii)  $F_k(E) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > s^{-k} \sqrt{n}\}$   
 $F^k(E) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) \leq s^{-k} \sqrt{n}\}$
- iv)  $\overset{\circ}{E} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k(E) \subseteq E \quad , \quad \bar{E} \supseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^k(E) \supseteq E$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma III.4**

Die Borelmengen  $\mathcal{B}^n$  sind die vom Halbring  $\mathcal{Q}^n$  der Quader, dem Ring  $\mathcal{F}^n$  der Figuren, und dem System  $\mathcal{C}^n$  der abgeschlossenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra, d.h.  $\sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz III.5**

Für  $\lambda^n$  gilt:

1. Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar
2. Zu  $E \subseteq \mathbb{R}^n \ni$  Borelmenge  $B \supseteq E$  mit  $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$
3.  $\lambda^n(K) < \infty \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Lemma III.6**

Für  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  beliebig gilt:

- i)  $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen}, U \supset E\}$
- ii)  $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E\}$ , falls  $E$   $\lambda^n$ -messbar

**Satz III.7**

$D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\lambda^n$ -messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:

- i)  $\exists$  Borelmenge  $E \supset D$  mit  $\lambda^n(E \setminus D) = 0$
- ii)  $\exists$  Borelmenge  $C \subset D$  mit  $\lambda^n(D \setminus C) = 0$

Es kann  $E = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$  mit  $U_i$  offen und  $C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  mit  $A_j$  abgeschlossen gewählt werden.

**Satz III.8 (Satz von Lusin)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $\lambda^n(A) < \infty$  und sei  $f$   $\lambda^n$ -messbar auf  $A$  mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Dann existiert  $\forall \epsilon > 0$  ein  $K = K_\epsilon \subseteq A$  kompakt, mit:

- i)  $\lambda^n(A \setminus K) < \epsilon$
- ii)  $f|_K$  ist stetig

Vorlesung 10  
4.12.20

**Def. III.9**

Ein äußeres Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  heißt **Borelmaß**, falls gilt:

- 1. Alle Borelmengen sind  $\mu$ -messbar
- 2.  $\mu(K) < \infty \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt

**Bem.:**

$\lambda^n$  ist Borelmaß nach Satz III.5.

Ein äußeres Maß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^n$  heißt **translationsinvariant**, falls

$$\mu(E + a) = \mu(E) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n \text{ mit } E + a := \{x + a \mid x \in E\}$$

Bemerke:  $\text{vol}^n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, \infty]$  ist translationsinvariant  $\implies \lambda^n$  ist translationsinvariant.

**Lemma III.10**

Ist  $\mu$  translationsinvariantes Borelmaß auf  $\mathbb{R}^n$ , so ist jede Koordinaten-Hyperebene  $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\} (i = 1, \dots, n)$  eine  $\mu$ -Nullmenge.

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz III.11**

Sei  $\mu$  translationsinvariantes Borelmaß auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt mit  $\theta := \mu([0, 1]^n)$ :

$$\mu(E) = \theta \lambda^n(E) \quad \forall \lambda^n\text{-messbaren } E \subseteq \mathbb{R}^n$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma III.12**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipschitz-stetig mit Konstante  $\Lambda$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ . Dann gilt:

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq U$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz III.13**

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

1.  $N \subseteq U$   $\lambda^n$ -Nullmenge  $\implies f(N)$   $\lambda^n$ -Nullmenge
2.  $E \subseteq U$   $\lambda^n$ -messbar  $\implies f(E)$   $\lambda^n$ -messbar

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz III.14**

Sei  $S \in O(\mathbb{R}^n)$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma III.15 (Polarzerlegung)**

$\forall S \in GL(\mathbb{R}^n) \exists$  Diagonalmatrix  $\Lambda$  mit Einträgen  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$  und  $T_1, T_2 \in O(\mathbb{R}^n)$ , sodass  $S = T_1 \Lambda T_2$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz III.16 (Lineare Transformationsformel)**

Für eine lineare Abbildung  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\lambda^n(S(E)) = |\det(S)| \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

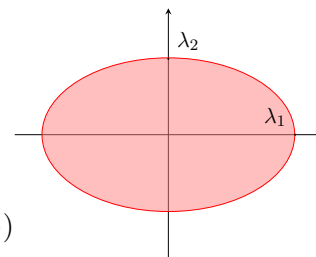
*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Bsp.:**

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\frac{x_1}{\lambda_1})^2 + \dots + (\frac{x_n}{\lambda_n})^2 < 1\}$$

$$\text{mit } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^n) \text{ gilt } E = \Lambda(B_1(0))$$

$$\text{Satz III.16} \implies \lambda^n(E) = \lambda^n(\Lambda(B_1(0))) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \lambda^n(B_1(0))$$



**Bsp.: (Vitali 1905)**

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\lambda^n)$$

Beweis siehe Aufschrieb.

## IV Lebesgue-Integral

### Def. IV.1

$X$  Menge,  $\mu$  äußeres Maß. Eine Funktion  $\zeta : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  **$\mu$ -Treppenfunktion**, wenn sie  $\mu$ -messbar ist und nur endlich viele Funktionswerte annimmt. Die Menge  $\mathcal{T}(\mu)$  der  $\mu$ -Treppenfunktionen ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{\zeta \in \mathcal{T}(\mu) \mid \zeta \geq 0\}$$

### Bsp.:

$$E \subseteq X, \psi_E : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi_E(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Es ist: } \psi_E \text{ } \mu\text{-Treppenfunktion} \Leftrightarrow E \in \mathcal{M}(\mu)$$

Sei  $\zeta \geq 0, \zeta = \sum_{i=1}^k s_i \psi_{A_i}$  mit  $A_i$  messbar und  $s_i \geq 0$  und die  $A_i$  sind paarweise disjunkt.

So eine Darstellung heißt **einfach**.

Wir setzen:

$$(\star) \quad I(\zeta) := \sum_{i=1}^k s_i \mu(A_i)$$

Für  $\zeta = 0$  folgt  $I(\zeta) = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Jedes  $\zeta \in \mathcal{T}^+(\mu)$  besitzt eine einfache Darstellung, z.B. können wir für  $s_i$  die endlich vielen Funktionswerte wählen und  $A_i = \{\zeta = s_i\}$

### Lemma IV.2

Das Integral  $I : \mathcal{T}^+(\mu) \rightarrow [0, \infty]$  ist durch  $(\star)$  wohldefiniert. Für  $\zeta, \psi \in \mathcal{T}^+(\mu)$  und  $\alpha, \beta \in [0, \infty)$  gilt:

$$\text{i) } I(\alpha\zeta + \beta\psi) = \alpha I(\zeta) + \beta I(\psi)$$

$$\text{ii) } \zeta \leq \psi \implies I(\zeta) \leq I(\psi)$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

### Bem.:

Für  $A_i$  messbar und  $s_i \geq 0$  folgt aus i) auch für  $A_i$  nicht disjunkt:

$$I(\zeta) = \sum_{i=1}^k s_i \mu(A_i) \quad \text{für } \zeta = \sum_{i=1}^k s_i \psi_{A_i}$$

**Def. IV.3 (Lebesgue-Integral)**

Für  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -messbar, setze

$$\int f d\mu = \sup\{I(\zeta) \mid \zeta \in \mathcal{T}^+(\mu), \zeta \leq f\}$$

$\zeta$  heißt **Unterfunktion** von  $f$ .

Ist  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$   $\mu$ -messbar und sind die Integrale von  $f^\pm$  nicht beide unendlich, so setzen wir

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in [-\infty, \infty]$$

**Bem.:**

Für  $f \geq 0$  sind beide Schritte kompatibel, denn dann gilt  $f = f^+$  und  $f^- = 0$

**Lemma IV.4**

Für  $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$  gilt:  $\int f d\mu = I(f)$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Bsp.:**

$\chi_{\mathbb{Q}}$  ist eine  $\lambda^1$ -Treppenfunktion und es gilt:

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda^1 = I(\chi_{\mathbb{Q}}) = 0 \cdot \lambda^1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda^1(\mathbb{Q}) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

**Def. IV.5**

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt **integrierbar** bzgl.  $\mu$ , wenn sie  $\mu$ -messbar ist und wenn gilt:

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$