

VERSUCH 105

Das Magnetische Moment

Lars Kolk

`lars.kolk@tu-dortmund.de`

Julia Sobolewski

`julia.sobolewski@tu-dortmund.de`

Durchführung: 24.10.2017

Abgabe: 07.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie [1]	3
2	Aufbau [1]	3
3	Durchführung [1]	4
3.1	Apparatekonstanten bestimmen	4
3.2	Bestimmung des magnetischen Moments mithilfe der Gravitation	4
3.3	Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer . . .	5
3.4	Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession	5
4	Auswertung	6
4.1	Apparatekonstanten	6
4.2	Gravitation	6
4.3	Schwingungsdauer	7
4.4	Präzession	9
5	Diskussion	11
	Literatur	11

1 Theorie [1]

Ziel: Die Bestimmung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten auf drei unterschiedliche Arten.

Magnetische Dipole können entweder als Permanentmagneten oder als stromdurchflossene Leiter auftreten. Das magnetische Moment einer stromdurchflossenen Leiterschleife ergibt sich aus:

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}, \quad (1)$$

wobei I die Stromstärke und A die Querschnittsfläche der Leiterschleife ist. In einem homogenen Magnetfeld wirkt das Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (2)$$

Um ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen, wird ein Helmholtz-Spulenpaar eingesetzt. Dieses besteht aus zwei gleichsinnig vom Strom I durchflossenen Kreisspulen, die so positioniert werden, dass ihre Achsen zusammenfallen. Dabei ist der Abstand d der Spulen gleich dem Spulenradius R .

Das Magnetfeld in der Mitte des Spulenpaares lässt sich mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3)$$

bestimmen. Das Magnetfeld für eine Spule mit einer Windung beträgt somit:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x. \quad (4)$$

Da im Experiment aber $d = 2x$ gilt, muss mit dem allgemeinen Fall

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

gerechnet werden.

2 Aufbau [1]

Ein kleiner zylindrischer Permanentmagnet befindet sich in der Mitte von einer Billardkugel. Das magnetische Moment μ_{Dipol} des Permanentmagneten zeigt in Richtung des Stiels. Das homogene Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar, mit den Abmessungen $N = 195$, $d = 0,138\text{m}$ und $R = 0,109\text{m}$, erzeugt. In der Mitte der Anordnung befindet sich ein Messingzylinder mit einem Luftkissen und an der oberen Spule befindet sich ein Stroboskop zur Bestimmung der Drehbewegung.

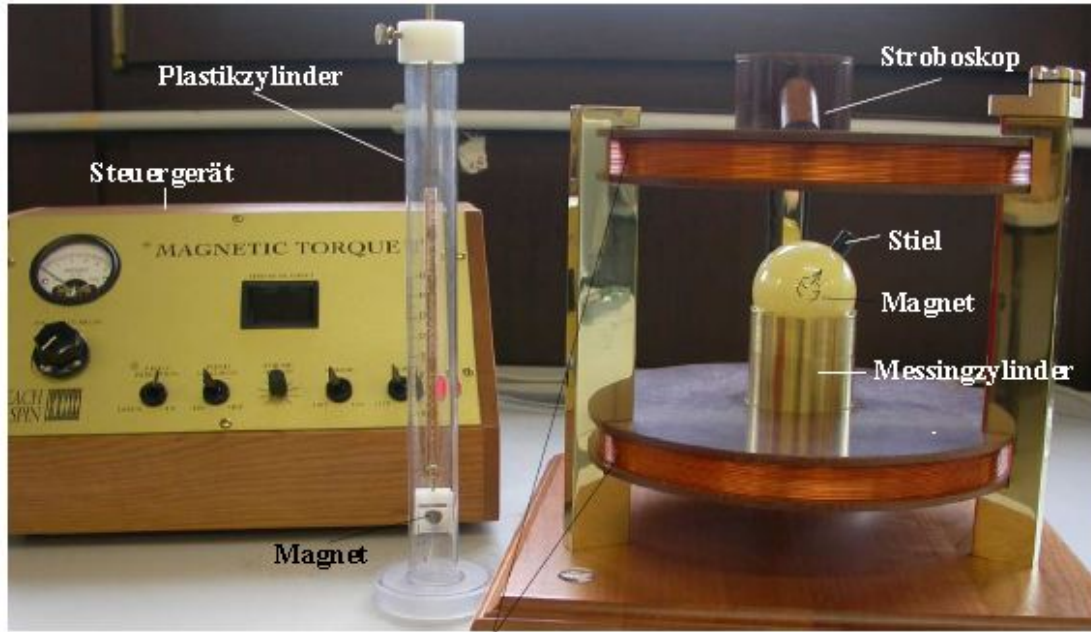


Abbildung 1: Helmholtz-Spulenpaar [1, S. 2]

3 Durchführung [1]

3.1 Apparatekonstanten bestimmen

Zunächst müssen der Radius r_K und die Masse m_K der Billardkugel und die Länge des Stiels bestimmt werden. Mithilfe dieser Werte wird anschließend Trägheitsmoment $J_K = \frac{2}{5}m_K \cdot r_K^2$ berechnet. Außerdem muss auch die verschiebbare Masse m gewogen werden.

3.2 Bestimmung des magnetischen Moments mithilfe der Gravitation

Es wird eine Aluminiumstange mit einer verschiebbaren Masse m in den Stiel der Kugel geschoben. Dabei wirkt die Gravitationskraft $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$ auf die Masse m , die das Drehmoment $\vec{D}_g = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g})$ ausübt. In diesem Fall ist $|\vec{r}|$ der Abstand zwischen dem Zentrum der Billardkugel und dem Schwerpunkt der Masse m . Der Gravitation wirkt das Magnetfeld mit dem Drehmoment $\vec{D}_B = \vec{\mu} \times \vec{B}$ entgegen. Im Gleichgewicht gilt:

$$m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (6)$$

$$\Rightarrow r \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi = \mu_{\text{Dipol}} \cdot B \cdot \sin \vartheta. \quad (7)$$

Weil $\vec{g} \parallel \vec{B}$ ist, gilt $\varphi = \vartheta$. Daraus folgt:

$$\mu_{\text{Dipol}} \cdot B = m \cdot r \cdot g \quad (8)$$

Zuerst wird die Kugel mit der Aluminiumstange und der Masse m auf den Messingzylinder gestellt und das Gebläse eingeschaltet. Für einen gegebenen Abstand r muss die Stromstärke I und somit das Magnetfeld B so eingestellt werden, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. Diese Messung soll für neun weitere Abstände wiederholt werden.

3.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer

In diesem Teil des Experiments wird die Kugel in Schwingung versetzt, wobei sich die Kugel im homogenen Magnetfeld wie ein harmonischer Oszillator verhält. Die Bewegung der Kugel wird durch

$$-|\vec{\mu} \times \vec{B}| = J_K \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad (9)$$

beschrieben. Durch Lösen der Differentialgleichung ergibt sich die Schwingungsdauer T :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{\text{Dipol}}} \frac{1}{B}. \quad (10)$$

Die Kugel wird erneut auf den Messingzylinder gesetzt und das Gebläse eingeschaltet. Bei einem eingestellten Magnetfeld wird die Kugel um einen kleinen Winkel ausgelenkt. Es werden zehn Periodendauern gemessen und das Ergebnis gemittelt. Dies wird für neun weitere Magnetfeldstärken wiederholt.

3.4 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession

Bei der Präzession bewegt sich die Drehachse eines rotierenden Körpers auf einem Kegelmantel um die Drehimpulsachse L . Die Bewegungsgleichung für eine Präzessionsbewegung lautet:

$$\vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt}. \quad (11)$$

Die dazugehörige Lösung ist die Präzessionsfrequenz:

$$\Omega_P = \frac{\mu \cdot B}{|\vec{L}_K|}. \quad (12)$$

Da $\Omega_P = \frac{1}{T_P}$ ist, gilt:

$$\frac{1}{T_P} = \frac{\mu_{\text{Dipol}}}{2\pi L_K} B, \quad (13)$$

wobei $L_K = J_K \cdot \omega$ ist.

Die Kugel wird auf das Luftkissen gesetzt und das Stroboskop auf eine Frequenz zwischen 4Hz und 6Hz eingestellt. Anschließend wird die Billardkugel in Rotation versetzt und aus der senkrechten Position ausgelenkt. Die Rotationsfrequenz kann mithilfe des Stroboskops kontrolliert werden. Auf dem Stiel der Billardkugel befindet sich eine weiße Markierung. Rotiert die Kugel mit der am Stroboskop eingestellten Frequenz, erscheint die Markierung

stationär. Sobald dies der Fall ist wird das Magnetfeld eingeschaltet und dreimal die Präzessionsperiode T_P gemessen. Dies wird für insgesamt zehn Magnetfeldstärken B wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Apparatkonstanten

- Masse der Billardkugel: $m_K = (142,1 \pm 0,0) \text{ g}$
- Radius der Billardkugel: $r_K = (2,55 \pm 0,00) \text{ cm}$
- Trägheitsmoment: $J_K = (3,696 \pm 0,000) \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$
- verschiebbare Masse: $m = (1,4 \pm 0,0) \text{ g}$
- Erdbeschleunigung: $g = (10 \pm 0) \text{ m/s}^2$

4.2 Gravitation

Das magnetische Feld, das gegen den Radius aufgetragen werden soll, ergibt sich aus Gleichung (5).

Tabelle 1: Messdaten „Gravitation“

r / cm	I / A	B / mT
1,8	1,5	2,03
3,3	1,9	2,58
3,8	2,0	2,71
4,3	2,1	2,85
4,8	2,2	2,98
5,5	2,4	3,25
6,0	2,5	3,39
6,7	2,7	3,66
7,3	2,8	3,80
7,5	3,0	4,07

Aus diesen Messwerten folgt der Graph:

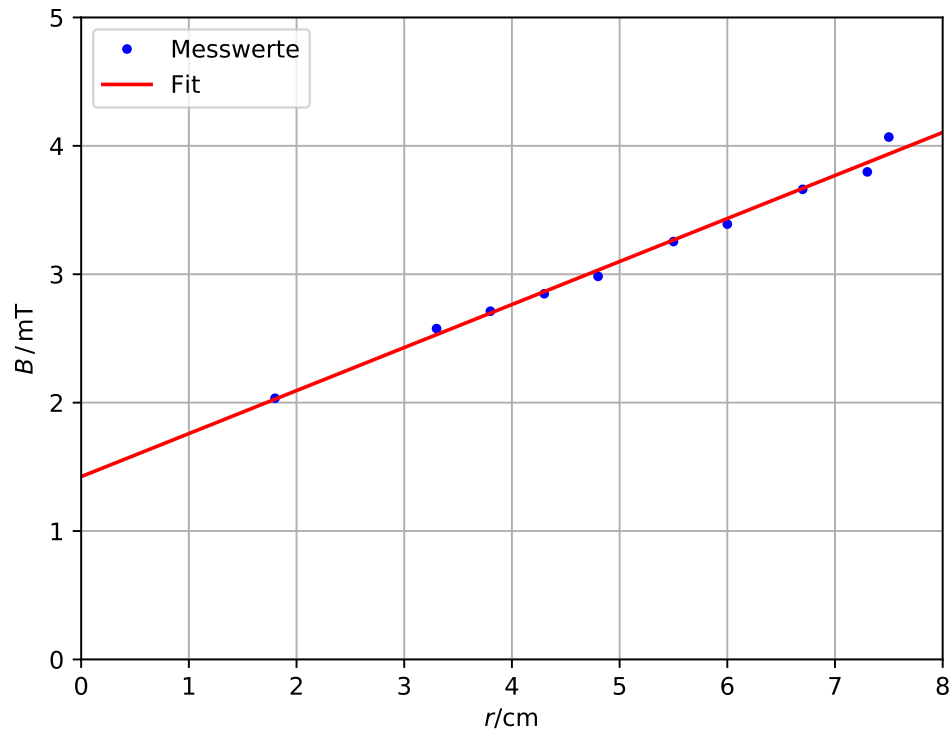


Abbildung 2: r - B -Diagramm zur Bestimmung des magnetischen Moments

Zur Bestimmung des magnetischen Moments wird eine lineare Regression durchgeführt, die folgende Werte liefert:

Tabelle 2: lineare Regression

Werte	
Steigung m	$(0,0335 \pm 0,0011) \text{ T/m}$
Achsenabschnitt b	$(0,0014 \pm 0,0000) \text{ T}$

Das magnetische Moment ergibt sich aus der in Gleichung (8) gegebenen Steigung:
 $\mu_{\text{Dipol}} = (0,4179 \pm 0,0173) \text{ A m}^2$.

4.3 Schwingungsdauer

Wie schon im vorausgegangenen Kapitel berechnet sich auch hier, die benötigte magnetische Feldstärke aus Gleichung (5). Alle benötigten Messdaten finden sich in nachfolgender

Tabelle:

Tabelle 3: Messdaten „Schwingungsdauer“

I / A	T_{10} / s	T / s	B^{-1} / T^{-1}	T^2 / s^2
0,5	24,85	2,49	1474,83	6,18
1,0	15,33	1,53	737,41	2,35
1,5	14,09	1,41	491,61	1,99
2,0	11,97	1,20	368,71	1,43
2,2	10,67	1,07	335,19	1,14
2,5	9,93	0,99	294,97	0,99
3,0	9,20	0,92	245,80	0,85
3,5	8,85	0,89	210,69	0,78
3,8	11,35	1,14	194,06	1,29
4,0	8,99	0,90	184,35	0,81

Daraus folgt der Graph:

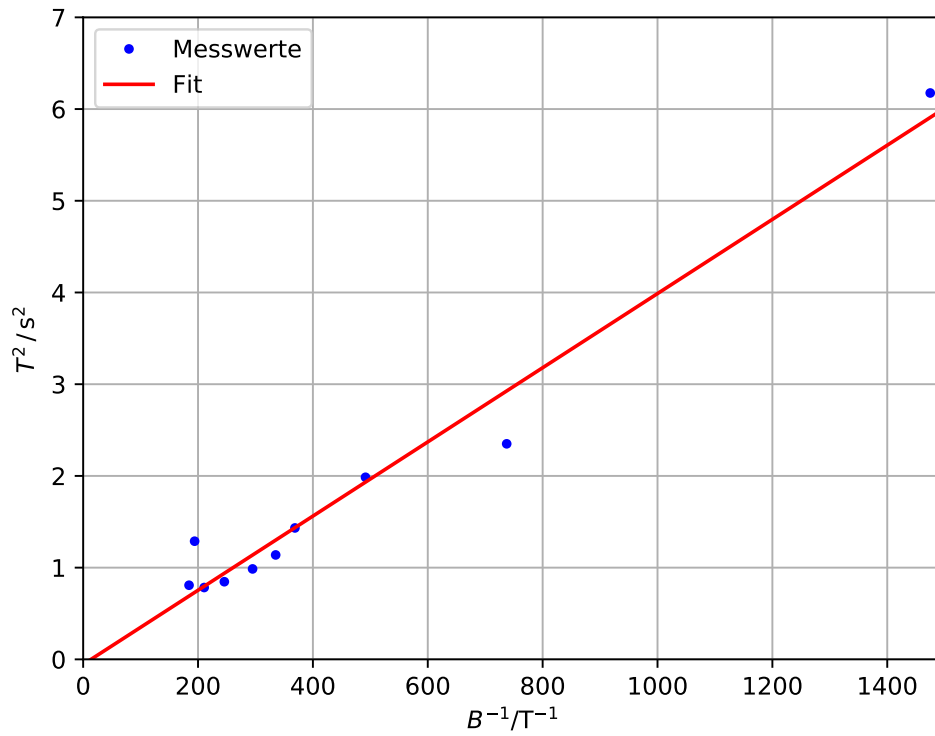


Abbildung 3: B^{-1} - T^2 -Diagramm zur Bestimmung des magnetischen Moments

Tabelle 4: lineare Regression

Werte	
Steigung m	$(0,0040 \pm 0,0003) \text{ s}^2 \text{ T}$
Achsenabschnitt b	$(-0,0554 \pm 0,1558) \text{ s}^2$

Aus Gleichung (10) berechnet sich das magnetische Moment $\mu_{\text{Dipol}} = (0,3609 \pm 0,0236) \text{ A m}^2$.

4.4 Präzession

Zur Aufnahme der Messreihe wurde das Stroboskop auf die Frequenz $\nu = 5 \text{ Hz}$ eingestellt.

Tabelle 5: Messdaten „Präzession“

I / A	T_P / s			T_\varnothing / s	B / mT	$T_\varnothing^{-1} / \text{mHz}$
0,5	22,58	21,26	18,12	$20,65 \pm 1,32$	0,68	$48,42 \pm 3,10$
1,0	11,64	12,39	11,30	$11,78 \pm 0,32$	1,36	$84,91 \pm 2,32$
1,5	8,07	7,64	7,31	$7,67 \pm 0,22$	2,03	$130,32 \pm 3,74$
2,0	6,01	6,22	6,00	$6,08 \pm 0,07$	2,71	$164,56 \pm 1,94$
2,2	5,90	5,64	5,77	$5,77 \pm 0,08$	2,98	$173,31 \pm 2,25$
2,5	4,75	4,53	4,76	$4,68 \pm 0,08$	3,39	$213,68 \pm 3,43$
3,0	4,33	4,35	4,18	$4,29 \pm 0,05$	4,07	$233,28 \pm 2,92$
3,5	3,29	3,41	3,27	$3,32 \pm 0,04$	4,75	$300,90 \pm 3,96$
3,8	3,39	3,42	3,45	$3,42 \pm 0,02$	5,15	$292,40 \pm 1,48$
4,0	3,17	3,20	3,17	$3,18 \pm 0,01$	5,42	$314,47 \pm 0,99$

Die Fehler von T_\varnothing , die der Formel

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (14)$$

entstammen, ergeben in Kombination mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \quad (15)$$

die Fehler von $\frac{1}{T_\varnothing}$.

Der dazugehörige Graph ist:

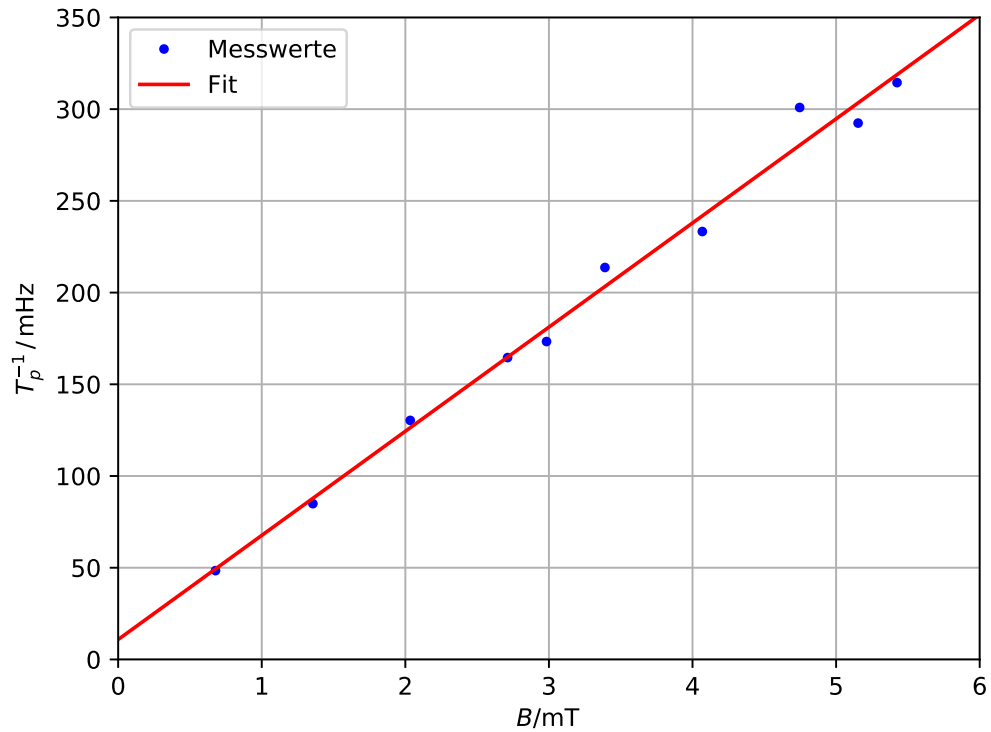


Abbildung 4: B - T_ρ^{-1} -Diagramm zur Bestimmung des magnetischen Moments

Hier ergibt sich aus der linearen Regression:

Tabelle 6: lineare Regression

Werte	
Steigung m	$(56,7703 \pm 2,0932) \text{ Hz/T}$
Achsenabschnitt b	$(0,0109 \pm 0,0075) \text{ Hz}$

Aus Gleichung (13) ergibt sich $\mu_{\text{Dipol}} = (0,4141 \pm 0,0153) \text{ A m}^2$.

5 Diskussion

Die Methoden, bei der die Gravitation (s.3.2) und Präzession (s. 3.4) ausgenutzt werden, waren mit einer prozentualen Abweichung von 3,19% und 3,69% etwas genauer, als die Methode, die sich die Schwingungsdauer zu Nutze macht (s. 3.3). Da erhält man eine Abweichung von 6,54%. Bei der Betrachtung der Ergebnisse müssen aber auch die potentiellen Fehlerquellen beachtet werden. Dazu gehören:

- Bei 3.2 war die Aluminiumstange leicht verbogen, wodurch die Gleichgewichtslage schwer zu erkennen war.
- Weitere Ungenauigkeiten bei 3.2 können ungenaue Waagen und Messschieber sein.
- Eine Schwierigkeit bei 3.3 ist die manuelle Zeitmessung, bei der sich der Experimentator auf seine Urteilsfähigkeit und Reflexe verlassen muss, die bekanntermaßen fehlerbehaftet sind.
- Trotz der Hilfe durch das Stroboskop bei 3.4 ist es äußerst schwierig zu erkennen, wann die Kugel die richtige Frequenz erreicht hat.
- Auch wenn bei 3.4 die Rotationsfrequenz so gewählt wird, dass sie möglichst langsam abfällt, so kann das Abfallen nicht vollständig verhindert werden und kann einen Einfluss auf das Experiment haben.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle drei Messmethoden gute Ergebnisse für das magnetische Moment liefern. Trotz des größeren Fehlers in dieser Messreihe ist die Methode aus 3.3 potentiell am genauesten, da es möglich wäre eine automatisierte Zeitmessung einzuführen und somit der größte Teil der Fehlerquellen beseitigt wäre.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V105 - Das Magnetische Moment*. 2017.