

1 Zielsetzung

In dem folgenden Experiment wird die Ablenkung eines Elektrodenstrahls im elektrischen Feld mittels einer Kathodenstrahlröhre untersucht. Im letzten Versuchsteil geht es dann um die Ablenkung im B-Feld und die Darstellung von Lissajous-Figuren.

2 Theorie

2.1 Aufbau der Kathodenstrahlröhre (Braunsche Röhre)

Aufgrund der Wechselwirkung von Luftmolekülen mit Elektronen wird der Versuch in einem Hochvakuum durchgeführt. Dazu wird eine Kathodenstrahlröhre benutzt, die aus einer (freien) elektronenerzeugenden „**Elektronenkanone**“, einem **Ablenk- und Nachweissystem** besteht. Letzteres visualisiert den Auftreffpunkt. Die Elektronenkanone erzeugt durch Glühemission (mit Hilfe einer Kathode mit niedriger Austrittsarbeit) freie Elektronen, beschleunigt sie und fokussiert den Elektronenstrahl. Die Kathode ist von einem zylindrischen Hohlkörper, dem **Wehnelt-Zylinder**, umgeben. Folgende Abbildung verdeutlicht den Sachverhalt:

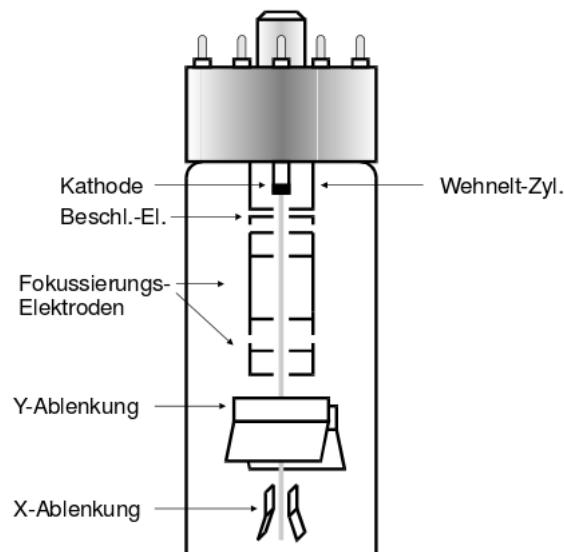


Abbildung 1: Querschnitt einer Kathodenstrahlröhre [2, S. 2]

2.2 Ablenkung im E-Feld

Über das negative Potential kann die Intensität des Elektronenstrahls gesteuert werden. Die Elektrode vor dem Wehnelt-Zylinder besitzt ein hohes positives Potential U_B (Beschleunigerspannung), sodass die Elektronen, die es durch die Barriere des Zylinders schaffen, beschleunigt werden. Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\frac{m_0 v_z^2}{2} = e_0 U_B$$

mit der Elementarladung e_0 , der Elektronenmasse m_0 und der Geschwindigkeit v_z .

Über die Elektroden hinter der Beschleunigerelektrode wird das divergente Strahlenbündel durch inhomogene E-Felder unterschiedlichen Potentials fokussiert und auf dem Schirm visualisiert, der durch seine elektrische Leitfähigkeit negative Ladungen der Elektronen verhindert. Die Brechkraft dieser Elektronenlinse lässt sich durch die Spannung U_c regeln. Die auftreffenden Elektronen regen die Störstellen im Kristallgitter (**Aktivatorzentren**) an und führen zur Emission von Lichtquanten. Durch das Anlegen einer Spannung kann die Ablenkung verändert werden, wobei diese auch von der Feldstärke und Elektronengeschwindigkeit abhängig ist.

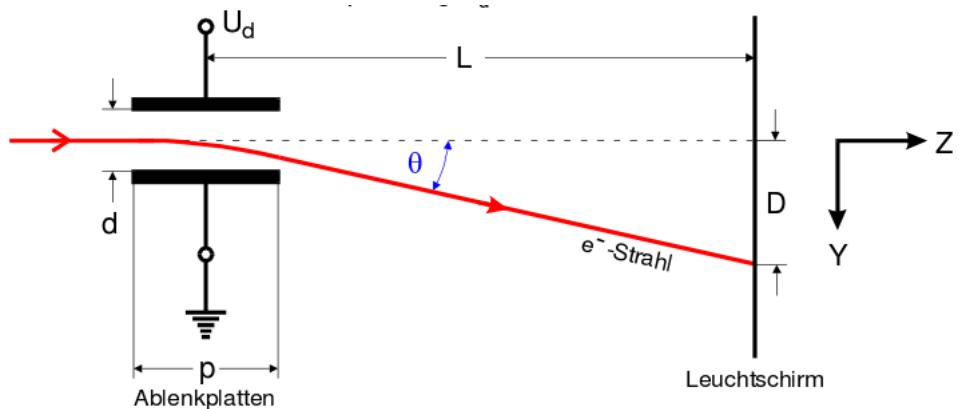


Abbildung 2: Strahlablenkung im E-Feld [2, S. 3]

mit der Ablenkspannung U_d und dem Plattenabstand d .

Mit $d \ll p$ – der Plattenlänge p – gilt

$$E = \frac{U_d}{d}$$

Die Verschiebung D ergibt sich über die Komponentenbetrachtung der Geschwindigkeiten, Betrachtung von Winkel θ der Richtungsänderungen und etwas umformen zu:

$$D = L\Theta = \frac{pLU_d}{2dU_B} \propto U_d \quad (1)$$

Mit der Länge L zwischen den Ablenkplatten und dem Leuchtschirm. Für eine hohe Ablenkempfindlichkeit werden daher L und p möglichst groß und U_B möglichst klein gewählt. An einer solchen Röhre können allerdings nur niederfrequente Wechselspannungen untersucht werden, da die Flugzeit Δt klein gegen die Periodendauer von U_d sein muss. Demnach muss p **klein** und U_B **groß** sein.

2.3 Lissajous-Figuren (Vorbereitung)

Die Lissajous-Figuren stellen die Überlagerungen zweier Schwingungen dar. Für den Versuchsteil der Braunschen Röhre sollen die Lissajous-Figuren mit Frequenzverhältnissen von $b=1:a=1, 1:2, 3:4$ und $2:5$ skizziert werden, wobei die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist:

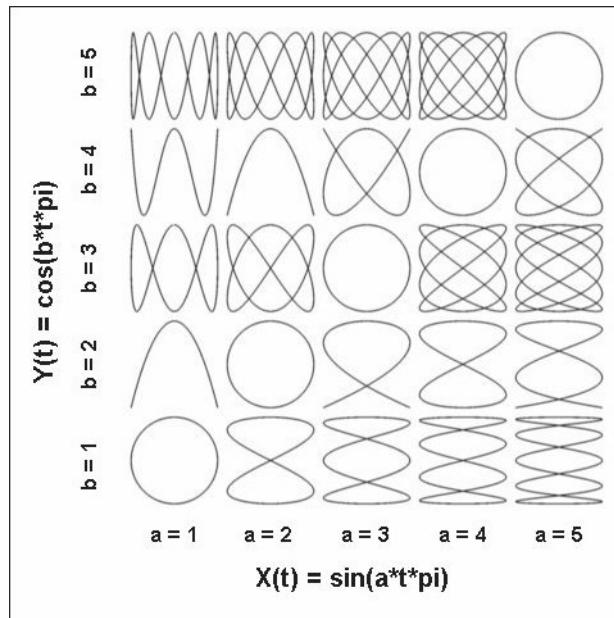


Abbildung 3: Lissajous-Figuren [3]

Die Figur kann dabei am Schirm beobachtet werden. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ berechnet sich nach $\Delta\varphi = \sin(|\varphi|)$. Alternativ kann die Spannung am rechten und linken Rand am Oszilloskop abgelesen werden. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ ist dann $\Delta\varphi = \cos(\varphi)$.

3 Durchführung

- Zunächst wird die Proportionalität zwischen der Verschiebung D und der Ablenkspannung U_d für 5 verschiedene U_B zwischen 180V und 500V untersucht. Folgende Verschaltung wird genutzt:

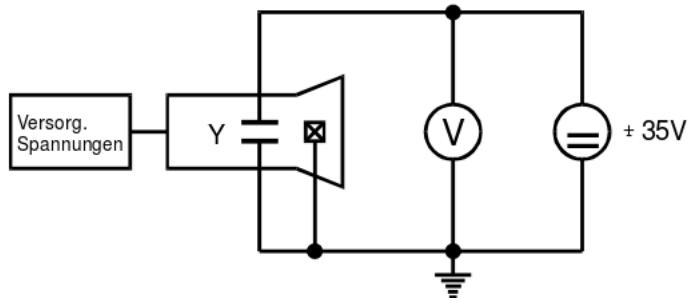


Abbildung 4: Verschaltung zur Messung der Leuchtfleckverschiebung [2, S. 5]

Vor Beginn der Messreihe wurde die Apparatur eine Minute angeheizt, und sodann die Hochspannung angelegt. Dabei wurde U_d so eingestellt, dass der Leuchtfleck auf der Vertikalen des Koordinatennetzes landete – jeweils an den ablesbaren Markierungen, deren Abstände den Messwerten entnommen werden können – und folgend U_d am Voltmeter abgelesen. Mittels der Buchse "Erden" wurde die Platte geerdet.

- Im zweiten Teil des Doppelexperimentes soll dann die Ablenkung des Elektronenstrahls durch ein B-Feld gemessen und das Verhältnis e_0/m_0 bestimmt werden. Hierbei ist die Röhre von einem Ring umgeben, auf dem Spulen mit $N = 600$ Windungen befestigt werden können. Mittels eines Abgriffes kann die Windungszahl auf $N = 300$ reduziert werden. Die Spannung werden langsam auf folgende Sollwerte geregelt:

$$\text{Oszi 1: } U_{\text{Heiz}} = 7 \text{ V}, U_{\text{Wehnelt}} = 45 \text{ V}, U_{\text{Anode}} = 250 \text{ V}$$

Mit Hilfe eines Magneten (und dem Nachjustieren des Spulenstroms) wird der Bildpunkt am Schirm positioniert. Folgende Verschaltung wird genutzt:

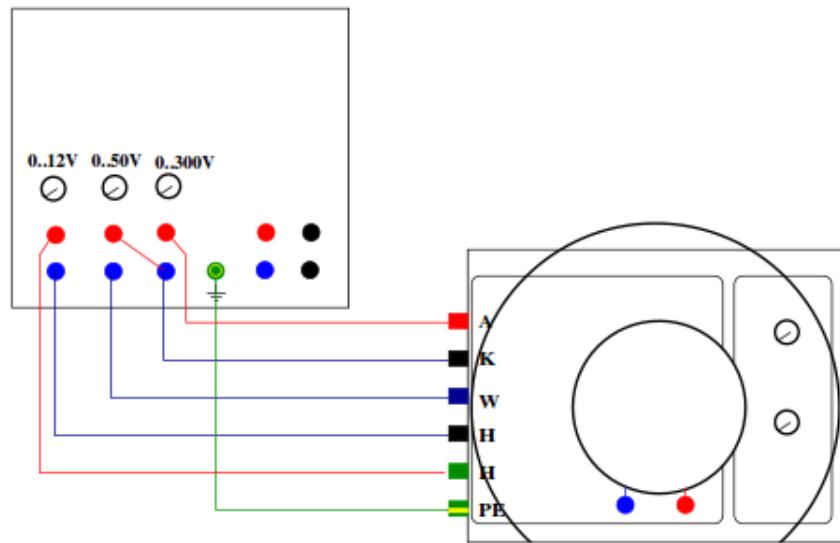


Abbildung 5: Schaltbild zum Versuchsaufbau [1, S. 3]

Zuletzt wird das Netzgerät eingeschaltet und die Ablenkung als Funktion des Spulenstroms gemessen.

3. Darauffolgend wird das B-Feld $\vec{B}(I)$ mittels einer Hall-Sonde gemessen und die theoretische Ablenkung berechnet. Diese Messung wird mit einer Spule mit $N = 600$ Windungen wiederholt.
4. Für die Lissajous-Figuren wird zu der ersten Spule analog zur ersten Versuchsreihe des zweiten Teils eine zweite Spule auf den Ring aufgesetzt, sodass das B-Feld zusätzlich horizontal ist. Folgende Verschaltung wird konstruiert:

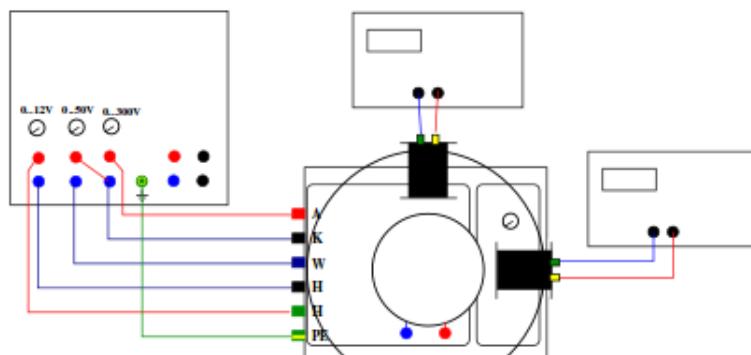


Abbildung 6: Aufbau zur Messung Lissajous-Figuren [1, S. 4]

An dem ersten Funktionsgenerator wird eine Sinusspannung von $U_{\text{Sinus}} = 50 \text{ Hz}$ eingestellt. Am Zweiten wird ein Vielfaches der Horizontalfrequenz eingestellt. Als nächstes werden die Figuren fotografiert und vermessen. Analog werden weitere Figuren mit dem Verhältnis 1:2 und 3:4 vermessen, die ein gebrochenes Vielfaches der Horizontalfrequenz entsprechen.

4 Auswertung

4.1 Die Empfindlichkeit der Braunschen Röhre

Unter der Empfindlichkeit der Braunschen Röhre wird das Verhältnis zwischen der Ablenkung D und der angelegten Spannung U_D verstanden. Um dies zu ermitteln, wird im folgenden Diagramm D gegen U_d aufgetragen und eine lineare Regression mit dem Programm ipython durchgeführt. Die Steigung der Ausgleichsgeraden gibt die gesuchte Empfindlichkeit an.

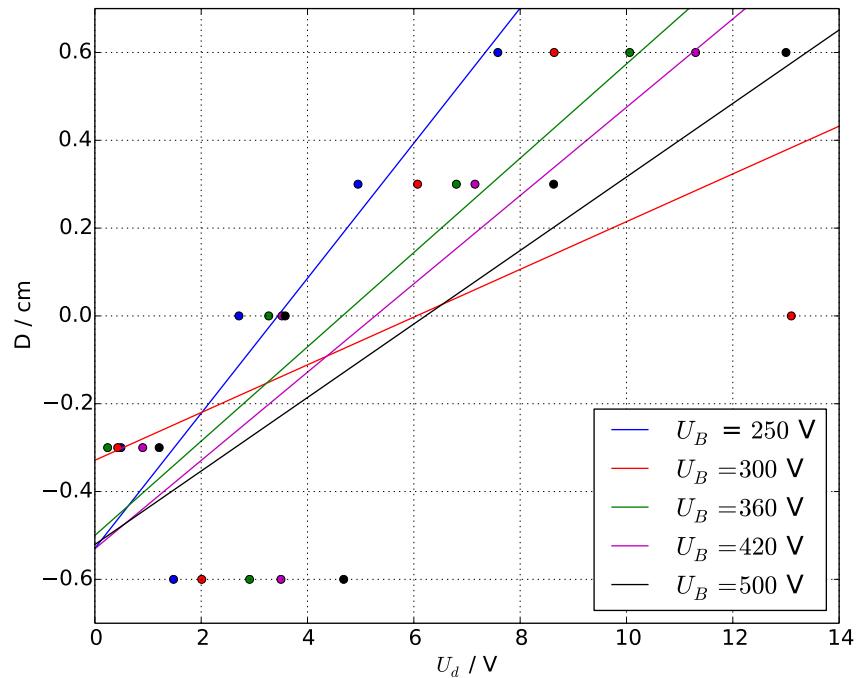


Abbildung 7: Die Ablenkung bei verschiedenen Spannungen U_D

In der nachfolgenden Tabelle sind die Messwerte sowie die resultierenden Steigungen

$\frac{D}{U_d}$ der Ausgleichsgeraden aufgeführt. Es ist zu erkennen, dass die Empfindlichkeit mit zunehmender Beschleunigungsspannung U_B abnimmt. Der berechnete Wert für $U_B = 300 \text{ V}$ sticht jedoch deutlich aus der Messreihe heraus.

Tabelle 1: Messwerte und Steigungen der Ausgleichsgeraden des ersten Versuchsteils

		U_D / V				
		250	300	360	420	500
D / cm	U_B / V					
0	0	2.71	3.1	3.27	3.52	3.58
0.3	4.95	6.07	6.8	7.15	8.63	
0.6	7.58	8.64	10.06	11.3	13	
-0.3	0.49	0.43	0.24	0.9	1.21	
-0.6	1.48	2.01	2.91	3.5	4.68	
	$\frac{D}{U_d} / \frac{\text{cm}}{\text{V}}$	0.1538	0.0544	0.1074	0.1006	0.08372

4.2 Bestimmung der Apparaturkonstante

Nun soll die Apparaturkonstante K

$$K = \frac{pL}{2d}$$

berechnet werden. Dazu werden die zuvor ermittelten Steigungen gegen die reziproke Beschleunigungsspannung U_B aufgetragen und eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Da die Steigung zu $U_B = 300 \text{ V}$ stark von den übrigen Werten abweicht, wird sie für die weitere Rechnung nicht berücksichtigt.

Die Ausgleichsrechnung liefert die Gerade

$$\frac{D}{U_d} = (34 \pm 2) \text{ cm} \cdot \frac{1}{U_B} + (0.015 \pm 0.007) \frac{\text{cm}}{\text{V}}$$

mit einem vernachlässigbar kleinen y-Achsenabschnitt.

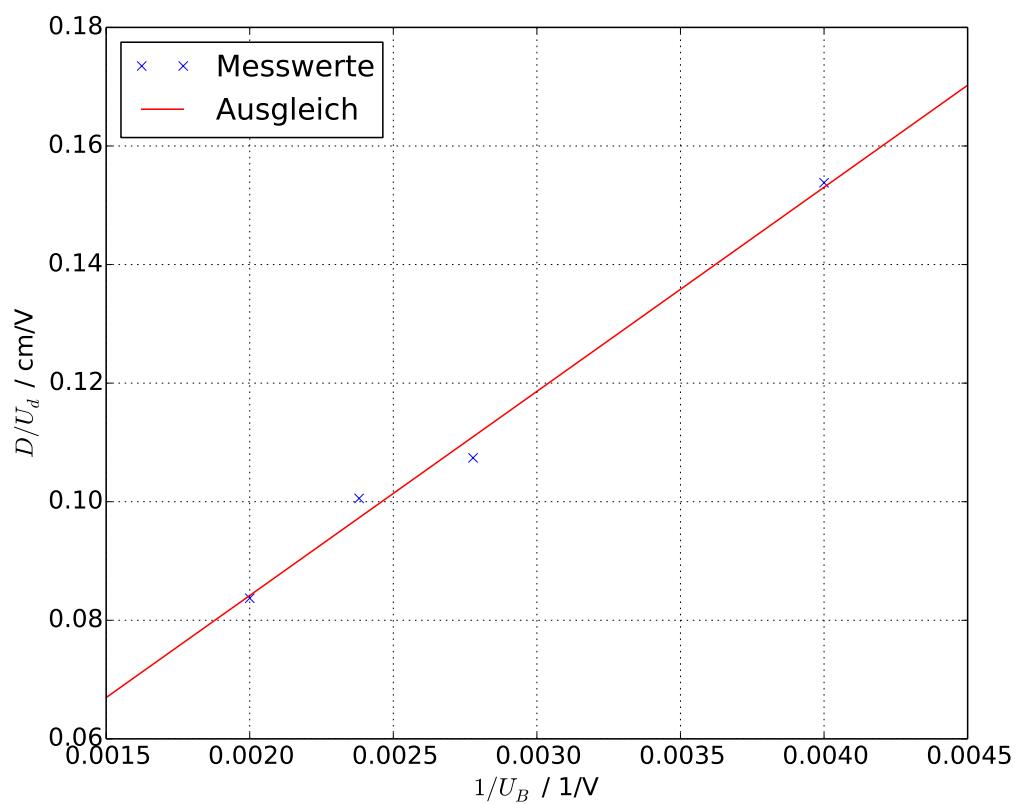


Abbildung 8: Plot der Empfindlichkeiten gegen reziproke Beschleunigungsspannung

Mittels der Beziehung

$$D = \frac{p}{2d} L \frac{U_d}{U_B} \iff \frac{D}{U_d} = \frac{Lp}{2d} \frac{1}{U_B} = a \cdot \frac{1}{U_B}$$

entspricht die Steigung der Ausgleichsgeraden der gesuchten Apparaturkonstante. Diese kann auch über die angegebenen Abmessungen des Versuchsaufbaus [2, S. 7] theoretisch berechnet werden:

$$\begin{aligned} p &= 1.9 \text{ cm}, & L &= 14.3 \text{ cm}, & d &= 0.38 \text{ cm} \\ && \rightarrow a &= 35.75 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Abweichung zwischen beiden Werten für die Apparaturkonstante liegt bei 3.4 %, es wurde also sehr genau gemessen.

4.3 Die Ablenkung der Elektronen durch das Magnetfeld

Um die Ablenkung durch das Magnetfeld berechnen zu können, wurden in der Messreihe der Spulenstrom I , die Stärke des an der Spule herrschenden Magnetfeldes B sowie die Ablenkung D der Elektronen, die auf dem Leuchtschirm sichtbar ist, aufgenommen. Die angelegte Spannung U liegt bei konstant 6.86 V.

Tabelle 2: Messwerte für die Spule mit 300 Windungen

I / A	B / mT	D / cm	$D_{\text{Theo}} / \text{cm}$
0.18	0	0.268	0.034
0.4	0.8	0.404	0.051
0.5	1	0.748	0.095
0.6	1.6	0.79	0.0101
0.7	1.9	0.96	0.1224
0.8	2.3	1.085	0.1384
0.9	2.5	1.1177	0.1501
1	3	1.246	0.1589
1.1	3.2	1.328	0.1694
1.2	3.5	1.366	0.1742

Es wird die Ablenkung D gegen die Stärke des Magnetfeldes B in ein Diagramm aufgetragen und eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt:

$$D = (2.96 \pm 0.21) \frac{\text{cm}}{\text{mT}} \cdot B + (-0.78 \pm 0.21) \text{ cm}$$

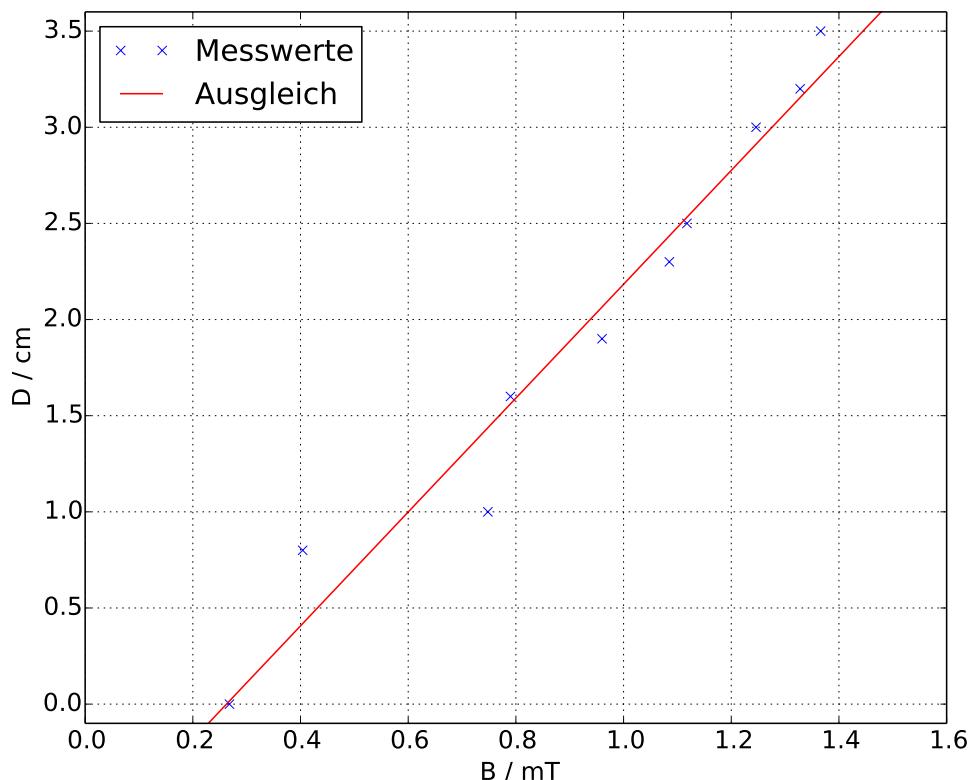


Abbildung 9: Ablenkung D gegen B aufgetragen, $n = 300$

Die berechnete Funktion wird mit der Gleichung

$$D = \left(L + \frac{l}{2} \right) \frac{l\sqrt{e}B}{\sqrt{2U_B}m_e}$$

verglichen, daraus erkennt man folgende Beziehung für die Steigung a :

$$a = \left(L + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{\sqrt{2U_B}} \sqrt{\frac{e}{m_e}}$$

Diese Gleichung wird nach $\frac{e}{m_e}$ umgestellt:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{a^2 2U_B}{l^2 \left(L + \frac{l}{2} \right)^2}$$

Die Konstanten sind $l = 4 \text{ cm}$, $L = 14.3 \text{ cm}$ und $U_B = 250 \text{ V}$. Das Verhältnis zwischen Ladung und Masse des Elektrons berechnet sind hiermit zu

$$\left(\frac{e}{m_e} \right)_{300} = (9.48 \cdot 10^9 \pm 1.3 \cdot 10^9) \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

Für die Spule mit $n = 600$ Windungen erfolgt die Rechnung analog. Die Ausgleichsrechnung ergibt

$$D = (2.66 \pm 0.06) \frac{\text{cm}}{\text{mT}} \cdot B + (-1.16 \pm 0.08) \text{ cm},$$

und damit berechnet sich das Verhältnis $\frac{e}{m_e}$ zu

$$\left(\frac{e}{m_e} \right)_{600} = (7.6 \pm 0.4) \cdot 10^9 \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

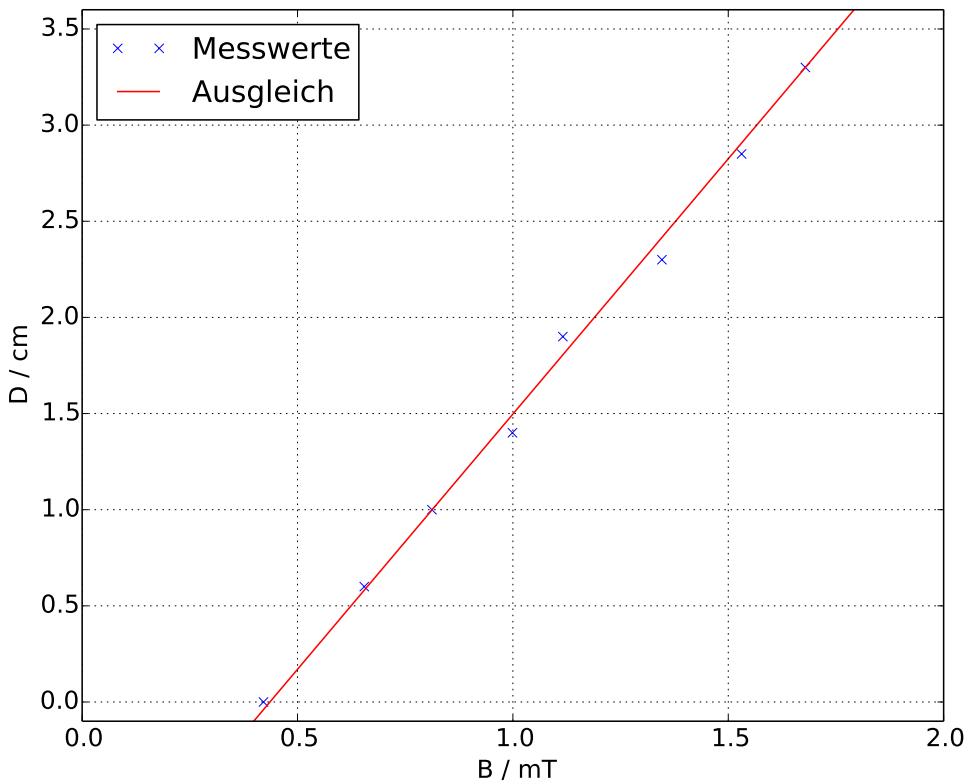


Abbildung 10: Ablenkung D gegen B aufgetragen, $n = 600$

Tabelle 3: Messwerte für die Spule mit 600 Windungen

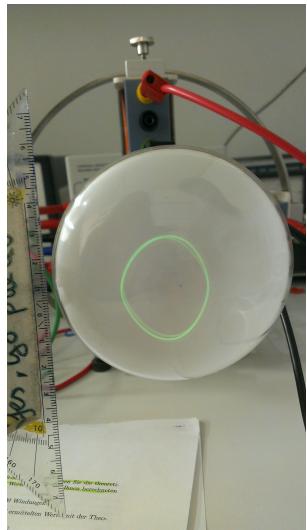
I / A	B / mT	D / cm	$D_{\text{Theo}} / \text{cm}$
0.1	0	0.421	0.0534
0.15	0.6	0.655	0.0835
0.2	1	0.812	0.1036
0.25	1.4	0.999	0.1274
0.3	1.9	1.116	0.1423
0.35	2.3	1.346	0.1717
0.4	2.85	1.531	0.1953
0.45	3.3	1.679	0.2141
0.5	3.7	1.787	0.2279

4.4 Die Lissajous-Figuren

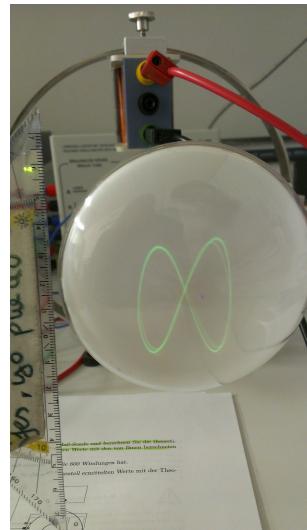
Im letzten Veruchsteil wurden verschiedene Lissajous-Figuren auf dem Leuchtschirm sichtbar gemacht und abfotografiert. Die Fotos zu den unterschiedlichen Frequenzverhältnissen finden sich in der nachfolgenden Grafik. Werden die Fotos mit der Theorie (Abbildung 3) verglichen, lässt sich eine Phasenverschiebung um $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ erkennen.

Tabelle 4: eingestellte Frequenzen für die Lissajousfiguren

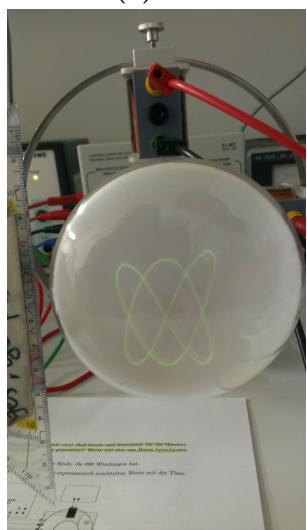
Frequenzverhältnis	ν_1	ν_2
1:1	50.2	50.3
1:2	50.2	100.4
2:3	50.2	75.0
3:4	75.2	100.1



(a) 1:1



(b) 1:2



(c) 2:3



(d) 3:4

Abbildung 11: Die Lissajours-Figuren

5 Diskussion

Die Ergebnisse des Teils "Ablenkung im Magnetfeld" liegen sehr dicht an den theoretischen Werten. Die Apparaturkonstante wurde mittels der Ausgleichsgeraden zu 34 cm bestimmt, während die exakte Berechnung 35.75 cm liefert. Somit liegt die Abweichung bei 3.4 %, die Messungenauigkeit ist also gering.

Die spezifische Elektronenladung beträgt $(1.759 \cdot 10^{11}) \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ [4]. Die Abweichung zu $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{300} = (9.48 \cdot 10^9) \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ beträgt somit 94.6 %, während der Wert mit der Spule mit 600 Windungen $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{600} = (7.6 \cdot 10^9) \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ um 95.7 % abweicht. Diese extreme Abweichung liegt zum Einen an der fehlerhaften Messung des Magnetfeldes: Die Stärke des Magnetfeldes sollte mittels einer Hall-Sonde direkt an der Spule gemessen werden, es gilt aber $B \propto \frac{1}{r^2}$, sodass das B-Feld mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt. Auf die Elektronen wirkt also eine viel kleinere Lorentzkraft, was in der Rechnung hätte berücksichtigt werden müssen. Zum Anderen ist das Abmessen der Ablenkung der Elektronen höchst ungenau. Die Oberfläche des Leuchtschirmes ist gewölbt, somit ist es schwierig, mit einem Geodreieck die richtige Strecke abzumessen. Zudem war der Mittelpunkt als Referenzpunkt nicht eingezeichnet.

Die Lissajous-Figuren ließen sich einfach einstellen und sehen so aus, wie die Theorie vorhersagt. Lediglich bei der ersten Figur sollte eine Ellipse erkennbar sein, die durch zu spätes Fotografieren etwas deformiert ausschaut.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung: Die Braunsche Röhre*. 2015.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V501 - Die Ablenkung eines Elektronenstrahls im elektrischen Feld*. 2015.
- [3] Microsoft Excel. *lineare Ausgleichsrechnung*. Aufruf vom 20.11.2014. URL: <http://office.microsoft.com/de-de/excel-help/rgp-HP005209155.aspx>.
- [4] Gerhard Höhne. *Ladung und Masse eines Elektrons*. Aufruf vom 25.06.2015. URL: <http://www.g-hoehne.de/ELEKTR/EL21.HTM>.