1

V106 – Gekoppelte Pendel

LARS KOLK
lars.kolk@tu-dortmund.de

JULIA SOBOLEWSKI
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.10.2017 Abgabe: 17.10.2017

Verkehrte Formel im Skript, daher große Abweichungen
↳ bitte nochmal mit korrigierter Formel

N.K.

Welche Werte wurden jetzt benutzt? (T_{es}

TU Dortmund – Fakultät Physik

THEORIE [1]

Zielsetzung:

Ziel des Versuchs ist die Schwingungs- und Schwebungsdauern gegensinniger, gleichsinniger und gekoppelter Schwingungen zu bestimmen.

Bevor auf die gekoppelte Schwingung eingegangen wird, wird zunächst ein einzelnes Pendel betrachtet.
Hierbei handelt es sich um ein mathematisches Pendel, das reibungsfrei schwingt.
Bei der Auslenkung des Pendels um den Winkel φ (wobei $|\varphi| \ll 1$ gelten soll) wirkt aufgrund der Gravitation ein Drehmoment, sodass man folgende Bewegungsgleichung aufstellen kann:

$$J \cdot \ddot{\varphi}(t) + D_P \cdot \varphi(t) = 0. \tag{1}$$

Wobei J das Trägheitsmoment und D_P die Winkelrichtgröße des Pendels sind.

Werden nun zwei solcher Pendel mithilfe einer Feder mit der Federkonstanten D_F gekoppelt, erhält man ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem mit zwei Bewegungsgleichungen:

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1(t) + D_P \cdot \varphi_1(t) = D_F \cdot (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \tag{2}$$

$$J \cdot \ddot{\varphi}_2(t) + D_P \cdot \varphi_2(t) = D_F \cdot (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)). \tag{3}$$

Dabei beschreibt die linke Seite die Bewegung der jeweiligen Pendel und die rechte Seite die Kopplung.

Je nach Wahl der Anfangsbedingungen erhält (man) einen der drei folgenden Fälle:

Gleichsinnige Schwingung

Bei der gleichsinnigen Schwingung wählt (man) als Anfangsbedingung $\varphi_1 = \varphi_2$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ gelten soll.

Für die Winkelgeschwindigkeit ω_+ und Periodendauer T_+ gilt dann:

(4) $$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

(5) $$T_+ = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hier übt die Feder keine Kraft auf die Pendel aus.

Gegensinnige Schwingung

In diesem Fall wählt (man) die Anfangsbedingungen $\varphi_1 = -\varphi_2$ und $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$. Die Feder übt eine gleich große entgegen-gesetzte Kraft auf die Pendel aus, was sich wie folgt auf die Winkelgeschwindigkeit und Periodendauer auswirkt:

(6) $$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}$$

(7) $$T_- = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + 2K}}.$$

Dabei ist K die Kopplungskonstante. Diese ergibt sich aus:

(8) $$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}.$$

Gekoppelte Schwingung

Hierbei werden die Anfangsbedingungen auf $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 \neq 0$ gesetzt. Dabei kommt es zur so genannten Schwebung. Das schwingende Pendel gibt nach und nach seine Energie an das ruhende Pendel ab, sodass dieses zu schwingen beginnt. Sobald die Energie vollständig übertragen wurde ist, hört das erste Pendel auf zu schwingen und das zweite Pendel erreicht seine maximale Auslenkung. Daraufhin wiederholt sich der Vorgang. Eine Schwebungsperiode T_s ist vergangen sobald das ~~zunächst~~ zu Beginn ruhende Pendel erneut in den Ruhezustand übergeht.

Schwebungsperiode und -frequenz berechnen sich aus:

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{9}$$

$$\omega_s = \omega_+ - \omega_- . \tag{10}$$

AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG [1]

Zunächst müssen beide Stab-Pendel auf die gleiche Länge gebracht werden. Daraufhin misst (man) mindestens 10mal die Periodendauern T_1 und T_2 der beiden Pendel, bildet die Mittelwerte und prüft ob sie im Rahmen der Messungenauigkeit übereinstimmen. Ist dies der Fall, koppelt (man) die Pendel ~~und~~ und bestimmt jeweils 10mal T_+, T_-, T_s und die Schwingungsdauer T der gekoppelten Schwingung.

Aus den gemessenen Zeiten bestimmt (man) die Schwingungsfrequenzen ω_+, ω_-, ω_s und den Kopplungsgrad K (8) und vergleicht die gemessenen Daten mit den Theoriewerten (4), (6) und (10).

Dies wiederholt (man) für eine weiter Pendellänge.

AUSWERTUNG

Zunächst wird ein Pendel der Länge $l = 70\,cm = 0{,}7\,m$ betrachtet.

Die Mittelwerte berechnen sich nach

(11) $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

und die dazugehörige Standardabweichungen nach

(12) $$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}\,.$$

Aus den zugrundeliegenden Daten (s. Anhang) ergeben sich folgende Werte:

$T_1 = (1{,}71 \pm 0{,}00)\,s$

$T_2 = (1{,}72 \pm 0{,}00)\,s$

Eigentlich sind $\sigma_1 = 0{,}00276\,s$ und $\sigma_2 = 0{,}00283\,s$, aber da wir nur Zeiten auf zwei Nachkomma-stellen genau aufnehmen konnten haben wir auch so gerundet ✓

↳ „wir" oder den Autor generell nicht erwähnen

$T_+ = (1{,}71 \pm 0{,}02)\,s$

$T_- = (1{,}41 \pm 0{,}03)\,s$

$T_S = (11{,}71 \pm 0{,}32)\,s$

$T = (1{,}71 \pm 0{,}01)\,s$

Allgemein berechnet man die Schwingungsfrequenz mit

(13) $$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Da man aber mit fehlerbehafteten Größen rechnet, muss die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

(14) $$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{df}{dx_i} \Delta x_i \right)^2}$$

angewendet werden.

Damit ergibt sich für die einzelnen Schwingungsfrequenzen

$\omega_+ = (3{,}67 \pm 0{,}03)\,\frac{1}{s}$

$\omega_- = (4{,}47 \pm 0{,}09)\,\frac{1}{s}$

$\omega_S = (0{,}54 \pm 0{,}01)\,\frac{1}{s}$

Mit diesen Werten lässt sich nun der Kopplungsgrad K (8) und dessen Fehler (14) berechnen. Man erhält

$K = 0{,}19 \pm 0{,}10$.

Die errechneten Werte gilt es nun mit den Theoriewerten aus (4), (6) und (10) zu vergleichen.

Dabei gilt: $l = (0{,}7 \pm 0{,}00)\,m$ ~~$(0{,}07 \pm 0{,}00)\,m$~~, $g = (9{,}81 \pm 0{,}00)\,\frac{m}{s^2}$

$\omega_+ = (3{,}74 \pm 0{,}00)\,\frac{1}{s}$

$\omega_- = (3{,}82 \pm 0{,}04)\,\frac{1}{s}$

$\omega_S = (0{,}07 \pm 0{,}04)\,\frac{1}{s}$

Vergleicht man die Theoriewerte mit den gemessenen Werten, so fällt folgendes auf:

Während die Werte von ω_+ halbwegs gut übereinstimmen (die Abweichung beträgt gerade mal 1,87%), so klaffen die Werte von ω_- und ω_S schon weiter auseinander. Bei ω_- sind es 17,02% Unterschied, bei ω_S sogar 671,43%.

Dieselbe Betrachtung wird nochmal für ein Pendel der Länge $L = 90\,cm = 0{,}9\,m$ durchgeführt.

Auch hier berechnen sich die Mittelwerte und Standardabweichungen durch (11) und (12).

Daraus ergibt sich:

$T_1 = (1{,}92 \pm 0{,}02)\,s$

$T_2 = (1{,}91 \pm 0{,}02)\,s$

$T_+ = (1{,}89 \pm 0{,}02)\,s$

$T_- = (1{,}61 \pm 0{,}02)\,s$

$T_S = (11{,}43 \pm 0{,}25)\,s$

$T = (1{,}70 \pm 0{,}03)\,s$

Die aus den Periodendauern errechneten Schwingungs-frequenzen sind:

$\omega_+ = (3{,}32 \pm 0{,}03)\ \frac{1}{s}$

$\omega_- = (3{,}90 \pm 0{,}05)\ \frac{1}{s}$

$\omega_s = (0{,}55 \pm 0{,}01)\ \frac{1}{s}$

Mithilfe von (8) und (14) erhält man wieder einen Kopplungsgrad

$K = 0{,}16 \pm 0{,}10$

und man kann die Theoriewerte mit $l = (0{,}90 \pm 0{,}00)\,m$ und $g = (9{,}81 \pm 0{,}00)\,\frac{m}{s^2}$

$\omega_+ = (3{,}74 \pm 0{,}00)\ \frac{1}{s}$

$\omega_- = (3{,}80 \pm 0{,}04)\ \frac{1}{s}$

$\omega_s = (0{,}06 \pm 0{,}04)\ \frac{1}{s}$

berechnen.

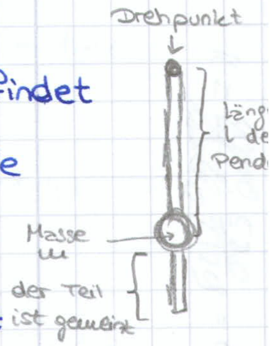
Dieses Mal liegen die Werte für ω_- mit 2,63% Abweichung relativ nah beieinander, während sich die Werte für ω_+ ziemlich stark unterscheiden (11,23%). Allerdings ist der Unterschied zw. den Theoriewerten und den gemessenen Werten für ω_s auch dieses Mal mit 816,67% ungewöhnlich hoch.

DISKUSSION

Es fällt auf, dass sich die gemessenen Werte und die Theoriewerte mehr oder weniger stark unterscheiden.

Dies kann mehrere Gründe haben:

1. Die Pendellänge der beiden Pendel kann sich minimal unterscheiden.
2. Die Lage des Drehpunktes könnte nicht optimal bestimmt worden sein.
3. Da bei einem Stabpendel nur das Gewicht verschoben wird, befindet sich unterhalb des Gewichtes noch ein Teil des Stabes, der die Schwingung beeinflussen kann.



4. Da der Kopplungsgrad anhand der gemessenen Werte bestimmt wird ~~wurde~~ und dadurch einen relativ großen Fehler hat, sind die daraus folgenden Theoriewerte mit Vorsicht zu genießen.
5. Ähnlich wie bei der Pendellänge kann sich auch die Auslenkung der beiden Pendel unterscheiden.
6. Ebenso ist die manuelle Zeitmessung stark fehlerbehaftet, da man sich auf die eigene Beobachtungsgabe und Reaktionszeit verlassen muss.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es viele Fehlerquellen gibt, die das Ergebnis beeinflussen.

Für eine präzisere Messung müssen Fehlerquellen, wie zum Beispiel die manuelle Zeitmessung, eliminiert und durch ein automatisiertes Verfahren ersetzt werden.

Darüber hinaus müssten größere Messreihen aufgenommen werden, um die Fehler möglichst klein zu halten.

LITERATUR

[1] Skript zum Versuch 106 des physikalischen Anfänger-praktikums der TU Dortmund

129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/GekoppeltePendel.pdf (letzter Aufruf: 15.10.2017)

Gekoppelte Pendel

0cm   Auslenkung: 5cm

Ich kann nicht rechnen ⇒ ∅ = 1,71

												Gesamt
T_1	1,73	1,69	1,73	1,69	1,77	1,56	1,85	1,68	1,74	1,78	1,69	18,91
T_1	1,60	1,71	1,68	1,76	1,67	1,67	1,68	1,76	1,71	1,68	1,69	18,65

$\frac{717}{20}$

$\varnothing = \frac{717}{440} = 1{,}63$

T_2	1,73	1,67	1,73	1,67	1,76	1,72	1,74	1,69	1,73	1,62	1,78
T_2	1,80	1,66	1,72	1,79	1,63	1,77	1,67	1,77	1,67	1,82	1,59

$\varnothing = 1{,}73$

T_+	1,65	1,74	1,73	1,69	1,77	1,63	1,69	1,75	1,71	1,79	1,67	$\varnothing = \frac{941}{550} = 1{,}71$
T_-	1,34	1,50	1,21	1,44	1,49	1,36	1,43	1,49	1,29	1,48	1,43 ~~1,43~~	$\varnothing = \frac{773}{550} = 1{,}41$
T_S	10,16	10,32	10,32	11,39	11,28	12,72	12,18	12,53	12,25	12,88	12,72	$\varnothing = \frac{3219}{275} = 11{,}7$

K = ... 2729 = 0,19

T (1.)	1,66	1,67	1,67	1,68	1,55	1,77	1,97	1,71	1,68	1,63	1,62
(12.)	1,63	1,90	1,84	1,71	1,68	1,63	1,59	1,70	1,34	1,51	1,33

$\varnothing = 1{,}71$

L=90cm   Auslenkung: 5cm

T_1	1,80 ↓ 1,86	1,85	1,82	2,17	1,86	1,96	1,84	1,81	1,88	1,99	1,85
T_1	2,17	1,85	1,92	1,98	1,80	1,91	1,92	1,96	1,88	1,83	1,98

$\frac{169}{4}$

$\varnothing = \frac{169}{88} = 1{,}90$ s

T_2	1,95	1,71	1,94	2,00	1,98	1,89	1,70	2,00	1,96	1,88	1,91
T_2	1,98	1,88	1,96	2,03	1,75	1,97	1,94	1,93	1,84	2,00	1,91

$\frac{4211}{100}$

$\varnothing = 1{,}91$ s

T_+	1,79	1,86	1,89	1,98	1,93	1,85	1,94	1,93	1,93	1,83	1,89	$\varnothing = \frac{1041}{550} = 1{,}89$
T_-	1,62	1,70	1,62	1,51	1,62	1,66	1,54	1,71	1,56	1,59	1,63	$\varnothing = \frac{17}{11} = 1{,}54$
T_S	10,69	11,27	11,63	12,52	12,45	10,99	10,54	10,73	10,86	12,84	11,83	$\varnothing = 11{,}48$

N.M.

T	1,65	1,74	1,78	1,77	1,68	1,75	1,35	1,60	1,64	1,72	1,7[illegible]
T	12. 1,78	1,78	1,78	1,31	1,50	1,74	1,75	1,79	1,86	1,79	1,92

N.K.

Korrektur

① $l = 70\,cm$

Messwerte: $T_s = (11{,}71 \pm 0{,}32)\,s$

Theoriewert: $T_s = (86{,}44 \pm 45{,}98)\,s$?

$T_{s,1} \approx 8{,}04\,s$

$(8{,}04 \pm 0{,}97)\,s$

Abweichung: 86,46 %

45,30 %

② $l = 90\,cm$

$T_s = (11{,}43 \pm 0{,}25)\,s$

$T_s = (104{,}12 \pm 61{,}10)\,s$?

$T_{s,2} \approx 10{,}9\,s$

$(10{,}87 \pm 0{,}91)\,s$

89,02 %

5,2 %

① Beim Vergleich der Theoriewerte mit den gemessenenen Werten fällt auf, dass die Werte für die gleichsinnige Schwingung mit einer Abweichung von 1,87% fast identisch sind. Die Werte der gegensinnigen Schwingung gehen mit 17,02% Abweichung weiter auseinander, während die Schwebungsperiode mit 86,46% sehr stark abweicht.

② Dieses Mal ist die Abweichung der Werte für die gleichsinnige Schwingung mit 11,23% etwas größer, während die Werte für die gegensinnige Schwingung mit 2,63% Abweichung sehr nah beeinander liegen.

Allerdings ist die Abweichung der Schwebungsperiode mit 89,02% wieder sehr hoch.