

Spektralanalyse

May 5, 2016

1 Spektralanalyse

Die Betrachtung von Zeitreihen im Frequenzraum ermöglicht die Bestimmung von periodischen Zyklen, z.B. dem Gezeitsignal. Die Zerlegung der Zeitreihe in ihre Frequenzanteile wird auch Harmonische Analyse genannt.

1.1 Fourier-Reihen

Gegeben sei eine periodische Funktion mit der Grundperiode T bzw. Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T}$

$$x(t) = x(t \pm nT)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Mit einigen Ausnahmen lassen sich solche periodischen Daten in Fourier-Reihen entwickeln

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t))$$

Die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n erhält man durch Integration über ein Periode T , z.B. $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ oder von 0 bis T

$$a_n = \frac{2}{T} + \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} + \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

Zu beachten ist, dass $\frac{a_o}{2} = \int_0^T x(t) dt$ der Mittelwert μ_x von $x(t)$ ist. Die Gleichungen können auch in anderer Form, z.B. mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und $d\omega = 2\pi df$ geschrieben werden.

1.1.1 Amplituden- und Phasendarstellung

Durch trigonometrische Umformung lässt sich die Fourier-Reihe auch formulieren als

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{A_n}_{=\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(2\pi n f_0 t - \underbrace{\Phi_n}_{=\tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n})}) \right)$$

1.1.2 Darstellung mit komplexen Zahlen

Mittels der Euler-Beziehung $e^{-i\Theta} = \cos \Theta - i \sin \Theta$ folgt die Darstellung

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\pi n f_0 t}$$

mit $A_n = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$ und

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i\pi n f_0 t} dt$$

wobei $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ nun auch negative Werte annimmt.

Auch wenn $x(t)$ eine reellwertige Zeitreihe ist, kann sie durch komplexwertige negative und positive Frequenzkomponenten beschrieben werden. Dabei gilt der Zusammenhang

$$A_n = |A_n| e^{-i\Theta_n}$$

mit $|A_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{x_n}{2}$ und $\Theta_n = \tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n})$.

Für reelle $x(t)$ gelten die Symmetrien

$$|A_{-n}| = |A_n|$$

$$\Theta_{-n} = -\Theta_n$$

$$A_{-n} = |A_{-n}| e^{-i\Theta_{-n}} = |A_n| e^{i\Theta_n} = A_n^*$$

1.2 Fourier-Transformation

Gegeben sei eine Zeitreihe $x(t)$. Die Fourier-Reihe lässt sich erweitern zu dem Fourier-Integral

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$X(f)$ wird auch direkte Fourier-Transformierte oder (Amplituden-)Spektrum genannt und existiert für die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Die inverse Fourier-Transformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

ist i.A. eine komplexwertige Funktion

$$X(f) = X_R(f) - iX_I(f)$$

mit Real- und Imaginärteil X_R und X_I

$$X_R(f) = |X(f)| \cos(\Theta(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt$$

$$X_I(f) = |X(f)| \sin(\Theta(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

bzw.

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Magnitudenspektrum}} e^{-i \underbrace{\Theta(f)}_{\text{Phasenspektrum}}}$$

Das quadrierte Magnitudenspektrum wird auch Leistungsspektrum genannt. Die graphische Darstellung, meist in logarithmischer Form, wird als Periodogramm bezeichnet.

1.3 Diskrete Fourier-Transformation

Für eine stationäre Zeitreihe von theoretisch unendlicher Länge existiert die Fourier-Transformation nicht, denn es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

Allerdings liegen tatsächlich gemessene Zeitreihen nur über ein endliches Zeitintervall T vor, und die bestimmte Fourier-Transformation

$$X_T(f) = X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

existiert immer. Für diskrete Frequenzen $f_n = \frac{n}{T}$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ergibt sich die diskrete Fourier-transformation zu

$$X(f_n, T) = T A_n$$

mit

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt$$

Die Fourier-Transformation für diskrete Frequenzen f ist tatsächlich eine Fourier-Reihe.

1.3.1 Nyquist-Frequenz

Wird die Zeitreihe $x(t)$ an N -Punkten im Abstand Δt gemessen (abgetastet), so beträgt die längste Periode

$$T = N \Delta t$$

Dies führt zu der Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T}$ und der Nyquist-Frequenz (Grenzfrequenz)

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t}$$

Bei der Berechnung wird die Zeitreihe so behandelt, als wäre es eine zyklische Zeitreihe mit der Periode T .

1.4 Rechenregeln für die Fouriertransformation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Eigenschaft	Zeit-Raum	Frequenz-Raum
Linearität	$ax(t) - by(t)$	$aX(f) - bY(f)$
Zeitversatz	$x(t - t_0)$	$X(f) e^{2\pi i f t_0}$
Frequenzversatz	$x(t) e^{2\pi i f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Differentiation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$2\pi i f X(f)$
n-mal Differentiation	$\frac{d(x(t))^n}{dt^n}$	$(2\pi i f)^n X(f)$

1.4.1 Beispiel: Lösung einer DGL im Frequenzraum

Die bekannte Differentialgleichung für ein eindimensionales mechanisches System

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

lässt sich für die anregende Kraft $F(t) = \delta t$ im Frequenzraum einfach lösen. Durch Fouriertransformation auf beiden Seiten erhält man

$$[-(2\pi)^2 m + i2\pi f c + k]Y(f) = 1$$

$$Y(f) = \frac{1}{k - (2\pi)^2 m + i2\pi f c}$$

2 Periodogramm

Gegeben sei eine Zeitreihe $x(t)$. Das Fourier-Integral

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

wird auch Amplitudenspektrum genannt. Das quadratische Amplitudenspektrum

$$P_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

wird auch das Leistungsspektrum genannt. Die graphische Darstellung des Leistungsspektrums wird als Periodogramm bezeichnet.

Für zeitlich diskrete Zeitreihen sind Fourier-Integral und Fourier-Reihe identisch. Die Berechnung der Fourier-Reihe geschieht üblicherweise durch einen schnellen Algorithmus, der FFT (Fast Fourier Transform).

3 Abtasttheorem und Aliasing

Gegeben sei ein Signal welches Informationen mit einer maximalen Frequenz f_{max} enthält. Dieses Signal soll zeitdiskret gemessen (Sampling) und aus den diskreten Messpunkten rekonstruiert werden.

Das Abtasttheorem (Nyquist-Theorem) besagt, dass dieses Signal mindestens mit der doppelten Frequenz $f_N = 2f_{max}$ abgetastet werden muss, um eine exakte Rekonstruktion zu ermöglichen. In der praktischen Anwendung liefert eine Abtastung mit etwa 3 bis 6 Abtastwerten pro Wellenlänge gute Ergebnisse.

Ist das Abtasttheorem nicht erfüllt (Unterabtastung), gibt es Fehler. Diese werden als Aliasing-Fehler oder Aliasing-Effekte bezeichnet.

4 FFT Algorithmus

4.1 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

DFT eines Vektors \hat{x} der Länge N

$$\hat{x}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \underbrace{W_N^{jk}}_{e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}}$$

Inverse DFT

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k)_j W_N^{-jk}$$

Beachte: Inverse kann als DFT der Funktion $\frac{1}{N} \hat{x}(-k)$ berechnet werden.

4.2 Ansatz für schnelle Lösung

Wenn $N = N_1 N_2$ ist, dann kann die DFT 1D-Gleichung als 2D-Gleichung beschrieben werden mit einer Umbenennung der Variablen

$$j = j(a, b) = aN_1 + b, 0 \leq a < N_2, 0 \leq b < N_1$$

$$k = k(c, d) = cN_2 + d, 0 \leq c < N_2, 0 \leq d < N_1$$

Nun wird die Eigenschaft $W_N^{m+n} = W_N^m W_N^n$ ausgenutzt und wir erhalten

$$\hat{x}(c, d) = \sum_{b=0}^{N_1-1} W_N^{b(cN_2+d)} \sum_{a=0}^{N_2-1} X(a, b) W_{N_2}^{ad}$$

Zur Berechnung benötigt man zwei Schritte, zunächst wird die innere Summe berechnet (für alle d)

$$\tilde{x}(b, d) = \sum_{a=0}^{N_2-1} X(a, b) W_{N_2}^{ad}$$

Dazu sind maximal $N_1 N_2^2$ arithmetische Rechenoperationen notwendig. Danach wird die Transformation

$$\sum_{b=0}^{N_1-1} W_N^{b(cN_2+d)} \tilde{x}(b, d)$$

berechnet, was mit $N_1 N_1^2$ Rechenschritten möglich ist.

Der FFT-Algorithmus kann effizient durch in-place Berechnungen kodiert werden, um Rechenschritte und Speicherplatz einzusparen.

4.2.1 Literatur zur FFT

- Cooley, James W., and John W. Tukey, 1965, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Math. Comput. 19: 297-301
- Computing in Science and Engineering Jan/Feb 2000, The FFT: An Algorithm the Whole Family Can Use, Daniel N. Rockmore
- E. Oran Brigham, FFT - Schnelle Fourier-Transformation, Einführung in die Nachrichtentechnik, Oldenbourg Verlag, 1982

5 Beispiele

5.1 Amplitudenspektrum

Wir erzeugen ein Test-Signal bestehend aus zwei überlagerten Sinusschwingungen und berechnen das Amplitudenspektrum mittels FFT.

Eine "Frequenz-Verschmierung" ergibt sich dadurch, dass das Signal nicht exakt periodisch ist und Sprünge an den Rändern auftreten.

```
In [49]: %pylab inline
          %config InlineBackend.figure_format = 'svg'

M=1000

t = linspace(0, 2*pi, M, endpoint=True)
f1 = 3.0 # Frequenz in Hz
f2 = 6.0 # Frequenz in Hz
```

```

A1 = 100.0 # Amplitude
A2 = 70.0 # Amplitude

y = A1 * sin(2*pi*f1*t)+ A2 * sin(2*pi*f2*t)# Signal

plot(t,y)
title('Testsignal')
#####
dt = t[1] - t[0] # Abtast-Periode
fa = 1.0/dt # Abtast-Frequenz

Y = fft.fft(y)
N = len(y)/2+1

X = linspace(0, fa/2, N, endpoint=True)

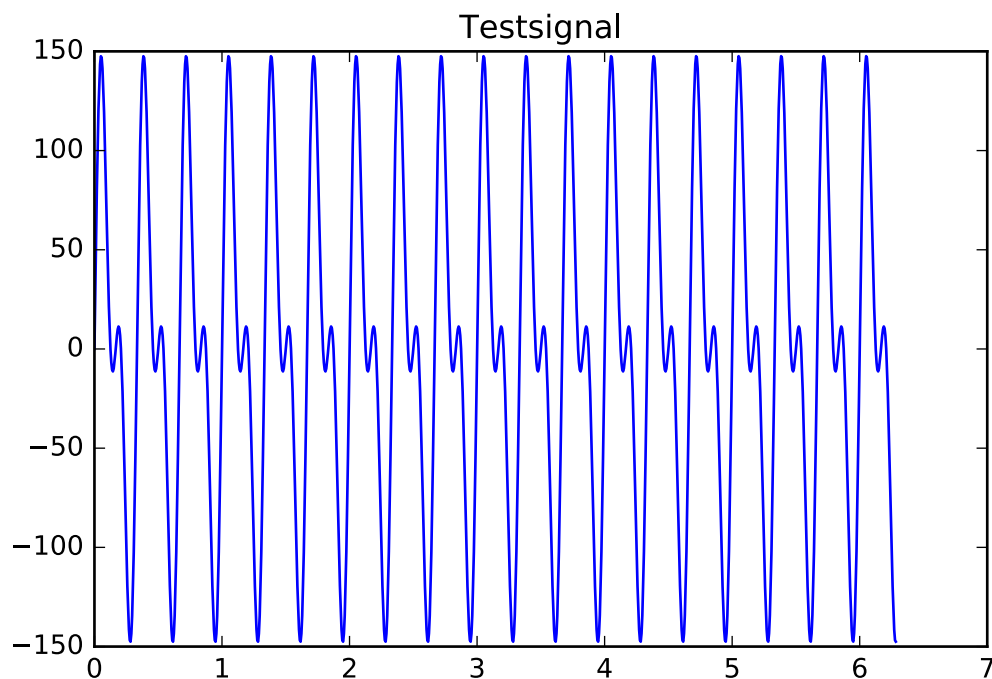
figure()
plot(X,abs(Y[:N])/N)
xlabel('Frequenz [Hz]')
ylabel('Amplitude')
xlim([0.1,10])
title('Amplitudenspektrum')

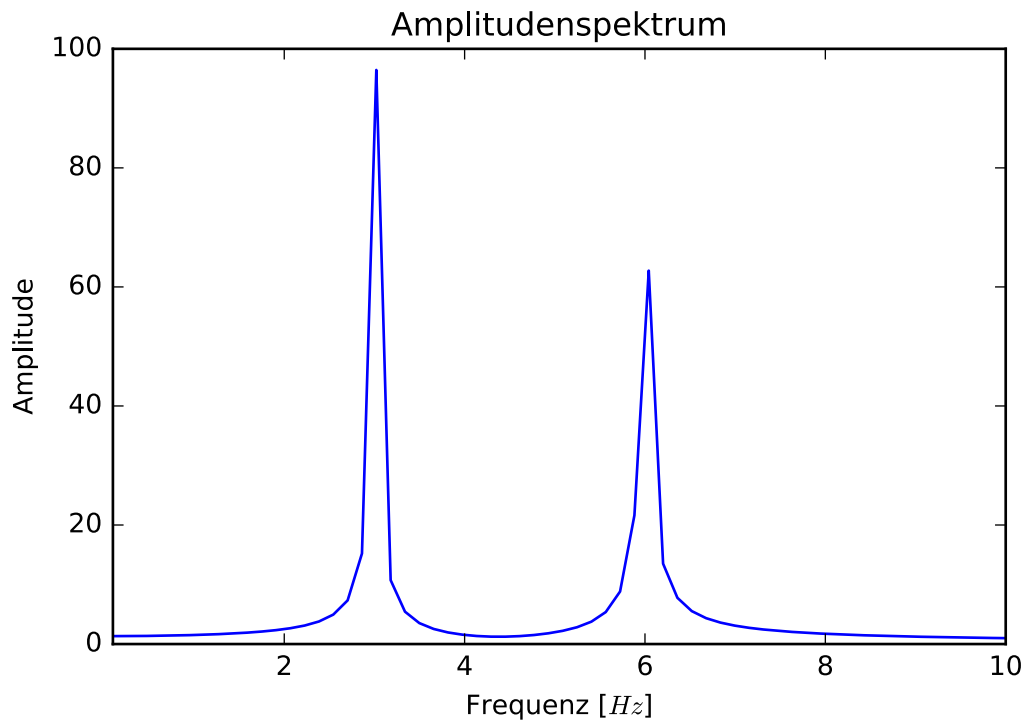
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

/usr/local/lib/python3.4/dist-packages/ipykernel/_main_.py:27: DeprecationWarning: using a non-integer

Out[49]: <matplotlib.text.Text at 0x7fc1a09207b8>





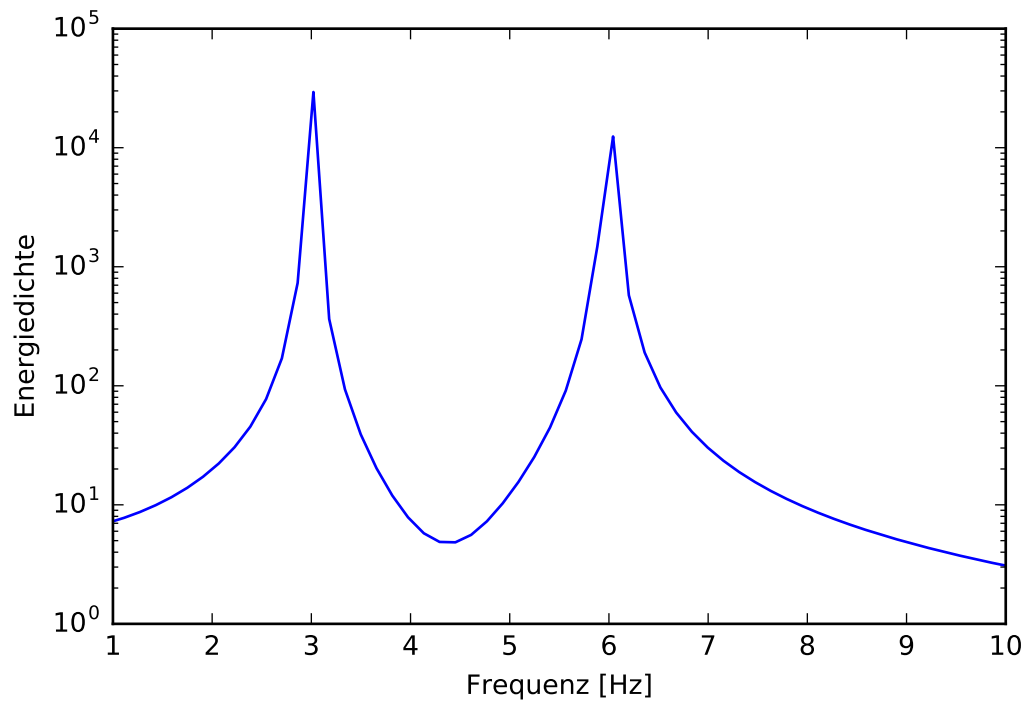
5.2 Periodogramm / Leistungsspektrum

```
In [50]: f, Pxx = periodogram(y, fa)
         figure()
         semilogy(f, Pxx)
         xlabel('Frequenz [Hz]')
         ylabel('Energiedichte')

         ylim([1e0, 1e5])
         xlim([1, 10])
```

Out[50]:

(1, 10)

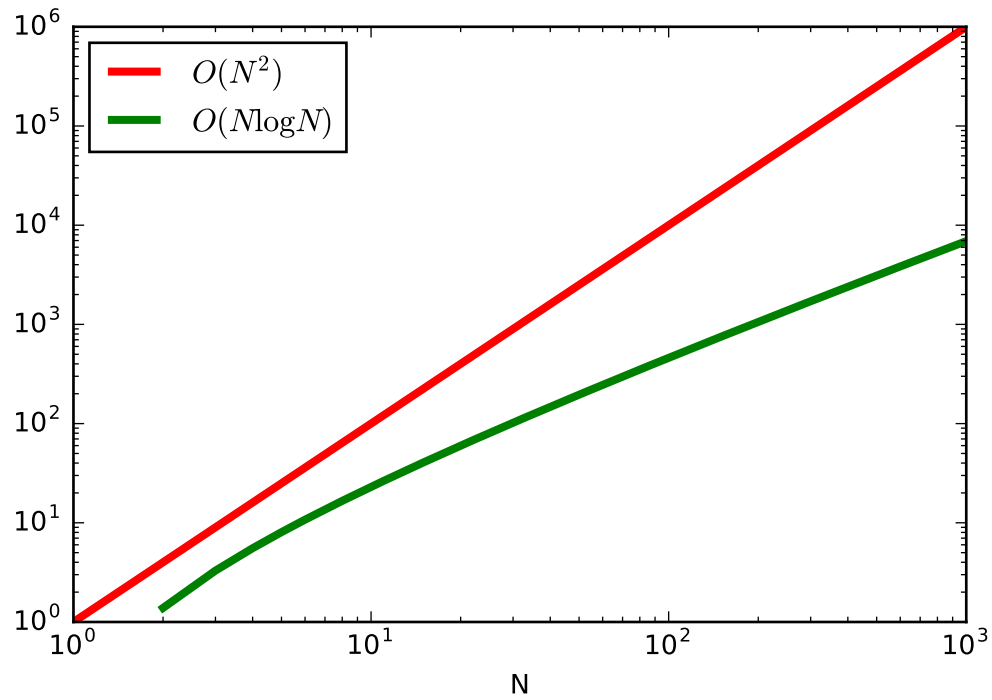


5.3 Komplexität

Der große Vorteil der FFT wird deutlich, wenn man die Anzahl der notwendigen Rechenschritte als Funktion der Vektorlänge N betrachtet.

```
In [51]: N=1000
         n=linspace(1,N,N)
         loglog(n,n**2,'r-',linewidth=3,label='$O(N^2)$')
         loglog(n,n*log(n),'g-',linewidth=3,label='$O(N \log N)$')
         xlabel('N')
         legend(loc=2)
```

```
Out[51]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fc1a078a0f0>
```

5.4 Alias-Problem

```
In [52]: T=1.0
         f=5.0/T
         fN=f*2
         print(fN)

         N1=10 # Anzahl Abtast-Punkte
         N2=1000
         #####

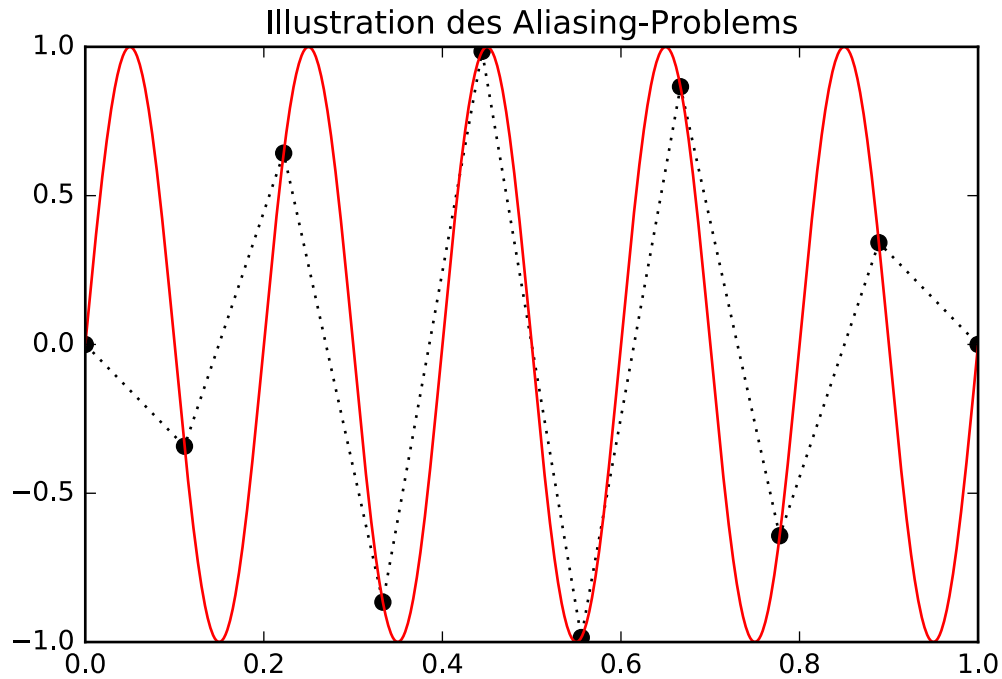
         t1=linspace(0,T,N1)
         y1=sin(2*pi*f*t1)

         t2=linspace(0,T,N2)
         y2=sin(2*pi*f*t2)

         plot(t1,y1,'ko:')
         plot(t2,y2,'r-')
         title('Illustration des Aliasing-Problems')
```

10.0

Out[52]: <matplotlib.text.Text at 0x7fc1a08f5a90>



5.5 Berechnung der Fourier-Reihe zu Fuss

```
In [56]: def x(t):
    case=3 # Beispiele
    if case==1:
        y=sin(t*2*pi) # Reiner Sinus
    if case==2:
        y=sin(t*2*pi) + 0.5*sin(t*8*pi)
    if case==3: # Sprungfunktion
        y=ones(t.size)-2
        y[t>0.5]=1
    return y

N=20
T=1.0

t=linspace(0,T,N)
k=arange(1,N+1)
f_k=k/T

k_max=10 # Nutze Anzahl k_max Fourier-Koeffizienten

ak=zeros(k_max)
bk=zeros(k_max)

# Berechnung der Fourier-Koeffizienten
for i in range(k_max):
```

```

ak[i]=2/T*sum(x(t)*cos(2*pi*f_k[i]*t))
bk[i]=2/T*sum(x(t)*sin(2*pi*f_k[i]*t))

figure()
plot(t,x(t),'ko-',label='Original Zeitreihe $x_t$')

# Berechnung der Fourier-Reihe (Rekonstruktion)
for i in range(k_max):
    ak[i]=2/T*sum(x(t)*cos(2*pi*f_k[i]*t))/(N-1) # Integral durch Summation approximiert
    bk[i]=2/T*sum(x(t)*sin(2*pi*f_k[i]*t))/(N-1)

t2=linspace(0,T,100) # Neue (größere) Anzahl von Zeitschritten (=Interpolation)

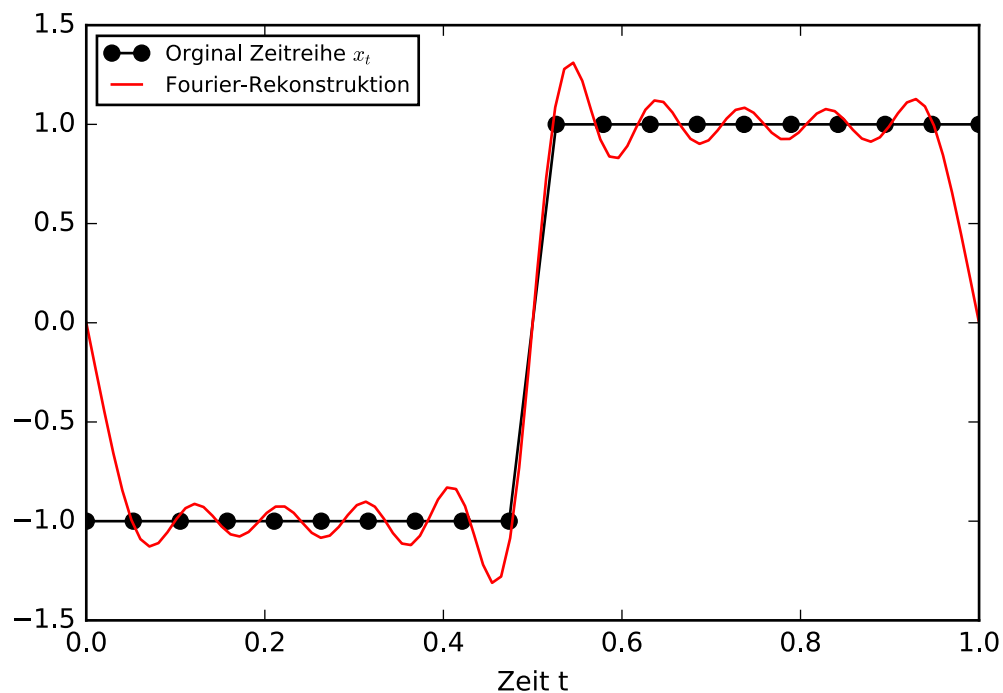
N2=t2.size
x2=zeros(N2)
x2=x2+ak[0]/2
for i in range(k_max):
    x2=x2+ak[i]*cos(2*pi*f_k[i]*t2)+bk[i]*sin(2*pi*f_k[i]*t2)

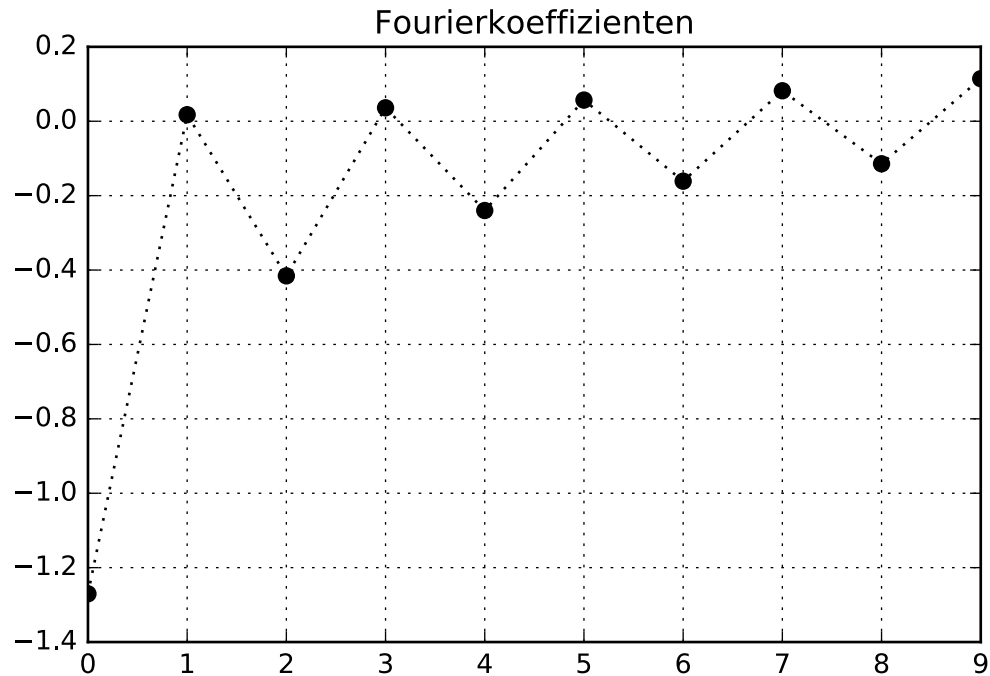
plot(t2,x2,'r-',label='Fourier-Rekonstruktion')
xlabel('Zeit t')

legend(loc=2,fontsize=8)
figure()

plot(bk,'ko:')
title('Fourierkoeffizienten')
grid()

```





6 Matlab/Octave-Versionen

In [33]: M=1000;

```
t = linspace(0, 2*pi, M);
f1 = 3.0; % Frequenz in Hz
f2 = 6.0; % Frequenz in Hz

A1 = 100.0; % Amplitude
A2 = 70.0; % Amplitude

y = A1 * sin(2*pi*f1.*t) + A2 * sin(2*pi*f2.*t); % Signal

plot(t,y);
title('Testsignal');

dt = t(2) - t(1); % Abtast-Periode
fa = 1.0/dt; % Abtast-Frequenz

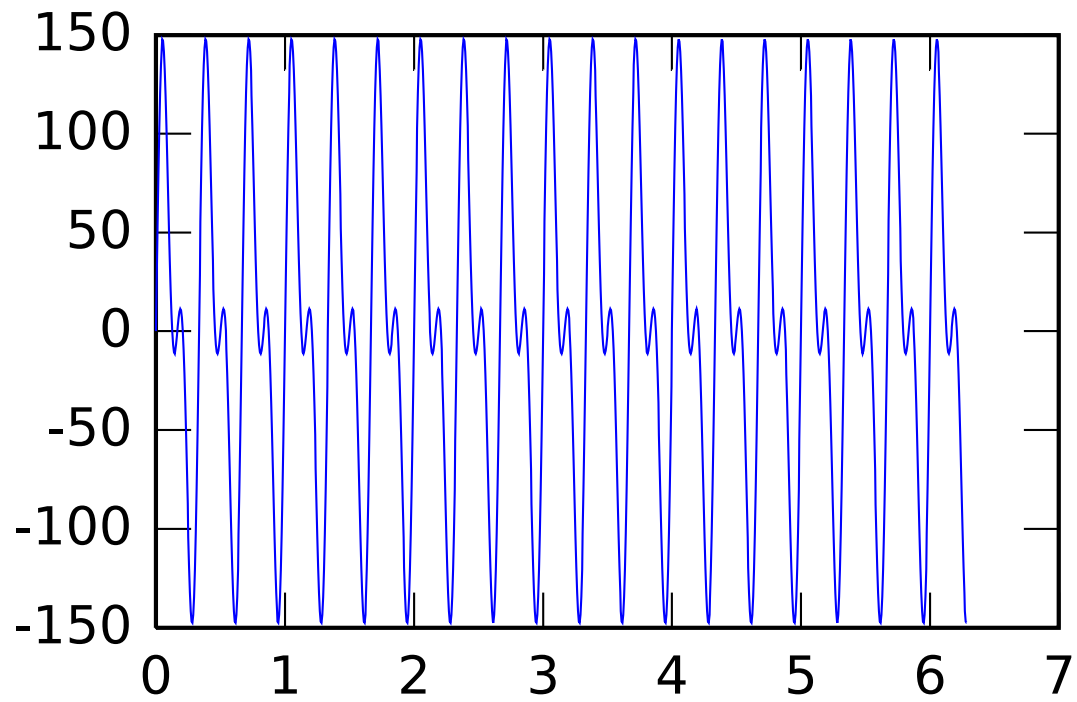
Y = fft(y);
N = size(y)(2)/2+1;

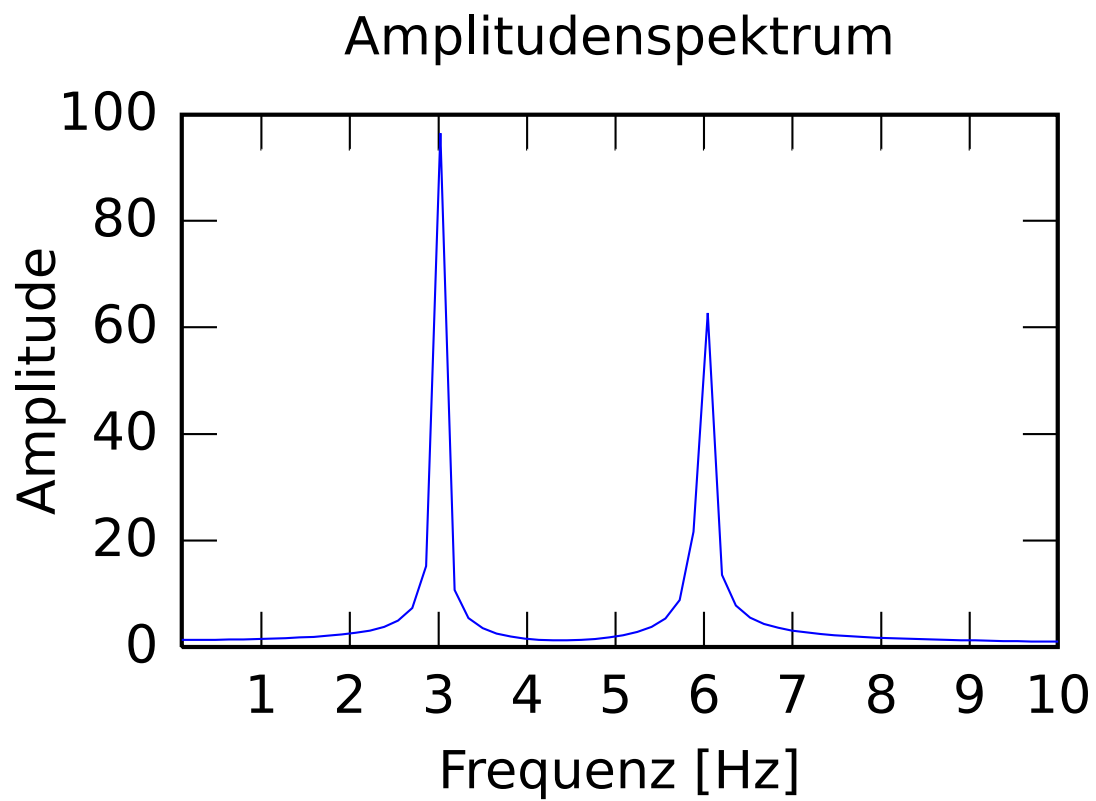
X = linspace(0, fa/2, N);

figure();
plot(X,abs(Y(1:N)/N));
xlabel('Frequenz [Hz]');
```

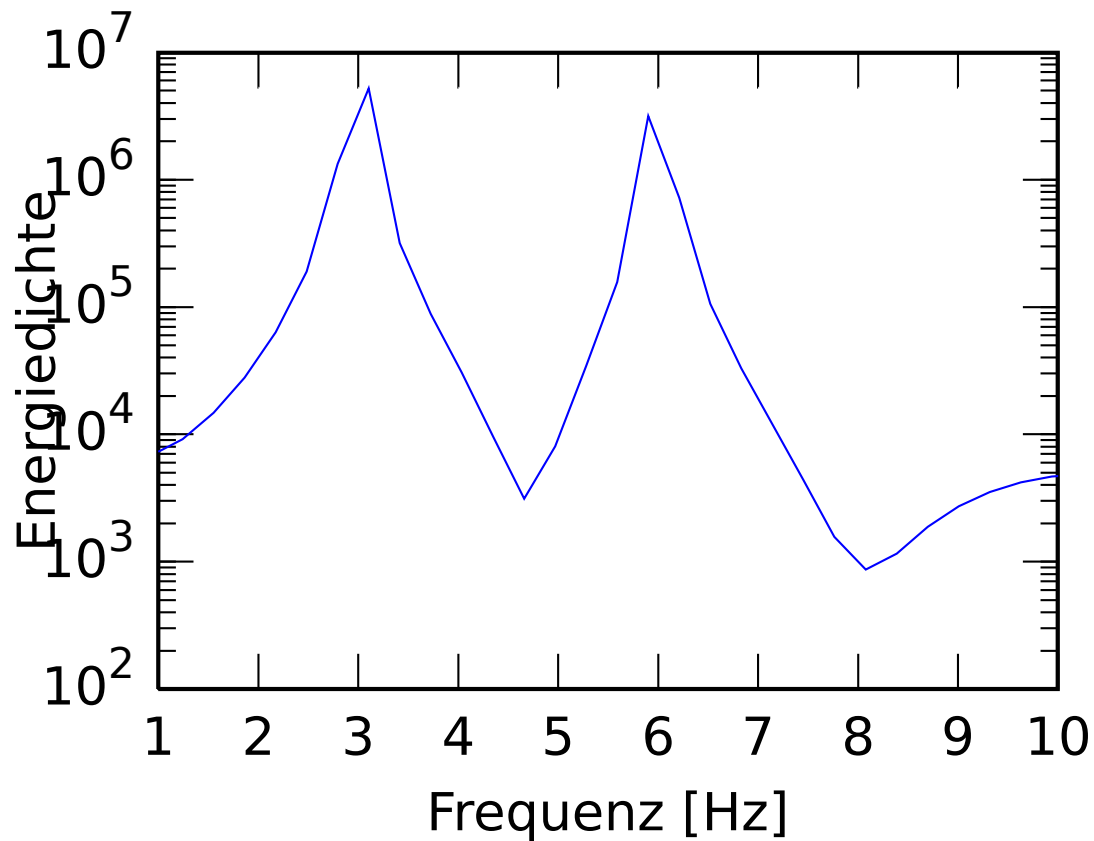
```
ylabel('Amplitude');  
xlim([0.1,10]);  
title('Amplitudenspektrum');
```

Testsignal





```
In [32]: [Pxx,f] = periodogram(y,1,512,fa);  
         figure();  
         semilogy(f, Pxx);  
         xlabel('Frequenz [Hz]');  
         ylabel('Energiedichte');  
  
         ylim([1e2, 1e7]);  
         xlim([1, 10]);
```



7 Übung

Erzeugen Sie ein monofrequentes Testsignal $Y(t)$ (z.B. Sinuscoschwingung mit Frequenz f) mit überlagertem (additiven) Rauschen $N(t)$ (z.B. randn). Variieren Sie die Stärke des Rauschens und diskutieren die Möglichkeit, den Peak im Spektrum zu identifizieren. Wie könnte man die Signifikanz bzw. das Detektionslimit als Funktion der Rauschstärke und Länge des Signals charakterisieren?

Erzeugen Sie ein weiteres Testsignal mit zwei ähnlichen Frequenzen f_1 und f_2 . Was ist die Bedingung, dass diese zwei Frequenzen im Spektrum als separate Peaks identifiziert werden können?