

Ziele:

1. Maßtheorie \rightarrow Lebesgue-Maß
(Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^n bestimmen)
2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 \rightarrow Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)
3. Version des Hauptsatzes \rightarrow Satz von Gauß

I Maße und messbare Funktionen

Notation:

Menge X , Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Def. I.1

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Algebra**, falls:

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar (X, \mathcal{A}) heißt dann **messbarer Raum**.

Bem.:

1. $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$
Denn: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X \setminus A_i \right)$
2. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
Denn: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

Bsp.:

1. $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra, $\{\emptyset, X\}$ ist σ -Algebra
2. später: Menge aller messbaren Mengen eines äußeren Maßes bildet eine σ -Algebra.

Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ -Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ -Algebra.

Beweis. $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von σ -Algebren bezüglich X .

Offensichtlich gilt: $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Sei $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \implies A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Analog für die abzählbare Vereinigung. □

Def. 1.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von \mathcal{E} **erzeugte σ -Algebra**. Man nennt \mathcal{E} das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Bem.:

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Bsp.:

1. Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\} \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$
2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei das System der offenen Mengen. Die von \mathcal{O} erzeugte σ -Algebra heißt **Borel- σ -Algebra** $\mathbb{B}(\mathcal{O}) = \mathbb{B}$. Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.
3. Seien $X \neq \emptyset$, (Y, \mathcal{C}) messbarer Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und das Urbild von $C \subseteq Y$: $f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\}$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ eine σ -Algebra bzgl. X .

Begründung:

- $X \in f^{-1}(\mathcal{C})$, denn $f^{-1}(Y) = X$ und $Y \in \mathcal{C}$
 - $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \iff C \in \mathcal{C}$,
 $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
 - Erinnerung: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. Sei X eine beliebige Menge und $(\mathcal{E})_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme, dann gilt:
$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Begründung:

- Klar: \subseteq
- Andererseits enthält $\sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$ das System $\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$ und ist eine σ -Algebra
$$\implies \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\right)$$

Notation:

$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit $-\infty < a < +\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Def. I.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

- (i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß
 - (ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß
 - (iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß
- $(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in \mathbb{R} konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Bsp.:

- s_k monoton $\implies s_k$ konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$
- $a_k \geq 0 \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \bar{\mathbb{R}}$
- Eine Menge $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann offen, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Fall $+\infty \in U$ (bzw. $-\infty \in U$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a, \infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$) ist.
- Die Borel- σ -Algebra $\bar{\mathbb{B}}$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ wird durch die offenen Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ erzeugt. Es gilt: $\bar{\mathbb{B}} = \{B \cup E \mid B \in \mathbb{B}, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$

Notation:

<u>Addition:</u>	+	$-\infty$	\mathbb{R}	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	/
	\mathbb{R}	$-\infty$	\mathbb{R}	$+\infty$
	$+\infty$	/	$+\infty$	$+\infty$

$\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := +\infty$ konsistent mit $A, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ gilt $A \subseteq B \implies \sup A < \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$

Def. I.5

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß** auf \mathcal{A} , falls:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) für beliebige paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt **Maßraum**.

Bem.:

1. Für endlich viele paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, \dots$ setzt: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

2. Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{A}$ und **σ -endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Bsp.:

1. Sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, für $x \in X$ sei $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
(**Dirac-Maß**)

- Es gilt $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$, $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(X) = 1$.
- Sei $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gegeben mit A_k paarweise disjunkt und $x \in A \implies x \in A_k$ für genau ein $k \in \mathbb{N} \implies \sigma$ -Additivität.
- Für $x \notin A$ gilt sowieso $\delta_x A = 0$

\implies Das Dirac-Maß ist ein Wahrscheinlichkeits-Maß

2. **Zählmaß:** X beliebige Menge

Vorlesung 2

06.11.2020

$$\text{card} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\text{card}(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ endlich und paarweise disjunkt ist die σ -Additivität klar.

Sei A unendlich und $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

- (a) nur endlich viele A_k nicht-trivial
 $\implies \exists k_0 : A_{k_0}$ ist unendlich
- (b) abzählbar viele A_k sind nicht-trivial \implies Behauptung

\implies Behauptung

Zählmaß ist σ -endlich $\Leftrightarrow X$ ist abzählbar

Zählmaß ist endlich $\Leftrightarrow X$ ist endlich

Bsp.:

X beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ -Algebra, $\mu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{A}$

Satz I.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

- (i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ folgt: $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- (ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- (iii) $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bem.:

1. (i) Stetigkeit von unten
(ii) Stetigkeit von oben
(iii) σ -Subadditivität von μ
2. Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
Begründung:
 $A_k = k, k+1, \dots \subseteq \mathbb{N}$
 $\text{card}(A_k) = \infty \forall k \in \mathbb{N}$
Aber: $\text{card}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \text{card}(\emptyset) = 0$

Beweis.

- (i) $\tilde{A}_1 := A_1, \tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}, k \geq 2$
 \tilde{A}_i sind paarweise disjunkt.
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
$$\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^k \mu(\tilde{A}_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$
- (ii) $A'_k := A_1 \setminus A_k \implies A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq \dots$
Es gilt: $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)$
$$\implies \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A'_k) \stackrel{(i)}{=} \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A'_k) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$

$$= \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$

- (iii) Es genügt, die Folge $B_1 = A_1, B_i \stackrel{i \geq 2}{=} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ zu betrachten.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \text{ und } (B_i) \text{ ist paarweise disjunkt.}$$

$$\implies \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

□

Def. I.8

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum.

Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ -Nullmenge**. Das System aller μ -Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mu)$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(H) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.:

Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \quad \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen:

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum und \mathcal{T}_μ sei das System aller Mengen $N \subseteq X$ für die keine μ -Nullmenge $B \in \mathcal{N}(\mu)$ existiert mit $N \subseteq B$. Es gilt:

$$\mu \text{ vollständig} \Leftrightarrow \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$$

Definiere auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$ die Mengenfunktion $\bar{\mu}$ durch $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$

Bem.:

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit $A, B \in \mathcal{A}, P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$

Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$

$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf \mathcal{A} übereinstimmt.

Beweis. Offensichtlich:

1. $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\mu$
2. \mathcal{T}_μ ist abgeschlossen unter Abz. \cup

\mathcal{A} ist auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung

Sei $x \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$. Für $E \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ex. ein $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{T}_\mu$ und $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq B$ mit $\mu(B) = 0$, sodass $E = A \cup N$

$\implies B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$

$\implies X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ist σ -Algebra

$\bar{\mu}$ ist Maß (ist klar)

Sei $M \subseteq B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$ und $\bar{\mu}(B) = \mu(A) = 0$

Aus $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_\mu \cup \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$

$\implies \bar{\mu}$ ist vollständig. □

Satz I.10

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei (X, \mathcal{B}, ν) ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} folgt: $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu) \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu$

ν vollständig $\implies \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{B} \implies \bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$

Da $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ vollständig durch μ auf \mathcal{A} bestimmt ist, folgt sofort $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, da $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . \square

Def. I.11

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **\mathcal{A} – \mathcal{C} –messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Notation:

Falls \mathcal{A}, \mathcal{C} klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar.

Bsp.:

1. $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ beliebige messbare Räume.

Sei $y_0 \in Y$ und $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_0 \forall x \in X$

$\implies f$ ist \mathcal{A} – \mathcal{C} –messbar

2. $\chi_R : X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \subseteq X \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

\mathbb{R} wird versehen mit Borel- σ -Algebra \mathcal{B} . Für (X, \mathcal{A}) messbarer Raum gilt:

χ_R \mathcal{A} – \mathcal{B} –messbar $\Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$

3. Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C}), (Z, \mathcal{D})$ messbare Räume.

$f : X \rightarrow Y$ \mathcal{A} – \mathcal{C} –messbar

$g : Y \rightarrow Z$ \mathcal{C} – \mathcal{D} –messbar

$\implies g \circ f : X \rightarrow Z$ ist \mathcal{A} – \mathcal{D} –messbar, denn:

$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist \mathcal{A} – \mathcal{C} –messbar.

Beweis. Es gilt: $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \stackrel{s. Blatt 1}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ \square

Bsp.:

1. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist \mathbb{B}^n – \mathbb{B}^n –messbar

(man sagt: f ist **borel-messbar**).

Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

2. Sei $X \neq \emptyset$ Menge, (Y, \mathcal{C}) messbarer Raum, $f : X \rightarrow Y$ Abbildung.
Nach Bsp. aus 1. Vorlesung ist $f^{-1}(\mathcal{C})$ σ -Algebra.
Offensichtlich ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ -Algebra und f messbar.

Notation:

Multiplikation und Division in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$s * (\pm\infty) = (\pm\infty) * s = \begin{cases} \pm\infty & , \text{ falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & , \text{ falls } s = 0 \\ \mp\infty & , \text{ falls } s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} = 0 \text{ f\"ur } t = \pm\infty$$

Def. I.13

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Dann sind folgende Aussagen quivalent:

- (i) f ist \mathcal{A} - $\bar{\mathbb{B}}^1$ -messbar
- (ii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$
- (iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$

Beweis. $\bar{\mathbb{B}}^1$ wird erzeugt durch die offenen Mengen und $\pm\infty \implies (i) \Leftrightarrow (ii)$

(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) denn:

$$(iv) \implies (iii): f \leq s = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < s + \frac{1}{k}\}$$

$$(iii) \implies (vi): \{f > s\} = D \setminus \{f \leq s\}$$

$$(vi) \implies (v): \{f \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > s - \frac{1}{k}\}$$

$$(v) \implies (iv): \{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}$$

$$(ii) \implies (vi), \text{ denn: } \{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$$

Für ein offenes Intervall (a, b) gilt: $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$

Eine der Aussagen (und damit alle) (iii) - (vi) gelte.

Mann kann zeigen: Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ schreiben (siehe Blatt 2).

$$\implies f^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > k\} \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < -k\} \in \mathcal{A} \implies \text{(ii)} \quad \square$$

Bem.:

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Vorlesung 3
09.11.20

Lemma I.15

Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus \mathcal{A} .

Beweis. Es gilt: $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < g\} \cap \{g > q\}) \in \mathcal{A}$, denn:

$$\{f < g\}, \{g > q\} \in \mathcal{A} \text{ (s. Lemma I.14)}$$

$$\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A} \quad \square$$

Bem.:

Im folgenden Satz sind die Grenzfunktionen paarweise definiert, z.B.:

$$\liminf f_x : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ ist definiert durch: } (\liminf f_k)(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

Satz I.16

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Folge von \mathcal{A} -messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen \mathcal{A} -messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}, \text{ denn nach Lemma I.14 ist } \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$$

$$\{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f_k \leq s\} \in \mathcal{A}$$

$\xRightarrow{\text{Lemma I.14}} \inf f_k, \sup f_k$ sind \mathcal{A} -messbar

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{l \geq k} f_l) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar.}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{l \geq k} f_l) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar.} \quad \square$$

Notation:

Seien $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, dann sind $f^\pm : D \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch:

$$f^+ := \max(f, 0) \geq 0 \text{ und } f^- := \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \geq 0$$

$$\implies f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

Satz I.17

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g, \alpha f, f^{\pm}, \max(f, g), \min(f, g), |f|, fg, \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in \mathcal{A} liegen \mathcal{A} -messbar.

Beweis.

1. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

- $\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r + s < t}} \{f < r\} \cap \{g < s\} \in \mathcal{A}$
 $\{-f < t\} = \{f > -t\} \in \mathcal{A}$
 $\implies f + g, -f$ \mathcal{A} -messbar. Ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$
- Für $\mathcal{C} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{C} \circ f$ messbar, denn für $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})$ offen und damit $(\mathcal{C} \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{A}$
 $\implies f^{\pm}$ sind \mathcal{A} -messbar (wähle $\mathcal{C}(s) = \max(\pm s, 0)$)
 $\implies |f| = f^{+} + f^{-}$,
 $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und
 $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ sind \mathcal{A} -messbar
- $f^2 = \mathcal{C} \circ f$ mit $\mathcal{C}(s) = s^2$ und
 $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ \mathcal{A} -messbar
- $\frac{1}{g}$ ist \mathcal{A} -messbar, denn:

$$\left\{ \frac{1}{g} < s \right\} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{s} < g < 0 \right\} & s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{2}\} & s > 0 \end{cases}$$

2. f, g beliebig

$$\text{Betrachte } f_k(x) = \begin{cases} k & , f(x) \geq k \\ -k & , f(x) \leq -k \in \mathbb{R} \\ f(x) & , \text{sonst} \end{cases}$$

Analog $g_k(x)$. f_k, g_k sind \mathcal{A} -messbar $\forall k$

Punktweise gilt: $f_k(x) \rightarrow f(x), g_k(x) \rightarrow g(x)$

Ebenso: $f_k + g_k \rightarrow f + g, \alpha f_k \rightarrow \alpha f, \dots, f_k g_k \rightarrow fg$ punktweise.

Der Allgemeine Fall folgt aus 1. und Satz I.16. □

Notation:

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ -fast alle $x \in M \in \mathcal{A}$** oder **μ -fast überall** auf M , falls es eine μ -Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu \mathcal{A} gehört.

Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „ $f(x) \leq g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.

Eine Funktion h ist „ μ -fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.

Bsp.: („Konvergenz μ -fast überall“)

Eine Folge von Funktionen $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ -fast überall gegen $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in D \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

Ziel:

Messbarkeit für Funktionen, die nur μ -fast überall definiert sind.

Def. I.18

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ -messbar** (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und $f|_D$ -messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D \mid A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

Bem.:

1. Unterscheiden zwischen \mathcal{A} -messbaren Funktionen (auf X), die überall auf X definiert sind, und μ -messbaren Funktionen (auf X), die in der Regel nur μ -fast überall definiert sind.
2. Analog zu \mathcal{A} -Messbarkeit verwenden wir μ -Messbarkeit auf für Funktionen, die nur auf Teilmengen definiert sind:
Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum, $D \in \mathcal{A}$. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ -messbar** (auf D), wenn $E \subseteq D$ in \mathcal{A} liegt mit $\mu(D \setminus E) = 0$ und $f|_E$ -messbar.
3. „ $f = g$ μ -fast überall“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen
4. Sei $D \in \mathcal{A}$, $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -messbar. Dann ex. eine \mathcal{A} -messbare Funktion $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D , z.B.: $g = \begin{cases} f & , \text{ auf } D \\ 0 & , \text{ auf } X \setminus D \end{cases}$
Somit übertragen sich die Sätze I.16 und I.17 auf μ -messbare Funktionen.

Lemma I.19

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum. f μ -messbar auf X . Dann ist auch jede Funktion \tilde{f} mit $\tilde{f} = f$ μ -fast überall μ -messbar.

Beweis. Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$ und sei \tilde{f} auf $\tilde{D} \subseteq X$ definiert.

Vor. $\implies \exists$ Nullmenge N mit $X \setminus N \subseteq \cap \tilde{D}$ und $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in X \setminus N$

$\implies X \setminus \tilde{D} \subseteq N$

μ -vollständig $\implies X \setminus \tilde{D} \in \mathcal{A} \implies \tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Weiter gilt:

$$\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} = \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) \mid \tilde{f}(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid f(x) < s\} \cup \{x \in D \cap (X \setminus N) \mid f(x) < s\}$$

$$= \{x \in \tilde{D} \cap N \mid \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \mid f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N \mid f(x) < s\}$$

$$=: A \cup B$$

Da f μ -messbar ist, folgt, dass $B \in \mathcal{A}$

μ -vollständig $\implies A \in \mathcal{A} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A} \forall s$

Weiter ist $\{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \subseteq \tilde{D} \implies \{x \in \tilde{D} \mid \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}|_{\tilde{D}}$

$\stackrel{\text{Lemma I.14}}{\iff} \tilde{f}$ μ -messbar

□

Satz I.20

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ -messbar. Falls f_k punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ -messbar.

Beweis. Sei f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert. Dann sind alle $f_k, k \in \mathbb{N}$, auf $D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$ definiert und $X \setminus D$ ist μ -Nullmenge $E := \{x \in D \mid \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \neq f(x)\}$ und betrachte

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k \stackrel{\text{Satz I.16}}{\implies} \tilde{f}$ ist \mathcal{A} -messbar

Vor.: $(X \setminus D) \cup E$ ist μ -Nullmenge $\stackrel{\text{Lemma I.14}}{\implies} f$ ist μ -messbar.

□

Satz I.21 (Egorov)

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ -messbare, μ -fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

- (i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$
- (ii) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf B

Beweis. $E := \{x \in D \mid f_n(x), f(x) \text{ sind endlich und } f_n(x) \rightarrow f(x)\}$

Vor. $\implies \exists \mu$ -Nullmenge N mit $D \setminus E \subseteq N$

O.B. $E = D$ (sonst ersetze D durch $D \setminus N$)

Sei $C_{i,j} := \bigcup_{n=j}^{\infty} \{x \in D \mid |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$

Satz I.17 $\implies C_{i,j} \in \mathcal{A}$ und $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}$

$\mu(D) < \infty \xrightarrow{\text{Satz I.7}} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_{i,j}\right) = 0$, denn $f_n \rightarrow f$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben

$\implies \forall i \in \mathbb{N} \exists N(i) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon \cdot 2^{-i}$

Setze $B := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$ und $\mu(D \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)}\right) \stackrel{\text{Satz I.7}}{\leq} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon$

$\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in B \forall n > N(i)$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \implies f_n \rightarrow f$ auf B

□

II Äußere Maße

Def. II.1

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X , falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Bem.:

1. Die Begriffe σ -additiv, σ -subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ -fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall \mathcal{A} durch $\mathcal{P}(X)$)
2. Ein äußeres Maß ist monoton, σ -subadditiv und insbesondere endlich subadditiv (d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$)

Def. II.2

Sei μ äußeres Maß auf X . Die Menge $A \subseteq X$ heißt **μ -messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ -messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

Bem.:

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) = \mu(S) \quad \forall S \subseteq X$

Bsp.:

Jedes auf $\mathcal{P}(X)$ definierte Maß ist ein äußeres Maß (Satz I.7), also sind das DiracMaß und das Zählmaß äußere Maße.

Satz II.3

Sei \mathcal{Q} ein System von Teilmengen einer Menge X , welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf \mathcal{Q} mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion $\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right\}$.

Dann ist μ ein äußeres Maß. ($\inf \emptyset = \infty$)

Beweis. Mit $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{Q}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$.

Sei $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ mit $E, E_i \subseteq X$ und $\mu(E_i) < \infty$.

z.z.: $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$

Wähle Überdeckungen $E_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$, so dass zu $\epsilon > 0$ gegeben gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon, \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\implies E \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} P_{i,j} \text{ und damit } \mu(E) \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) + \epsilon$$

Mit $\epsilon > 0$ folgt $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$ □

Satz II.4

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ äußeres Maß auf X . Für $M \subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu_{\perp M} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \mu_{\perp M}(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu_{\perp M}$ auf X , welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.

Es gilt:

$$A \text{ } \mu\text{-messbar} \implies A \text{ } \mu_{\perp M}\text{-messbar}$$

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu_{\perp M}$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subseteq X$ μ -messbar und $S \subseteq X$ beliebig:

$$\begin{aligned} \mu_{\perp M}(S) &= \mu(S \cap M) \\ &\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\ &= \mu_{\perp M}(S \cap A) + \mu_{\perp M}(S \setminus A) \end{aligned}$$

\implies Behauptung □

Satz II.5

μ äußeres Maß auf X . Dann gilt:

$$\begin{aligned} N \text{ } \mu\text{-Nullmenge} &\implies N \text{ } \mu\text{-messbar} \\ N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} &\implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \text{ } \mu\text{-Nullmenge} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subseteq X$ folgt aus Monotonie:

$$\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0, \mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N) \implies N \text{ } \mu\text{-messbar}$$

Zweite Behauptung folgt aus σ -Subadditivität. \square

Bem.:

$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ -messbar sind.

Bsp.:

Auf X bel. definiere: $\beta(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$ β ist äußeres Maß.

Es sind nur \emptyset und X β -messbar, denn für $X = S$ folgt aus der Annahme, dass A β -messbar ist: $1 \geq \beta(A) + \beta(X \setminus A)$

Vorlesung 5
16.11.20

Lemma II.6

Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, \dots, k$, paarweise disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$

Beweis. $k = 1$: trivial

$k \geq 2$: A_k μ -messbar

$$\begin{aligned} \mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) &= \mu\left(\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cap A_k\right) + \mu\left(\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) \setminus A_k\right) \\ &= \mu(S \cap A_k) + \mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) \end{aligned}$$

\square

Satz II.7

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ -Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Notation: Schreibe \mathcal{M} statt $\mathcal{M}(\mu)$

Es gilt:

- $x \in \mathcal{M}$, denn: $\forall S \subseteq X$ ist:

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$$
- Sei $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$$

Als nächstes zeigen wir:

$A, B \in \mathcal{M} \implies A \cap B \in \mathcal{M} \forall S \subseteq X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \\ \mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A) \end{aligned}$$

$$\implies \mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$$

$\implies A \cup B \in \mathcal{M}$, denn:

$$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$$

Per Induktion:

\mathcal{M} ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen.

Jetzt: μ ist σ -additiv auf \mathcal{M} .

Seien $A_j, j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $A_j \in \mathcal{M} \forall j \in \mathbb{N}$

Wähle $S = A_1 \cup A_2$ und benutze $A_1 \in \mathcal{M}$

$$\implies \mu(S) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad (= \mu(S \cap A_1) + \mu(S \setminus A_1))$$

Induktion: Dasselbe gilt für endliche disjunkte Vereinigungen.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \end{aligned}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \implies \text{Behauptung}$$

Als letztes: \mathcal{M} ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen

Seien $A_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$. O.B. seien A_j paarweise disjunkt, sonst betrachte

$$\tilde{A}_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$$

Für $S \subseteq X$ folgt mit $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i) \\ &\stackrel{\text{Lemma II.6}}{\geq} \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lasse $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(S) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S \cap A_i)\right) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &= \mu(S \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Vollständigkeit von μ : siehe Lemma II.5 □

Lemma II.8

μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.

Dann gelten:

- i) Aus $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$ folgt $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$
- ii) Aus $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

Beweis. Folgt aus Satz I.7 und Satz II.7 □

Def. II.9

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **U-stabil** (bzw. **∩-stabil**, **\-stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

Bem.:

U-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso ∩-stabil.

Def. II.10

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X , falls:

- i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

\mathcal{R} heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Bsp.:

- i) Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ ein Ring, aber für $A \neq X$ keine Algebra.
- ii) System aller endlichen Teilmengen einer bel. Menge ist ein Ring.
- iii) Ebenso System aller höchstens abzählbaren Teilmengen.

Bem.:

Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$

Ringe sind \cup -stabil, \cap -stabil, \setminus -stabil

Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10)

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf \mathcal{R} , falls:

- i) $\lambda(\emptyset) = 0$
- ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$$\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

Bem.:

σ -subadditiv, subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Bsp.:

- i) \mathcal{R} Ring über X . $\lambda(A) = \begin{cases} 0 & H = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
- ii) \mathcal{R} sei Ring der endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge X und $\lambda = \text{card}|_{\mathcal{R}}$ ist Prämaß
- iii) Alle Maße sind Prämaße. Insbesondere äußere Maße eingeschränkt auf die messbaren Mengen.

Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11)

λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf \mathcal{A}) heißt **Fortsetzung** von λ , falls gilt:

- i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$
- ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ -messbar

Satz II.13 (Caratheodory-Fortsetzung — Im Aufschrieb II.12)

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus \mathcal{R} konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ .

μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ .

Beweis.

- i) $\mu(A) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{R}$

Wir haben $\mu(A) \leq \lambda(A)$ aus Def. mit $A_1 = A, A_2 = \dots = \emptyset$

Für $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht es zz, dass:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ mit } A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

$$\text{Betrachte paarweise disjunkte Mengen } B_i = (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$$

$$\implies \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

- ii) Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ -messbar.

Sei $A \in \mathcal{R}, S \subseteq X$ bel. mit $\mu(S) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, sodass $S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap A)$ und $S \setminus A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A)$

$$\begin{aligned} \implies \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \epsilon \end{aligned}$$

Lasse $s \downarrow 0 \implies A \in \mathcal{M}(\mu)$

Für $\mu(S) = \infty$ ist das trivial.

□

Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)

μ sei Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf dem Ring \mathcal{R} über X . Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf \mathcal{R} , dann gilt $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$:

$$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

Beweis. $\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{R}$

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(P_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i)$$

Bilde Infimum über alle solche Überdeckungen

$$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$$

□

Vorlesung 6
20.11.20

Satz II.15 (Im Aufschrieb II.14)

Sei $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ex. ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf \mathcal{R} . Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ -endlich ist.

Beweis. Existenz folgt aus Satz II.13 und Satz II.7 ($\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$). Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \lambda$ auf \mathcal{R} . Für $A_i \in \mathcal{R}$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i = A \in \sigma(\mathcal{R})$ folgt aus Satz I.7.

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu(A). \text{ Für } E \in \sigma(\mathcal{R}) \text{ mit } \mu(E) < \infty \text{ und } \epsilon > 0$$

$$\text{ex. Mengen } A_i \in \mathcal{R}, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ mit } E \subseteq A \text{ und } \mu(A) \leq \mu(E) + \epsilon \implies \mu(A \setminus E) \leq \epsilon.$$

Aus $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ und Lemma II.14 (i.A. II.13) folgt

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(E) + \tilde{\mu}(A \setminus E) \leq \tilde{\mu}(E) + \mu(A \setminus E) \leq \tilde{\mu}(E) + \epsilon.$$

Lasse $\epsilon > 0$ und betrachte $\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$ (Lemma II.14 / i.A. II.13) $\implies \mu(E) = \tilde{\mu}(E)$.

Sei nun λ σ -endlich. Dann ex. o.B.d.A. paarweise disjunkte $X_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_n) < \infty$

und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Für $E \in \sigma(\mathcal{R})$ bel. folgt:

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E \cap X_n) = \tilde{\mu}(E) \implies \mu = \tilde{\mu} \text{ auf } \sigma(\mathcal{R}).$$

□

Satz II.16 (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung — i.A. II.15)

Sei μ Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ auf Ring \mathcal{R} über X .

Dann ex. $\forall D \subseteq X$ ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.

(μ ist „reguläres“ äußeres Maß)

Beweis.

$$\mu(D) = \infty \rightarrow \text{Wähle } E = X$$

$\mu(D) \leq \infty$: Aus Def. von Caratheodory-Fortsetzung folgt $\forall n \in \mathbb{N} \exists E^n \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $D \subseteq E^n$ und $\mu(E^n) \leq \mu(D) + \frac{1}{n}$.

Wähle $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E^n \implies E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $D \subseteq E$ und

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(D) \leq \mu(E) \leq \mu(E^n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i^n) \leq \mu(D) + \frac{1}{n} < \infty. \quad n \rightarrow \infty \implies \mu(E) = \mu(D).$$

□

Satz II.17 (i.A. II.16)

Sei λ ein σ -endliches Prämaß auf Ring \mathcal{R} über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ . Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ -Algebra von $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$.

D.h. $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Satz II.7 $\implies \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ ist vollständiges Maß.

Satz I.10 $\implies \sigma(\mathcal{R})_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$. Sei $D \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $\mu(D) < \infty$. Wähle $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $D \subseteq E$.

Aus Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies \mu(D) = \mu(E) = \mu(E \cap D) + \mu(E \setminus D) = \mu(D) + \mu(E \setminus D) \implies \mu(E \setminus D) = 0$.

λ σ -endlich $\implies \exists X_n \in \mathcal{R}$ mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ und $\mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $D \in \mathcal{M}(\mu)$ bel. setze $D_n := \bigcup_{k=1}^n D \cap X_k \implies D_n \subseteq D_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(D_n) < \infty$,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Wie bewiesen ex. $E_n \supset D_n$ mit $E_n \in \sigma(\mathcal{R})$ und $\mu(E_n \setminus D_n) = 0$. Für $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D$

folgt $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E \setminus D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus D_n) = 0$.

Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies \exists N \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $N \supset (E \setminus D)$ und $\mu(E \setminus D) = \mu(N) = 0 \implies D = (E \setminus N) \cup (D \cap N) \implies \mathcal{M}(\mu) = \overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} \implies$ Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$.

Eindeutigkeit folgt jetzt daraus und aus Satz II.15 (i.A. II.14). □

Lemma II.18 (i.A. II.17)

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ σ -endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Caratheodory-Fortsetzung μ . $D \subseteq X$ ist genau dann μ -messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- i) $\exists E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$
- ii) $\exists C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$

Def. II.19

Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Halbring** über X , falls:

- i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$
- ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$
- iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^k P_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$

Bsp.:

X beliebige Menge. $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$

Bem.:

$I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gibt, sodass: $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$. Das System aller Intervalle bezeichnen wir mit \mathcal{I} .

Ein achsenparalleler n -dim. **Quader** (kurz: Quader) ist Produkt $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ von Intervallen. Das System aller Quader wird mit \mathcal{Q}^n bezeichnet.

Satz II.20 (i.A. II.19)

\mathcal{I} ist ein Halbring.

Beweis. $\emptyset \in \mathcal{I}$, denn $\emptyset = (a, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ bel. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit Grenzen $a \leq b$ bzw. $c \leq d$. Für $I \cap J \neq \emptyset$ ist $\max(a, c) \leq \min(b, d)$ und $(\max(a, c), \min(b, d)) \subset I \cap J \subset [\max(a, c), \min(b, d)] \implies I \cap J \in \mathcal{I}$.

Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ können wir o.B. $J \subset I$ annehmen.

Setze $I' = x \in I \setminus J : x \leq c$, $II' = x \in I \setminus J : x \geq d$.

Falls $I' \cap II' \neq \emptyset \implies c = d \in I \setminus J \implies J = \emptyset \implies I \setminus J = I$.

Andernfalls ($I' \cap II' = \emptyset$) gilt: $I \setminus J = I' \cup II'$ wobei $(a, c) \subset I' \subset [a, c]$, $(d, b) \subset II' \subset [d, d]$. □

Satz II.21 (i.A. II.20)

Für $i = 1, \dots, n$ sei \mathcal{Q}_i Halbring über X_i . Dann ist $\mathcal{Q} := \{P_1 \times \dots \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$ ein Halbring über $X_1 \times \dots \times X_n$.

Beweis. Nur für $n = 2$ (Rest per Induktion)

- 1 Es ist $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{Q}$
- 2 Für $P = I_1 \times I_2$ und $Q = J_1 \times J_2$ gilt: $P \cup Q = (I_1 \cup J_1) \times (I_2 \cup J_2) \in \mathcal{Q}$
- 3 $P \setminus Q = ((I_1 \cup J_1) \times I_2 \setminus J_2) \cup ((I_1 \setminus J_1) \times I_2)$
Sowohl $I_2 \setminus J_2$ als auch $I_1 \setminus J_1$ sind als disjunkte Verbindungen darstellbar, da $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ Halbringe sind. $\implies P \setminus Q \in \mathcal{Q}$. \square

Satz II.22 (i.A. II.21)
 \mathcal{Q}^n ist ein Halbring.

Vorlesung 7
23.11.20

Satz II.23 (i.A. II.22)

\mathcal{Q} Halbring über X und \mathcal{F} sei das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$ von Mengen $P_i \in \mathcal{Q}$. Dann ist \mathcal{F} der von \mathcal{Q} erzeugte Ring.

Beweis. Jeder Ring \mathcal{R} mit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ enthält $\mathcal{F} \implies$ Reicht zu zeigen: \mathcal{F} ist ein Ring.
Es gilt: $\emptyset \in \mathcal{F}$

$E, F \in \mathcal{F}$. Sei $E = \bigcup_{i=1}^k P_i, F = \bigcup_{j=1}^m Q_j, P_i, Q_j \in \mathcal{Q}$

$$\implies E \setminus F = \left(\bigcup_{i=1}^k P_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \right) = \bigcup_{i=1}^k (P_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \right)) = \bigcup_{i=1}^k \left(\bigcap_{j=1}^m P_i \setminus Q_j \right)$$

$E, F \in \mathcal{F} \implies E \cup F \in \mathcal{F}$.

z.z: \mathcal{F} ist \cap -stabil

$$E \cap F = \left(\bigcup_{j=1}^k P_j \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m Q_j \right) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m (P_i \cap Q_j) \in \mathcal{F}.$$

\square

Bsp.:

1. \mathcal{Q}^n alle Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$
 \implies erzeugter Ring \mathcal{F}^n . Elemente davon nennen wir **Figuren**.
2. $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$
 \implies erzeugter Ring \mathcal{F} : Ring der endlichen Teilmengen von X .

Lemma II.24 (i.A. II.23)

\mathcal{Q} Halbring über X , \mathcal{F} der von \mathcal{Q} erzeugte Ring. $\implies \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$

Beweis. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F} \implies \sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\mathcal{F})$

$\sigma(\mathcal{Q}) \cup$ -stabil $\implies \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{Q}) \implies \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{Q})$ \square

Lemma II.25 (i.A. II.24)

\mathcal{Q} Halbring über X , \mathcal{F} der von \mathcal{Q} erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existieren paarweise disjunkte $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{Q}$ mit $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$

Beweis. Sei $F \in \mathcal{F}$.

Satz II.22 (i.A. Satz II.21) $\implies F = \bigcup_{l=1}^m Q_l$ mit $Q_l \in \mathcal{Q} \implies F = \bigcup_{l=1}^m (Q_l \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} Q_j)$,

(wobei $Q_l \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} Q_j$ paarweise disjunkt).

z.z. $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m Q_i$ mit Q, Q_1, \dots, Q_n besitzt eine disjunkte Zerlegung in \mathcal{Q} .

Induktion: $n = 1$ Folgt aus Definition von Halbring. Sei $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m Q_i$ disjunkte Zerlegung

schon gefunden: $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m Q_i = \bigcup_{j=1}^k P_j$

$\implies Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} Q_i = (\bigcup_{j=1}^k P_j) \setminus Q_{n+1} = \bigcup_{j=1}^k (P_j \setminus Q_{n+1})$ ($P_j \setminus Q_{n+1}$ paarweise disjunkt).

Nach Def. von \mathcal{Q} ist $P_j \setminus Q_{n+1}$ disjunkte Ver. von Elementen in \mathcal{Q} . \square

Def. II.26 (i.A. II.25)

Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf \mathcal{Q} , falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{Q}$ gilt: $\lambda(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$

λ heißt **Prämaß** auf \mathcal{Q} , falls λ σ -additiv auf \mathcal{Q} ist.

D.h. für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt ($i \in \mathbb{N}$) mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{Q}$: $\lambda(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Bem.:

σ -subadditiv, subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton, ... sind wie vorher definiert.

Ist \mathcal{Q} in Def. II.26 [i.A. II.25] ein Ring, so stimmt die Definition des Prämaßes mit Def. II.11 [i.A. II.10] überein.

Satz II.27 (i.A. II.26)

λ Inhalt auf Halbring \mathcal{Q} und \mathcal{F} der von \mathcal{Q} erzeugte Ring. Dann ex. genau ein Inhalt $\bar{\lambda} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\bar{\lambda}(Q) = \lambda(Q) \forall Q \in \mathcal{Q}$.

Beweis. $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$ mit $P_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt.

Lemma II.24 (i.A. Lemma II.23), so muss für jede Fortsetzung gelten:

$$\bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(P_i) = \sum_{i=1}^k \lambda(P_i)$$

→ Eindeutigkeit

Ex: Definiere $\bar{\lambda}$ durch $\bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^k \lambda(P_i)$.

$\bar{\lambda}$ wohldefiniert. Sei $F = \bigcup_{i=1}^k P_i = \bigcup_{j=1}^l Q_j$ paarweise disjunkt mit $Q_j \in \mathcal{Q}$.

$$\implies Q_j = \bigcup_{i=1}^k Q_j \cap P_i, j = 1, \dots, l, P_i = \bigcup_{j=1}^l P_i \cap Q_j, i = 1, \dots, k$$

$$\implies \sum_{j=1}^l \lambda Q_j = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \lambda(Q_j \cap P_i) = \sum_{i=1}^k \lambda(P_i)$$

$\implies \bar{\lambda}$ wohldefiniert

Sei $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ paarweise disjunkt mit $F_i \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$. Schreibe $F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$

paarweise disjunkt

$$\implies \bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \bar{\lambda}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(F_i) \implies \bar{\lambda} \text{ Inhalt.} \quad \square$$

Lemma II.28 (i.A. II.27)

λ Inhalt auf Halbring \mathcal{Q} über X

$\implies \lambda$ ist monoton und subadditiv

Beweis. Satz II.27 (i.A. Satz II.26) \implies o.B. \mathcal{Q} ist Ring

$\implies P, Q \in \mathcal{Q}, Q \supset P \implies \lambda(Q) = \lambda(P) + \lambda(Q \setminus P) \geq \lambda(P) \rightarrow \lambda$ ist monoton.

Für $P_i \in \mathcal{Q}, i = 1, \dots, k$ folgt

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^k P_i\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^k \left(P_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^k \lambda\left(P_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j\right)\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda(P_i) \quad \square$$

Bsp.:

Auf \mathcal{Q}^n elementargeometrisches Volumen vol^n .

Sei $Q \in \mathcal{Q}$ mit $Q = I_1 \times \dots \times I_n, I_j \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit Intervallgrenzen $a_j \leq b_j$

$$vol^n(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \geq 0$$

Satz II.29 (i.A. II.28)

$vol^n(\cdot)$ ist ein Inhalt auf \mathcal{Q}^n

Beweis. $vol^n(\emptyset) = 0$

Endliche Additivität per Induktion

Für $n=1$ sind \mathcal{Y}_{I_j} Riemann-Int. und für I_1, \dots, I_k paarweise disjunkt gilt:

$$vol^1\left(\bigcup_{i=1}^k I_i\right) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^k \mathcal{Y}_{I_i}(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \mathcal{Y}_{I_i}(x) dx = \sum_{i=1}^k vol^1(I_i).$$

Sei jetzt Aussage für vol^{n-1} im \mathbb{R}^{n-1} schon bewiesen. Betrachte für $Q = I_1 \times \dots \times I_m \in \mathcal{Q}^n$ den y-Schnitt.

$Q^y = x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in Q = I_1 \times \dots \times I_{n-1}$ falls $y \in I_n$ (\emptyset sonst).

Es gilt: $\text{vol}^{n-1}(Q^y) = \text{vol}^{n-1}(I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \mathcal{Y}_{I_n}(y)$ und für jede paarweise disjunkte Zerlegung von $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ mit $Q_i \in \mathcal{Q}^n$ gilt:

$$Q^y = \left(\bigcup_{i=1}^k Q_i \right)^y = \bigcup_{i=1}^k Q_i^y$$

$$\implies \text{vol}^n\left(\bigcup_{i=1}^k Q_i\right) = \text{vol}^n(Q) = \text{vol}^{n-1}(I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \text{vol}^1(I_n)$$

$$= \text{vol}^{n-1}(I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{Y}_{I_n}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \text{vol}^{n-1}\left(\bigcup_{i=1}^k Q_i^y\right) dy = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \text{vol}^{n-1}(Q_i^y) dy$$

$$= \sum_{i=1}^k \text{vol}^n(Q_i)$$

□

Satz II.30 (i.A. II.29)

$\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$, \mathcal{R} der von \mathcal{Q} erzeugte Ring und $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt auf \mathcal{R} mit $\bar{\lambda}|_{\mathcal{Q}} = \lambda$ (Satz II.27 / i.A. II.26), so ist $\bar{\lambda}$ ein Prämaß auf \mathcal{R} .

Beweis. Sei $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ mit $F, F_i \in \mathcal{R}$ und F_i paarweise disjunkt.

Lemma II.25 (i.A. Lemma II.24) $\implies \exists$ paarweise disjunkte Zerlegungen $F = \bigcup_{j=1}^k P_j$

und $F_i = \bigcup_{k=1}^{k_i} P_{i,k}$ mit $P_j, P_{i,k} \in \mathcal{Q}$

$$\implies P_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_j \cap F_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_i} (P_j \cap P_{i,k}) \text{ paarweise disjunkt}$$

$$\lambda \text{ Prämaß} \implies \lambda(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_i} \lambda(P_j \cap P_{i,k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(P_j \cap F_i)$$

$$\implies \bar{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^k \lambda(P_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(F_i)$$

$$\implies \bar{\lambda} \text{ ist Prämaß.}$$

□

Vorlesung 8
27.11.20

Bem.:

Satz II.27 (i.A. II.26) $\implies \bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^n \lambda(Q_i)$ für $F \in \mathcal{R}$ mit $F = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ mit paarweise disjunkten $Q_i \in \mathcal{Q}$ (Lemma II.25 / i.A. II.24). Betrachte äußere Maße für λ auf \mathcal{Q} und $\bar{\lambda}$ auf \mathcal{R} aus Satz II.3.

Es gilt: $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}, \lambda = \bar{\lambda}$ auf \mathcal{Q}

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\} \\ & \geq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(\bar{F}_i) \mid F_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right\} \\ & = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{j_i} \lambda(Q_{i,j}) \mid F_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j}, Q_{i,j} \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j} \right\} \\ & = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\} \end{aligned}$$

Satz II.31 ((i.A. II.30))

$\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus \mathcal{Q} konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$ ist:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ .

Bem.:

Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies \mu$ ist reguläres äußere Maß

Satz II.7 $\implies \mu$ ist vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$

$(X, \mathcal{M}(\mu), \mu|_{\mathcal{M}(\mu)})$ ist Vervollständigung von $(X, \sigma(\mathcal{Q}), \mu|_{\sigma(\mathcal{Q})})$ und ist auf $\mathcal{M}(\mu)$ eindeutig bestimmt (Satz II.17 / i.A. II.16).

Speziell: $D \subseteq X$ μ -messbar $\Leftrightarrow \exists C \in \sigma(\mathcal{Q})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$ (Lemma II.18 / i.A. II.17)

Satz II.32 ((i.A. II.31))

Für einen Inhalt λ auf Ring \mathcal{R} und $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, betrachte:

- i) λ ist Prämaß auf \mathcal{R}
- ii) Für $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt: $\lambda(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$
- iii) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lambda(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$$
- iv) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ gilt: $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(A_i) = 0$

Dann gilt: i) \Leftrightarrow ii) \implies iii) \implies iv)

Ist λ endlich, d.h. $\lambda(A) < \infty \forall A \in \mathcal{R}$, dann sind i) - iv) äquivalent.

Beweis. i) \implies ii) \implies iii) Siehe Beweis von Satz I.7

iii) \implies iv) ist trivial

ii) \implies i) Seien $A_n \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

$\implies B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$ erfüllt Bed. von ii) mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$

$\implies \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$

λ endlich. z.z. iv) \implies ii)

Sei $(A_i) \subset \mathcal{R}$ monoton aufsteigende Folge mit $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Für $B_n := A \setminus A_n$ gilt

$B_n \supset B_{n+1}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

iv) $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) = 0 \implies \lambda(B_n) = \lambda(A \setminus A_n) = \lambda(A) - \lambda(A_n)$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \implies$ ii)

□

III Das Lebesgue-Maß

Lemma III.1

Der elementargeometrische Inhalt $vol^n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Prämaß auf dem Halbring \mathcal{Q}^n im \mathbb{R}^n

Beweis. Sei $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $P, P_i \in \mathcal{Q}^n \forall i \in \mathbb{N}$.

Satz II.27 (i.A. Satz II.26) $\implies vol^n$ ist Inhalt auf Ring $\mathcal{F}^n \implies \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i)$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k vol^n(P_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} vol^n\left(\bigcup_{i=1}^k P_i\right) \leq vol^n(P).$$

Wähle zu $\epsilon > 0$ offene Quader $Q_i \supset P_i$ und einen kompakten Quader $Q \subset P$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} vol^n(Q_i) < \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) + \frac{\epsilon}{2}$, $vol^n(P) < vol^n(Q) + \frac{\epsilon}{2}$.

Satz von Heine-Borel (Satz (XIV).22 Ana1): Q wird von endlich vielen Quadern

$Q_i \times \dots \times Q_k$ überdeckt ($Q \subset P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$)

$$\implies vol^n(P) < vol^n(Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^k vol^n(Q_i) + \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) + \epsilon.$$

Lasse $\epsilon > 0 \implies vol^n(P) \leq \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i)$. □

Def. III.2

Das **n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß** einer Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\lambda^n(E) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} vol^n(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right\}$$

$\lambda^n|_{\mathcal{M}(\lambda^n)}$ ist das **n-dimensionale Lebesguemaß**.

Bem.:

Bem nach Satz II.31 (i.A. II.30) $\implies \lambda^n$ regulär und vollständig auf $\mathcal{M}(\lambda^n)$

Lemma III.3

Betrachte für $k \in \mathbb{N}_0$ die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0, 1]^n) \mid m \in \mathbb{R}^n\}$

und definiere für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ die Mengen

$$F_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subseteq E\} \quad F^k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

- i) $F_k(E)$ und $F^k(E)$ sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Quadern mit paarweise disjunktem Inneren.
- ii) $F_1(E) \subseteq F_2(E) \subseteq \dots \subseteq E \subseteq \dots \subseteq F^2(E) \subseteq F^1(E)$
- iii) $F_k(E) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > s^{-k} \sqrt{n}\}$
 $F^k(E) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) \leq s^{-k} \sqrt{n}\}$
- iv) $\overset{\circ}{E} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k(E) \subseteq E \quad , \quad \bar{E} \supseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^k(E) \supseteq E$

Beweis. $\bigcup \{Q : Q \in W_k\} = \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

W_k hat abzählbar viele Elemente, die Würfel aus W_k sind kompakt mit paarweise disjunktem Inneren und jede beschränkte Menge wird nur von endlich vielen Würfeln aus W_k getroffen. $\implies F_k(E), F^k(E)$ sind abgeschlossen \implies i)

$Q_{k,m}$ ist Vereinigung der 2^n Teilwürfel $Q_{k+1,2m+l}$ mit $l \in \{0,1\}^n$ und es gilt

$$Q_{k,m} \subset E \implies Q_{k+1,2m+l} \subset E \quad \forall l \in \{0,1\}^n$$

$$Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \emptyset \implies Q_{k,m} \cap E \neq \emptyset \quad \text{wobei } l \in \{0,1\}^n$$

$$\implies F_k(E) \subset F_{k+1}(E), F^k(E) \supset F^{k+1}(E) \implies \text{ii)}$$

Denn für $x \in E$ bel. existiert ein $Q \in W_k$ mit $x \in Q$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k} \sqrt{n} \implies \exists Q \in W_k$ mit $x \in Q$ und aus $\text{dist}(Q) = 2^{-k} \sqrt{n}$ folgt $Q \subset E \implies x \in F_k(E) \implies \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k} \sqrt{n}\} \subset F_k(E)$.

Ist $x \in F^k(E) \implies \exists Q \in W_k$ mit $x \in Q$ und $Q \cap E \neq \emptyset \implies x \in F^k(E) \implies \text{dist}(x, E) \leq \text{dist}(Q) \leq 2^{-k} \sqrt{n} \implies \text{iii)}$

iv) folgt sofort aus iii) und Def. von $\overset{\circ}{E}$ bzw. \bar{E} .

□

Vorlesung 9
30.11.20

Lemma III.4

Die Borelmengen \mathcal{B}^n sind die vom Halbring \mathcal{Q}^n der Quader, dem Ring \mathcal{F}^n der Figuren, und dem System \mathcal{C}^n der abgeschlossenen Mengen des \mathbb{R}^n erzeugten σ -Algebra, d.h. $\sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz III.5

Für λ^n gilt:

1. Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar

2. Zu $E \subseteq \mathbb{R}^n \exists$ Borelmenge $B \supseteq E$ mit $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$
3. $\lambda^n(K) < \infty \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Lemma III.6

Für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig gilt:

- i) $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen}, U \supset E\}$
- ii) $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E\}$, falls E λ^n -messbar

Satz III.7

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n -messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:

- i) \exists Borelmenge $E \supset D$ mit $\lambda^n(E \setminus D) = 0$
- ii) \exists Borelmenge $C \subset D$ mit $\lambda^n(D \setminus C) = 0$

Es kann $E = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ mit U_i offen und $C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ mit A_j abgeschlossen gewählt werden.

Satz III.8 (Satz von Lusin)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda^n(A) < \infty$ und sei f λ^n -messbar auf A mit Werten in \mathbb{R} . Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ ein $K = K_\epsilon \subseteq A$ kompakt, mit:

- i) $\lambda^n(A \setminus K) < \epsilon$
- ii) $f|_K$ ist stetig

Vorlesung 10
4.12.20

Def. III.9

Ein äußeres Maß μ auf \mathbb{R}^n heißt **Borelmaß**, falls gilt:

- 1. Alle Borelmengen sind μ -messbar
- 2. $\mu(K) < \infty \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Bem.:

λ^n ist Borelmaß nach Satz III.5.

Ein äußeres Maß μ auf \mathbb{R}^n heißt **translationsinvariant**, falls

$$\mu(E + a) = \mu(E) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n \text{ mit } E + a := \{x + a \mid x \in E\}$$

Bemerke: $\text{vol}^n : \mathcal{Q}^n \rightarrow [0, \infty]$ ist translationsinvariant $\implies \lambda^n$ ist translationsinvariant.

Lemma III.10

Ist μ translationsinvariantes Borelmaß auf \mathbb{R}^n , so ist jede Koordinaten-Hyperebene $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\} (i = 1, \dots, n)$ eine μ -Nullmenge.

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz III.11

Sei μ translationsinvariantes Borelmaß auf \mathbb{R}^n . Dann gilt mit $\theta := \mu([0, 1]^n)$:

$$\mu(E) = \theta \lambda^n(E) \quad \forall \lambda^n\text{-messbaren } E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Lemma III.12

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig mit Konstante Λ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt:

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq U$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz III.13

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

1. $N \subseteq U$ λ^n -Nullmenge $\implies f(N)$ λ^n -Nullmenge
2. $E \subseteq U$ λ^n -messbar $\implies f(E)$ λ^n -messbar

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz III.14

Sei $S \in O(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma III.15 (Polarzerlegung)

$\forall S \in GL(\mathbb{R}^n) \exists$ Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ und $T_1, T_2 \in O(\mathbb{R}^n)$, sodass $S = T_1 \Lambda T_2$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz III.16 (Lineare Transformationsformel)

Für eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(S(E)) = |\det(S)| \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

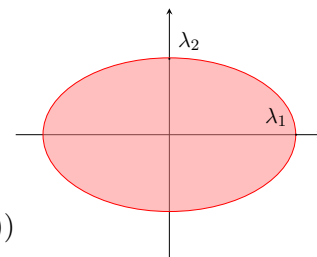
Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\frac{x_1}{\lambda_1})^2 + \dots + (\frac{x_n}{\lambda_n})^2 < 1\}$$

$$\text{mit } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^n) \text{ gilt } E = \Lambda(B_1(0))$$

$$\text{Satz III.16} \implies \lambda^n(E) = \lambda^n(\Lambda(B_1(0))) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \lambda^n(B_1(0))$$



Bsp.: (Vitali 1905)

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\lambda^n)$$

Beweis siehe Aufschrieb.

IV Lebesgue-Integral

Def. IV.1

X Menge, μ äußeres Maß. Eine Funktion $\zeta : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **μ -Treppenfunktion**, wenn sie μ -messbar ist und nur endlich viele Funktionswerte annimmt. Die Menge $\mathcal{T}(\mu)$ der μ -Treppenfunktionen ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{\zeta \in \mathcal{T}(\mu) \mid \zeta \geq 0\}$$

Bsp.:

$$E \subseteq X, \psi_E : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi_E(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Es ist: } \psi_E \text{ } \mu\text{-Treppenfunktion} \Leftrightarrow E \in \mathcal{M}(\mu)$$

Sei $\zeta \geq 0, \zeta = \sum_{i=1}^k s_i \psi_{A_i}$ mit A_i messbar und $s_i \geq 0$ und die A_i sind paarweise disjunkt.

So eine Darstellung heißt **einfach**.

Wir setzen:

$$(\star) \quad I(\zeta) := \sum_{i=1}^k s_i \mu(A_i)$$

Für $\zeta = 0$ folgt $I(\zeta) = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Jedes $\zeta \in \mathcal{T}^+(\mu)$ besitzt eine einfache Darstellung, z.B. können wir für s_i die endlich vielen Funktionswerte wählen und $A_i = \{\zeta = s_i\}$

Lemma IV.2

Das Integral $I : \mathcal{T}^+(\mu) \rightarrow [0, \infty]$ ist durch (\star) wohldefiniert. Für $\zeta, \psi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ und $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ gilt:

$$\text{i) } I(\alpha\zeta + \beta\psi) = \alpha I(\zeta) + \beta I(\psi)$$

$$\text{ii) } \zeta \leq \psi \implies I(\zeta) \leq I(\psi)$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Bem.:

Für A_i messbar und $s_i \geq 0$ folgt aus i) auch für A_i nicht disjunkt:

$$I(\zeta) = \sum_{i=1}^k s_i \mu(A_i) \quad \text{für } \zeta = \sum_{i=1}^k s_i \psi_{A_i}$$

Def. IV.3 (Lebesgue-Integral)

Für $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar, setze

$$\int f d\mu = \sup\{I(\zeta) \mid \zeta \in \mathcal{T}^+(\mu), \zeta \leq f\}$$

ζ heißt **Unterfunktion** von f .

Ist $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -messbar und sind die Integrale von f^\pm nicht beide unendlich, so setzen wir

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in [-\infty, \infty]$$

Bem.:

Für $f \geq 0$ sind beide Schritte kompatibel, denn dann gilt $f = f^+$ und $f^- = 0$

Lemma IV.4

Für $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$ gilt: $\int f d\mu = I(f)$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:

$\chi_{\mathbb{Q}}$ ist eine λ^1 -Treppenfunktion und es gilt:

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda^1 = I(\chi_{\mathbb{Q}}) = 0 \cdot \lambda^1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda^1(\mathbb{Q}) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Def. IV.5

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** bzgl. μ , wenn sie μ -messbar ist und wenn gilt:

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

Bsp.:

$\mu = \text{card}, X = \mathbb{N}_0$

z.z.: $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist bzgl. card auf \mathbb{N}_0 integrierbar $\implies \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ absolut konvergent

Dann gilt: $\int f d\text{card} = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$

Beweis siehe Aufschrieb

Satz IV.6

$f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -messbar. Ist $f \leq g$ μ -fast überall und $\int f^- d\mu < \infty$, so existieren beide Integrale und es ist: $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

„ \geq “ gilt entsprechend wenn $f^+ d\mu < \infty$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:

$f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, f μ -messbar und $g = f$ μ -fast überall $\xRightarrow{\text{Kapitel II}}$ g μ -messbar
Satz IV.6 $\implies \int g^\pm d\mu = \int f^\pm d\mu \implies \int f d\mu = \int g d\mu$

Vorlesung 12
11.11.2020

Bem.:

Einschub: zum Beweis von Satz III.7 siehe Aufschrieb

Lemma IV.7 (Tschebyscheff-Ungleichung)

Für $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar mit $\int f d\mu < \infty$ gilt:

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \frac{1}{s} \cdot \int f d\mu & \text{für } s \in (0, \infty) \\ 0 & \text{für } s = \infty \end{cases}$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Lemma IV.8

Sei $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -messbar.

- i) ist $\int f d\mu < \infty \implies \{f = \infty\}$ ist μ -Nullmenge
- ii) ist $f \geq 0$ und $\int f d\mu = 0 \implies \{f > 0\}$ ist μ -Nullmenge

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz IV.9

Zu $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $f_0 \leq f_1 \leq \dots$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \forall x \in X$.

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz IV.10 (Monotonie Konvergenz / Beppo-Levi)

Seien $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Dann gilt:

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz IV.11

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar bzgl. μ , so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Def. IV.12

Sei μ ein äußeres Maß auf X und $E \subseteq X$ sei μ -messbar. Dann setzen wir, falls das rechte Integral existiert

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

f heißt **auf E integrierbar**, wenn $f \chi_E$ integrierbar ist.

Bem.:

Wegen $(f \chi_E)^\pm = f^\pm \chi_E \leq f^\pm$ existiert das Integral von f über E auf jeden Fall dann, wenn $\int f d\mu$ existiert. (Speziell für $f \geq 0$)

Bsp.:

$\alpha \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^{-\alpha}$

Beh:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f d\lambda^n &< \infty \Leftrightarrow \alpha > n \\ \int_{B_1(0)} f d\lambda^n &< \infty \Leftrightarrow \alpha < n \end{aligned}$$

Beweis siehe Aufschrieb

Vorlesung 13
14.12.20

Satz IV.13

Sei $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -messbar. Dann gelten:

- i) f integrierbar $\Leftrightarrow |f|$ integrierbar
- ii) Es gilt: $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, falls das Integral von f existiert
- iii) Ist $g : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar mit $|f| \leq g$ μ -fast überall und $\int g d\mu < \infty$, so ist f integrierbar

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Bsp.:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ λ^n -messbar und es gelte für ein $C \in [0, \infty]$:
 $|f(x)| \leq C||x|^{-\alpha}$ fast überall in $B_\epsilon(0)$ mit $(\alpha < n)$ bzw.
 $|f(x)| \leq C||x|^{-\alpha}$ fast überall in $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ mit $\alpha > n$
 $\implies f$ ist auf $B_\epsilon(0)$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ integrierbar

V Konvergenzsätze und L^n -Räume

Bsp.:

Punktweise Konvergenz reicht nicht für Konvergenz der Integrale.

Für $\epsilon > 0$ sei $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}$

Es gilt $f_\epsilon(x) = 0$ für $\epsilon < |x|$

$$\implies f(x) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \neq 0 \\ \infty & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

Weiter $\int f_\epsilon d\lambda^1 = \frac{1}{2\epsilon} \lambda^1([-\epsilon, \epsilon]) = 1 \quad \forall \epsilon > 0$

$$\implies \int f d\lambda^1 = 0 < 1 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int f_\epsilon d\lambda^1$$

Satz V.1 (Lemma von Fatou)

$f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ Folge von μ -messbaren Funktionen.

Für $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $f(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ gilt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz V.2 (Dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)

f_1, f_2, \dots Folge von μ -messbare Funktionen und $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ für μ -fast alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$

für μ -fast alle x . Dann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu$.

Es gilt sogar $\|f_k \cdot f\|_{L^1(y)} := \int |f_k - f| d\mu \rightarrow 0$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.: (Anwendung)

Vergleich Riemann- \int mit Lebesgue- \int

Sei $I = [a, b]$ kompaktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Unterteilungspunkte $a = x_0 \leq \dots \leq x_N = b \rightarrow$ Zerlegung Z von I mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$

$$\bar{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^N (\sup_{I_j} f)(x_j - x_{j-1}), \quad \underline{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^N (\inf_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$$

Für Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$

$$\implies \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_2}(f)$$

f heißt **Riemann-integrierbar** mit Integral $\int_a^b f(x)dx = S$, falls gilt:

$$\sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \bar{S}_Z(f) = S$$

Satz V.3

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt auf kompaktem Intervall $I = [a, b]$. Dann gilt:

f Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0$

In diesem Fall ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz V.4

X metrischer Raum, μ Maß auf Y und $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. $\mu \forall x \in X$.

Betrachte $F : X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$

Sei $f(\cdot, y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ -fast alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ -integrierbare Funktion $g : Y \rightarrow [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x, y)| \leq g(y) \forall y \in Y \setminus N_x$ mit einer μ -Nullmenge N_x .

Dann ist F stetig in x_0 .

Beweis. siehe Aufschrieb □

Vorlesung 14
18.12.20

Satz V.5

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, μ Maß auf Y und $f : I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$.

Setze $F : U \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$

Es sei $f(\cdot, y)$ in x_0 differenzierbar für μ -fast alle $y \in Y$ und es existiere $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ μ -integrierbar mit

$$\frac{|f(x, y) - f(x_0, y)|}{|x - x_0|} \leq g(y) \quad \forall x \in I \quad \forall y \in Y \setminus N_x$$

mit einer μ -Nullmenge N_x . Dann folgt:

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)d\mu(y)$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma V.6

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, μ Maß auf Y und $f : \mathcal{U} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit f integrierbar bzgl. $\mu \ \forall x \in \mathcal{U}$.

Betrachte $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y)$

Es gebe eine μ -Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $\forall y \in Y \setminus N$ gilt:

$$f(\cdot, y) \in C^1(\mathcal{U}) \text{ und } |D_x f(x, y)| \leq g(y) \text{ mit } g : Y \rightarrow [0, \infty] \text{ integrierbar}$$

$\implies F \in C^1(\mathcal{U})$ und $\forall x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) d\mu(y)$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = ? \quad \text{Betrachte } F : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

$f(t, x) := e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}$ hat für $t \geq \delta$ die Abschätzungen

$$|f(t, x)|, |\partial_t f(t, x)| \leq e^{-\delta x} =: g(x) \in L^1([0, \infty))$$

Lemma V.6 $\implies \forall t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^\infty e^{-tx} (-\sin x) dx \\ &= [e^{-tx} \cos x]_{x=0}^{x=\infty} + t \int_0^\infty e^{-tx} \cos x dx \\ &= -1 + t^2 \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx \\ &= -1 - t^2 F'(t) \end{aligned}$$

$$\implies F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

... (siehe Aufschrieb)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Def. V.7 (L^p -Norm)

Für μ -messbares $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p} & , \text{ für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 \mid \mu(\{|f| > s\}) = 0\} & , \text{ für } p = \infty \end{cases}$$

auf $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f \mu\text{-messbar}, \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$

Betrachte Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$, und definiere den **L^p -Raum** durch $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$.

Def. V.8

Für $E \subseteq X$ messbar und $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ die **Fortsetzung** mit $f_0(x) = 0 \forall x \in X \setminus E$. Wir setzen dann

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und $L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E)/\sim$.

Proposition V.9

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$:

1. $\|f\|_{L^p} = 0 \implies f = 0$ μ -fast überall
2. $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu), \|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \|f\|_{L^p}$
3. $f, g \in L^p(\mu) \implies f + g \in L^p(\mu)$ und $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma V.10 (Youngsche Ungleichung)

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \geq 0$ gilt: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz V.11 (Höldersche Ungleichung)

Für μ -messbare $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $|\int f g d\mu| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$,
falls $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz V.12 (Minkowski-Ungleichung)

Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma V.13

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^k \|u_j\|_{L^p} < \infty$, so gelten:

- i) \exists μ -Nullmenge N : $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \forall x \in X \setminus N$ ex.
- ii) mit $f := 0$ auf N gilt $f \in L^p(\mu)$
- iii) $\|f - f_k\|_{L^p} \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Vorlesung 15
21.12.20

Satz V.14 (Satz von Riesz-Fischer)

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ist vollständig, also ein Banachraum. ($1 \leq p \leq \infty$)

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma V.15

Konvergiert f_k gegen f in $L^p(\mu)$, so konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} punktweise μ -fast überall gegen f .

Bsp.:

Im Fall $p < \infty$ kann im Allgemeinen nicht auf die Wahl einer Teilfolge verzichtet werden:
Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j < 2^k$

Definiere damit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } j \cdot 2^{-k} \leq x \leq (j+1)2^{-k} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 2^{-k} < \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty$$

Andererseits: $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1)$, denn zu $x \in [0, 1), k \in \mathbb{N}$ können wir

$j \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ wählen mit $j \cdot 2^{-k} \leq x < (j+1)2^{-k}$
 $\implies f_n(x) = j$ für $n = 2^k + j$
 \implies Folge konvergiert nicht punktweise λ^1 -fast überall gegen 0.

Bem.:

Jetzt betrachten wir $\mu = \lambda^n$ im \mathbb{R}^n .
Im \mathbb{R}^n haben wir eine Metrik.

Def. V.16

Der **Träger** einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist die Menge

$$\text{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_c^0(\Omega)$ bezeichnet.

Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei $\text{dist}(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \text{dist}(x, K) = \inf_{z \in K} \|x - z\|$ die

Abstandsfunktion von K .

Wir benötigen:

1. $\text{dist}(\cdot, K)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1
2. $\text{dist}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, K) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} \text{dist}(x, K) > 0$

Satz V.17

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $f \in C^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^0(\Omega)$ mit $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:

$BC^0(\Omega)$ bezeichnet die Menge der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω . Mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ ist diese ein Banachraum.

... (Rest siehe Aufschrieb)

Satz V.18

Für $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ konvergiert f_n gegen f in $L^2(I, \mathbb{C})$? (bezieht sich auf Bem. vorher)

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:

Sei $\ell^2(\mathbb{C})$ der Raum aller komplexen Folgen $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\|c\|_{\ell^2}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$

$\ell^2(\mathbb{C})$ ist vollständig (folgt aus Riesz-Fischer angewandt auf das Zählmaß auf \mathbb{Z})

Lemma V.19

Die Abbildung $\mathcal{F} : (L^2(I, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2}) \rightarrow (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}), \mathcal{F}(f) = (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine Isometrie von Hilberträumen.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:

Die Konvergenz der Fourierreihe ist ein Spezialfall des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren. Dieser verallgemeinert die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen (siehe LA) auf ∞ -dimensionalen Räume.

Hier ist der Operator $H = -\frac{d^2}{dx^2}$ ein Endomorphismus auf $C_{Per}^\infty(I)$

$$H : C_{Per}^\infty(I) \rightarrow C_{Per}^\infty(I), Hf = -\frac{d^2 f}{dx^2}$$

Part. Int. $\implies \langle Hf, g \rangle_{L^2} = \langle f, Hg \rangle_{L^2} \forall f, g \in C_{Per}^\infty(I)$ sowie $\langle Hf, f \rangle_{L^2} = \left\| \frac{df}{dx} \right\|_{L^2}^2 \geq 0$

Die w_k sind Eigenfunktionen von den Eigenvektoren $\lambda_k = k^2$:

$$Hw_k = \lambda_k^2 w_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Satz V.18: Der von den Eigenfunktionen w_k aufgespannte Raum ist dicht in $L^2(I, \mathbb{C})$

Vorlesung 16
08.01.21

Satz V.20 (Vitali)

Sei $f_n \in L^p(\mu), 1 \leq p < \infty$, eine Folge mit $f_n \rightarrow f$ punktweise fast überall. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $f \in L^p(\mu)$ und $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$
- 2) Mit $\lambda(A) = \limsup \int_A |f_n|^p d\mu$ gilt:
 - (a) zu $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $\lambda(A) < \epsilon \forall A$ messbar mit $\mu(A) < \delta$
 - (b) zu $\epsilon > 0 \exists E$ messbar mit $\mu(E) < \infty$ und $\lambda(X \setminus E) < \epsilon$

Im Fall $p = 1$ heißt eine Folge mit 1) und 2) **gleichgradig integrierbar**.

Beweis. siehe Aufschrieb □

VI Satz von Fubini

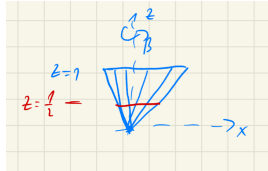
Bem.: (Prinzip von Cavalieri)

Haben zwei Körper in jeder Höhe Schnitte von gleichem Flächeninhalt, so haben sie auch auch das gleiche Volumen.

Bsp.: 1. Volumen eines Kegels.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Flächeninhalt $|B| = A$.

Betrachte $C = \{s(b, 1) \mid b \in B, 0 \leq s \leq 1\}$



Für $k \in [0, 1]$ ist der k -Schnitt von C die Menge

$$C_k = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) \in C\} = \{h \cdot b \mid b \in B\} = kB$$

$|C_k| = k^2 A$ Nach Cavalieri hängt $vol(C)$ nur von A ab.

Wir schreiben $vol(C) = V(A)$. Es gilt $V(kA) = kV(A)$ für $k \in \mathbb{N}$, betrachte dazu ... (siehe Aufschrieb)

2. Betrachte in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ die Mengen und die Inhalte der Zugehörigen z -Schnitte:

$$\text{Zylinder } Z = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, |Z_z| = \pi$$

$$\text{Kegel } C = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 1\}, |C_z| = \pi z^2$$

$$\text{Halbkugel } H = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 - z^2}, 0 \leq z \leq 1\}, |H_z| = \pi(1 - z^2)$$

$$\implies |Z_z| = |C_z| + |H_z| \xrightarrow{\text{Cavalieri}} vol(H) = vol(Z) - vol(C) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\implies vol(C) : vol(H) : vol(Z) = 1 : 2 : 3 \text{ (Archimedes)}$$

Def. VI.1

Seien α, β äußere Maße auf X, Y . Das **Produktmaß** $\alpha \times \beta$ einer Menge $E \subseteq X \times Y$ ist

$$(\star) \quad \alpha \times \beta(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j) \beta(B_j) \mid A_j, B_j \text{ messbar}, E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \right\}$$

Lemma VI.2

$\alpha \times \beta$ ist ein äußeres Maß

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Lemma VI.3

Sei $P = A \times B$. Eine Produktmenge, d.h. A, B sind messbar bzgl. α bzw. β . Dann gilt $\alpha \times \beta(P) = \alpha(A)\beta(B)$ und P ist $\alpha \times \beta$ -messbar.

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Satz VI.4 (Cavalierisches Prinzip)

Seien α und β σ -endliche äußere Maße auf X bzw. Y , und $D \subseteq X \times Y$ sei $\alpha \times \beta$ -messbar. Dann ist $D_y = \{x \in X \mid (x, y) \in D\}$ α -messbar für β -fast alle $y \in Y$. Die Funktion $y \mapsto \alpha(D_y)$ ist β -messbar und es gilt:

$$(\alpha \times \beta)(D) = \int_Y \alpha(D_y) d\beta(y)$$

Vorlesung 17

11.01.21

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Bem.:

Die Rollen von α und β können vertauscht werden, d.h. man betrachtet das β -Maß des X -Schnittes $D_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in D\}$ und integriert bzgl. α

$$\implies \alpha \times \beta(D) = \int_Y \alpha(D_y) d\beta(y) = \int_X \beta(D_x) d\alpha(x)$$

Bsp.:

Man kann nicht auf die σ -Endlichkeit verzichten.

$$D := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times [0, 1]$$
$$\int_{\mathbb{R}} \text{card}(D_x) d\lambda^1(x) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \lambda^1(D_y) d\text{card}(y)$$

Mit $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ gilt $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \times I_k) \implies D$ ist messbar bzgl. $\lambda^1 \times \text{card}$

Lemma VI.5

Es gilt $\lambda^n = \lambda^k \times \lambda^m$ für $k + m = n$

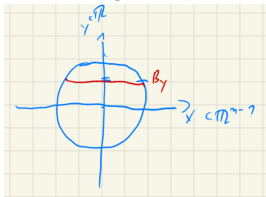
Beweis. siehe Aufschrieb

□

Vorlesung 18
15.01.21

Bsp.:

1. Volumen α_k der Kugel $B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| < 1\}$.
Für $y \in [-1, 1]$ ist $B_y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| < |1 - y^2|^{1/2}\}$



$$\alpha_n = \int_{-1}^1 \lambda^{n-1}(B_y) dy = \alpha_{n-1} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

$$\stackrel{y=\cos \theta}{=} \alpha_{n-1} A_n, \text{ mit } A_n = \int_0^\pi \sin^n \theta d\theta$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{\implies} A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \text{ dabei sind } A_0 = \pi, A_1 = 2$$

$$\implies A_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} A_0 = \pi \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}$$

$$A_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} A_1 = 2 \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}$$

$$\implies A_{2k+1} A_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1} \text{ bzw. } A_{2k} A_{2k-1} = \frac{\pi}{k}$$

$$\implies \alpha_{2k} = (A_{2k} A_{2k-1}) \dots (A_3 A_2) \alpha_0 = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\alpha_{2k+1} = (A_{2k} A_{2k-1}) \dots (A_3 A_2) \alpha_1 = \frac{\pi^k}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2}}$$

Bem: $\alpha_k \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$

2. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $K(A) = \{y(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < y < 1, x \in A\}$
Beh: A messbar bzgl. $\lambda^n \implies K(A)$ λ^{n+1} -messbar und $\lambda^{n+1}(K(A)) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(A)$
(siehe Aufschrieb)

Def. VI.6

Eine Funktion $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ heißt **σ -endlich** bzgl. des äußeren Maßes μ , falls gilt:

f ist μ -messbar und $\{f \neq 0\}$ ist σ -endlich

Satz VI.7 (Fubini)

Seien α, β äußere Maße auf X bzw. Y und $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei σ -endlich bzgl. $\alpha \times \beta$. Ist das Integral $\int f d(\alpha \times \beta)$ definiert, so gilt:

1. Für β -fast alle $y \in Y$ ist $f(\cdot, y)$ α -messbar, und $\int_X f(x, y) d\alpha(x)$ existiert.
2. $y \mapsto \int_X f(x, y) d\alpha(x)$ ist β -messbar und $\int_Y \int_X f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y)$ existiert.
3. $\int_{X \times Y} f d(\alpha \times \beta) = \int_Y \int_X f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y)$

Der Satz gilt auch mit vertauschten Reihenfolgen der Integrationen, also folgt:

$$\int_{X \times Y} f d(\alpha \times \beta) = \int_Y \int_X f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\beta(y) d\alpha(x)$$

Zusatz: Ist $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ σ -endlich und $\int_Y \int_X |f(x, y)| d\alpha(x) d\beta(y) < \infty$, so ist f integrierbar bzgl. $\alpha \times \beta$ und der Satz damit anwendbar.

Beweis. siehe Aufschrieb

□

Bsp.:

$$1. \left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \pi \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= -\pi \end{aligned} \right\} \text{ denn } \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \text{ für } y \neq 0$$

Fubini \implies Integral bzgl. $\lambda^2 = \lambda^1 \times \lambda^1$ ex nicht!

2.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$$

Aber das λ^2 -Integral über $[-1, 1]^2$ ex. nicht, da

$$\int_{[0,1]^2} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} d\lambda^2(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1 + y^2} \right) dy = \infty$$

Bsp.:

μ äußeres Maß auf X und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sei σ -endlich bzgl. μ . Ist $\mathcal{C} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ stetig mit $\mathcal{C}(0) = 0$, sowie auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar mit $\mathcal{C}'(t) \geq 0$, so gilt:

$$\int_X \mathcal{C}(f(x)) \, d\mu(x) = \int_0^\infty \mathcal{C}'(t) \mu(\{f > t\}) \, dt$$

(Begründung siehe Aufschrieb)