Satz .1
Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Satz .2 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ folgt: $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Satz .3
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Satz .4
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Satz .5
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k$$

Satz .6
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^\pm,\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Satz .7
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.

Satz .8 (Egorov)
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

(i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \to f$ gleichmäßig auf B

Satz .9
Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion $\mu(E) := \inf\{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} P_i\}$.
Dann ist μ ein äußeres Maß. $(\inf \emptyset = \infty)$

Satz .10
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß auf X. Für M $\subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X, welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.
Es gilt:

$$A \ \mu\text{-messbar} \implies A \ \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Satz .11
μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$N \ \mu\text{-Nullmenge} \implies N \ \mu\text{-messbar}$$
$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \ \mu\text{-Nullmenge}$$

Satz .12
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Satz .13 (Caratheodory-Fortsetzung — Im Aufschrieb II.12)
$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.
μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ.

Satz .14 (Im Aufschrieb II.14)
Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ex. ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.

Satz .15 (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung — i.A. II.15)
Sei μ Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf Ring $\mathcal{R}$ über X. Dann ex. $\forall D \subseteq X$ ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.
(μ ist „reguläres “äußeres Maß)

Satz .16 (i.A. II.16)
Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R}$ über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ-Algebra von $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}}$.
D.h. $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Satz .17 (i.A. II.19)
$\mathcal{I}$ ist ein Halbring.

Satz .18 (i.A. II.20)
Für $i = 1, ..., n$ sei $\mathcal{Q}_i$ Halbring über X_i. Dann ist $\mathcal{Q} := \{P_1 \times ... \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$ ein Halbring über $X_1 \times ... \times X_n$.

Satz .19 (i.A. II.21)
$\mathcal{Q}^n$ ist ein Halbring.