Zentraler Grenzwertsatz

April 26, 2016

1 Zentraler Grenzwertsatz

1.1 Verbundwahrscheinlichkeit

Die Verbundwahrscheinlichkeit $P(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten der Bedingung $x(k) \leq x$ und $y(k) \leq y$

$$P(x, y) = \text{Prob}(x(k) \leq x \quad \text{und} \quad \text{y(k)} \leq \text{y})$$

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(x, y)$ ist definiert als

$$p(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{\text{Prob}(x < x(k) \leq x + \Delta x \quad \text{und} \quad \text{y} < \text{y(k)} \leq \text{y} + \Delta\text{y})}{\Delta x \Delta y} \right)$$

Es gilt

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

1.2 Summe zweier gleichverteilter Zufallsvariablen

Gegeben seien zwei gleichverteilte (auch rechteckverteilt genannt), unabhängige Zufallsvariablen x und y

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Summe der Zufallsvariablen $z(k) = x(k) + y(k)$ ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(x, y)$

$$p(x, y) = p(x, z - x)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(z)$

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x) dx$$

Für unabhängige Zufallsvariablen x, y gilt

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y) = p_1(x) p_2(z - x)$$

und somit

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) p_2(z-x) dx$$

Es folgt

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{a^2} & 0 \leq z \leq a \\ \frac{2a-z}{a^2} & a \leq z \leq 2a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Summe zweier gleichverteilter, unabhängiger Variablen gehorcht also einer Dreiecksverteilung.

1.3 Zentraler Grenzwertsatz

Es lässt sich zeigen, dass sich die Verteilungsfunktion für eine Summe unabhängiger Zufallsvariablen einer Gaußverteilung nähert. Dies ist die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes:

Die Summe unabhängiger Zufallsvariablen (mit endlicher Varianz) folgt asmptotisch einer Gaußverteilung

Im Folgenden zeigen wir exemplarisch die Gültigkeit anhand von numerischen Experimenten und verzichten auf einen mathematischen Beweis. Der Beweis kann mit Hilfe von charakteristische Funktionen (inverse Fouriertransformation der Verteilung) geführt werden.

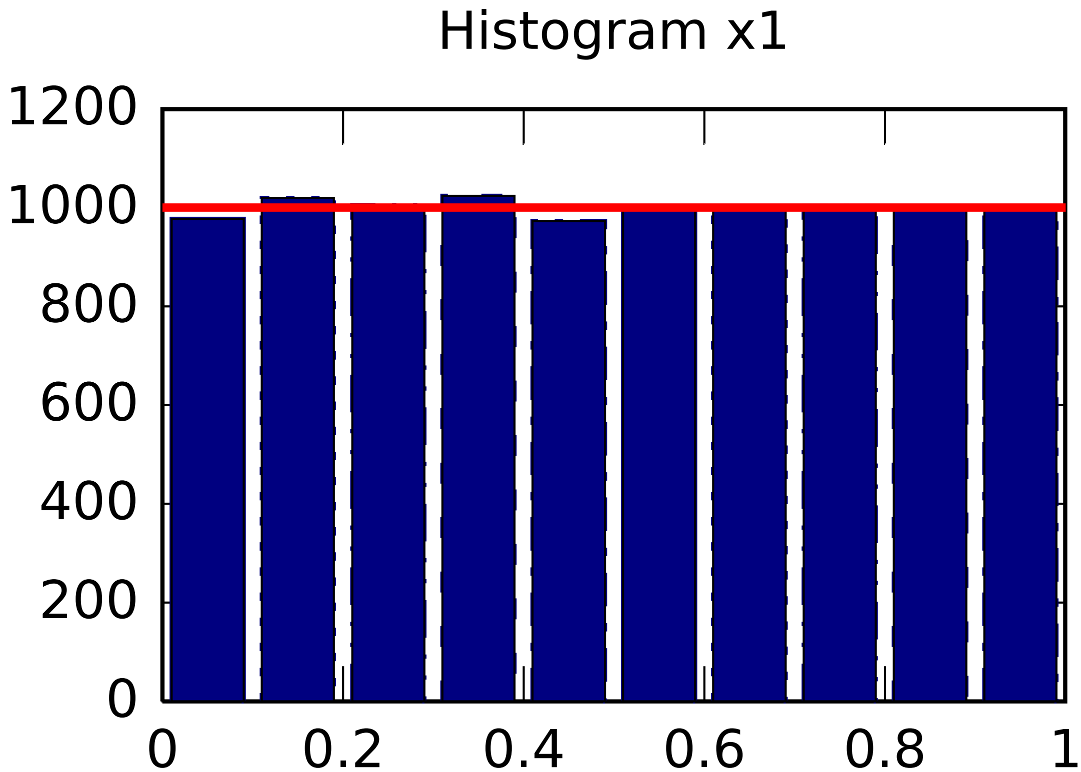
1.4 Beispiel Summe zweier gleichverteilter Zufallsvariablen

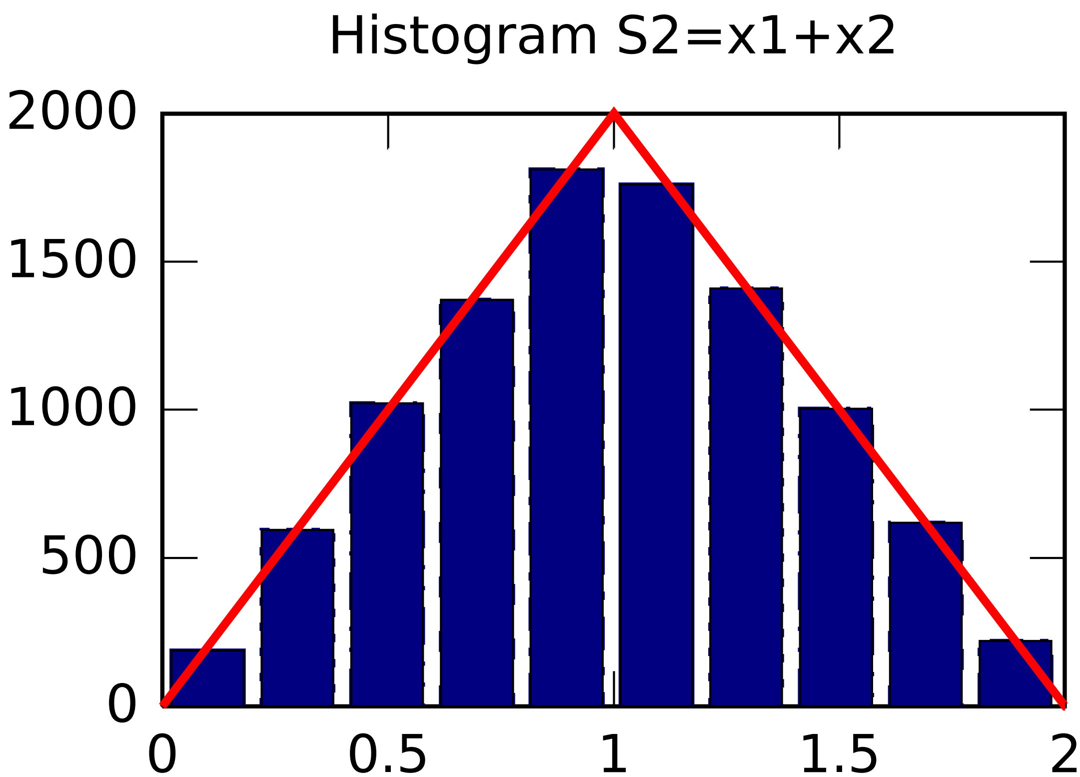
Seien x_1 und x_2 zwei im Wertebereich [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen. Es sei S_2 die Summe aus den Zufallsvariablen x_1 und x_2.

Die Zufallsvariable S_2 weist eine Dreiecksverteilung auf, wie das folgende Exeriment belegt.

In [210]:
```
N=10000; % Anzahl der Realisationen
a=1;
x1=rand(N,1)*a;
x2=rand(N,1)*a;

hist(x1,10);
hold();
title('Histogram x1')
plot([0,a],[N/10,N/10],'r-','LineWidth',2)
figure()
hist(x1+x2);
hold();
title('Histogram S2=x1+x2')
plot([0,a,2*a],[0,2*N/10,0],'r-','LineWidth',2)
```


Histogram x1
1200
1000
800
600
400
200
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



1.5 Beispiel Summe N gleichverteilter Zufallsvariablen

Die Summe $S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$ einer Reihe gleichverteilter Zufallsvariablen nähert sich mit steigendem N schnell einer Gausverteilung. Die standardisierte Zufallsvariable Z

$$Z = \frac{S_N - \mu_{S_N}}{\sigma_{S_N}}$$

folgt einer Normalverteilung. Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung der Normalverteilung für die Statistik, denn jede Summe von Zufallsvariablen folgt im Grenzfall für große N einer Gauß- bzw. nach Standardisierung einer Normalverteilung.

In [192]:
```
N=100000; % Anzahl Realisierungen von x
M=12; % Anzahl Summation

% Summe
S=rand(N,1)*2-1;
for i=1:M
    S=S+rand(N,1)*2-1;
end

%Standardisierung
Z=(S-mean(S))/std(S);

Nbins=41;
```

```
Xbins=linspace(-4,4,Nbins);
hist(Z,Xbins,1);
x=linspace(-4,4,100);
y=normpdf(x,0,1)/Nbins*8;
hold()
plot(x,y,'r-','LineWidth',2)
xlim([-4,4])
title('Histogram Sn=x1+x2+..+xn')
```