

Versuchsprotokoll zum Anfängerpraktikum Physik

Versuch Nr. 402 Dispersionsmessung am Glasprisma

*Axel Beimborn (Axel_Beimborn@gmx.de)
Markus Wiemann (Markus-Wiemann@gmx.de)*

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Theorie	2
2.1 Ableitung der Dispersionsrelation	2
2.2 Fallunterscheidung $\lambda \gg \lambda_1$	3
2.3 Fallunterscheidung $\lambda \ll \lambda_1$	3
3 Durchführung und Aufbau	2
4 Auswertung	0
4.1 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Flächen	0
4.2 Bestimmung des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge	0
4.3 Entscheidung für Dispersionkurve	0
4.4 Gleichung der Dispersionskurve	0
4.5 Abbesche Zahl	0
4.6 Auflösungsvermögen	0
4.7 Absorptionsstelle	0
5 Mathematischer Anhang	1
6 Diagramme	1

1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist die Untersuchung von Dispersionsphänomenen mit Hilfe eines Glasprismas. Dispersion bezeichnet die Abhängigkeit der Brechungsindizes von der Wellenlänge. Dazu werden die Spektrallinien einer Heliumdampflampe, deren Wellenlänge bekannt ist, an einem Prisma gebrochen. Aus den verschiedenen Beugungswinkeln kann auf die Brechungsindizes und damit auf das Dispersionsverhalten geschlossen werden.

2 Theorie

2.1 Ableitung der Dispersionsrelation

Für die Ableitung der Dispersionsgleichung nimmt man an, dass die Elektronen und Ionenrümpfe der Materie wie Dipole verhalten. Licht als elektromagnetische Welle regt diese Dipole zu erzwungenen Schwingungen an. Dabei können auch Resonanzerscheinungen auftreten. Betrachtet man die verschobenen Ladungen in der Materie so ergeben sich, außer der periodischen Kraft der Lichtwelle, zusätzliche Kräfte. Zum einen gibt es eine rücktreibende Kraft, die proportional zur Auslenkung ist, zum anderen wird die Bewegung gedämpft, diese Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladungsträger. Damit lässt sich eine Differentialgleichung für die Bewegung der Ladungsträger aufstellen:

$$m_h \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + f_h \frac{d \vec{x}}{dt} + a_h \vec{x} = q_h \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Die Lösung einer solchen DGL ist bekannt. Man formt diese nun unter Benutzung der Polarisierung $\vec{P} = \sum N_h q_h \vec{x}_h$ und der Maxwellrelation $n^2 = \epsilon$ soweit um, dass man einen Ausdruck für den Brechungsindex bekommt:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_h q_h^2}{m_h \epsilon_0}. \quad (2)$$

Diese Gleichung für den komplexen Brechungsindex \tilde{n} zerlegt man nun in den für die Brechung relevanten Realteil und den für die Absorption interessanten Imaginärteil. Da dieses Modell in Bereichen hoher Absorption nur schlecht zutrifft betrachten wir nur die Bereiche, die weit von den Resonanzstellen entfernt liegen. In den Betrachteten Bereichen gilt:

$$n^2 k \approx 0. \quad (3)$$

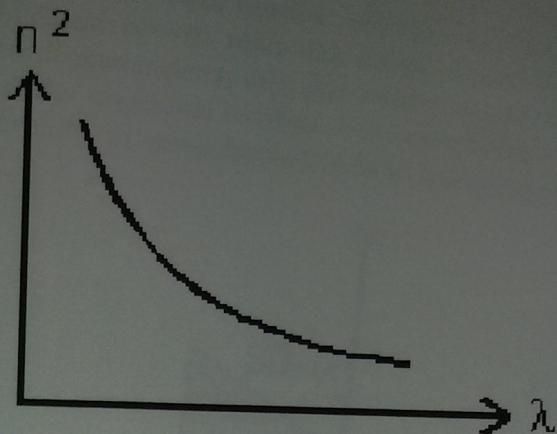
Damit lässt sich Gleichung (2) überführen in:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}. \quad (4)$$

Damit haben wir den Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge bestimmt

2.2 Fallunterscheidung $\lambda \gg \lambda_1$

Je nachdem ob die Resonanzstelle λ_1 bei kleineren Wellenlängen oder bei größeren Wellenlängen liegt lässt sich eine Fallunterscheidung machen. Für $\lambda \gg \lambda_1$ lässt sich Gleichung (4) Taylor entwickeln zu:



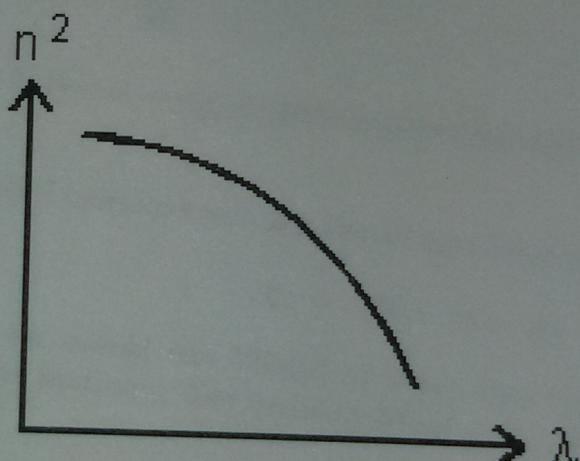
$$n^2 = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4 \pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^4 + \dots \right) \quad (4)$$

oder mit den Koeffizienten $A_i > 0$:

$$n^2 = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^4} + \frac{A_4}{\lambda^8} + \dots \quad (4)$$

2.3 Fallunterscheidung $\lambda \ll \lambda_1$

Liegt die Resonanzstelle bei größeren Wellenlängen, also $\lambda \ll \lambda_1$ lässt sich Gleichung (4) erneut nach Taylor entwickeln. Aus dieser Taylorentwicklung folgt:



$$n^2 = 1 - \frac{N_1 q_1^2}{4 \pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} + \dots \right) \quad (4)$$

oder mit den Koeffizienten $A'_i > 0$:

$$n^2 = 1 - A'_2 \lambda^2 - A'_4 \lambda^4 \dots \quad (4)$$

Für beide Fälle nimmt der Brechungsindex mit der Wellenlänge ab. Dieses Verhalten nennt man normale Dispersion.

3 Durchführung und Aufbau

Der Versuch besteht aus zwei Teilen. Zunächst wird der brechende Winkel des Prismas bestimmt. Dazu lässt man das Licht der He-Lampe parallel auf die Spitze der brechenden Kanten fallen. Das einfallende Licht wird von den Prismenoberflächen reflektiert. Danach

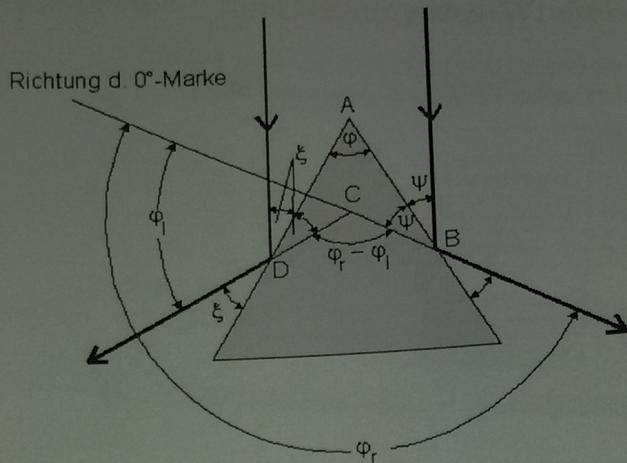


Abbildung 1: Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen

werden die Winkel φ_r ; φ_l der beiden reflektierten Strahlen gemessen. Der gesuchte Winkel φ berechnet sich dann nach:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l). \quad (9)$$

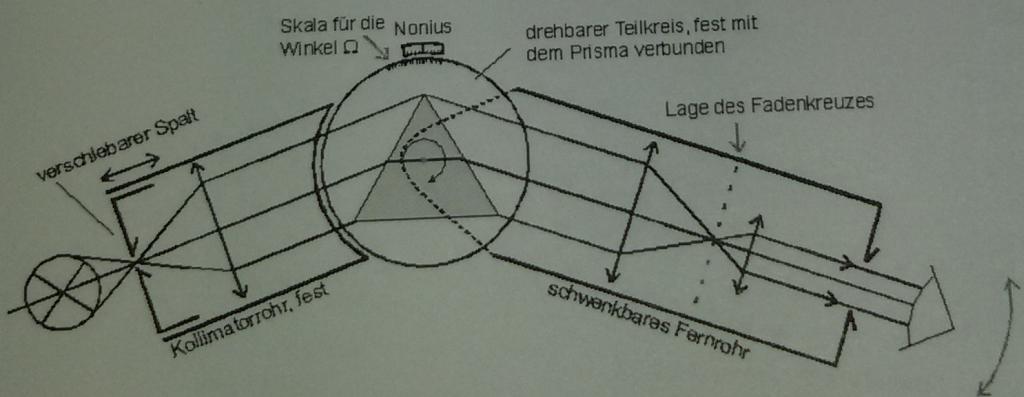


Abbildung 2: Aufbau zur Winklemessung

Im Hauptteil der Messung werden die verschiedenen Beugungswinkel der Spektrallinien des He-Spektrums gemessen. Dazu wird ein zunächst ein symmetrischer Strahl eingestellt. Dazu werden reflektierter und gebrochener Strahl in Deckung gebracht. Anschließend bewegt man das schwenkbare Fernrohr solange, bis das Fadenkreuz im inneren deckungsgleich mit den beiden anderen Strahlen ist. Nun kann der Winkel am Goniometer abgelesen werden. Um einer höhere Genauigkeit zu erreichen, wird die Messung zweimal in spiegelsymmetrischen Ausgangsstellungen durchgeführt. Aus den beiden

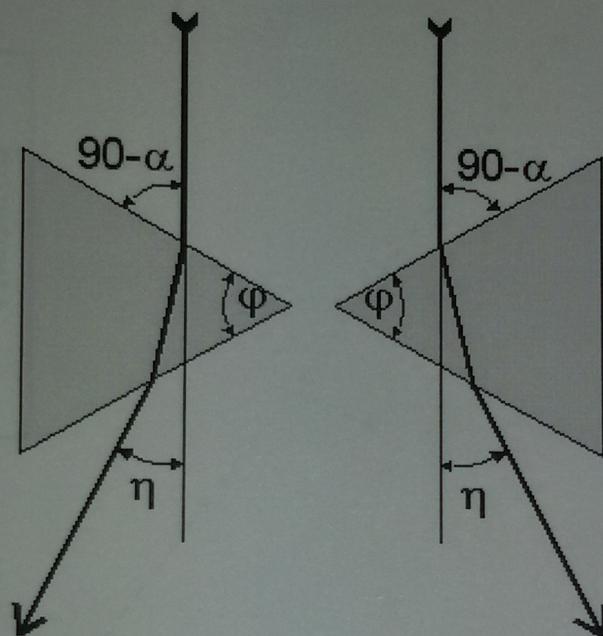


Abbildung 3: Bestimmung des Brechungswinkels aus spiegelsymmetrischen Stellungen

gemessen Winkel berechnet sich der Brechungswinkel folgendermaßen:

$$\eta = 180 - (\eta_r - \eta_l) \quad (10)$$

Damit haben wir sowohl den Winkel zwischen den brechenden Kanten als auch den Brechungswinkel bestimmt. Der gesuchte Brechungsindex berechnet sich daraus über:

$$n = \frac{\sin \frac{\eta+\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (11)$$

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Flächen

Es wurden die Reflexionswinkel φ_l und φ_r gemessen. Aus Gleichung (9) ergibt sich daraus der Winkel zwischen den brechenden Flächen:

	Prismenwinkel φ in °
Messung 1	60,15
Messung 2	60,10
Messung 3	60,02
Mittelwert	60,09
Fehler	0,07

Der Winkel zwischen den brechenden Flächen beträgt demnach:

$$\varphi = (60,09 \pm 0,07)^\circ \quad (12)$$

4.2 Bestimmung des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge

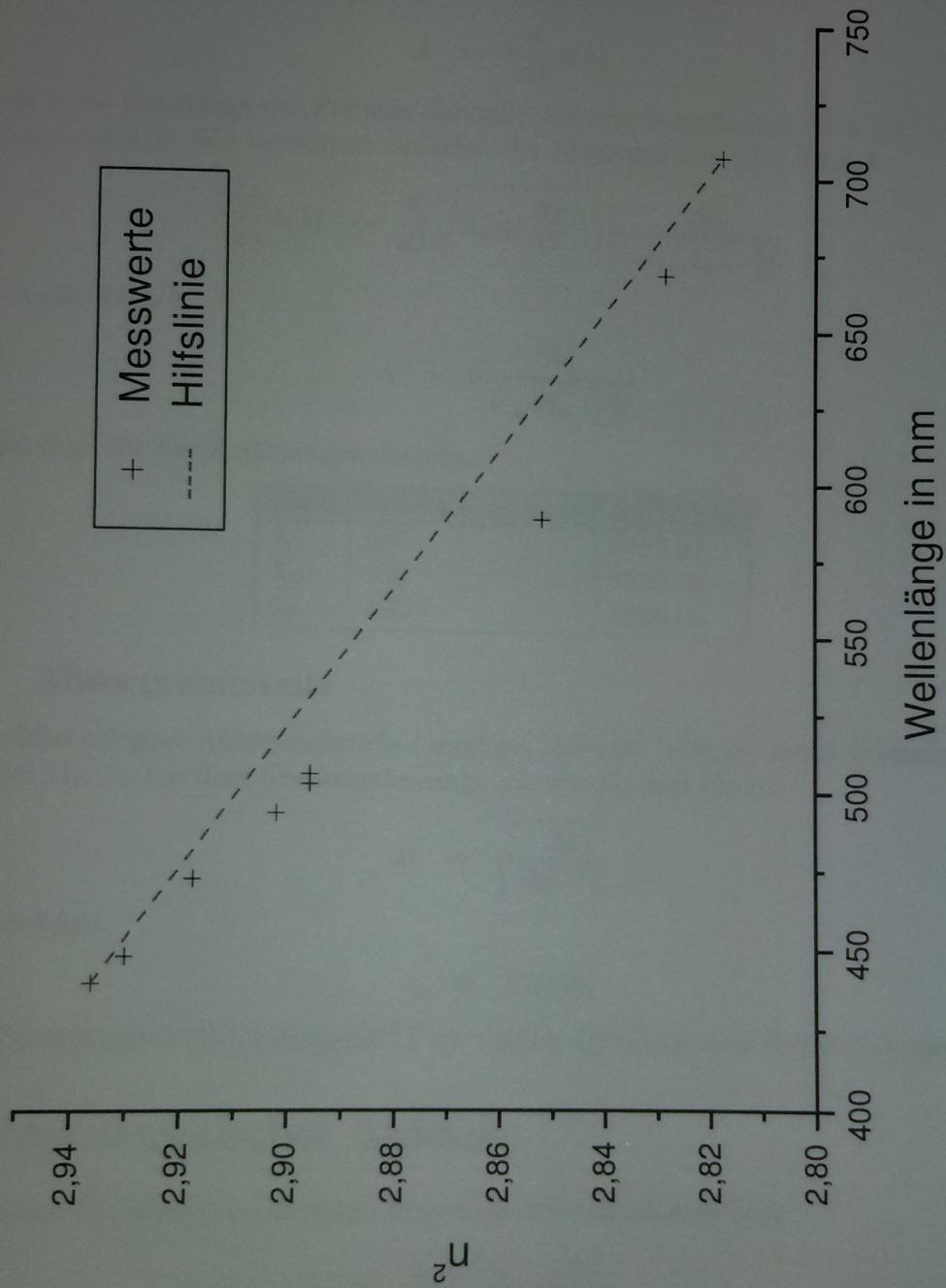
Anschließend wurden die Brechungswinkel η_r und η_l gemessen. Aus Gleichung (10) berechnet sich daraus der Winkel η . Setzt man φ und η in Gleichung (11) ein erhält man den Brechungsindex n:

Wellenlänge in nm	Intensität	Winkel η_l links in °	Winkel η_r rechts in °	n
706,5	schwach	46,0	280,3	1,679
667,8	stark	45,85	280,5	1,682
587,6	stark	45,5	280,9	1,689
504,8	schwach	44,8	281,6	1,702
501,6	stark	44,8	281,6	1,702
492,2	schwach	44,7	281,7	1,704
471,3	mittelstark	44,4	281,9	1,708
447,1	stark	44,2	282,1	1,712
438,8	mittel	44,1	282,2	1,714

Man erkennt, dass der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Dieses als normale Dispersion bezeichnete Verhalten bestätigt die Messergebnisse. Das Prisma bestand aus Schwerflint **SF5**.

4.3 Entscheidung für Dispersionkurve

Für die Entscheidung welche Dispersionkurve das Verhalten richtig beschreibt trägt man das Quadrat des Brechungsindex gegen die Wellenlänge auf:



Zur besseren Entscheidung haben wir den ersten und den letzten Punkt durch eine Hilfslinie verbunden. Man erkennt, dass es sich um den ersten Fall (2.2) mit $\lambda \gg \lambda_1$ handelt.

4.4 Gleichung der Dispersionskurve

Zu den gewonnenen Messwerten wird nun eine geeignete Dispersionskurve bestimmt. Als erstes muss man sich zwischen Gleichung (7) und (8) entscheiden. Zu diesem Zweck verwenden wir die lineare Regression. Das Quadrat des Brechungsindexes wird gegen λ^2 (Abb.4) bzw. $1/\lambda^2$ (Abb.5) aufgetragen. Man erkennt deutlich, dass Gleichung (7)

	Wert	Fehler	rel. Fehler
A_0	2,74485	0,00374	0,136255169
A_1	37759,8095	954,354	2,527433302
A'_0	3,00007	0,009	0,299993
A'_1	$3,83 \cdot 10^{-7}$	$2,90 \cdot 10^{-8}$	7,571801567

Tabelle 1: Vergleich der Regressionen

die Messwerte besser repräsentiert. Mit diesen Werten wird eine Theoriekurve berechnet (Abb.6). Es ergibt sich für den Brechungsindex die Gleichung:

$$n(\lambda) = \sqrt{2,74 + \frac{37000}{\lambda^2} nm^2} \quad (13)$$

4.5 Abbesche Zahl

Zur Berechnung der Abbeschen Zahl müssen zuerst die Brechungsindizes für die Fraunhofer-Linien nach Gleichung (13) berechnet werden. Daraus ergibt sich mit der

Linie	Wellenlänge [nm]	Brechungsindex	n
λ_C	656	1,6830	n_C
λ_D	589	1,6893	n_D
λ_F	486	1,7043	n_F

Tabelle 2: Brechungsindizes

Gleichung

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (14)$$

eine Zahl von $\nu = 32,37$.

4.6 Auflösungsvermögen

Durch das Auflösungsvermögen werden zwei benachbarte Wellenlängen, mit dem Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ bezeichnet, die gerade noch aufgelöst werden können. Das definiert

das Auflösungsvermögen als:

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (15)$$

Es lässt sich zeigen, dass das Auflösungsvermögen gegeben ist durch:

$$A = b \frac{d}{d\lambda} n(\lambda) \quad (16)$$

Worin b die Basislänge des Prismas darstellt. Sie wurde nicht gemessen und wird als 3 cm angenommen. Wir berechnen zunächst die Ableitung von $n(\lambda)$ nach λ :

$$\frac{d}{d\lambda} n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}} = -\frac{A_2}{\lambda^3 \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}} \quad (17)$$

Für A gilt folglich:

$$A = b \frac{A_2}{\lambda^3 \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}} \quad (18)$$

Damit folgt für das Auflösungsvermögen:

Linie	Wellenlänge [nm]	Auflösung
λ_C	656	2422,03
λ_D	589	3346,15
λ_F	486	5956,38

4.7 Absorptionsstelle

Die nächstgelegene Absorptionstelle berechnet sich mit Hilfe der zuvor bestimmten Parameter A_0, A_2 aus dem Koeffizientenvergleich von (5) und (6) zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} \quad (19)$$

Daraus folgt:

$$\lambda_1 \approx 147 \text{ nm.} \quad (20)$$

Die nächstgelegene Absorptionstelle liegt also im Ultravioletten Wellenlängenbereich.

5 Mathematischer Anhang

Die beiden Parameter der linearen Regression berechnen sich über

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) n_i^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})} \quad (21)$$

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i^2 - A_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (22)$$

Für die Fehler gilt:

$$S_{A_1}^2 = S_Y^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})} \quad (23)$$

$$S_{A_0}^2 = s_Y^2 \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (24)$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (n_i^2 - A_1 x_i - A_0) \quad (25)$$

6 Diagramme

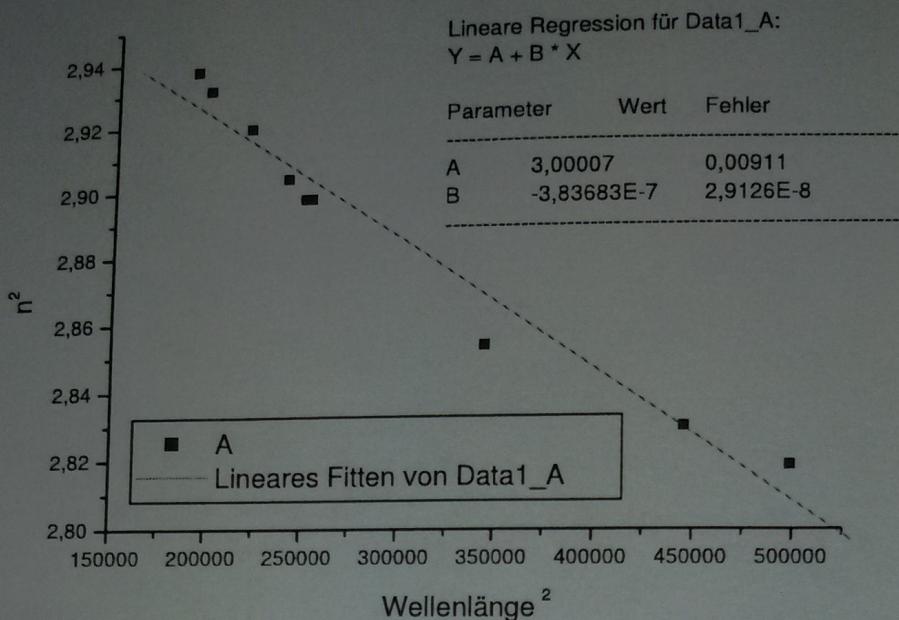


Abbildung 4: Ausgleichsrechnung 1

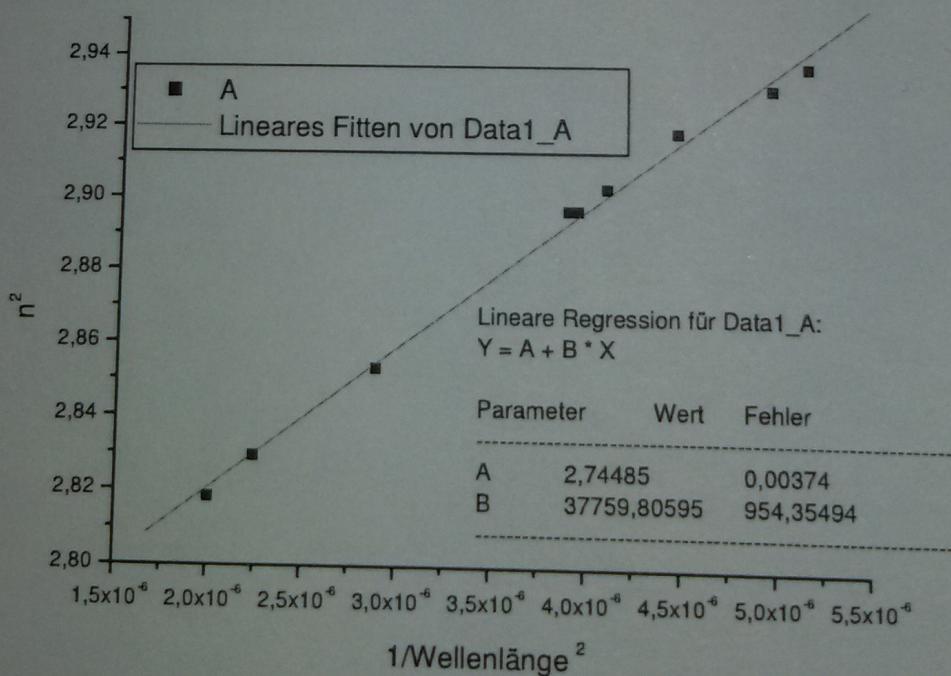


Abbildung 5: Ausgleichsrechnung 2

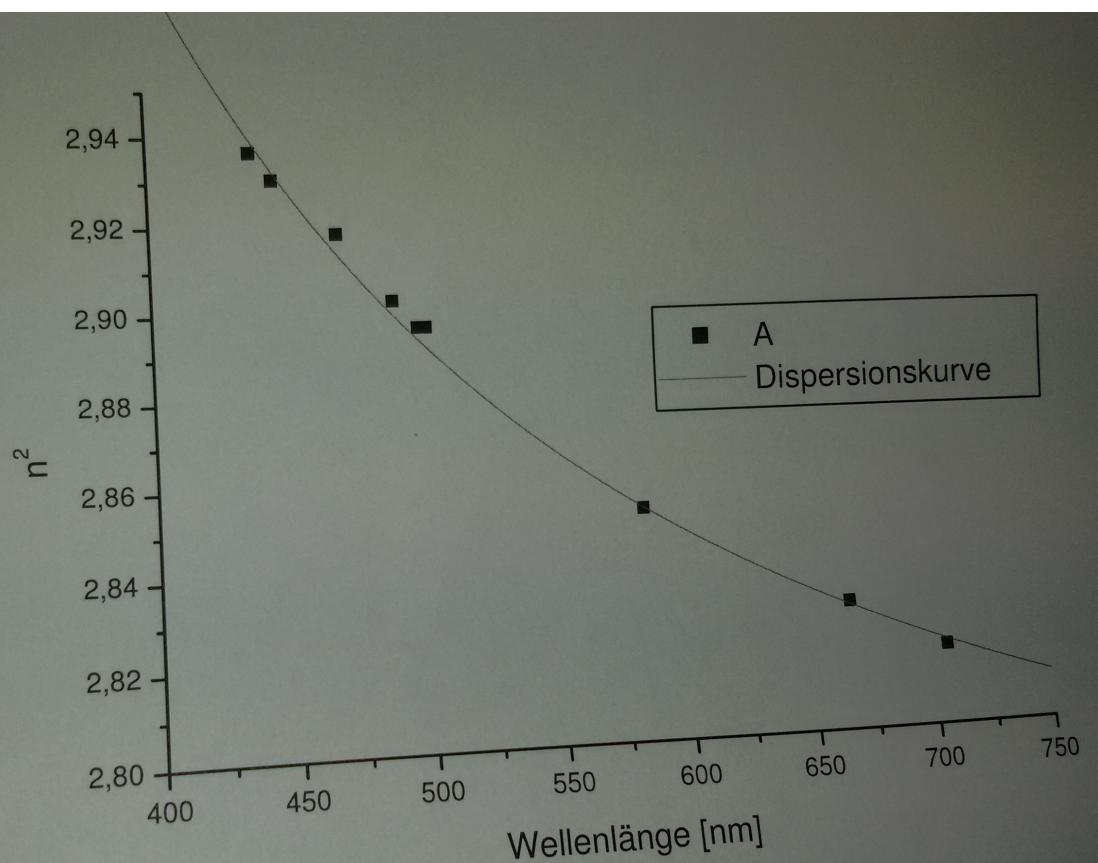


Abbildung 6: Berechnete Dispersionskurve