

VERSUCH 351

Fourier-Analyse und -Synthese

Lars Kolk

`lars.kolk@tu-dortmund.de`

Julia Sobolewski

`julia.sobolewski@tu-dortmund.de`

Durchführung: 21.11.2017

Abgabe: 28.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie [1]	3
1.1	Fouriersches Theorem	3
1.2	Fourier-Analyse	3
1.3	Fourier-Transformation	4
2	Aufbau und Durchführung [1]	5
2.1	Vorbereitung	5
2.1.1	Rechteck-Spannung	5
2.1.2	Sägezahn-Spannung	6
2.1.3	Dreieck-Spannung	7
2.2	Fourier-Analyse	8
2.3	Fourier-Synthese	8
3	Auswertung	9
3.1	Fourier-Analyse	9
3.1.1	Rechteck-Spannung	9
3.1.2	Sägezahn-Spannung	10
3.1.3	Dreieck-Spannung	12
3.2	Fourier-Synthese	13
3.2.1	Rechteck-Spannung	13
3.2.2	Sägezahn-Spannung	14
3.2.3	Dreieck-Spannung	15
4	Diskussion	16
	Literatur	17

1 Theorie [1]

Ziel: Im ersten Teil des Versuches sollen die Schwingungen in ihre Fourierkomponenten zerlegt werden. Daraufhin sollen eben diese Schwingungen im zweiten Teil des Versuches aus Oberwellen erzeugt werden.

1.1 Fouriersches Theorem

Ist eine Funktion periodisch, so gilt:

$$f(x) = f(x + D) \quad (1)$$

für räumliche und

$$f(t) = f(t + T) \quad (2)$$

für zeitliche periodische Vorgänge. Wichtige periodische Funktionen sind die Sinus- und Cosinusfunktion. Diese sind 2π -periodisch und decken den Wertebereich von -1 bis 1 ab. Ebenso lassen sich durch

$$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (3)$$

$$g(t) = b \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (4)$$

nahezu alle periodischen Vorgänge beschreiben, was aus dem Fourierschen Theorem folgt. Dieses besagt, dass die Reihe

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right) \quad (5)$$

eine periodische Funktion f darstellt, wenn (5) konvergiert. Ebenso ist zu erkennen, dass neben der Grundfrequenz $\nu_1 = 1/T$ nur ganzzahlige Vielfache von ν_1 - die sogenannten Oberschwingungen - auftreten.

1.2 Fourier-Analyse

Die in (5) enthaltenen Koeffizienten a_n und b_n lassen sich durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (7)$$

bestimmen. Die Bestimmung der Koeffizienten wird auch als Fourier-Analyse bezeichnet. Es existieren jedoch zwei Spezialfälle, die die Rechnung vereinfachen:

- Ist $f(t)$ gerade, also ist $f(t) = f(-t)$, so ist $b_n = 0$.
- Ist $f(t)$ ungerade, also ist $f(t) = -f(-t)$, so ist $a_n = 0$.

Werden die Amplituden der Teilschwingungen gegen die Frequenz aufgetragen, so ergibt sich ein Linienspektrum wie in Abbildung 1.

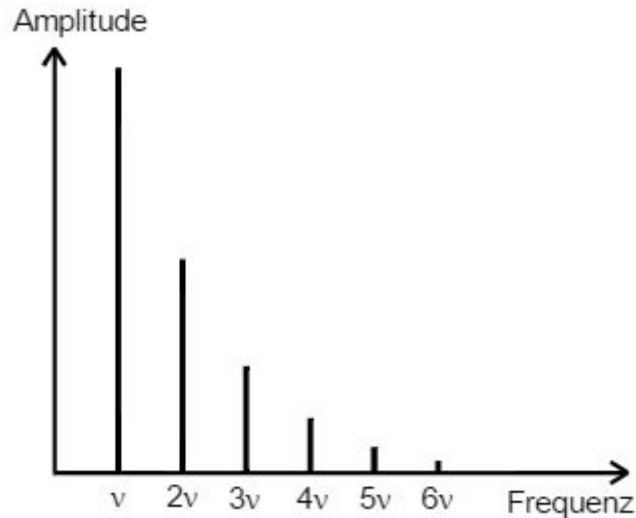


Abbildung 1: Linienspektrum [1, S. 271]

Wird die Fourier-Analyse auf eine Funktion angewendet, die bei $f(t_0)$ nicht stetig ist, so kann sie bei t_0 nicht approximiert werden. Die daraus folgende Abweichung ist jedoch endlich. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

1.3 Fourier-Transformation

Während sich mit (6) und (7) einzelne Komponenten einer periodischen Funktion bestimmen lassen, so stellt

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (8)$$

das gesamte Frequenzspektrum dar. Bei einer periodischen Funktion besteht g aus einer (konvergierenden) Reihe von δ -Distributionen (siehe 1). Diese Transformation ist auch umkehrbar. So ergibt sich für $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{-i\nu t} d\nu \quad (9)$$

Allerdings werden bei (8) und (9) über unendlich lange Zeiten bzw. unendlich viele Frequenzen integriert, was in der Praxis nicht umsetzbar ist. Dies hat zur Folge, dass

Abweichungen zu den erwarteten Ergebnissen auftreten. Ebenso folgt daraus, dass für g keine Reihe von δ -Distributionen erhalten wird, sondern g überall stetige und differenzierbare Funktionen liefert. Des Weiteren treten Nebenmaxima auf, deren Amplituden jedoch schnell abnehmen.

2 Aufbau und Durchführung [1]

2.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung wurden die Fourierkomponenten von drei verschiedenen periodischen Schwingungsformen nach den Gleichungen (6) und (7) berechnet.

2.1.1 Rechteck-Spannung

Eine Rechteckspannung lässt sich durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & -0 < x < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

beschreiben. Durch die Gleichungen (6) und (7) werden die Fourierkoeffizienten

$$a_n = 0 \quad (11)$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

bestimmt. Somit lautet, nach (5), die Fourier-Reihe für eine Rechteck-Spannung:

$$f_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} \quad (13)$$

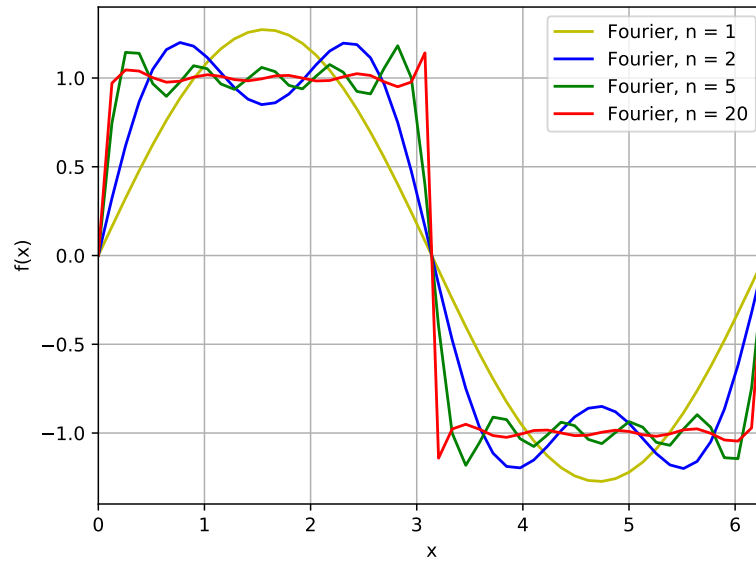


Abbildung 2: Näherung der Rechteck-Spannung mithilfe der Fourier-Reihe

2.1.2 Sägezahn-Spannung

Eine Sägezahn-Spannung wird durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

beschrieben. Erneut werden durch die Gleichungen (6) und (7) die Fourierkoeffizienten bestimmt:

$$a_n = 0 \quad (15)$$

$$b_n = -2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (16)$$

Somit ist, nach (5), die Fourier-Reihe für eine Sägezahn-Spannung :

$$f_n(x) = -2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \quad (17)$$

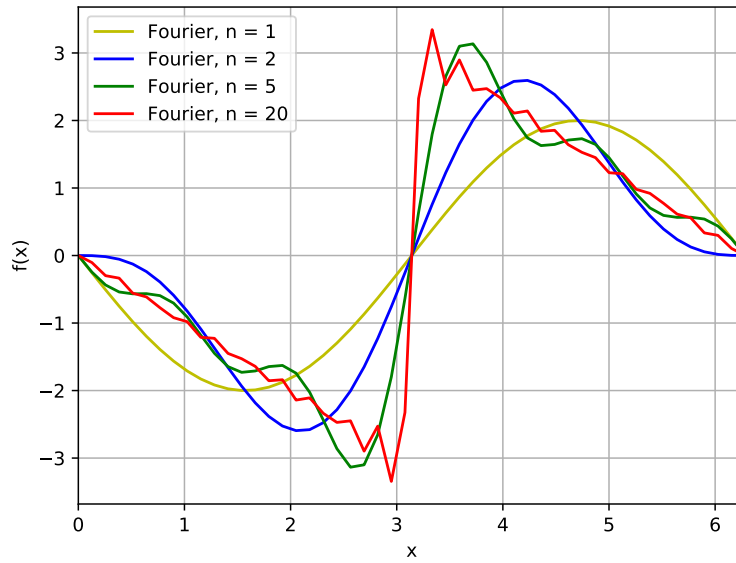


Abbildung 3: Näherung der Sägezahn-Spannung mithilfe der Fourier-Reihe

2.1.3 Dreieck-Spannung

Eine Dreieck-Spannung wird durch die Funktion

$$f(x) = |x| \text{ für } -\pi \leq x \leq \pi \quad (18)$$

beschrieben. Auch hier ergeben sich aus den Gleichungen (6) und (7) die Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (19)$$

$$b_n = 0 \quad (20)$$

Die Fourier-Reihe für eine Dreieck-Spannung lautet, nach (5), also:

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \quad (21)$$

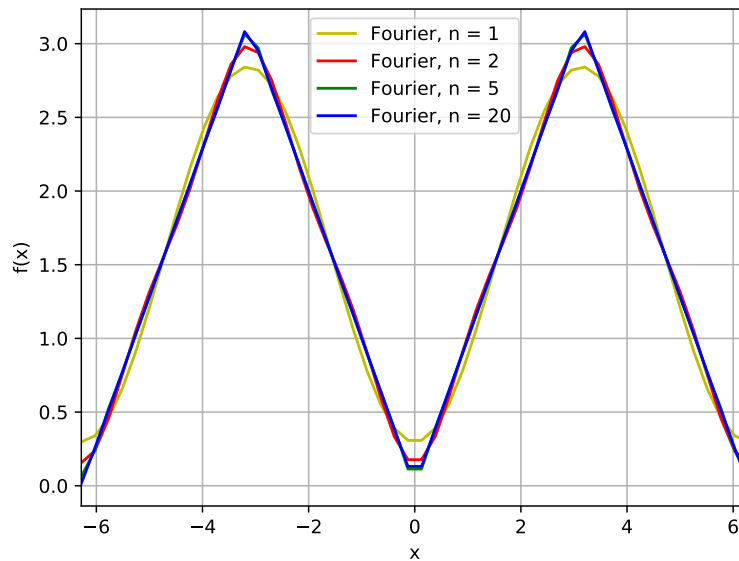


Abbildung 4: Näherung der Dreieck-Spannung mithilfe der Fourier-Reihe

2.2 Fourier-Analyse

Die drei in der Vorbereitung gewählten Schwingungsformen sollen mithilfe der Fourier-Analyse untersucht werden. Dazu wird ein Funktionsgenerator an ein Oszilloskop angeschlossen. In diesem Fall wird die Fourier-Transformation automatisch vom Oszilloskop durchgeführt und liefert ein Linienspektrum wie in Abbildung 1. Es werden nun die Amplituden und Frequenzen der Peaks mithilfe der Cursor-Funktion des Oszilloskops ausgemessen.

2.3 Fourier-Synthese

In diesem Teil des Experiments sollen die drei ausgewählten Schwingungsformen mithilfe eines Oberwellengenerators synthetisiert werden. Dazu werden zunächst die einzelnen Oberwellen an das Oszilloskop angeschlossen und die Amplituden entsprechend eingestellt. Dabei wird die Grundfrequenz auf die Maximalspannung gestellt und die restlichen Oberwellen daran angepasst. Außerdem ist zu beachten, dass bei der Rechteck- und Dreieck-Spannung nur die ungeraden Oberwellen verwendet werden dürfen. Im Anschluss wird die Summation aller eingestellten Oberwellen an das Oszilloskop angeschlossen und die Phasen reguliert, bis die gewünschten Schwingungsformen zu erkennen sind.

3 Auswertung

3.1 Fourier-Analyse

3.1.1 Rechteck-Spannung

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 1.

Tabelle 1: Messdaten "Rechteck-Spannung"

ν / kHz	U / V	$\frac{U_n}{U_1}$
400	40,8	1,000
800	24,6	0,603
1200	16,0	0,392
1600	11,6	0,284
2000	10,8	0,265
2400	9,2	0,225
2800	7,6	0,186
3200	6,0	0,147
3600	6,0	0,147
4000	5,6	0,137
4400	4,8	0,118

Aus diesen Messwerten folgt der Graph:

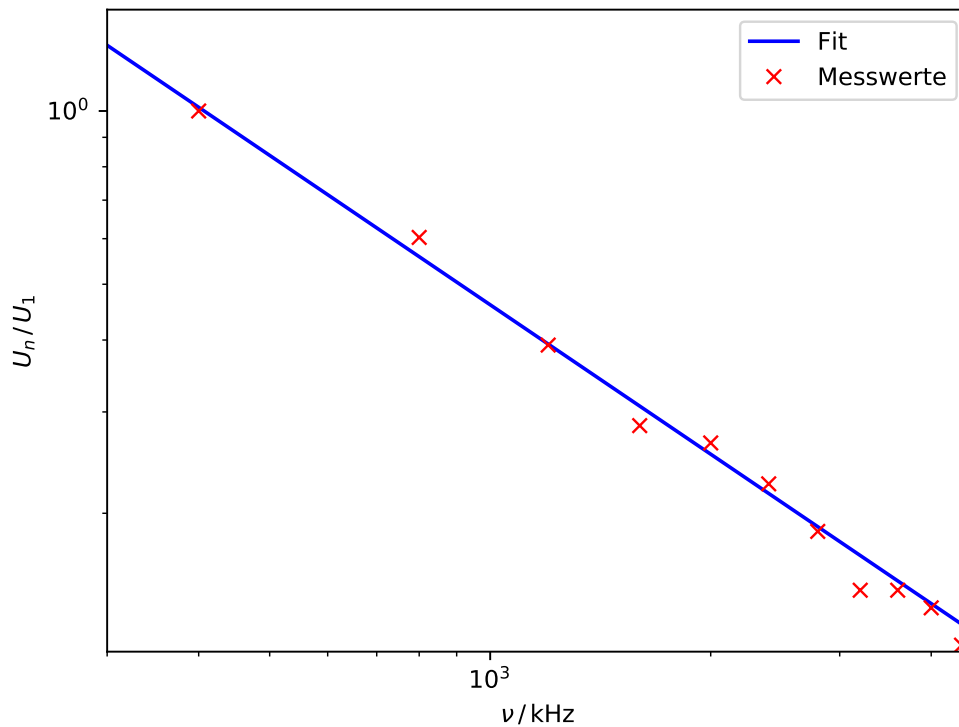


Abbildung 5: $\frac{U_n}{U_1}$ - ν -Diagramm zur Bestimmung der Steigung

Mithilfe der Messwerte wird die Regression $a \cdot x^{-b}$ durchgeführt, die die Steigung

$$b = 0,862 \pm 0,021$$

liefert. Da die Rechteck-Spannung mit $1/n$ abfällt, ist der Theoriewert

$$b_{\text{theo, Rechteck}} = 1.$$

Damit ergibt sich eine Abweichung von $\delta_{\text{Rechteck}} = 13,8\%$.

3.1.2 Sägezahn-Spannung

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2: Messdaten "Sägezahn-Spannung"

ν / kHz	U / V	$\frac{U_n}{U_1}$
87,5	226,0	1,000
175,0	100,0	0,442
262,5	78,4	0,347
350,0	58,4	0,258
437,5	42,4	0,188
525,0	37,6	0,166
612,5	35,2	0,156
700,0	28,0	0,124
787,5	22,4	0,099
875,0	22,4	0,099
962,5	21,6	0,096

Aus diesen Messwerten folgt der Graph:

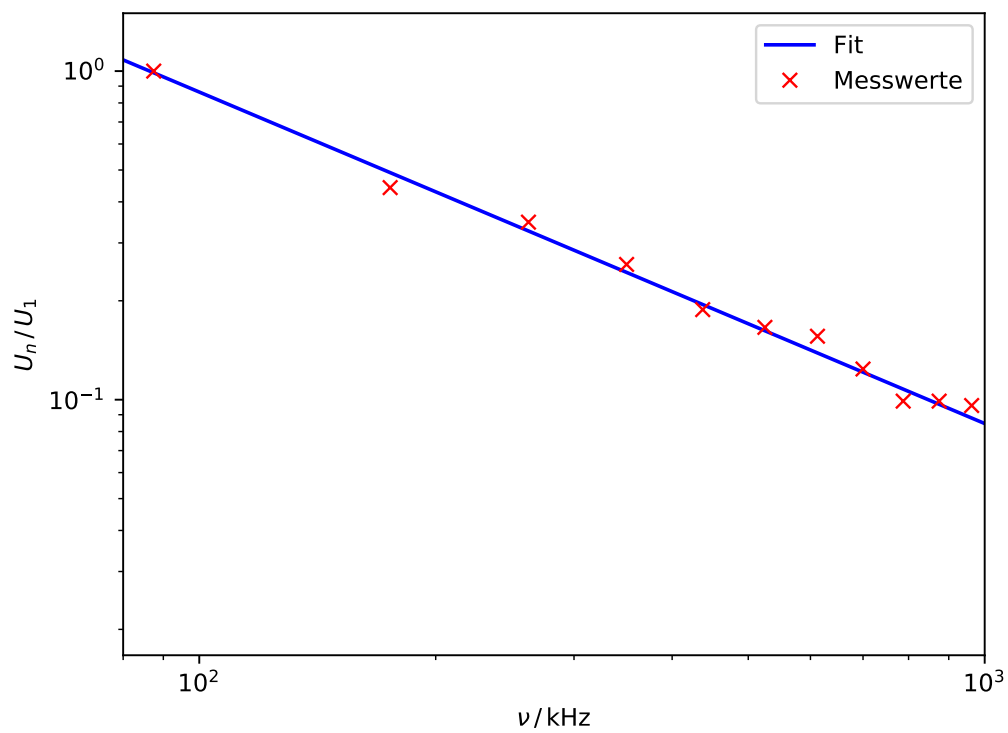


Abbildung 6: $\frac{U_n}{U_1}$ - ν -Diagramm zur Bestimmung der Steigung

Es wird erneut eine Regression durchgeführt. Sie liefert die Steigung

$$b = 1,009 \pm 0,027$$

Da auch dieses mal die Spannung mit $1/n$ abfällt, ist der Theoriewert wieder

$$b_{\text{theo, Sägezahn}} = 1.$$

Dies ergibt eine Abweichung von $\delta_{\text{Sägezahn}} = 0,9\%$.

3.1.3 Dreieck-Spannung

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Messdaten "Dreieck-Spannung"

ν / kHz	U / V	$\frac{U_n}{U_1}$
206,2	284,00	1,000
412,4	31,20	0,110
618,6	12,00	0,042
824,8	6,16	0,022
1031,0	3,12	0,011
1237,2	2,80	0,010
1443,4	1,92	0,007

Aus den Messwerten ergibt sich folgende Grafik:

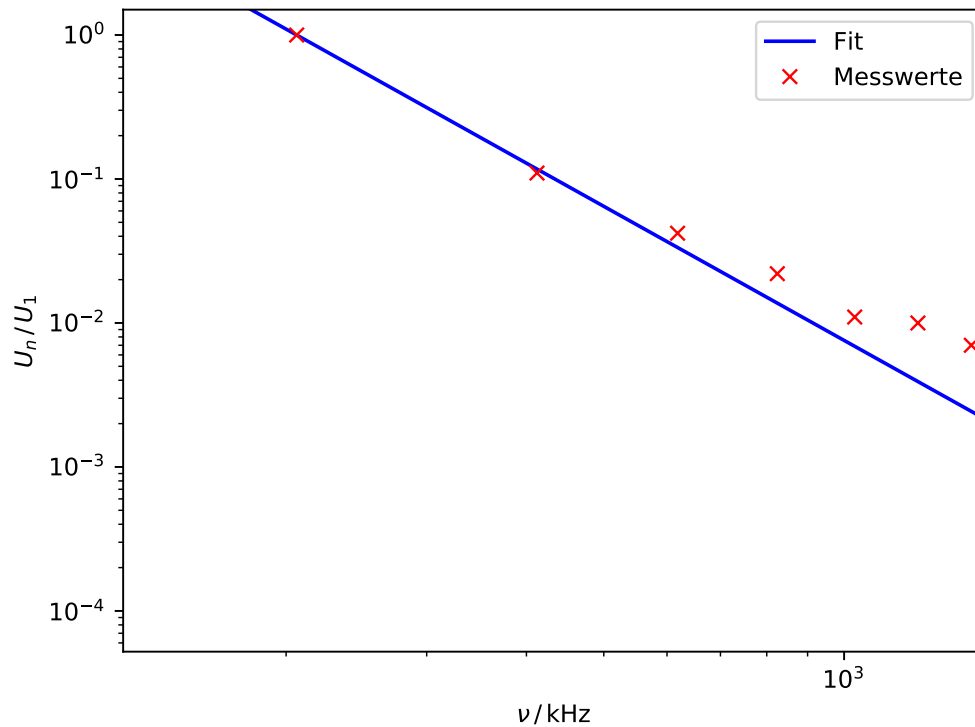


Abbildung 7: $\frac{U_n}{U_1}$ - ν -Diagramm zur Bestimmung der Steigung

Dieses mal ergibt die Regression die Steigung

$$b = 3,093 \pm 0,080$$

Im Gegensatz zu den anderen beiden fällt die Dreieck-Spannung mit $1/n^2$ ab. Der Theoriewert lautet somit

$$b_{\text{theo, Dreieck}} = 2.$$

Die Abweichung beträgt $\delta_{\text{Dreieck}} = 54,6\%$.

3.2 Fourier-Synthese

3.2.1 Rechteck-Spannung

Tabelle 4 zeigt die eingestellten Oberwellen, mit denen die Rechteck-Spannung synthetisiert werden soll.

Tabelle 4: Eingestellte Spannungen "Rechteck"

Oberwelle	$U_{\text{eingestellt}} / \text{V}$	$U_{\text{theoretisch}} / \text{V}$	Abweichung / %
1	182,16	182,16	0,0
3	59,40	60,72	2,2
5	35,64	36,43	2,2
7	27,72	26,02	6,5
9	19,80	20,24	2,2

Die sich daraus ergebende Rechteck-Spannung, sieht wie folgt aus:

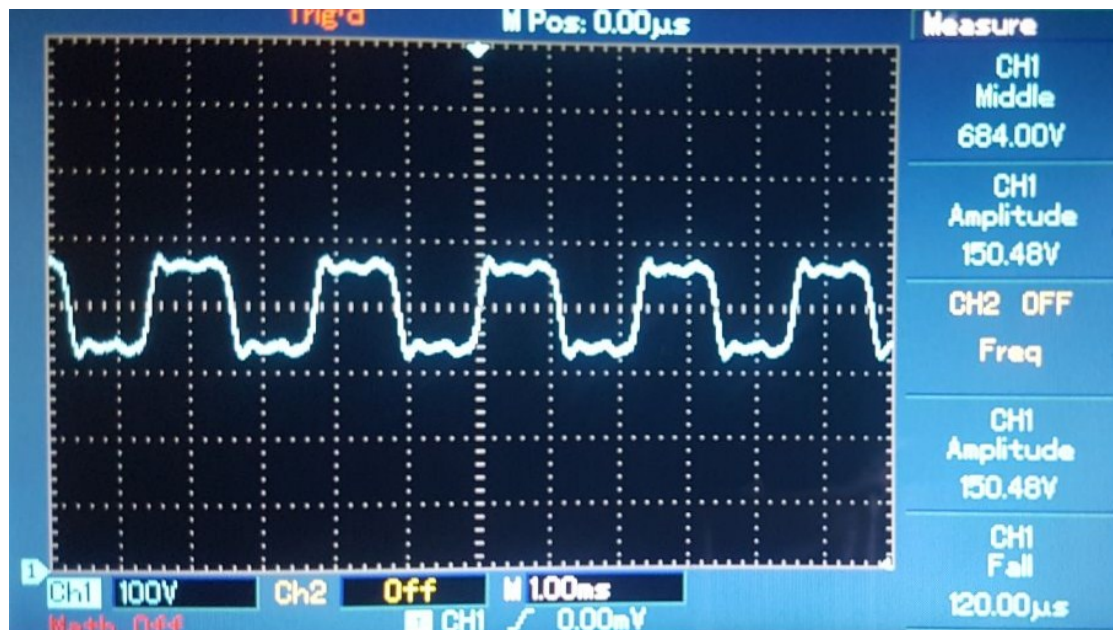


Abbildung 8: Synthetisierte Rechteck-Spannung

3.2.2 Sägezahn-Spannung

Die Sägezahn-Spannung soll aus den in Tabelle 5 aufgeführten Werten synthetisiert werden.

Tabelle 5: Eingestellte Spannungen "Sägezahn"

Oberwelle	$U_{\text{eingestellt}} / \text{V}$	$U_{\text{theoretisch}} / \text{V}$	Abweichung / %
1	186,12	186,12	0,0
2	91,08	93,06	2,1
3	59,40	62,04	4,3
4	47,52	46,53	2,1
5	39,60	37,22	6,4
6	31,68	31,02	2,1
7	27,72	26,59	4,3
8	23,76	23,27	2,1
9	19,80	20,68	4,3
10	15,8	18,61	15,1

Es ergibt sich der folgende Spannungsverlauf:

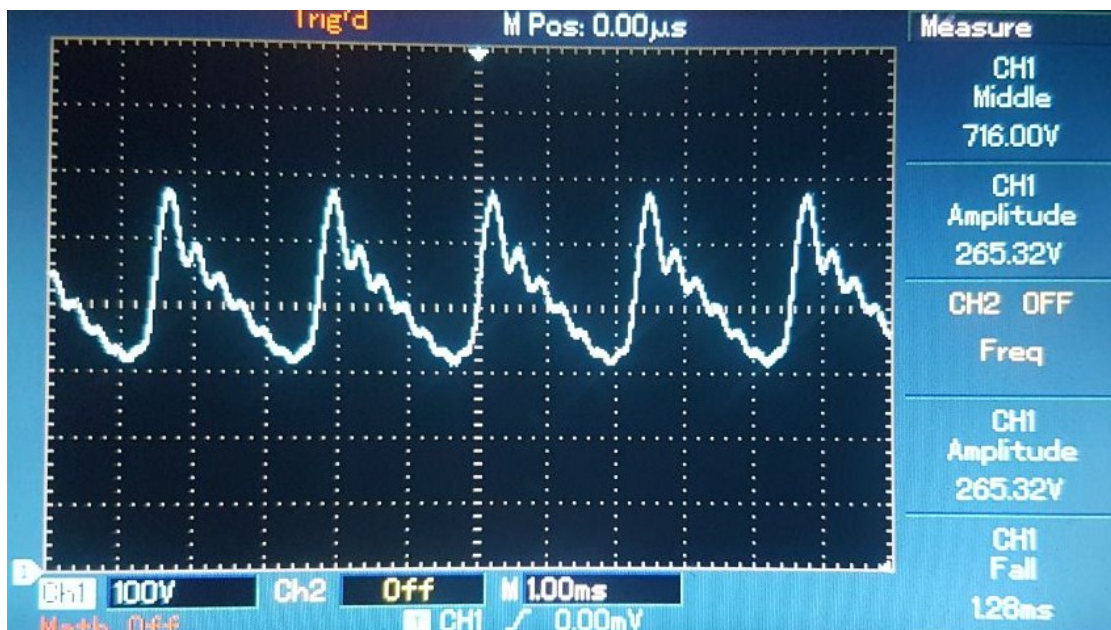


Abbildung 9: Synthetisierte Sägezahn-Spannung

3.2.3 Dreieck-Spannung

Die Dreieck-Spannung wird aus den Werten in Tabelle 6 synthetisiert. Da die Dreieck-Spannung mit $1/n^2$ abfällt und dadurch die Amplituden sehr schnell sehr klein werden, war es nicht mehr möglich weitere Oberwellen einzustellen.

Tabelle 6: Eingestellte Spannungen "Dreieck"

Oberwelle	$U_{\text{eingestellt}} / \text{V}$	$U_{\text{theoretisch}} / \text{V}$	Abweichung / %
1	186,12	186,12	0,0
3	23,76	20,68	14,9

Daraus folgt:

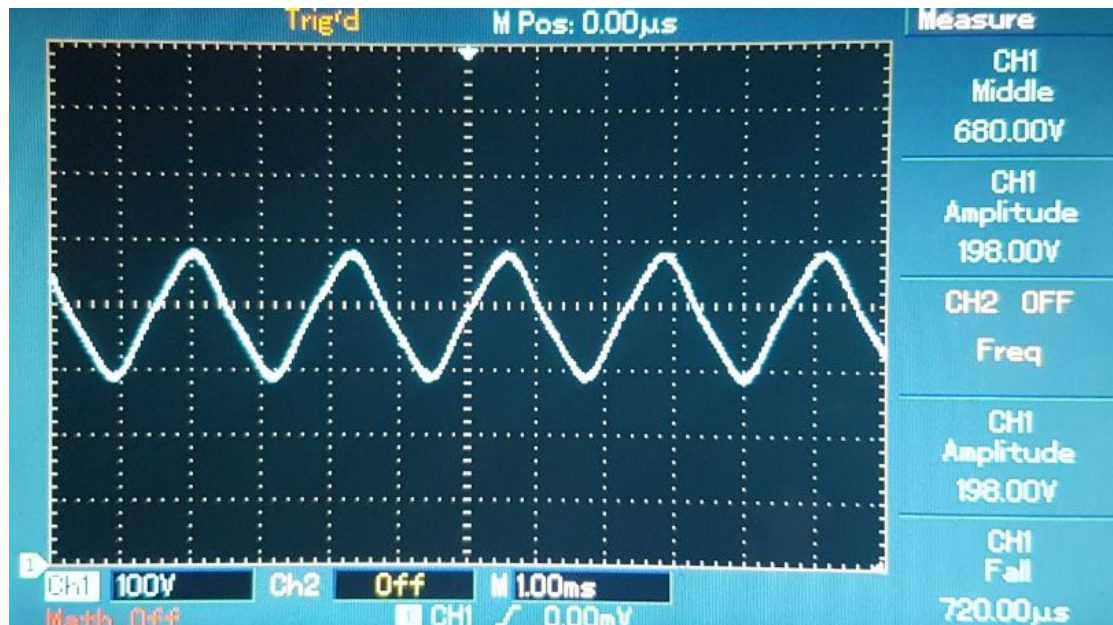


Abbildung 10: Synthetisierte Dreieck-Spannung

4 Diskussion

Bei der Analyse der Rechteck- und Sägezahn-Spannung sind die Abweichungen mit 13,8% und 0,9% relativ klein und liegen im Rahmen der Messungenauigkeiten. Allerdings ist die Abweichung bei der Dreieck-Spannung mit 54,6% ziemlich groß. Ursache dafür kann der schnelle Abfall mit $1/n^2$ sein, der eine genaue Amplitudenmessung stark erschwert hat.

Bei der Synthese ließen sich in allen drei Fällen relativ gute Ergebnisse erzielen. Die Schwierigkeiten bei diesem Teil des Experiments, liegen darin, dass sich aufgrund der Schwankungen in den Oberwellen-Spannungen die gewünschten Amplituden nicht genau einstellen lassen. Außerdem war problematisch, dass die geringste einstellbare Spannung bei etwa 15 V lag und es bei den schnell fallenden Amplituden der Dreieck-Spannung nicht möglich war mehr als Grundfrequenz und eine Oberwelle einzustellen. Allerdings ist das Ergebnis gerade aufgrund des starken Abfalls, wodurch die weiteren Oberwellen nur einen geringen Einfluss haben, ziemlich gut.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V351 - Fourier-Analyse und Synthese*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.