Faltungstheorem

May 24, 2016

1 Faltung

Die Faltung zweier Funktion $x(t)$ und $h(t)$ ergibt eine neue Funktion $y(t)$ und wird definiert als das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau := x(t) * h(t) = (x * h)(t) = y(t)$$

oder im diskreten Fall durch

$$(x * h)(t) = \sum_k x(k)h(t-k)$$

Die Faltungsfunktion h wird auch Gewichtsfunktion genannt. Der Name wird deutlich bei der Interpretation als Filtermaske.

2 Faltungstheorem

(Herleitung gemäß Fouriertransformation für Fußgänger, Tilman Butz, Springer 2011)

Die Fouriertransformierte der Faltung ergibt

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-\imath 2\pi f t}dt$$

Einsetzen von $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ liefert

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-\imath 2\pi f t}dt$$

erweitert mit $e^{-\imath 2\pi f \tau}e^{\imath 2\pi f \tau} = 1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-\imath 2\pi f \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-\imath 2\pi f(t-\tau)}dt \right] d\tau$$

mit Variablentransformation $t' = t - \tau$ erhalten wir

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-\imath 2\pi f \tau}H(f)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Aus dem Faltungsintegral $*$ wird durch Fouriertransformation ein einfaches Produkt! Dies ist die wichtige Aussage des Faltungstheorems, welche die Implementierung von schnellen Faltungs-Filtern mittels FFT ermöglicht.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Die Korrelation $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)d\tau$ ergibt sich analog aus dem Produkt mit der komplex konjugierten Fouriertransformation $X^*(f)Y(f)$.

3 Wiener-Chintschin-Theorem

Das Wiener-Chintschin-Theorem, besagt, dass die spektrale Leistungsdichte eines stationären Zufallsprozesses die Fourier-Transformierte der korrespondierenden Autokorrelationsfunktion ist. Im Falle diskreter Zeitserien hat das Wiener-Chintschin-Theorem die Form:

$$S(f) = \sum_k r(k) e^{-\imath 2\pi k f}$$

mit der Autokorrelationsfunktion $r(k)$ und der spektralen Leistungsdichte $S(f)$.

4 Parsevalsches Theorem

Die Energie eines Signals im Zeitbereich ist gleich seiner Energie im Frequenzbereich. Für diskrete Zeitserien gilt nach dem Parsevalschen Theorem

$$\sum_{t=0}^{N-1} |x(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} |X(f)|^2$$

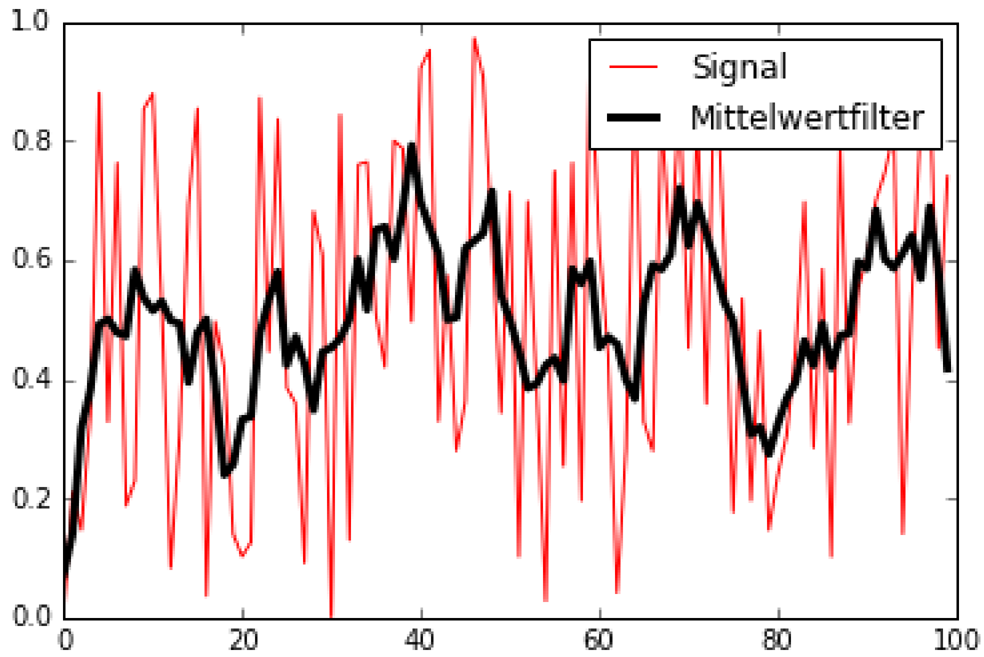
5 Beispiel: Mittelwertfilter implementiert als Faltung

5.1 Python-Version

In [1]:
```
%pylab inline
x=rand(100)
w=5
h=ones(w)/w # Definiere Rechteckmaske mit Fläche=1
y=convolve(x,h,mode='same') # Faltungsoperation
plot(x,'r-',label='Signal')
plot(y,'k-',lw=3,label='Mittelwertfilter')
legend()
```

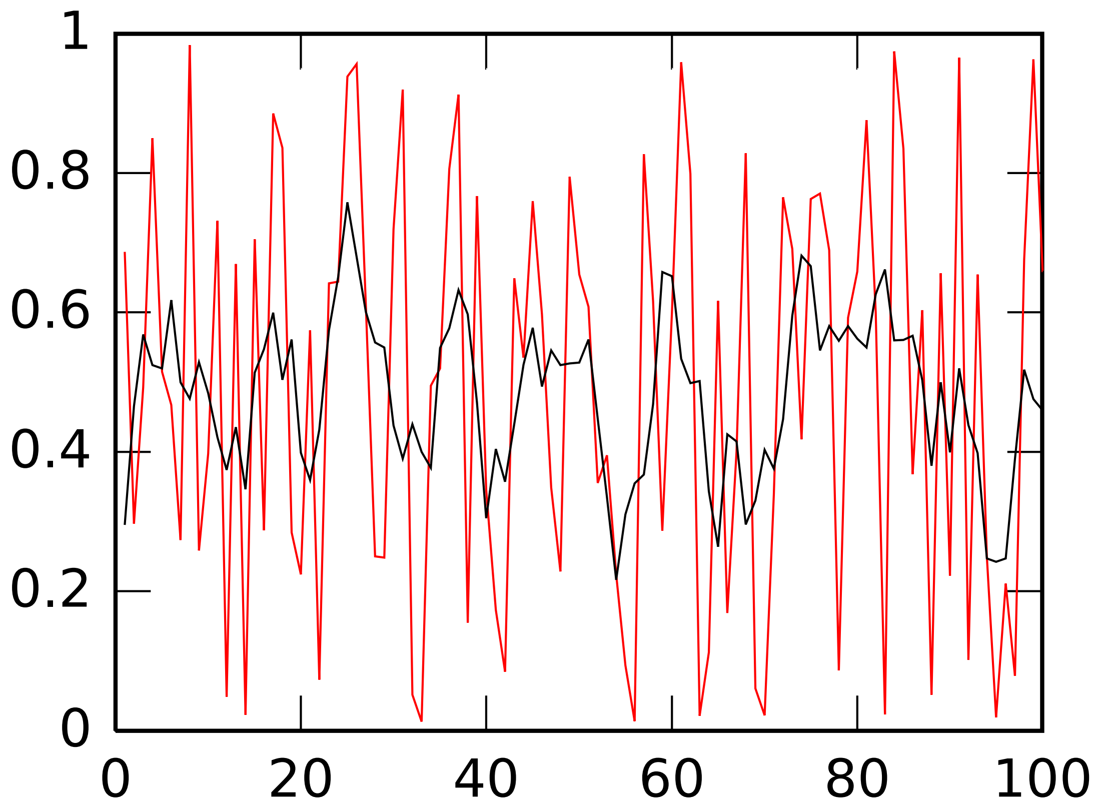
```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

Out[1]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f497b1e6dd8>
```



6 Beispiel Octave Version

In [18]:
```
x=rand(100,1);
w=5;
h=ones(w,1)./w; % Definiere Rechteckmaske mit Fläche=1
y=conv(x,h,'SAME'); % Faltungsoperation
plot(x,'r-')
hold();
plot(y,'k-')
```



In [ ]: