VERSUCH 103

Biegung elastischer Stäbe

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Julia Sobolewski
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 07.11.2017

Abgabe: 14.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie [1]

Ziel: Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls unterschiedlicher Metallstäbe unter ein- und beidseitiger Einspannung.

Wirkt auf einen Körper eine Kraft F, so wirken auf ihn Spannungen σ. Dabei ist die Spannung σ als Kraft pro Fläche definiert. Die senkrechte Komponente der Spannung wird als Normalspannung und die parallele Komponente als Schubspannung bezeichnet. Das Hook'sche Gesetz beschreibt die Abhängigeit der Spannung σ von dem Elastizitätsmodul E und der relativen Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Im Experiment werden Biegungen ausgenutzt, da sich bereits bei geringen Kräften eine Verformung des Körpers erkennen lässt. Die wirkende Kraft erzeugt ein Drehmoment, sodass die unteren Schichten des Körpers gestaucht und oberen Schichten gestreckt werden. Daher existiert in der Mitte des Körpers auch eine neutrale Faser. Dies hat zur Folge, dass innere Normalspannungen auftreten. Diese treten sowohl oberhalb als auch unterhalb der neutralen Faser auf und wirken entgegengesetzt. Der Stab biegt sich, bis das gewichtsbedingte Drehmoment gleich dem spannungsbedingtem Drehmoment ist:

$$M_{\text{außen}} = M_{\text{innen}} \tag{2}$$

$$\implies F(L-x) = \int_q y\sigma(y)dq \tag{3}$$

Dadurch ergibt sich für die einseitige Einspannung für die Auslenkung D:

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot (Lx^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{4}$$

Dabei ist L die eingespannte Länge des Stabes, x die Entfernung des Messpunktes zum Einspannpunkt und I das Flächenträgheitsmoment. Bei beidseitiger Einspannung greift die Kraft in der Mitte des Stabes an und es ergibt sich für die Auslenkung D:

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (3L^2x - 4x^3), \qquad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \tag{5}$$

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3), \qquad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{6}$$

2 Aufbau und Durchführung [1]

2.1 Dichtebestimmung

Zunächst werden die Stäbe gewogen und die Länge L gemessen. Daraufhin wird beim runden Stab der Radius r und beim eckigen Stab die Seitenlängen a, b bestimmt. Das Volumen V des runden Stabes ist gegeben durch $V = \pi \cdot r^2 \cdot L$, das des eckigen Stabes hingegen durch $V = a \cdot b \cdot L$. Die Dichte des jeweiligen Stabes wird dann nach $\rho = \frac{m}{V}$ bestimmt.

2.2 Einseitige Einspannung

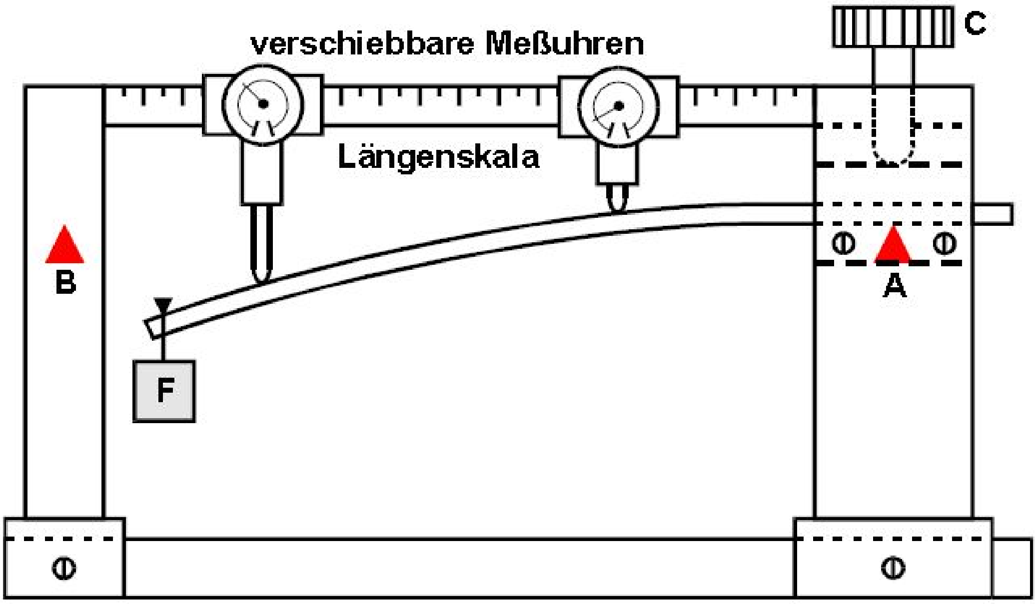

Abbildung 1: Aufbau [1, S. 2]

Einer der beiden Stäbe wird nun enstprechend der Abbildung (1) eingespannt. Danach wird eine der Messuhren zum Einspannpunkt des Stabes geschoben. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Stab 100%-ig gerade ist und sich der Stab schon aufgrund seines Gewichtes biegt, wird zunächst eine Nullmessung durchgeführt. Dazu wird, bevor ein Gewicht angehängt wird, die Ausdehnung $D(x)$ abgelesen. Um Fehler zu vermeiden, wird direkt danach ein Gewicht ans Ende des Stabes eingehängt, die Ausdehnung $D(x)$ erneut abgelesen und die Messuhr auf einen Abstand x verschoben. Dies wird solange wiederholt, bis das Ende des Stabes erreicht wird. Der Vorgang wird für den anderen Stab wiederholt.

2.3 Beiseitige Einspannung

Der runde Stab wird eingespannt und auf den Punkt B aufgelegt. Ähnlich wie bei der einseitigen Einspannung(2.2) wird nun die Auslenkung $D(x)$ gemessen. Es sind jedoch folgene Unterschiede zu beachten:

- An beide Ende des Stabes wird eine Messuhr geschoben.
- Beide Messuhren werden nur solange verschoben, bis die Mitte des Stabes erreicht wurde.
- Das Gewicht wird an die Mitte des Stabes gehängt, nicht an das Ende.

3 Auswertung

3.1 Dichtebestimmung

- Masse des runden Stabes: $m_{\text{rund}} = 379{,}2\,\text{g}$
- Masse des eckigen Stabes: $m_{\text{eckig}} = 167{,}1\,\text{g}$
- Gesamtlänge des runden Stabes: $L_{\text{ges, rund}} = 57{,}5\,\text{cm}$
- Gesamtlänge des eckigen Stabes: $L_{\text{ges, eckig}} = 59{,}0\,\text{cm}$
- Erdbeschleunigung: $g = 10\,\text{m/s}^2$
- Radius des rundes Stabes: $r = 0{,}5\,\text{cm}$
- Seitenlängen a und b des eckigen Stabes: $a = b = 1\,\text{cm} = h$

Wie in 2.1 beschrieben, werden nun die Dichten der beide Stäbe berechnet:

$$\rho_{\text{rund}} = 8396{,}74\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\rho_{\text{eckig}} = 2832{,}20\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Laut [4] entspricht ρ_{rund} der Dichte von Messing und ρ_{eckig} der Dichte von Aluminium.

3.2 Einseitge Einspannung

3.2.1 Runder Stab

Die eigentliche Auslenkung $D(x)$ berechnet sich aus $D_m(x) - D_0(x)$ und die eingespannte Länge des Stabes beträgt $L = 50{,}1\,\mathrm{cm}$. Die Masse des angehängten Gewichts beträgt $m = 1183{,}0\,\mathrm{g}$

Tabelle 1: Messdaten

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
3	0,00	0,15	0,15
5	0,01	0,21	0,20
7	0,03	0,38	0,35
9	0,08	0,61	0,53
11	0,14	0,92	0,78
13	0,16	1,18	1,02
15	0,27	1,59	1,32
17	0,42	2,07	1,65
19	0,41	2,62	2,21
21	0,54	2,94	2,40
23	0,61	3,45	2,84
25	0,76	4,05	3,29
27	0,91	4,77	3,86
29	1,09	5,33	4,24
31	1,26	6,00	4,74
33	1,36	7,01	5,65
35	1,59	7,54	5,95
37	1,87	8,25	6,38
39	2,05	9,06	7,01
41	2,24	9,79	7,55

Aus diesen Messwerten folgt der Graph:

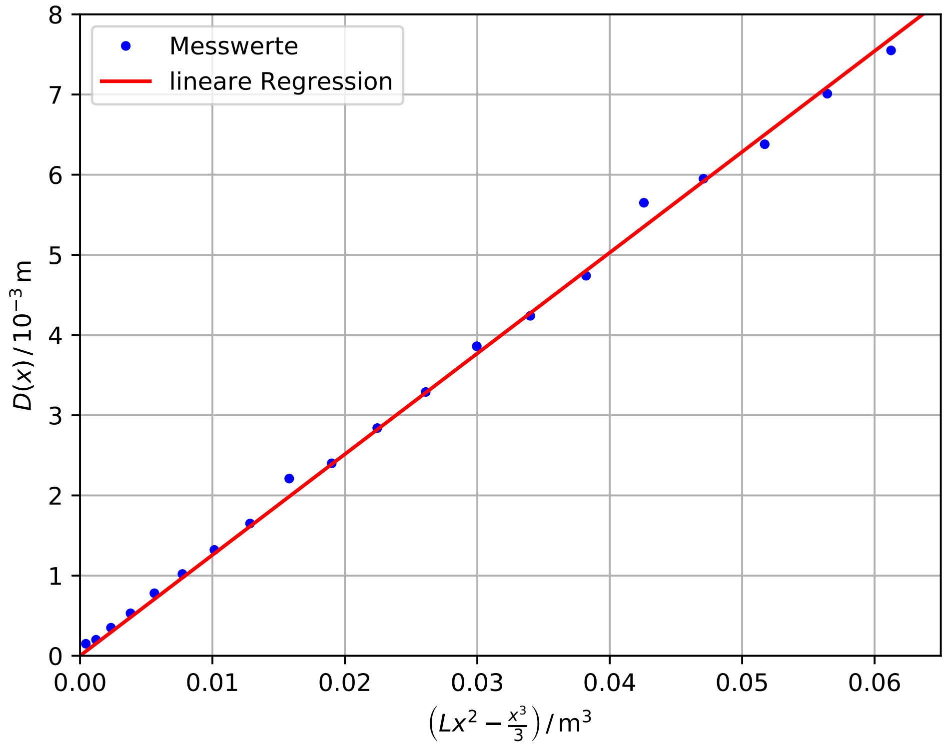

Abbildung 2: $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$-$D(x)$-Diagramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird eine lineare Regression durchgeführt, die folgende Werte liefert:

Tabelle 2: lineare Regression

	Werte
Steigung m	$(0{,}1257 \pm 0{,}0008)\,1/\mathrm{m}^2$

Der Elastizitätsmodul $E = (95{,}86 \pm 0{,}60)\,\mathrm{GPa}$ ergibt sich aus Gleichung (4). Das benötigte Flächenträgheitsmoment eines Kreisquerschnittes [3] ist

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi r^4}{4}. \tag{7}$$

Den Fehler erhält man aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial y}{\partial x_i}\mathit{\Delta} x_i)^2}. \tag{8}$$

3.2.2 Eckiger Stab

Wie schon im vorausgegangenen Kapitel berechnet sich auch hier die benötigte Auslenkung als $D(x) = D_m(x) - D_0(x)$. Dieses mal ist die eingespannte Stablänge $L = 49{,}9\,\mathrm{cm}$ und das eingespannte Gewicht beträgt $m = 1202{,}1\,\mathrm{g}$ Alle benötigten Messdaten finden sich in nachfolgender Tabelle:

Tabelle 3: Messdaten

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
3	0,00	0,09	0,09
5	0,00	0,18	0,18
7	0,03	0,34	0,31
9	0,12	0,58	0,46
11	0,25	0,95	0,70
13	0,45	1,35	0,90
15	0,66	1,80	1,14
17	0,88	2,30	1,42
19	1,13	2,93	1,80
21	1,42	3,48	2,06
23	1,65	4,11	2,46
25	1,93	4,75	2,82
27	2,21	5,41	3,20
29	2,46	6,12	3,66
31	2,75	6,82	4,07
33	3,06	7,53	4,47
35	3,30	8,23	4,93
37	3,55	8,93	5,38
39	3,85	9,65	5,80

Daraus folgt der Graph:

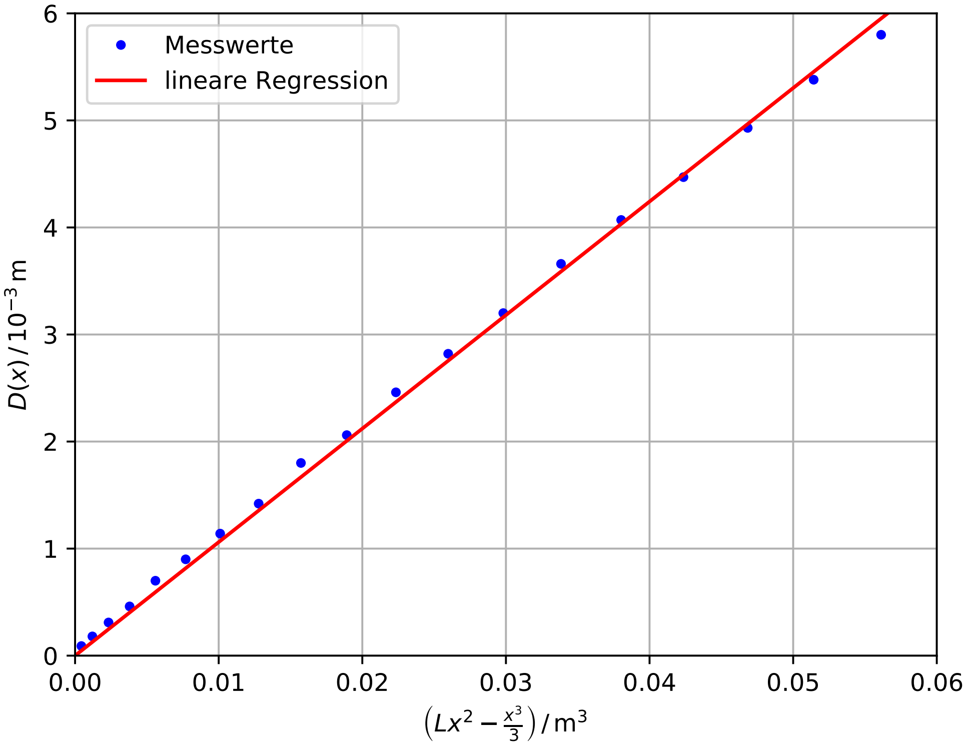

Abbildung 3: $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$-$D(x)$-Diagramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Tabelle 4: lineare Regression

	Werte
Steigung m	$(0{,}1060 \pm 0{,}0004)\,1/\mathrm{m}^2$

Aus Gleichung (4) berechnet sich der Elastizitätsmodul mit dem Fehler aus Gleichung (8) $E = (68{,}01 \pm 0{,}40)\,\mathrm{GPa}$. Das Flächenträgheitsmoment einer quadratischen Querschnittsfläche [3] ist

$$T_{\mathrm{Quadrat}} = \frac{h^4}{12}. \qquad (9)$$

3.3 Beidseitige Einspannung - Runder Stab

Die eingespannte Länge zwischen den beiden Punkten A und B (s. 1) beträgt $L = (54{,}5 \pm 0{,}0)\,\mathrm{cm}$. Das Gewicht hat hier eine Masse von $m = 3541{,}3\,\mathrm{g}$. Für die Messung wurde Punkt A als Startpunkt, also $x = 0$, ausgewählt. Die erste Tabelle zeigt die Messwerte für $0 \leq x \leq L/2$ und die zweite Tabelle die Messwerte für $L/2 \leq x \leq L$.

Tabelle 5: Messdaten - erste Hälfte

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
3	0,00	0,07	0,07
5	−0,01	0,12	0,13
7	−0,02	0,18	0,20
9	−0,07	0,24	0,31
11	−0,08	0,36	0,44
13	−0,03	0,49	0,52
15	−0,03	0,61	0,64
17	−0,01	0,75	0,76
19	0,02	0,89	0,87
21	0,01	0,99	0,98
23	0,07	1,11	1,04
25	0,09	1,21	1,12
27	0,12	1,30	1,18

Tabelle 6: Messdaten - zweite Hälfte

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_m(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
29,50	−0,87	0,35	1,22
31,50	−0,80	0,38	1,18
33,50	−0,78	0,39	1,17
35,50	−0,73	0,39	1,12
37,50	−0,60	0,42	1,02
39,50	−0,54	0,43	0,97
41,50	−0,43	0,44	0,87
43,50	−0,33	0,43	0,76
45,50	−0,23	0,42	0,65
47,50	−0,12	0,39	0,51
49,50	−0,05	0,35	0,40
51,50	0,00	0,24	0,24

Die dazugehörigen Graphen sind:

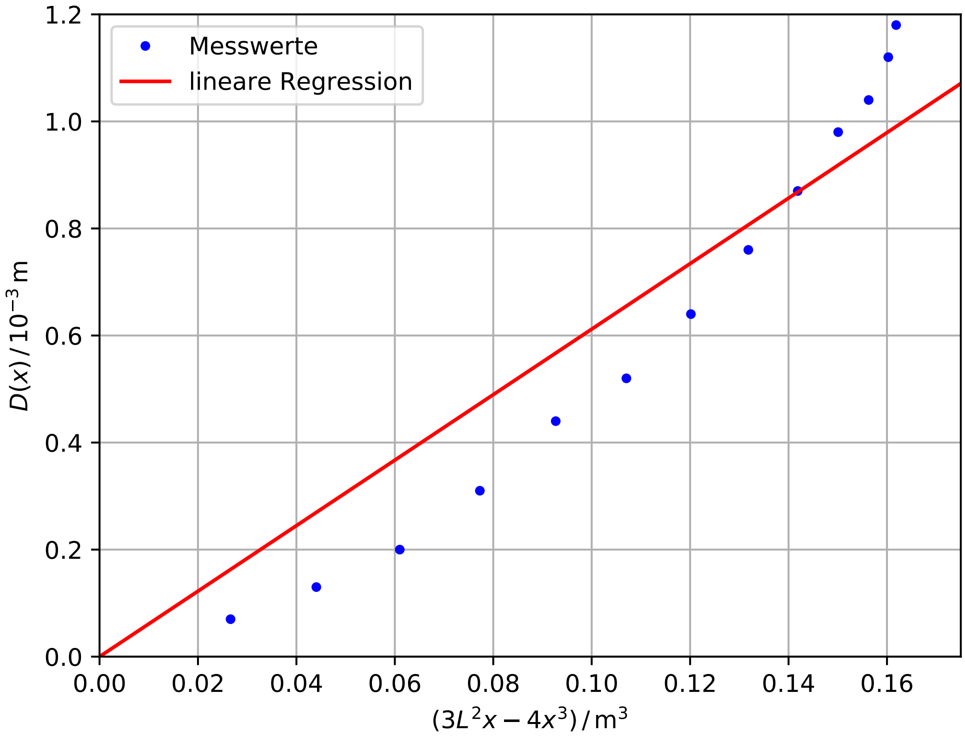

Abbildung 4: $D(x)$-$\left(3L^2x - 4x^3\right)$-Diagramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

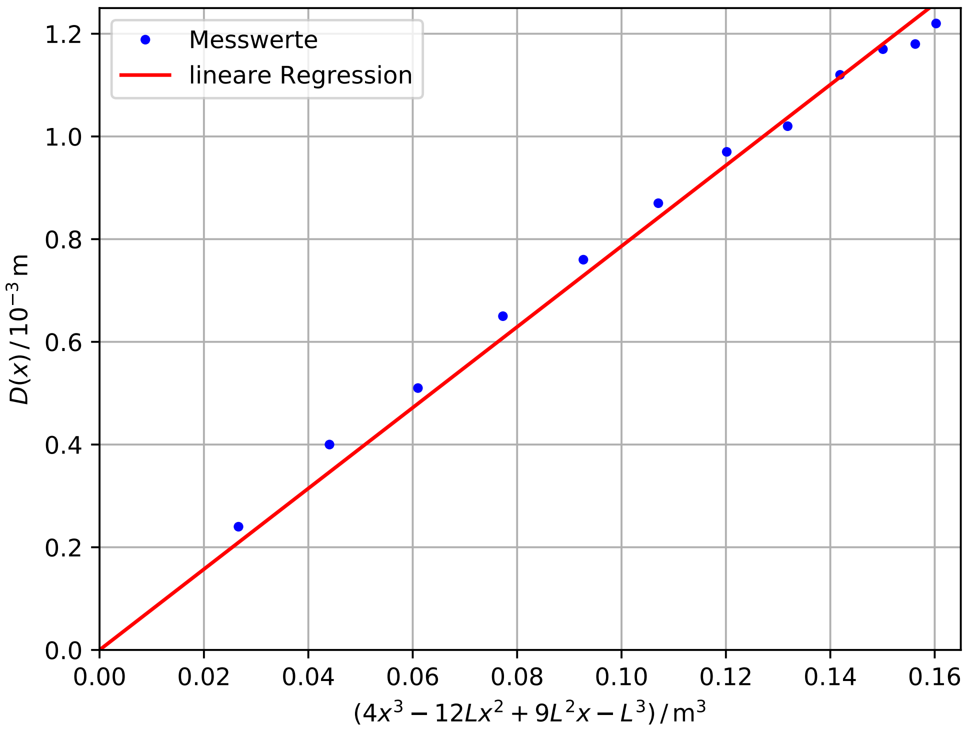

Abbildung 5: $D(x)$-$\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right)$-Diagramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Hier ergibt sich aus der linearen Regression von Abbildung 4

Tabelle 7: lineare Regression 1

	Werte
Steigung m	$(0{,}0061 \pm 0{,}0003)\,1/\mathrm{m}^2$

und den Gleichungen (5) und (8) der Elastizitätsmodul $E_1 = (245{,}63 \pm 12{,}00)\,\mathrm{GPa}$. Aus der linearen Regression von Abbildung 5

Tabelle 8: lineare Regression 2

	Werte
Steigung m	$(0{,}0078 \pm 0{,}0009)\,1/\mathrm{m}^2$

und Gleichung (6) ergibt sich mit dem Gauß-Fehler (8) der Elastizitätsmodul $E_2 = (191{,}13 \pm 2{,}14)\,\mathrm{GPa}$.

Aus dem Mittelwert von E_1 und E_2 und dem Fehler aus Gleichung (8) ergibt sich $E = (218{,}38 \pm 6{,}09)\,\mathrm{GPa}$.

4 Diskussion

Die Literaturwerte[2, S. 95] der Elastizitätsmodule lauten:

$$\begin{aligned} E_{\text{Aluminium}} &= 71\text{GPa} \\ E_{\text{Messing}} &= 98\text{GPa} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgene Abweichungen:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Aluminium}} &= 4,21\% \\ \delta_{\text{Messing,Einseitig}} &= 2,18\% \\ \delta_{\text{Messing,Beiseitig}} &= 122,84\% \end{aligned}$$

Die Abweichungen für die einseitige Einspannung fallen mit $4,21\%$ und $2,18\%$ sehr gering aus und liegen innerhalb der Messungenauigkeiten. Trotz des analogen Vorgehens fällt der Fehler für die beidseitige Einspannung mit $122,84\%$ deutlich höher aus. Dies kann folgene Gründe haben:

- Der Aufsetzpunkt der Messuhr ist frei beweglich, sodass dieser sich um 180° um die eigene Achse gedreht haben kann, ohne, dass es den Experimentatoren aufgefallen ist. Dies ist nicht zu vernachlässigen, da eine solche Drehung große Unterschiede in den Messweten verursacht.
- Das System reagiert sehr empfindlich auf Stöße, was ebenfalls zu Abweichungen führen kann.
- Es kann ebenfalls sein, dass die extrem geringe Gesamtauslenkung des Stabes bei der beidseitigen Auflage (gerade mal 1,2 mm) nicht ausreicht, um den Elastizitätsmodul genau zu bestimmen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Methode mit der einseitigen Einspannung genauere Werte liefert und der beidseitigen Einspannung vorzuziehen ist.

Literatur

[1] TU Dortmund. *V103 - Biegung elastischer Stäbe*. 2017.

[2] David Schwarzenberg. „Der Elastizitätsmodul: Messung und Anwendung in der Schule“. Staatsexamen. Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2004, S. 95. URL: `http://www.physik.uni-mainz.de/lehramt/lehramt/Vortraege/Anleitung/DSchw_StEx.pdf`.

[3] Universität Siegen. *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. 2009. URL: `http://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf`.

[4] *Tabellensammlung Chemie/ Dichte fester Stoffe*. URL: `https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe`.