

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theoretische Grundlagen [1, S. 1–2]	3
2.1 Variablen	3
2.2 Allgemeine Überlegungen	3
2.3 Statische Methode	4
2.4 Dynamische Methode nach Angström	4
3 Versuchsdurchführung	6
3.1 Statische Messung	6
3.2 Dynamische Messung	7
3.3 Sonstige Messungen	7
4 Ergebnisse	8
4.1 Statische Methode	8
4.2 Dynamische Methode	12
5 Fehlerrechnung	16
6 Diskussion	19
6.1 Literaturwerte [4]	19
6.1.1 Messing	19
6.1.2 Aluminium	20
6.1.3 Edelstahl	20
Literatur	21

Anhang

1 Zielsetzung

Mit dem Versuch über die Wärmeleitung von Metallen soll die Wärmeleitung von Messing, Aluminium und Edelstahl untersucht werden. Dazu werden an einem Probestab statisch und dynamisch verschiedene Temperaturmessungen mit den obigen Metallen durchgeführt. Folgend werden verschiedene Beiwerte, wie die Wärmeleitfähigkeit, die Frequenz oder die Wellenlänge, und die Verläufe der Temperaturänderungen sowie Amplituden und Phasendifferenzen berechnet.

2 Theoretische Grundlagen [1, S. 1–2]

2.1 Variablen

Φ = Wärmestrom

ΔQ = übertragende Wärmemenge

Δt = Phasendifferenz

κ = Wärmeleitfähigkeit

A_i = Querschnittsflächen der Metallstäbe (breites Messing, Aluminium, Edelstahl)

ΔT = Temperaturdifferenz

Δx = Abstand zwischen den Messstellen

ρ_i = Dichte des jeweiligen Materials

c_i = spezifische Wärmekapazität des jeweiligen Stoffes

A_{nah} = "nahe" Amplitude

A_{fern} = "ferne" Amplitude

T^* = Periodendauer

λ = Wellenlänge

v_p = Phasengeschwindigkeit

ω = Ortsfrequenz

2.2 Allgemeine Überlegungen

Um die Wärmeleitung dieser Metalle und Legierungen zu untersuchen, bedarf es einiger Grundlagen:

Aus der Thermodynamik ist bekannt, dass es bei Temperaturungleichgewichten über Phononen und frei bewegliche Elektronen (bei festen Körpern) zum Wärmetransport kommt. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muss der Wärmetransport in Richtung Temperaturgefälle stattfinden. In diesem Experiment werden nur Metalle

untersucht, sodass der Gitterbeitrag nicht weiter zu beachten ist. Ferner wird zwischen der Konvektion, der Wärmestrahlung oder der Wärmeleitung unterschieden, wobei lediglich die Konduktion in diesem Experiment relevant ist, da nur feste Stoffe untersucht werden.

Jeder Stoff besitzt außerdem eine spezifische Wärme, die benötigt wird, um einen Kilogramm Material um ein Kelvin zu erwärmen. In diesem Experiment werden verschiedene Stäbe der Länge L und der Querschnittsflächen A_i betrachtet. Diese haben verschiedene Dichten ρ_i und spezifische Wärmen c_i des jeweiligen Stoffes. In einer Zeit dt fließt die Wärmemenge $dQ = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} dt$ durch die Querschnittsfläche A_i , bzw. $A_{\text{schm Mess}}$ des Stoffes. Umgeformt ergibt sich:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1)$$

Dabei ist κ die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln \left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right)} \quad (2)$$

Das Minuszeichen meint dabei den Wärmestrom in Richtung abnehmender Temperatur.

2.3 Statische Methode

Bei der statischen Methode wird der Temperaturverlauf bestimmt. Dazu wird an zwei Stellen des Stabes die Temperatur als Funktion der Zeit aufgetragen und der Verlauf ermittelt.

2.4 Dynamische Methode nach Angström

Bei der dynamischen Messung nach Angström wird der Probestab periodisch beheizt und gekühlt. Dadurch entsteht eine räumliche und zeitliche Temperaturwelle, die sich mit einer Phasengeschwindigkeit λ und einer Frequenz f ausbreitet:

$$f = \frac{1}{T^*} \quad (3)$$

$$\lambda \stackrel{[3]}{=} \frac{v_p}{f} \quad (4)$$

Wird der Stab nach dieser Methode geheizt, entsteht eine Temperaturwelle der Form: $T(x, t) = T_{\text{max}} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right)$. Die Phasengeschwindigkeit v_p , mit der sich

die Welle fortbewegt, lautet:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\sqrt{\frac{2\pi f \rho_i c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{4\kappa \pi f}{\rho_i c}} \quad (5)$$

3 Versuchsdurchführung

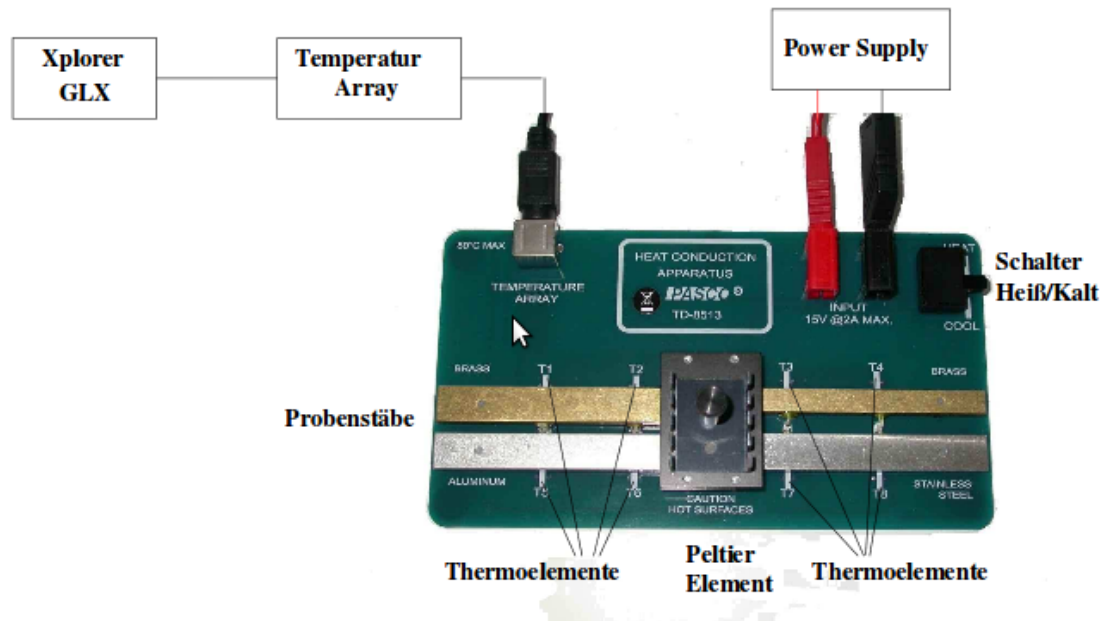


Abbildung 1: Grundplatte mit Probenstäben, Peltier-Element, Thermoelementen, Schalter, Strom- und USB-Anschluss

Die zu untersuchenden Metalle und Legierungen Edelstahl, Messing und Aluminium sind in Abbildung 1 auf einer Platine verbaut. Ferner befinden sich ein Wechselstrom-Anschluss, ein USB-Anschluss für den Grafikplotter, ein Peltier-Element zum periodischen Heizen sowie ein zugehöriger Schalter auf der Platine. Nachdem die Kabel in die gleichfarbigen Kontaktstellen gesteckt, das Gerät per USB verbunden und eingeschaltet ist und überprüft wurde, ob der Schalter auf "cool" gestellt ist, wird das Gerät konfiguriert.

3.1 Statische Messung

Für die statische Messmethode wird ein Messtakt von 5 Sekunden und am Transformator eine Netzspannung von $U_{\text{statisch}} = 5\text{V}$ bei maximaler Stromstärke eingestellt. Ebenso empfiehlt es sich für kommenden Messungen die digitale Anzeige auf 8 Arrays - für die 8 Thermoelemente - zu erweitern.

Sodann werden die Isolierungen auf die Thermoelemente aufgelegt, die Messung auf dem Gerät gestartet der Schalter auf "heat" gestellt.

In dieser Messung war die Messreihe beendet, als eine Messdauer von etwa 800s erreicht war.

Danach wird der Schalter zurück auf "cool" gestellt, die Isolationen abgenommen und

die Messstäbe ausreichend mittels eines Ventilators gekühlt, bis eine Durchschnittstemperatur von etwa 22°C erreicht wird.

3.2 Dynamische Messung

Für die dritte Messung wird der Messtakt auf 2 Sekunden verringert und die Netzspannung auf $U_{\text{dynamisch}} = 8\text{V}$ bei weiterhin maximaler Stromstärke gestellt. Sicherheitshalber wird noch einmal die Temperatur aller Thermoelemente am Gerät geprüft. Es folgen sodann diverse Messungen:

Wie in den theoretischen Grundlagen angeführt, wird im 40-Sekunden-Takt der Schalter auf "heat", bzw. "cool" gestellt. Diese periodische Messung erfolgt 12 mal. Anschließend wird erneut der Schalter auf "cool" gestellt und ventilatorisch gekühlt.

In der letzten Messung erfolgt erneut eine periodische Messung mit einer Periodendauer von 200s, also 100 Sekunden pro Schalterwechsel, beginnend mit dem Erhitzen der Stäbe durch das Peltier-Element. Der Schalter muss daher erneut auf "heat" umgestellt werden.

Die Messung soll gestoppt werden, wenn eines der Thermoelemente 80°C erreicht. Da dies in diesem Experiment auch nach einer halben Stunde nicht erreicht wurde, sollte die Messung nach 10 vollständigen Perioden beendet werden. Danach wurden erneut die Isolationen abgenommen und die Stäbe durch Umlegen des Schalters des Peltierelements gekühlt.

3.3 Sonstige Messungen

Abschließend muss noch der Abstand Δx zwischen den Thermoelementen gemessen werden.

4 Ergebnisse

Die Wellenlänge und die Frequenz der "Temperaturwelle" ließen sich mit der Anström-Methode nach (4) und (3) wie folgt berechnen:

$$f_{\text{Alumi,Messi}} = \frac{1}{80} \text{ Hz} , \text{ bzw. } f_{\text{Edelst}} = \frac{1}{200} \text{ Hz}$$

Tabelle 1: Wellenlängen von Aluminium, Messing und Edelstahl in $[\lambda] = \text{m}$

Aluminium	Messing	Edelstahl
$3.99 * 10^{-3}$	$2.40 * 10^{-3}$	$0.54 * 10^{-3}$

Eine größere Amplitude in den Graphen lässt auf eine stärkere Wärmeaufnahme schließen. Das Gefälle gibt die Wärmeabgabe an.

4.1 Statische Methode

Ferner sind die Temperaturverläufe für alle 4 Probestäbe zu vergleichen. Bei der statischen Methode ergaben sich verschiedene Verläufe der Kurven der jeweiligen Proben, sodass anzunehmen ist, dass der Wärmetransport verschieden effizient funktioniert. Dahinter steckt der Gedanke der charakteristischen Wärmeleitfähigkeiten. Das negative Vorzeichen des Wärmestroms aus Tabelle 3 zeigt dabei die Stromrichtung der Wärme an. Nach dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik also von einem Bereich höherer Temperatur zu einem Bereich niedrigerer Temperatur. Es fällt auf, dass der breite Messingstab (T1) zu Beginn etwa einen halben Grad kälter als der schmale Messingstab (T4) war (vgl. Anhang, Graph 1). Aus der Kurve wird ersichtlich, dass die Temperaturkurve des breiten Messingstabes geringfügig steiler anstieg und nach etwa 300s eine konstant gleiche Steigung beider Stäbe einstellt. Diese Erkenntnis wird vor allem an dem Übergang bei $x_{T1,T4} \approx 320\text{s}$ deutlich. Dort nimmt die Steigung ab und es stellt sich ein linearer Verlauf ein.

Bei Aluminium (T5) und Edelstahl (T8) zeigt sich hingegen ein anderer Zusammenhang: Während die Anfangstemperatur bei Aluminium wesentlich geringer ist, erhitzt sich die Probe zunächst exponentiell, also deutlich schneller und stärker. Erst bei $x \approx 280\text{s}$ nimmt die Erwärmung langsam ab. Bei Edelstahl hingegen stellt sich ein fast linearer Verlauf ein (vgl. Anhang, Graph 2).

Insgesamt ähneln sich beide Messingstäbe und Aluminium vom Temperaturverlauf. Die lineare Steigung von Edelstahl ist hingegen geringer und nach etwa 200s stellt sich eine fast konstante, präziser geringfügig abnehmende Steigung ein.

Mit den Wärmeleitfähigkeiten nach 5 wird klar, dass die Temperatur von Aluminium

am höchsten sein muss. Darauf folgt das breite Messing und das schmale Messing und zuletzt Edelstahl. Die geringere Querschnittfläche des schmalen Messing bedeutet eine geringere Wärmeleitfähigkeit, da $A \sim \kappa$ ist. Dadurch ergibt sich beim schmalen Messing eine geringere Temperatur.

Tabelle 2: Temperaturen von Aluminium, Messing und Edelstahl nach 700s in $[T] = K$

Aluminium	schmales Messing	breites Messing	Edelstahl
35.51	33.08	34.22	29.16

Der Wärmestrom Φ nach (1) berechnet sich zu:

Tabelle 3: Wärmestrom in $[\Phi] = \frac{kgm^2}{s^3}$

Zeit	breites Messing	Edelstahl
100s	-0.67	-0.16
200s	-0.48	-0.17
300s	-0.36	-0.16
400s	-0.31	-0.15
700s	-0.28	-0.13

Dabei fällt auf, dass der Wärmestrom, wie bei den Wärmeleitfähigkeiten κ , bei Edelstahl geringer als bei Messing und Messing geringer als bei Aluminium ist. Dies lässt sich durch die proportionale Abhängigkeit in (1) erklären: $\Phi \sim \kappa$.

Die Temperaturdifferenzen $\Delta T_{St_1} = T_7 - T_8$ und $\Delta T_{St_2} = T_2 - T_1$ ergeben sich zu:

Temperaturdiff

Temperaturdiff

Beide Grafiken haben gemein, dass sie einen ähnlich steilen Anstieg zu Beginn verzeichnen, während der Verlauf zum Ende der Messung fast eben wird (ΔT_{St_2}), bzw. eine konstante negative Steigung hat (ΔT_{St_1}). Allerdings fällt beim genaueren Hinschauen auf, dass der Anstieg bei ΔT_{St_1} zu Beginn stärker ist und zum Ende wesentlich stärker fällt. Das hat zur Folge, dass die Endtemperatur bei ΔT_{St_2} mit etwa 5,2°C mehr als doppelt so hoch ist wie die Endtemperatur bei ΔT_{St_1} . Es sollte zudem beachtet werden, dass die Anfangsdifferenztemperatur bei ΔT_{St_2} nicht bei 0°C startete, sondern bei etwa 0,25°C. Auf dem Differenzgraphen ΔT_{St_1} wird deutlich, dass die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl deutlich geringer ist. Festzumachen ist dies an der „bauchigen“ Form des Graphen, mit einer hohen Temperaturdifferenz selbst nach über 800s. Dadurch ist begründet, dass die Temperatur am Thermoelementes in der Nähe des Peltier-Elements höher sein muss als die Temperatur „außerhalb“. Vergleichend dazu zeigt sich ΔT_{St_2} , dessen Graph deutlich früher und stärker abfällt. Die geringere Temperaturdifferenz deutet auf niedrigere Temperaturunterschiede und entsprechend eine hohe Wärmeleitfähigkeit. Der schmalere Bereich um das Extrema der Funktion von ΔT_{St_2} zeigt ergänzend, dass die Wärmeleitfähigkeit von Messing höher sein muss als die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl, da der Wärmestrom zum kälteren Bereich, proportional zu κ , geringer ist.

4.2 Dynamische Methode

Bei dem periodischen Erhitzen und Kühlen zeigte sich bei allen Graphen ein periodischer Verlauf, der eine steigende Tendenz aufwies. Daraus kann geschlossen werden, dass entweder das Peltier-Element stärker heizt als kühlt oder die Proben mehr Wärme aufnehmen als abgeben. Die Temperaturverläufe für den breiten Messingstab zeigen sich wie folgt:

Verlauf breites Messing

Daraus lassen sich die Amplituden A_{nah} und A_{fern} , sowie die Phasendifferenz Δt bestimmen:

Tabelle 4: Amplituden $A_1 := A_{\text{nah}}$ und $A_2 := A_{\text{fern}}$ in $[A_{1,2}] = \text{m}$, sowie die Phasendifferenz Δt in $[\Delta t] = \text{s}$

Amplituden / Δt	Aluminium	Messing	Edelstahl
A_1	3.81	4.02	6.11
A_2	2.30	1.60	1.39
Δt	10.26	16.32	63.00

Die Wärmeleitfähigkeit κ (2) von Aluminium, Messing und Edelstahl mit Gauß'schen Fehler (siehe 5), gerundet auf die erste geltende Ziffer, berechnen sich zu:

Tabelle 5: Wärmeleitfähigkeit von Aluminium, Messing und Edelstahl in $[\kappa] = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{K}}$

Aluminium	Messing	Edelstahl
201 ± 50	99 ± 14	15.4 ± 1.3

Anhand der Tabelle 5 erkennt man, dass Aluminium mit $\kappa_{\text{Alumi}} = 201 \pm 50 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{K}}$ die stärkste Wärmeleitfähigkeit hat. Danach folgen Messing mit $\kappa_{\text{Messi}} = 99 \pm 14 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{K}}$ und Edelstahl mit $\kappa_{\text{Edelst}} = 15.4 \pm 1.3 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{K}}$.

Folgend sollen noch die Temperaturverläufe für Edelstahl grafisch dargestellt werden:

Grafik Edelstahl

Die Abmessungen der Proben ergaben sich wie folgt:

Tabelle 6: Messdaten der Proben in [Längen, Breite, Höhe, Abstand] = cm

Probe	Länge	Breite	Höhe	Abstand
Aluminium	9	1.2	0.4	3
breites Messing	9	1.2	0.4	3
schmales Messing	9	0.7	0.4	3
Edelstahl	9	1.2	0.4	3

5 Fehlerrechnung

Der Mittelwert errechnet sich nach:

$$\overline{v}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6)$$

Analog die Standardabweichung:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (v_j - \overline{v}_i)^2} \quad (7)$$

,bzw.

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (v_j - \overline{v}_i)^2} \quad (8)$$

mit zufälligen Fehlern behafteten Werten v_j mit $j = 1, \dots, N$

Ferner die Unsicherheiten σ_i mit $i = 1, \dots, N$ zu:

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

$$\sigma_{A_{\text{nah}}} = \frac{s_{A_{\text{nah}}}}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

$$\sigma_{A_{\text{fern}}} = \frac{s_{A_{\text{fern}}}}{\sqrt{3}} \quad (11)$$

$$\sigma_{\Delta t} = \frac{s_{\Delta t}}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

und der Gauß-Fehler:

$$\sigma_{f(p_i)} = \sqrt{\left(\frac{df(p_i)}{dA_{\text{nah}}}\right)^2 \sigma_{A_{\text{nah}}}^2 + \left(\frac{df(p_i)}{dA_{\text{fern}}}\right)^2 \sigma_{A_{\text{fern}}}^2 + \left(\frac{df(p_i)}{d\Delta t}\right)^2 \sigma_{\Delta t}^2} \quad (13)$$

mit den partiellen Ableitungen von (2) und $p_i = (A_{\text{nah}}, A_{\text{fern}}, \Delta t)$:

$\frac{df(p_i)}{dp_i}[2]$, bzw.

$$\frac{d\kappa}{dA_{\text{nah}}} = \frac{-c\rho\Delta x^2}{2A_{\text{nah}} - \left(\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)\right)^2},$$

$$\frac{d\kappa}{dA_{\text{fern}}} = \frac{-c\rho\Delta x^2}{2A_{\text{fern}} - \left(\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)\right)^2} \text{ und}$$

$$\frac{d\kappa}{d\Delta t} = \frac{-c\rho\Delta x^2}{2 - \left(\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)\right)\Delta t^2}$$

Nach (6),(8),(9) und (13) ergeben sich:

Tabelle 7: Mittelwert, Standardabweichungen und Ungenauigkeiten von Breites Messing für A_{nah} , A_{fern} , Δt

Fehler	A_{nah}	A_{fern}	Δt
Mittelwert	4.02	1.60	16.32
Standardabweichung	0.56	0.56	2.42
Ungenauigkeiten	0.18	0.18	0.76

Tabelle 8: Mittelwert, Standardabweichungen und Ungenauigkeiten von Aluminium für A_{nah} , A_{fern} , Δt

Fehler	A_{nah}	A_{fern}	Δt
Mittelwert	3.81	2.30	10.26
Standardabweichung	0.62	0.74	2.30
Ungenauigkeit	0.20	0.23	0.73

Tabelle 9: Mittelwert, Standardabweichungen und Ungenauigkeiten von Edelstahl für A_{nah} , A_{fern} , Δt

Fehler	A_{nah}	A_{fern}	Δt
Mittelwert	6.11	1.39	63.00
Standardabweichung	0.90	0.45	8.23
Ungenauigkeit	0.28	0.14	2.60

Tabelle 10: Gauß'scher Fehler der Wärmeleitfähigkeiten

Fehler	κ_{Alu}	κ_{Messi}	κ_{Edelst}
Gauß'scher Fehler	49.47	13.53	1.34

6 Diskussion

Die Wärmeabgabe hängt nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mit der Raumtemperatur zusammen; Es ist zu warten, dass die Temperaturabgabe bei höheren Temperaturdifferenzen zwischen der Raumtemperatur und der Proben­temperatur deutlich höher ist, was Auswirkungen auf den Verlauf des Graphen hat.

Durch die nicht exakte Periodendauer von 80s, bzw. 200s stellt sich eine Abweichung in der Frequenz ein. Je größer die Abweichung nach oben, desto kleiner die Frequenz (vgl. (3)) und umgekehrt. Dadurch werden die Wellenlänge und die Phasengeschwindigkeit nach (4) und (5) größer.

In Grafik (3) zeigte sich eine Anomalie in der Kurve, deren genaue Ursache unbekannt ist. Es ist anzumerken, dass die Messungenauigkeit mit etwa 14 Millisekunden lediglich geringfügige Auswirkungen auf den Verlauf haben dürfte. Dieser Fehler wurde bei den Berechnungen daher aus den Berechnungen gestrichen.

Bei der periodischen Messung (4.1.b) bis 80°C wurde in der achten Periode der Schalter zu früh umgelegt, sodass die Messung wiederholt werden musste. Die Markierungen im Graphen zeigen, dass bei $T \approx 45^\circ\text{C}$ zu früh gekühlt wurde.

Weitere Messfehler ergaben sich durch die Isolationen, welche die Proben nicht vollständig abdeckten. Möglicherweise gab es außerdem Spannungsschwankungen im Stromnetz, die zu Fehlfunktionen im Transformator und zu minimalen Fehler in den Graphen führen. Diese lassen sich durch die Grenzen des menschlichen Auges in den Graphen nicht hinreichend genau überprüfen.

Ein Vergleich mit den Literaturwerten zeigt, dass die Abweichungen - insbesondere bei Edelstahl mit etwa +0,03% - (vgl. 5 und 6.1) - verhältnismäßig gering sind, was auf eine präzise Messung schließen lässt. Bei Messing ergab sich eine Abweichung von circa -17,50%, bei Aluminium etwa -14,83%.

6.1 Literaturwerte [4]

6.1.1 Messing

$$\kappa = 120 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3\text{K}}$$

6.1.2 Aluminium

$$\kappa = 236 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3\text{K}}$$

6.1.3 Edelstahl

$$\kappa = 15 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3\text{K}}$$

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Experiment V204 - Wärmeleitung bei Metallen*. 2014.
- [2] David Scherfgen. *Berechnen von Ableitungen*. Aufruf vom 14.11.2014. URL: <http://www.ableitungsrechner.net/#>.
- [3] Wikipedia. *Phasengeschwindigkeit*. Aufruf vom 31.10.2014. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Phasengeschwindigkeit>.
- [4] Wikipedia. *Wärmeleitfähigkeit*. Aufruf vom 01.11.2014. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/W%C3%83%C2%A4rmeleitf%C3%83%C2%A4higkeit#Zahlenwerte>.