

**Ziele:**

1. Maßtheorie  $\rightarrow$  Lebesgue-Maß  
(Volumen von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  bestimmen)
2. Integralrechnung für Funktionen  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\rightarrow$  Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)
3. Version des Hauptsatzes  $\rightarrow$  Satz von Gauß

# I Konvergenzsätze und $L^n$ -Räume

**Bsp.:**

Punktweise Konvergenz reicht nicht für Konvergenz der Integrale.

Für  $\epsilon > 0$  sei  $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}$

Es gilt  $f_\epsilon(x) = 0$  für  $\epsilon < |x|$

$$\implies f(x) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \neq 0 \\ \infty & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

Weiter  $\int f_\epsilon d\lambda^1 = \frac{1}{2\epsilon} \lambda^1([-\epsilon, \epsilon]) = 1 \quad \forall \epsilon > 0$

$$\implies \int f d\lambda^1 = 0 < 1 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int f_\epsilon d\lambda^1$$

## Satz I.1 (Lemma von Fatou)

$f_k : X \rightarrow [0, \infty]$  Folge von  $\mu$ -messbaren Funktionen.

Für  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $f(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  gilt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

## Satz I.2 (Dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)

$f_1, f_2, \dots$  Folge von  $\mu$ -messbare Funktionen und  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ . Es gebe eine integrierbare Funktion  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$

für  $\mu$ -fast alle  $x$ . Dann ist  $f$  integrierbar und  $\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu$ .

Es gilt sogar  $\|f_k \cdot f\|_{L^1(\mu)} := \int |f_k - f| d\mu \rightarrow 0$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

## Bem.: (Anwendung)

Vergleich Riemann- $\int$  mit Lebesgue- $\int$

Sei  $I = [a, b]$  kompaktes Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Unterteilungspunkte  $a = x_0 \leq \dots \leq x_N = b \rightarrow$  Zerlegung  $Z$  von  $I$  mit Teilintervallen  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$

$$\bar{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^N (\sup_{I_j} f)(x_j - x_{j-1}), \quad \underline{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^N (\inf_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$$

Für Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  mit Verfeinerung  $Z_1 \cup Z_2$

$$\implies \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_2}(f)$$

$f$  heißt **Riemann-integrierbar** mit Integral  $\int_a^b f(x)dx = S$ , falls gilt:

$$\sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \bar{S}_Z(f) = S$$

**Satz I.3**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt auf kompaktem Intervall  $I = [a, b]$ . Dann gilt:

$f$  Riemann-integrierbar  $\Leftrightarrow \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0$

In diesem Fall ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz I.4**

$X$  metrischer Raum,  $\mu$  Maß auf  $Y$  und  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, \cdot)$  integrierbar bzgl.  $\mu \forall x \in X$ .

Betrachte  $F : X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$

Sei  $f(\cdot, y)$  stetig in  $x_0 \in X$  für  $\mu$ -fast alle  $y \in Y$ . Weiter gebe es eine  $\mu$ -integrierbare Funktion  $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ , so dass für alle  $x \in X$  gilt:  $|f(x, y)| \leq g(y) \forall y \in Y \setminus N_x$  mit einer  $\mu$ -Nullmenge  $N_x$ .

Dann ist  $F$  stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

Vorlesung 14  
18.12.20

**Satz I.5**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offenes Intervall,  $\mu$  Maß auf  $Y$  und  $f : I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, \cdot)$  integrierbar bzgl.  $\mu$  für alle  $x \in I$ .

Setze  $F : U \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y)d\mu(y)$

Es sei  $f(\cdot, y)$  in  $x_0$  differenzierbar für  $\mu$ -fast alle  $y \in Y$  und es existiere  $g : Y \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -integrierbar mit

$$\frac{|f(x, y) - f(x_0, y)|}{|x - x_0|} \leq g(y) \quad \forall x \in I \quad \forall y \in Y \setminus N_x$$

mit einer  $\mu$ -Nullmenge  $N_x$ . Dann folgt:

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)d\mu(y)$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma I.6**

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\mu$  Maß auf  $Y$  und  $f : \mathcal{U} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f$  integrierbar bzgl.  $\mu \ \forall x \in \mathcal{U}$ .

Betrachte  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y)$

Es gebe eine  $\mu$ -Nullmenge  $N \subseteq Y$ , so dass  $\forall y \in Y \setminus N$  gilt:

$$f(\cdot, y) \in C^1(\mathcal{U}) \text{ und } |D_x f(x, y)| \leq g(y) \text{ mit } g : Y \rightarrow [0, \infty] \text{ integrierbar}$$

$\implies F \in C^1(\mathcal{U})$  und  $\forall x \in \mathcal{U}$  gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) d\mu(y)$$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Bsp.:**

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = ? \quad \text{Betrachte } F : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

$f(t, x) := e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}$  hat für  $t \geq \delta$  die Abschätzungen

$$|f(t, x)|, |\partial_t f(t, x)| \leq e^{-\delta x} =: g(x) \in L^1([0, \infty))$$

Lemma V.6  $\implies \forall t > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^\infty e^{-tx} (-\sin x) dx \\ &= [e^{-tx} \cos x]_{x=0}^{x=\infty} + t \int_0^\infty e^{-tx} \cos x dx \\ &= -1 + t^2 \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx \\ &= -1 - t^2 F'(t) \end{aligned}$$

$$\implies F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

... (siehe Aufschrieb)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

**Def. I.7 ( $L^p$ -Norm)**

Für  $\mu$ -messbares  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p} & , \text{ für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 \mid \mu(\{|f| > s\}) = 0\} & , \text{ für } p = \infty \end{cases}$$

auf  $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f \mu\text{-messbar}, \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$

Betrachte Äquivalenzrelation  $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ , und definiere den  **$L^p$ -Raum** durch  $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ .

**Def. I.8**

Für  $E \subseteq X$  messbar und  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sei  $f_0 : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  die **Fortsetzung** mit  $f_0(x) = 0 \forall x \in X \setminus E$ . Wir setzen dann

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und  $L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E)/\sim$ .

**Proposition I.9**

Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$  ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in L^p(\mu)$ :

1.  $\|f\|_{L^p} = 0 \implies f = 0$   $\mu$ -fast überall
2.  $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu), \|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \|f\|_{L^p}$
3.  $f, g \in L^p(\mu) \implies f + g \in L^p(\mu)$  und  $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Lemma I.10 (Youngsche Ungleichung)**

Für  $1 < p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $x, y \geq 0$  gilt:  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

*Beweis.* siehe Aufschrieb □

**Satz I.11 (Höldersche Ungleichung)**

Für  $\mu$ -messbare  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $|\int fgd\mu| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$ ,  
falls  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Satz I.12 (Minkowski-Ungleichung)**

Für  $f, g \in L^p(\mu)$  mit  $1 \leq p \leq \infty$  gilt:  $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□

**Lemma I.13**

Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$  mit  $u_j \in L^p(\mu)$ . Falls  $\sum_{j=1}^k \|u_j\|_{L^p} < \infty$ , so gelten:

- i)  $\exists \mu$ -Nullmenge  $N$ :  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \forall x \in X \setminus N$  ex.
- ii) mit  $f := 0$  auf  $N$  gilt  $f \in L^p(\mu)$
- iii)  $\|f - f_k\|_{L^p} \rightarrow 0$  mit  $k \rightarrow \infty$

*Beweis.* siehe Aufschrieb

□