Vorlesung 1
02.11.2020

Ziele:

1. Maßtheorie $\rightarrow$ Lebesgue-Maß
   (Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bestimmen)
2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
   $\rightarrow$ Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)
3. Version des Hauptsatzes $\rightarrow$ Satz von Gauß

I Konvergenzsätze und L^n-Räume

Bsp.:
Punktweise Konvergenz reicht nicht für Konvergenz der Integrale.
Für $\epsilon > 0$ sei $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$
Es gilt $f_\epsilon(x) = 0$ für $\epsilon < |x|$
$\implies f(x) := \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x \neq 0 \\ \infty & \text{, für } x = 0 \end{cases}$
Weiter $\int f_\epsilon d\lambda^1 = \frac{1}{2\epsilon}\lambda^1([-\epsilon,\epsilon]) = 1 \; \forall \epsilon > 0$
$\implies \int f d\lambda^1 = 0 < 1 = \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon d\lambda^1$

Satz I.1 (Lemma von Fatou)
$f_k : X \to [0,\infty]$ Folge von μ-messbaren Funktionen.
Für $f : X \to \bar{\mathbb{R}}, f(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ gilt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.2 (Dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)
$f_1, f_2, ...$ Folge von μ-messbare Funktionen und $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0,\infty]$ mit $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ-fast alle x. Fann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu$.
Es gilt sogar $||f_k \cdot f||_{L^1(y)} := \int |f_k - f| d\mu \to 0$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.: (Anwendung)
Vergleich Riemann-$\int$ mit Lebesgue-$\int$
Sei $I = [a,b]$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Unterteilungspunkte $a = x_0 \leq ... \leq x_N = b \to$ Zerlegung Z von I mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$
$\bar{S}_Z(f) = \sum\limits_{j=1}^{N} (\sup\limits_{I_j} f)(x_j - x_{j-1}), \quad \underline{S}_Z(f) = \sum\limits_{j=1}^{N} (\inf\limits_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$

Für Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$
$\implies \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_2}(f)$
f heißt **Riemann-integrierbar** mit Integral $\int\limits_a^b f(x)dx = S$, falls gilt:
$\sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) = \inf\limits_Z \bar{S}_Z(f) = S$

Satz I.3
$f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt auf kompaktem Intervall $I = [a, b]$. Dann gilt:
f Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0$
In diesem Fall ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.4
X metrischer Raum, μ Maß auf Y und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ $\forall x \in X$.
Betrachte $F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$
Sei $f(\cdot, y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ-fast alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x, y)| \leq g(y)$ $\forall y \in Y \setminus N_X$ mit einer μ-Nullmenge N_x.
Dann ist F stetig in x_0.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Vorlesung 14
18.12.20

Satz I.5
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, μ Maß auf Y und $f : I \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$.
Setze $F : U \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$
Es sei $f(\cdot, y)$ in x_0 differenzierbar für μ-fast alle $y \in Y$ und es existiere $g : Y \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit

$$\frac{|f(x, y) - f(x_0, y)|}{|x - x_0|} \leq g(y) \ \forall x \in I \ \forall y \in Y \setminus N_x$$

mit einer μ-Nullmenge N_x. Dann folgt:

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)d\mu(y)$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma I.6
$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, μ Maß auf Y und $f : \mathcal{U} \times Y \to \mathbb{R}$ mit f integrierbar bzgl. μ $\forall x \in \mathcal{U}$.
Betrachte $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y)d\mu(y)$
Es gebe eine μ-Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $\forall y \in Y \setminus N$ gilt:

$$f(\cdot, y) \in C^1(\mathcal{U}) \text{ und } |D_x f(x,y)| \leq g(y) \text{ mit } g : Y \to [0,\infty] \text{ integrierbar}$$

$\implies$ $F \in C^1(\mathcal{U})$ und $\forall x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)d\mu(y)$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = ? \qquad \text{Betrachte } F : [0,\infty] \to \mathbb{R}, F(t) = \int\limits_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

$f(t,x) := e^{-tx}\dfrac{\sin(x)}{x}$ hat für $t \geq \delta$ die Abschätzungen
$|f(t,x)|, |\partial_t f(t,x)| \leq e^{-\delta x} =: g(x) \in L^1([0,\infty))$
Lemma V.6 $\implies$ $\forall t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int\limits_0^\infty e^{-tx}(-\sin x)dx \\ &= [e^{-tx}\cos x]_{x=0}^{x=\infty} + t\int\limits_0^\infty e^{-tx}\cos x dx \\ &= -1 + t^2\int\limits_0^\infty e^{-tx}\sin x dx \\ &= -1 - t^2 F'(t) \end{aligned}$$

$$\implies F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

... (siehe Aufschrieb)

$\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin(x)}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$

Def. I.7 (L^p-Norm)
Für μ-messbares $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$||f||_{L^p(\mu)} := \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p} & , \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 \mid \mu(\{|f| > s\}) = 0\} & , \text{für } p = \infty \end{cases}$$

auf $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \bar{\mathbb{R}} \mid f\mu - \text{messbar}\ , ||f||_{L^p(\mu)} < \infty\}$
Betrachte Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$, und definiere den $\boldsymbol{L^p}$**-Raum** durch $\mathcal{L}^p(\mu)/_\sim$.

Def. I.8
Für $E \subseteq X$ messbar und $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die **Fortsetzung** mit $f_0(x) = 0\ \forall x \in X \setminus E$. Wir setzen dann

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f : E \to \bar{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und $L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E)/_\sim$.

Proposition I.9
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), ||\cdot||_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$:

1. $||f||_{L^p} = 0 \implies f = 0$ μ-fast überall
2. $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu),\ ||\lambda f||_{L^p} = |\lambda|\ ||f||_{L^p}$
3. $f, g \in L^p(\mu) \implies f + g \in L^p(\mu)$ und $||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma I.10 (Youngsche Ungleichung)
Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \geq 0$ gilt: $\quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.11 (Höldersche Ungleichung)
Für μ-messbare $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt: $|\int fgd\mu| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^p}$,
falls $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.12 (Minkowski-Ungleichung)
Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma I.13
Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum\limits_{j=1}^{k} u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum\limits_{j=1}^{k} ||u_j||_{L^p} < \infty$, so gelten:

i) $\exists$ μ-Nullmenge N: $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ ex.

ii) mit $f := 0$ auf gilt $f \in L^p(\mu)$

iii) $||f - f_k||_{L^p} \to 0$ mit $k \to \infty$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz I.14 (Satz von Riesz-Fischer)
$(L^p(\mu), ||\cdot||_{L^p})$ ist vollständig, also ein Banachraum. $(1 \leq p \leq \infty)$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma I.15
Konvergiert f_k gegen f in $L^p(\mu)$, so konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} punktweise μ-fast überall gegen f.

Bsp.:
Im Fall $p < \infty$ kann im Allgemeinen nicht auf die Wahl einer Teilfolge verzichtet werden:
Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j < 2^k$
Definiere damit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } j \cdot 2^{-k} \leq x \leq (j+1)2^{-k} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$
$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = 2^{-k} < \frac{2}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$
Andererseits: $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ $\forall x \in [0,1)$, denn zu $x \in [0,1), k \in \mathbb{N}$ können wir
$j \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ wählen mit $j \cdot 2^{-k} \leq x < (j+1)2^{-k}$
$\implies$ $f_n(x) = 1$ für $n = 2^k + j$
$\implies$ Folge konvergiert nicht punktweise λ^1-fast überall gegen 0.

Bem.:
Jetzt betrachten wir $\mu = \lambda^n$ im $\mathbb{R}^n$.
Im $\mathbb{R}^n$ haben wir eine Metrik.

Def. I.16
Der **Träger** einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist die Menge

$$spt(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_c^0(\Omega)$ bezeichnet.
Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei $dist(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), dist(x, K) = \inf\limits_{z \in K} ||x - z||$ die **Abstandsfunktion** von K.
Wir benötigen:

1. $dist(\cdot, K)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1
2. $dist(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, K) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} dist(x, K) > 0$

Satz I.17
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $f \in C^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^0(\Omega)$ mit $||f_k - f||_{L^p(\Omega)} \to 0$ mit $k \to \infty$.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:
$BC^0(\Omega)$ bezeichnet die Menge der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω. Mit Supremumsnorm $|| \cdot ||_{sup}$ ist diese ein Banachraum.
... (Rest siehe Aufschrieb)

Satz I.18
Für $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ konvergiert f_n gegen f in $L^2(I, \mathbb{C})$? (bezieht sich auf Bem. vorher)

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:
Sei $\ell^2(\mathbb{C})$ der Raum aller komplexen Folgen $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $||c||_{\ell^2}^2 = 2\pi \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$
$\ell^2(\mathbb{C})$ ist vollständig (folgt aus Riesz-Fischer angewandt auf das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$)

Lemma I.19
Die Abbildung $\mathcal{F} : (L^2(I,\mathbb{C}), ||\cdot||_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{C}), ||\cdot||_{\ell^2}), \mathcal{F}(f) = (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine Isometrie von Hilberträumen.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:
Die Konvergenz der Fourierreihe ist ein Spezialfall des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren. Dieser verallgemeinert die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen (siehe LA) auf ∞-dimensionalen Räume.
Hier ist der Operator $H = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ ein Endomorphismus auf $C^\infty_{Per}(I)$
$H : C^\infty_{Per}(I) \to C^\infty_{Per}(I), Hf = -\dfrac{d^2 f}{dx^2}$
Part. Int. $\implies \langle Hf, g\rangle_{L^2} = \langle f, Hg\rangle_{L^2}\ \forall f, g \in C^\infty_{Per}(I)$ sowie $\langle Hf, f\rangle_{L^2} = ||\dfrac{df}{dx}||^2_{L^2} \geq 0$
Die w_k sind Eigenfunktionen von den Eigenvektoren $\lambda_k = k^2$:
$Hw_k = \lambda^2 w_k\ \forall k \in \mathbb{Z}$
Satz V.18: Der von den Eigenfunktionen w_k aufgespannte Raum ist dicht in $L^2(I,\mathbb{C})$