Fehlerfortpflanzung

April 26, 2016

1 Fehlerfortpflanzung

Es sei $z = f(u, v, ..)$ eine Größe, die aus Zufallsvariablen abgeleitet ist. Für jede Realisierung $(u_i, v_i, ..)$ kann man z_i ausrechnen

$$z_i = f(u_i, v_i, ..)$$

Hat man viele Realisierungen zur Verfügung, so kann man die Varianz von z abschätzen

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (z_i - \bar{z})^2$$

Näherungsweise gilt

$$z_i - \bar{z} \approx (u_i - \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial u} + (v_i - \bar{v}) \frac{\partial f}{\partial v} + ...$$

damit erhält man

$$\sigma_z^2 \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left[(u_i - \bar{u})^2 (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (v_i - \bar{v})^2 (\frac{\partial f}{\partial v})^2 + (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})(\frac{\partial f}{\partial u})(\frac{\partial f}{\partial v}) + ... \right]$$

oder

$$\sigma_z^2 \approx (\frac{\partial f}{\partial u})^2 \sigma_u^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2 \sigma_v^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \sigma_{u,v}^2 + \cdots$$

Für unabhängige (unkorrelierte) u, v ist dies das allgemein bekannte Fehlerfortpflanzungsgesetz. Für korrelierte Daten ($\sigma_{u,v}^2 \neq 0$) sind die gemischten Terme zu beachten.

2 Kovarianzmatrix

Gegeben ist ein Vektor von Zufallsvariablen (Meßgrößen)

$$\vec{d} = [d_1, .., d_N]^T$$

z.B. d_1 = Temperatur(Zeit) an Position 1 (Zeitreihe 1) und d_2 = Temperatur(Zeit) an Position 2 (Zeitreihe 2) dann ist die Kovarianzmatrix $\text{cov}(\vec{d})$ definiert als

$$\text{cov}(\vec{d}) = (\text{cov}(d_i, d_j))_{ij=1,..,N} = \begin{pmatrix} \text{cov}(d_1, d_1) & \cdots & \text{cov}(d_1, d_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(d_N, d_1) & \cdots & \text{cov}(d_N, d_N) \end{pmatrix}$$

Beachte $\text{cov}(\vec{d})$ ist quadratisch und weil $\text{cov}(d_i, d_j) = \sigma_{d_i d_j}^2 = \sigma_{d_j d_i}^2$ auch symmetrisch.

- Auf der Diagonalen stehen die Varianzen der einzelnen Meßgrößen, auf den Nebendiagonalen stehen die Kovarianzen
- Sind die einzelnen Meßgrößen unabhängig, so ist die Kovarianzmatrix diagonal

3 Fehlerfortpflanzung mit korrelierten Zufallsvariablen

Es sei nun $y = g(u, v, ..)$ eine zweite Größe, die aus Zufallsvariablen abgeleitet ist. Dann folgt wie oben

$$\sigma_y^2 \approx (\frac{\partial g}{\partial u})^2 \sigma_u^2 + (\frac{\partial g}{\partial v})^2 \sigma_v^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} \sigma_{u,v}^2 + \cdots$$

Die Kovarianz $\sigma_{y,z}^2 = cov(y, z)$ errechnet sich aus

$$\sigma_{y,z}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}).$$

mit

$$y_i - \bar{y} \approx (u_i - \bar{u}) \frac{\partial g}{\partial u} + (v_i - \bar{v}) \frac{\partial g}{\partial v} + ...$$

$$z_i - \bar{z} \approx (u_i - \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial u} + (v_i - \bar{v}) \frac{\partial f}{\partial v} + ...$$

folgt

$$cov(y, z) = \sigma_{y,z}^2 = (\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}) \sigma_u^2 + (\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v}) \sigma_v^2 + (\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}) \sigma_{u,v}^2 + \cdots$$

4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei $\mathbf{x}$ gegeben als lineare Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{d}$$

dann gilt für die Kovarianzmatrix $cov(\mathbf{x})$

$$\mathrm{cov}(\mathrm{x}) = \mathbf{G}\mathrm{cov}(\mathbf{d})\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$$

.

4.1 Beweis für 2x2 Spezialfall

Es sei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

entsprechend

$$x = g_{11}u + g_{12}v = f(u, v)$$
$$y = g_{21}u + g_{22}v = g(u, v)$$

daraus ergibt sich

$$\sigma_x^2 = (\frac{\partial f}{\partial u})^2 \sigma_u^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2 \sigma_v^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \sigma_{u,v}^2$$

$$= g_{11}\sigma_u^2 + g_{12}^2 \sigma_v^2 + 2 g_{11} g_{12} \sigma_{u,v}^2$$

und

$$\sigma_{x,y}^2 = g_{11} g_{21} \sigma_u^2 + g_{12} g_{22} \sigma_v^2 + (g_{11} g_{22} + g_{12} g_{21}) \sigma_{u,v}^2$$

Es gilt

$$\mathrm{cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathrm{cov}(\mathbf{d})\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{u,v} \\ \sigma_{u,v} & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cov}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{11}\sigma_u^2 + g_{12}\sigma_{u,v}^2 & g_{11}\sigma_{u,v}^2 + g_{12}\sigma_v^2 \\ g_{21}\sigma_u^2 + g_{22}\sigma_{u,v}^2 & g_{21}\sigma_{u,v}^2 + g_{22}\sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

5 Einschub: symbolische Algebra mit Sympy

Die Berechnung ist etwas länglich. Zeit für einen Ausflug in die Möglichkeiten der Computeralgebra mit dem Modul sympy.

In [8]:
```
import sympy as sp
sp.init_printing() # Fuer LaTex-Ausgabe im Notebook
g11,g12,g21,g22=sp.symbols('g_{11} g_{12} g_{21} g_{22}')
g=sp.Matrix(((g11,g12),(g21,g22)))
su,sv,suv=sp.symbols('\sigma_{u} \sigma_{v} \sigma_{uv}')
s=sp.Matrix(((su**2,suv**2),(suv**2,sv**2)))
```

In [2]:
```
g
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
s
```

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv}^2 \\ \sigma_{uv}^2 & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
g*s
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{uv}^2 g_{12} + \sigma_u^2 g_{11} & \sigma_{uv}^2 g_{11} + \sigma_v^2 g_{12} \\ \sigma_{uv}^2 g_{22} + \sigma_u^2 g_{21} & \sigma_{uv}^2 g_{21} + \sigma_v^2 g_{22} \end{bmatrix}$$

In [5]:
```
g*s*g.T
```

Out[5]:

$$\begin{bmatrix} g_{11}\left(\sigma_{uv}^2 g_{12} + \sigma_u^2 g_{11}\right) + g_{12}\left(\sigma_{uv}^2 g_{11} + \sigma_v^2 g_{12}\right) & g_{21}\left(\sigma_{uv}^2 g_{12} + \sigma_u^2 g_{11}\right) + g_{22}\left(\sigma_{uv}^2 g_{11} + \sigma_v^2 g_{12}\right) \\ g_{11}\left(\sigma_{uv}^2 g_{22} + \sigma_u^2 g_{21}\right) + g_{12}\left(\sigma_{uv}^2 g_{21} + \sigma_v^2 g_{22}\right) & g_{21}\left(\sigma_{uv}^2 g_{22} + \sigma_u^2 g_{21}\right) + g_{22}\left(\sigma_{uv}^2 g_{21} + \sigma_v^2 g_{22}\right) \end{bmatrix}$$

In [12]:
```
sp.expand((g*s*g.T)[0,0])
```

Out[12]:

$$2\sigma_{uv}^2 g_{11} g_{12} + \sigma_u^2 g_{11}^2 + \sigma_v^2 g_{12}^2$$

Identisch mit σ_x^2 (vergleiche mit oben)

In [7]:
```
sp.expand((g*s*g.T)[0,1])
```

Out[7]:

$$\sigma_{uv}^2 g_{11} g_{22} + \sigma_{uv}^2 g_{12} g_{21} + \sigma_u^2 g_{11} g_{21} + \sigma_v^2 g_{12} g_{22}$$

Identisch mit $\sigma_{x,y}^2$. Damit haben wir gezeigt, dass die Gleichungen für den Spezialfall 2x2 äquivalent sind.