

# 3 Elektrizitätslehre

- Grundlagen, Definitionen, Wechselstromwiderstände
- Vorversuche zu Kalibration der Messgeräte
- Versuche zu Wechselstromschwingkreisen
  - LCR-Serienschwingkreis
  - LCR-Parallelschwingkreis
- Eigenständige Versuche

## Physikalische Grundlagen

Gleich- und Wechselspannungen; Fourieranalyse

Ohmsche, kapazitive und induktive Widerstände, Schaltung von Widerständen; elektrische Leistungen (Momentan-, Schein- und Wirkleistung),

Effektivwerte von Strom und Spannung,

elektrische Schwingkreise, gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Hochpass, Tiefpass

## 3.1 Grundlagen, Definitionen

**Wechsel-Ströme und -Spannungen** Unter Wechselstrom versteht man jeden Strom, der seine Stärke und Richtung periodisch ändert. Jede periodische Funktion läßt sich nach Fourier in eine Summe von Sinus- und Kosinus-Funktionen zerlegen. Allgemein gelte für Wechselströme und -spannungen:

$$I_{\sim}(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_I) \quad \text{bzw.} \quad U_{\sim}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_U)$$

Wechselstromwiderstände können zu einer Phasenverschiebung zwischen der angelegten Wechselspannung  $U_{\sim}(t)$  und dem Strom  $I_{\sim}(t)$  im Leiterkreis führen.  $\phi_U$  und  $\phi_I$  sind die Phasen von Spannung und Strom zur Zeit  $t=0$  (sog. **Nullphasen**). Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wird (meist) definiert als:

$$\phi = \phi_U - \phi_I$$

Wählt man  $\phi_U = 0$ , so ergibt sich  $\phi_I = -\phi$ , also:

$$I_{\sim}(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad \text{und} \quad U_{\sim}(t) = U_0 \cdot \cos \omega t \quad (3.1)$$

Für  $\phi_U - \phi_I = \phi > 0$  eilt die Spannung dem Strom voraus, für  $\phi_U - \phi_I = \phi < 0$  läuft die Spannung dem Strom hinterher.

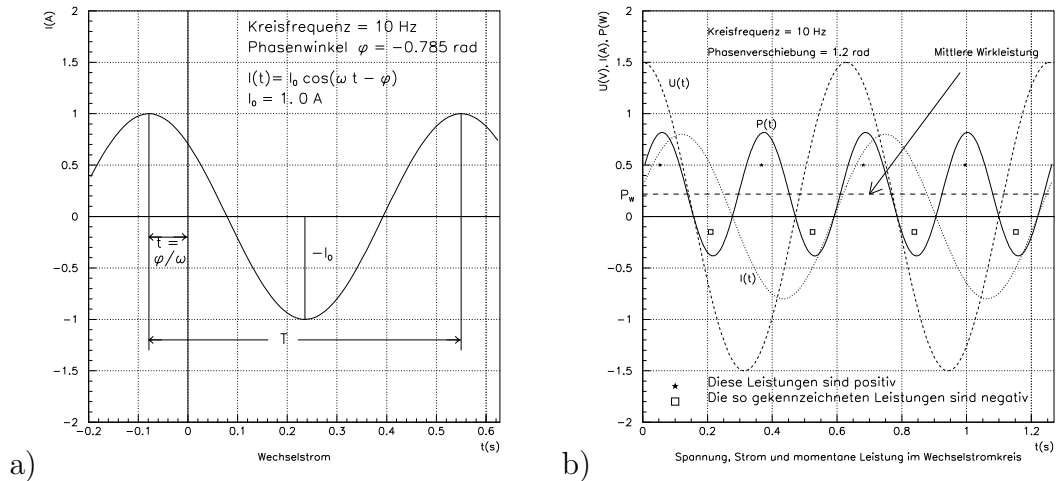


Abbildung 3.1: a) Phasenverschobener Wechselstrom, b) Spannung, Strom und momentane Leistung

Abbildung 3.1 a) zeigt den Verlauf eines Stromes für den Phasenwinkel  $\phi = -\phi_I = -\pi/4$  rad als Funktion der Zeit. Die dadurch bedingte Verschiebung in negative x-Richtung ist angegeben. Weiterhin sind die Periode  $T$  und die Amplitude  $I_0$  eingezeichnet.

**Effektivwerte, Leistungen** Betrachtet sei der Momentanwert der Leistung im Wechselstromkreis:

$$P(t) = U_{\sim}(t) \cdot I_{\sim}(t) = U_0 \cdot I_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \phi) = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

$P(t)$  ist die **Momentanleistung**. Sie pulsiert mit der doppelten Frequenz und der Amplitude  $U_0 \cdot I_0/2$  um den Mittelwert, die sogenannte **Wirkleistung**:

$$P_W = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos \phi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \phi \quad (3.2)$$

Hierüber kann man die **Effektivwerte von Spannung und Strom** definieren:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Diese Effektivwerte gelten in dieser Form nur für sinus- bzw. kosinusartige Spannungen und Ströme.

Neben dem Begriff der Wirkleistung benötigt man noch die Begriffe der **Blindleistung** und der **Scheinleistung**. Die Wirkleistung  $P_W$  wird im Mittel einem Verbraucher zugeführt. Sie wird in Ohmschen Widerständen in Wärmeenergie umgewandelt und geht für den Stromkreis verloren. Ein Ohmscher Widerstand speichert keine elektrische Energie! Abbildung 3.1 b) zeigt den zeitlichen Verlauf

von Spannung, Strom und momentaner Leistung. Der Strom läuft in diesem Beispiel der Spannung um  $1,2 \text{ rad} = 68,8^\circ$  hinterher. Die mittlere Wirkleistung, um die die Momentanleistung pulsiert, ist durch die gestrichelte Gerade angedeutet. Wichtig ist, dass für die Berechnung der gesamten Wirkleistung alle Ohmschen Widerstände, auch z. B. die von Induktivitäten, berücksichtigt werden müssen.

Positive Beiträge der Momentanleistung werden von der Spannungsquelle geliefert, negative werden an die Spannungsquelle zurückgegeben.

Aus Gleichung 3.2 erkennt man, dass die Wirkleistung für  $\phi = 0$  maximal wird; dann existieren nur positive Beiträge im Verlauf der Momentanleistung. Für  $\phi = \pm\pi/2$  dagegen verschwindet die Wirkleistung, der Stromkreis enthält dann auch keine Ohmschen Widerstände.

Spulen und Kondensatoren sind sogenannte **Blindwiderstände (Reaktanzen)**. Für den Aufbau von magnetischen bzw. elektrischen Feldern wird die sogenannte **Blindleistung** ( $P_B$ ) benötigt, die von der Spannungsquelle oder von anderen Blindwiderständen zur Verfügung gestellt wird. Beim Abbau der Felder wird die Blindleistung wieder abgegeben. Blindleistungen belasten im Mittel die Spannungsquelle nicht.

Blind- und Wirkleistung sind um  $\pi/2$  phasenverschoben und lassen sich geometrisch zur **Scheinleistung** kombinieren:

$$P_B = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \sin \phi = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin \phi \text{ und } P_S = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff}.$$

Schein- und Blindleistung haben nur in soweit eine physikalische Bedeutung, als sie für die Dimensionierung der Isolation von Spannungsträgern (bei Überspannungen) und der Stärke von Leitungen (bei Stromüberhöhungen) berücksichtigt werden müssen.

### 3.1.1 Wechselstromwiderstände

**Ohmscher Widerstand** Nach Kirchhoff gilt für einen Stromkreis mit einer Spannungsquelle  $U_\sim(t)$  und einem Ohmschen Widerstand  $R$  (mit dem Spannungsabfall  $U_R = I \cdot R$ ):

$$U_\sim(t) = I_\sim(t) \cdot R$$

Zu jedem Zeitpunkt ist der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand gleich der angelegten Spannung! Mit den Gleichungen 3.1 gilt:

$$U_0 \cdot \cos \omega t = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

Dies ist für alle Zeiten nur erfüllt, wenn  $\phi = 0$  gesetzt wird, d. h. Strom und Spannung sind in Phase. Ein Ohmscher Widerstand ändert nicht die Phase und hängt nicht von der Frequenz ab.

**Kapazitiver Widerstand** Im Kreis befinde sich nun ein Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Bei Anlegen einer Wechselspannung wird der Kondensator periodisch geladen und entladen, es fließt ein Wechselstrom im Kreis. Wenn kein Ohmscher Widerstand im Kreis vorhanden ist, erfolgt die Ladung und Entladung von  $C$  momentan. Wegen  $U_C(t) = Q(t)/C$  würde für den Spannungsabfall am Kondensator gelten:

$$U_{\sim}(t) = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} = \frac{I_{\sim}(t)}{C}$$

$$I_{\sim}(t) = C \cdot \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} = -\omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \sin \omega t = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

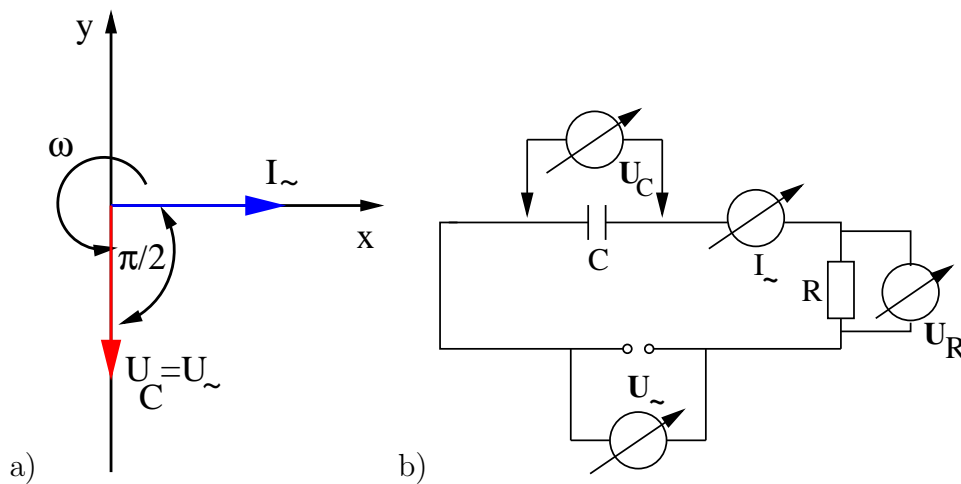


Abbildung 3.2: a) Zeigerdarstellung im rein kapazitiven Kreis, b) Schaltbild einer RC-Schaltung

Wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht, eilt der Strom  $I_{\sim}(t)$  der angelegten Spannung  $U_{\sim}(t)$  um  $\frac{\pi}{2}$  voraus, das heißt  $\phi = -\pi/2$ . Die Kapazität stellt für Wechselstrom einen sog. **kapazitiven Widerstand (Kondensanz  $X_C$ )** dar. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der kapazitive Wechselstromwiderstand  $X_C$  zu:

$$X_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Der kapazitive Widerstand  $X_C$  ist frequenzabhängig.

Ein zusätzlicher in Reihe geschalteter Ohmscher Widerstand  $R$  im Kreis beeinflusst die Phasenverschiebung zwischen Strom  $I_{\sim}(t)$  und Spannung  $U_{\sim}(t)$ . Es ergibt sich dann für die Impedanz  $Z$  und die Phasenverschiebung  $\phi$ :

$$Z^2 = R^2 + \left( \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2, \quad \tan \phi = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

**Induktiver Widerstand** Wenn ein Schaltkreis nur aus einer Spannungsquelle und einer Spule besteht, dann ist die Spannung zwischen den Polen der Spannungsquelle gleich dem Spannungsabfall an der Induktivität ( $U_L(t) = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt}$ ):

$$U_0 \cdot \cos \omega t = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} \quad \rightarrow \quad dI_{\sim}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \cos \omega t \, dt \quad \rightarrow \quad I_{\sim}(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin \omega t$$

und damit:

$$I_{\sim}(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Wie in Abbildung 3.3 a) veranschaulicht, eilt der Strom  $I(t)$  der angelegten Spannung  $U(t)$  um  $\frac{\pi}{2}$  nach, das heißt  $\phi = \pi/2$ . Obwohl der Kreis bei einer idealen Spule keinen Ohmschen Widerstand besitzt, erhält er durch die Induktivität für den Wechselstrom einen Widerstand  $X_L$ , den man **induktiven Widerstand** oder **Induktanz** nennt. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der induktive Wechselstromwiderstand  $X_L$  zu:

$$X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L$$

Der induktive Widerstand  $X_L$  ist frequenzabhängig.

Der innere Ohmsche Widerstand der Spule und zusätzliche in der Schaltung verwendete Ohmsche Widerstände  $R$  beeinflussen die Impedanz  $Z$  und die Phasenverschiebung  $\phi$ :

$$Z^2 = (R + R_L)^2 + (\omega \cdot L)^2, \quad \tan \phi = \frac{\omega \cdot L}{R_L + R}$$

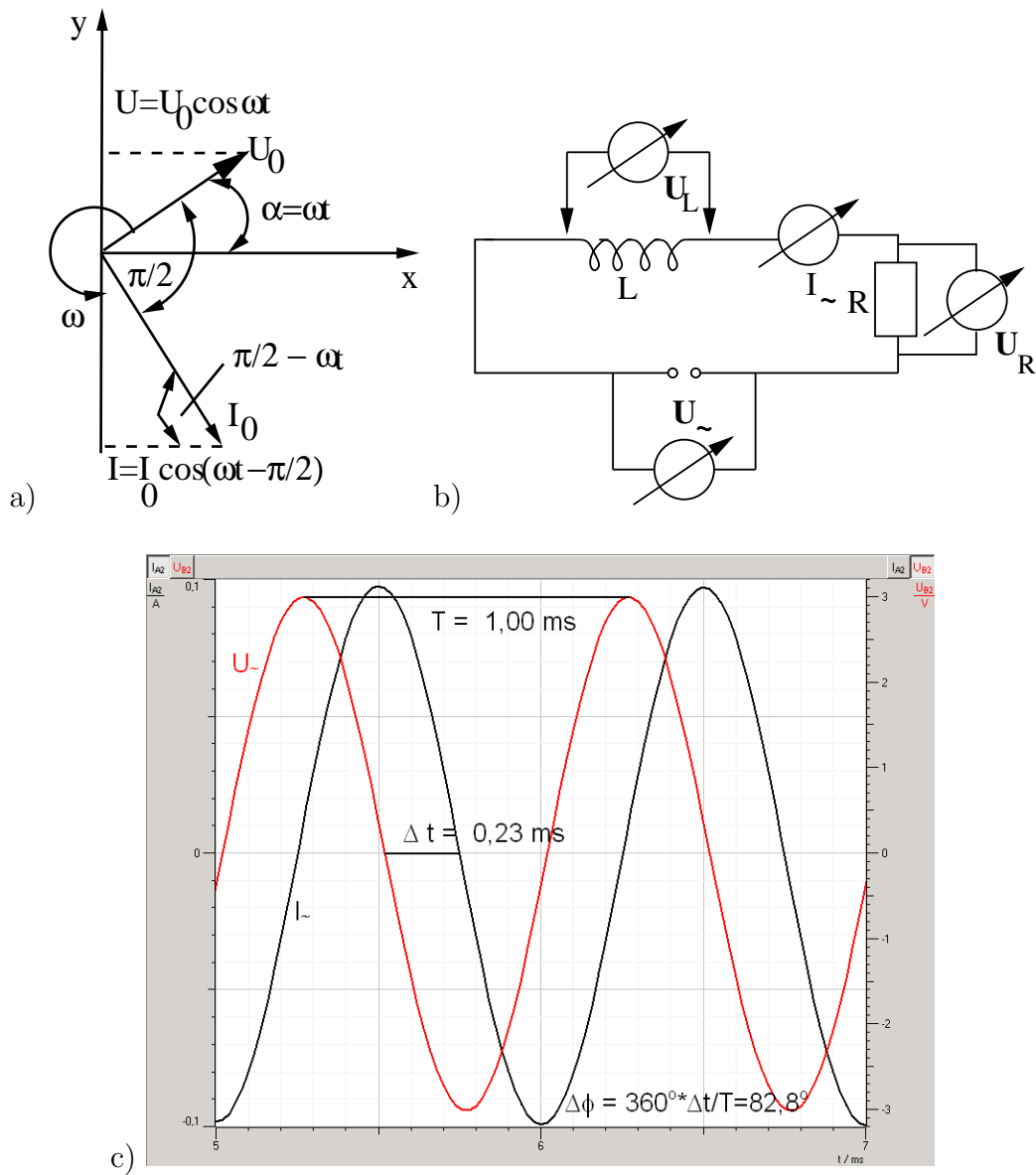


Abbildung 3.3: a) Zeigerdarstellung (ideal) b) Schaltbild mit Induktivität und Widerstand, c) Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$  im induktiven Kreis.

## 3.2 Vorversuche

Zur Kalibration der Spannungs- und Strommessgeräte wird ein Ohmscher Widerstand gemäß Abbildung 3.4 auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die erzeugte Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis misst. Die erzeugte Spannung wird mit den Spannungsmessgeräten (wahlweise Eingang A oder B) und der Strom im Kreis mit dem Strommessgerät (Eingang A) der verwendeten SENSOR-CASSY-Interface gemessen.

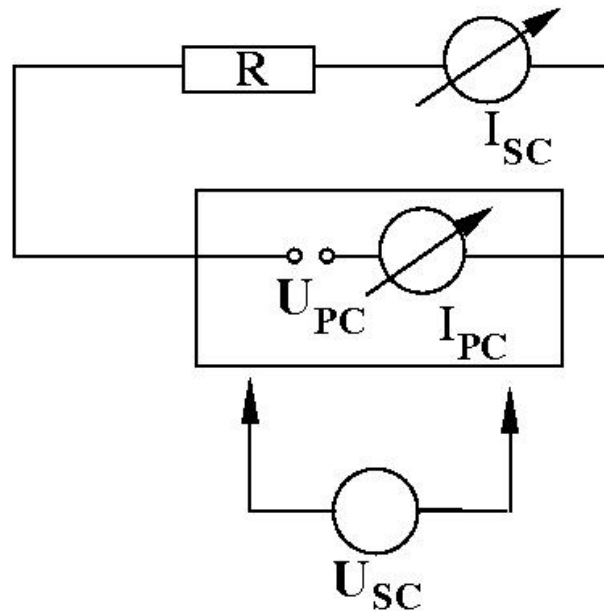


Abbildung 3.4: Schaltung zur Kalibration der Spannungs- und Strommessgeräte

### 3.2.1 Kalibration Spannungsmessgeräte

Bei der Messung von Spannungsabfällen mit den Spannungsmessgeräten des Sensor-Cassy-Systems gibt es statistische und systematische Messunsicherheiten.

Die statistischen Messunsicherheiten können mittels einer sogenannten Rauschmessung bestimmt werden. Dazu stellt man eine feste Spannung an der Spannungsquelle ein, misst die Spannung mit dem Spannungsmessgerät und untersucht die Verteilung der aufgezeichneten Messwerte (Mittelwert/RMS). Dann wiederholt man diese Methode für andere Spannungswerte, um zu untersuchen, ob die Messunsicherheiten über den eingestellten Messbereich konstant sind oder variieren.

Die systematischen Messunsicherheiten sind vom Hersteller pauschal für alle Cassy-Sensor Geräte wie folgt angegeben:

$$\sigma_{U,sys} = 0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{Bereichsendwert}$$

Um diese pauschal angegebenen systematischen Unsicherheiten zu reduzieren, kann das Messgerät kalibriert werden. Dazu wird der Funktionsgenerator POWER-CASSY als Spannungsquelle benutzt und die eingestellte Spannung mit dem Spannungsmessgeräten des SENSOR-CASSY gemessen. Beide Geräte werden auf Effektivwert-Messung eingestellt.

**Achtung:** Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich, die Art der Signalform (DC, Sinus-, Rechteck, Sägezahn, etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung  $V_P$ , Gleichspannungsoffset  $V_+$  und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung festgelegt.

Die mit dem POWER-CASSY erzeugte Spannung wird nun variiert und mit dem SENSOR-CASSY direkt am POWER-CASSY gemessen. Zur Variation der Spannung kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Stellspannung  $U_{PC}$  als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein:  $U_{PC} = U_0 + (n-1) \cdot 1,0$  mit  $U_0$  = Startspannung. Dies bewirkt z.B. eine schrittweise Erhöhung der Startspannung  $U_0$  um 1 Volt, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter  $V_P$  anstatt z.B. 2 V das vorher definierte Symbol  $U_{PC}$  eingegeben wird.

Zusätzlich muss bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis zu einer maximalen Spannung begrenzt und nach einer bestimmten Wartezeit den Messwert aufnimmt:

$$U_{PC} < 10 \quad \text{and} \quad \text{delta } t > 2$$

Die Messreihe wertet man nun so aus, dass die gemessene Spannung ( $U_{SC}$ ) gegen die angelegte Spannung ( $U_{PC}$ ) aufgetragen wird unter Berücksichtigung der Einzel-Messunsicherheiten auf der x- und y-Achse. Bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt, um in den folgenden Versuchen die Kalibrierung jeweils anwenden zu können. Die Unsicherheiten auf Achsenabschnitt und Steigung werden in den weiteren Versuchsteilen dann als systematische Unsicherheiten behandelt.

### 3.2.2 Kalibration Strommessgeräte

Bei der Messung von Strömen mit den Strommessgeräten des SENSOR-CASSY-Systems gibt es statistische und systematische Messunsicherheiten.

Die statistischen Messunsicherheiten können mittels einer sogenannten Rauschmessung bestimmt werden. Dazu stellt man eine feste Spannung an der Spannungsquelle ein, misst den Strom im Kreis mit dem Strommessgerät und untersucht die Verteilung der aufgezeichneten Messwerte (Mittelwert/RMS). Dann wiederholt man diese Methode für andere eingestellte Spannungswerte und damit Stromwerte im Kreis, um zu untersuchen, ob die Messunsicherheiten über den



eingestellten Messbereich konstant sind oder variieren.

Die systematischen Messunsicherheiten sind vom Hersteller pauschal für alle CASSY-SENSOR Geräte wie folgt angegeben:

$$\sigma_{I,sys} = 0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{Bereichsendwert}$$

Um diese pauschal angegebenen systematischen Unsicherheiten zu reduzieren, kann das Messgerät kalibriert werden. Dazu wird der Funktionsgenerator POWER-CASSY weiterhin als Spannungsquelle benutzt und der erzeugte Strom mit dem Strommessgerät des SENSOR-CASSY gemessen und auf die Messung des internen Strommessgerätes im POWER-CASSY kalibriert. Dazu werden beide Geräte auf Effektivwert-Messung eingestellt.

**Achtung:** Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

Die **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY so wählen, wie unter Abschnitt 3.2.1 beschrieben.

Die Messreihe wertet man nun so aus, dass der mit dem SENSOR-CASSY gemessene Strom ( $I_{SC}$ ) gegen den mit dem POWER-CASSY gemessenen Strom ( $I_{PC}$ ) aufgetragen wird unter Berücksichtigung der Einzel-Messunsicherheiten auf der x- und y-Achse. Bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt, um in den folgenden Versuchen die Kalibrierung jeweils anwenden zu können. Die Unsicherheiten auf Achsenabschnitt und Steigung werden in den weiteren Versuchsteilen dann als systematische Unsicherheiten behandelt.

### 3.3 Hauptversuche zu Wechselstromschwingkreisen

#### Allgemeine Anmerkungen

Bei einem Serienschwingkreis führt eine angelegte Wechselspannung zu einem meist phasenverschobenen Strom, der durch alle Komponenten des Schwingkreises fließt, also in allen Widerständen den jeweils gleichen Momentanwert besitzt. Aus diesem Strom errechnet man mit den speziellen Widerständen die zugehörigen, wiederum phasenverschobenen Spannungsabfälle. Diese Spannungsabfälle können beträchtlich größer sein als die angelegte Spannung.

Beim Parallelschwingkreis liegt dagegen an allen Widerständen die gleiche Wechselspannung. Daher ergibt sich für jeden Zweig ein Strom, dessen Größe und Phase von der angelegten Spannung und dem speziellen Widerstand in diesem Zweig abhängt. Diese Ströme können beträchtlich größer sein als der zum Schwingkreis hinfließende Strom.

#### 3.3.1 Serienschwingkreis von L, R und C

Mit der Kirchhoffschen Maschenregel folgt, dass die angelegte Spannung gleich der Summe aller Spannungsabfälle ist:

$$U_{\sim}(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} + I_{\sim} \cdot R + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{U_{\sim}(t)}{L} = \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q$$

Dies ist die Differentialgleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung für

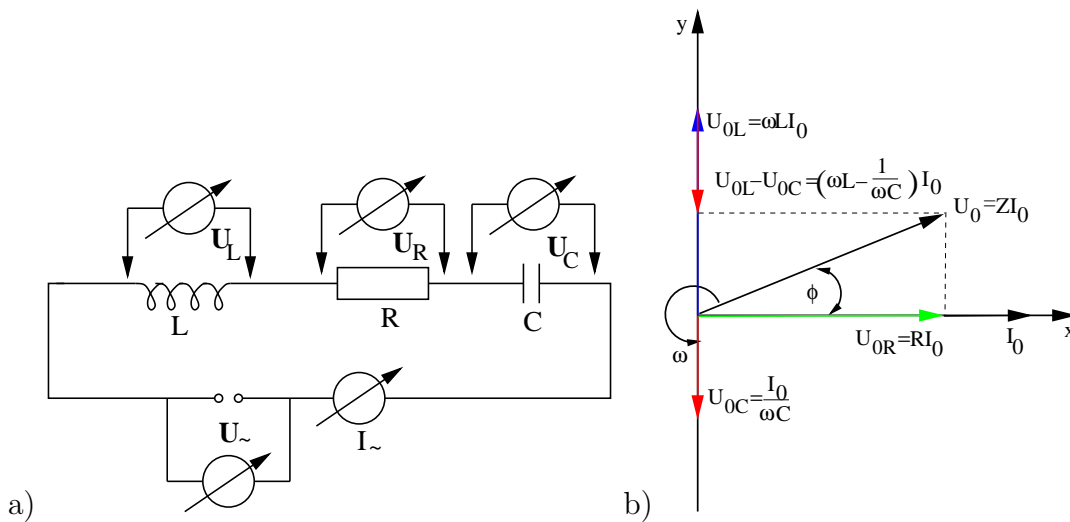


Abbildung 3.5: a) Schaltbild eines L, R und C Serienschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

die elektrische Ladung. Die Differentialgleichung für den Strom lautet dann:

$$\frac{d^2 I_{\sim}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I_{\sim} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Es wird nur die **partikuläre Lösung** diskutiert, die sich nach dem sogenannten Einschwingvorgang einstellt.

#### Lösungsansatz:

Für die angelegte Spannung und für den phasenverschobenen Strom sei

$$U_{\sim}(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad I_{\sim} = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Damit ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} + i\omega \frac{R}{L} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} + \frac{1}{LC} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega \frac{U_0}{L} e^{i\omega t}$$

Für den rein reellen und den rein imaginären Anteil ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot \cos \phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \sin \phi + \frac{1}{LC} I_0 \cdot \cos \phi = 0 \quad (3.4)$$

$$\omega^2 I_0 \cdot \sin \phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \cos \phi - \frac{1}{LC} I_0 \cdot \sin \phi = \omega \frac{U_0}{L} \quad (3.5)$$

Aus Gleichung 3.4 findet man sofort die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, ebenso wie aus der Addition der Spannungen im Zeigerdiagramm (Abbildung 3.5b):

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (3.6)$$

Für  $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$  ist  $0 < \phi < \pi/2 \rightarrow$  Phasennacheilung des Stromes ( $L$  überwiegt)

Für  $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$  ist  $-\pi/2 < \phi < 0 \rightarrow$  Phasenvoreilung des Stromes ( $C$  überwiegt)

Aus den Gleichungen 3.4 und 3.5 ergibt sich für die Stromamplitude  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad (3.7)$$

mit dem **Scheinwiderstand (Impedanz)**:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (3.8)$$

Die Impedanz wird minimal und der Strom maximal bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Thomsonsche Gleichung} \quad (3.9)$$

Bei dieser Frequenz ist  $Z(f_0) = Z_{\min} = R$  und die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung  $\phi = 0$  bei verlustfreien Widerständen, d.h. der Kreis verhält

sich bei der Resonanzfrequenz wie ein rein Ohmscher Widerstand und die von der Spannungsquelle in den Schwingkreis gesteckte Leistung wird ebenfalls maximal und ist eine reine Wirkleistung.

Die Abbildung 3.6 zeigt Strom und Phasenverschiebung als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen. An Gleichung 3.7 erkennt man unmittelbar, dass der Strom für  $\omega \rightarrow 0$  gegen null geht, der Kondensator sperrt für eine Gleichspannung den Stromfluss. Durch Aufsuchen des Strommaximums als Funktion der Frequenz findet man, dass **das Maximum unabhängig von der Dämpfung immer an der gleichen Stelle bei  $f_0$  liegt.**

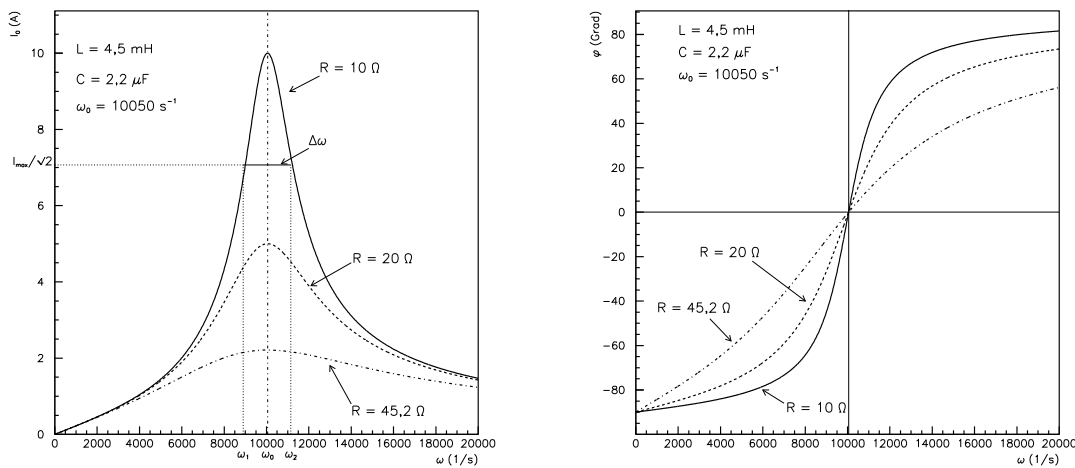


Abbildung 3.6: Resonanzkurve und Phasenverschiebung bei  $R$ ,  $L$  und  $C$ -Serienkreis.

### Dämpfung und Güte bei Serienschaltung

Dämpfungen entstehen primär durch den Ohmschen Widerstand des Stromkreises. Bei fehlendem Ohmschen Widerstand spielen Verluste in der Spule (durch den Ohmschen Widerstand der Spule) und in Kondensatoren (durch die Leitfähigkeit des Dielektrikums, Umpolarisation, Wärmeentwicklung) eine Rolle. Wegen der Serienschaltung enthält  $R$  hier alle Ohmschen Widerstände des Kreises, insbesondere also auch den Ohmschen Spulenwiderstand.

Wie bei mechanischen Schwingungen findet man die Definition für die Dämpfung aus der Differentialgleichung 3.3:

$$d = \frac{R}{2L}$$

Die Dämpfung beeinflusst unmittelbar die Breite der Resonanzkurve. Zwischen den Frequenzen der Resonanzkurve, bei denen der Strom auf  $I_{max}/\sqrt{2}$  gefallen ist, gilt für die Breite:

$$\Delta\omega = 2d = \frac{R}{L}$$

Die relative Breite der Resonanzkurve nennt man häufig **Verlustfaktor des Schwingkreises**.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2d}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Je geringer die Dämpfung ist, umso größer ist die **Güte des Serienschwingkreises**:

$$Q_S = \frac{\omega_0}{2d} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Spannungsresonanz** (siehe auch Anhang 3.5)

In unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz können die Spannungen, die an Induktivität und Kapazität abfallen, die angelegte Spannung um ein Vielfaches überschreiten. Aus obigen Relationen folgt für die Spannungsüberhöhung im Resonanzfall:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U_{\sim}(\omega_0)} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.10)$$

Dies entspricht der Güte des Schwingkreises!

Spannungsüberhöhungen sind in der Wechselstromtechnik sehr gefürchtet, da beim Durchschlag von Isolatoren und Kabeln Leiterteile beschädigt werden können!

**Messung der Güte:**

Die Güte des Schwingkreises kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

- 1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.
- 2.) Bestimmung aus der Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz: Bei der Resonanzfrequenz ist  $\phi = 0$  und  $\Delta f$  liegt zwischen den Winkeln  $\phi = \pm 45^\circ$ .
- 3.) Aus der Spannungsüberhöhung an der Resonanzstelle (siehe Gleichung 3.10).
- 4.) Durch Berechnung aus den Werten für  $R$ ,  $C$  und  $L$ . Falls der Ohmsche Spulenwiderstand nicht vernachlässigt werden darf, muss er zum eventuell vorhandenen separaten Ohmschen Widerstand hinzuaddiert werden.

## Messungen mit Cassy-Systemen

### Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B.  $2,2 \mu\text{F}$ ) und ein Ohmscher Widerstand (z.B.  $1 \Omega$ ) werden gemäß Abbildung 3.5 auf der Rastersteckplatte in Serie geschaltet und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Spannungsabfall an der Spule wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang A) und der Spannungsabfall am Kondensator mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

Zusätzlich soll eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt werden, bei der der Spannungsabfall im gesamten Kreis gegen den Abfall am Ohmschen Widerstand aufgetragen wird.

### Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie die Spannungsabfälle an der Spule und dem Kondensator, die anliegende Spannung und den im Kreis fließenden Strom als Effektivwerte!

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu  $\pm 10 \text{ V}$  Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahn-verlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung  $V_p$ , Gleichspannungsoffset  $V=$  und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B.  $3 \text{ V}$  ein. Messen Sie die Spannungsabfälle am Kondensator und an der Spule, sowie den Strom im Kreis (Abb. 3.5).

**Achtung:** Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf  $100 \text{ ms}$  und die Anzahl auf  $0$  gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter / Formel / FFT** die Frequenz  $f_1$  als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein:  $f_1 = f_0 + (n - 1) * 20$  mit  $f_0 = \text{Startfrequenz}$ .

Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz  $f_0$  um  $20 \text{ Hz}$  bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B.  $1000 \text{ Hz}$  das vorher definierte Symbol  $f_1$  eingegeben wird.

Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis z.B.  $5 \text{ kHz}$  begrenzt, aber frühestens nach  $2 \text{ s}$  nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert

aufnimmt:

$$f_1 < 5000 \text{ and } \Delta t > 2$$

Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann  $f_1$  eingegeben werden.

Führen Sie verschiedene Messreihen mit unterschiedlichen Ohmschen Widerständen  $R$  durch, und bestimmen Sie die Güte ihres Kreises. Bei jeder Messung soll die Phasenverschiebung zwischen abfallender Gesamtspannung im Kreis und der über dem Ohmschen Widerstand abfallenden Spannung beobachtet werden. Zeichnen sie gleichzeitig den Verlauf des Stromes gegen die Frequenz auf, und verifizieren Sie, dass beim Erreichen des Strommaximums die Phasenverschiebung verschwindet. Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und der Ablesefehler abgeschätzt werden. Zeichnen sie ebenfalls die gemessenen Spannungsverläufe an Spule und Kondensator auf und bestimmen sie die Güte über die Spannungsüberhöhung an der Resonanzstelle. Die Spannung dort kann mit dem Auge bzw. mit Hilfslinien bestimmt und der Ablesefehler abgeschätzt werden. Beachten sie, dass unter Umständen vorher der gemessene Spannungsabfall an der Spule um den Gleichspannungsanteil aufgrund des Innenwiderstandes der Spule  $R_L$  korrigiert werden muss. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

## Messungen mit Oszilloskop

### Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B.  $2,2 \mu\text{F}$ ) und ein Ohmscher Widerstand (z.B.  $1 \Omega$ ) werden gemäß Abbildung 3.5 auf der Rastersteckplatte in Serie geschaltet und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des Funktionsgenerators FUNCTION GENERATOR FG100 (**Output**). Es soll eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt werden, bei der der Spannungsabfall im gesamten Kreis gegen den Abfall am Ohmschen Widerstand bestimmt wird. Der Aufbau ist in Abbildung 3.7b) gezeigt.

### Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie die Spannungsabfälle am Ohmschen Widerstand (äquivalent zur Strommessung) und die anliegende Spannung.

Die Amplitude der anliegenden Wechselspannung des Funktionsgenerators FG100 ist variabel einstellbar mit dem Drehpotentiometer (**Amplitude**, s. Abb. 3.7a und c)). Stellen sie die Amplitude so ein, dass der Strom im Schwingkreis das Stromlimit des Funktionsgenerators von 2 A nicht überschreitet, insbesondere im Resonanzfall! Messen Sie dazu die anliegende Spannung mittels des Oszilloskopes

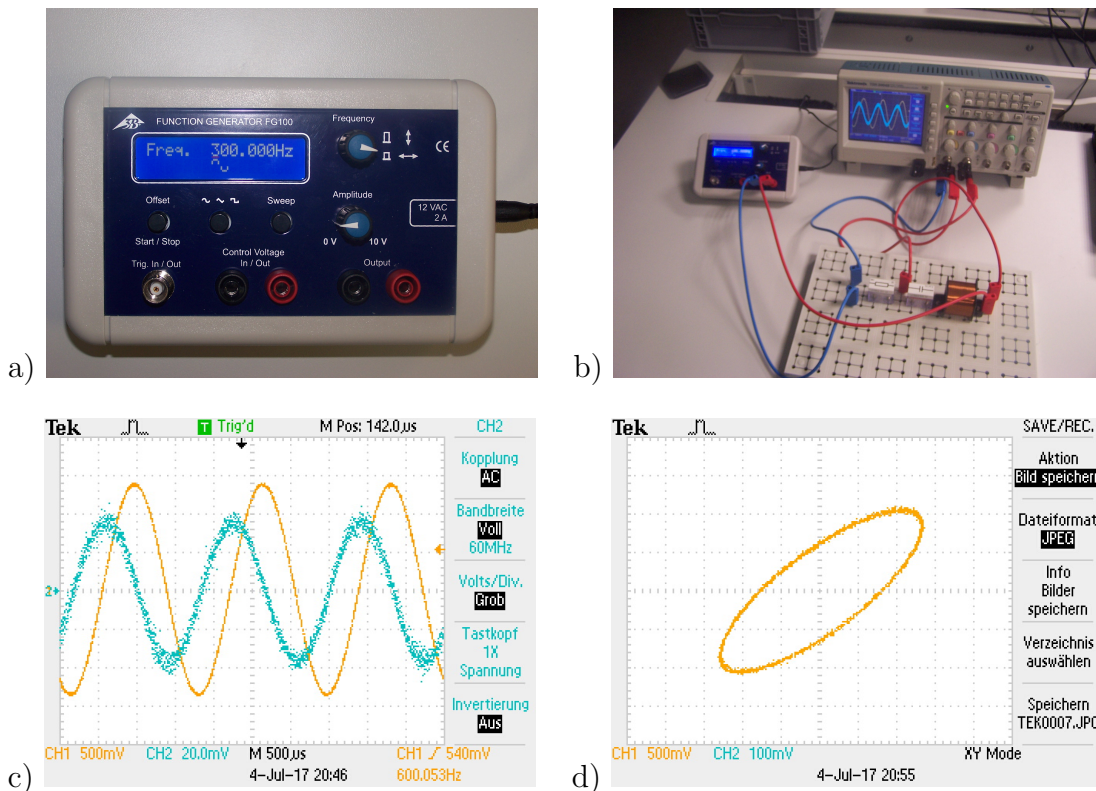


Abbildung 3.7: a) Funktionsgenerator FG100, b) Versuchsaufbau Serienschwingkreis mit Funktionsgenerator und Oszilloskop, c) Gesamtspannung als Triggersignal und Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand als Messsignal. d) Lissajous-Figur durch X-Y-Darstellung (unter DISPLAY) der beiden gemessenen Signale.

**CURSOR (AMPLITUDE).** Die Messungenauigkeit der Messung ergibt sich aus der Schrittweite des Cursors und der Breite des Signals. Durch die verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten des Oszilloskopes lässt sich ein ausreichend genaues Ergebnis bestimmen.

Die Frequenz der Wechselspannung des FG100 wird mit dem Drehpotentiometer (**Frequency**) eingestellt und kann mit dem **CURSOR (Zeit)** des Oszilloskopes gemessen werden.

Die Gesamtspannung sollte das Eingangssignal am Oszilloskop sein, auf das getriggert wird, da sich die Amplitude dieser Spannung nicht ändern wird, sondern nur die Frequenz während der Versuchsdurchführung. Der Strom im Kreis wird als Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand auf einem anderen Kanal des Oszilloskopes gemessen. **Wichtig:** Die Masse (Erdverbindung) zwischen Schaltung und Oszilloskop muss so gelegt werden, dass sie für beide zu messenden Spannungsabfälle gleich ist!

#### Bestimmung der Güte

Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz ( $f_0$ ) wird die sogenannte Lissajous-Figur benutzt. Diese entsteht, wenn man den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand gegen die anliegende Gesamtspannung aufträgt. Je nach Phasenverschie-



bung zwischen den beiden Spannungen ergibt sich das Bild einer Ellipse (3.7d). Um diese Darstellung zu erlangen, muss beim Oszilloskop unter **DISPLAY / Format** die X-Y-Darstellung ausgewählt werden.

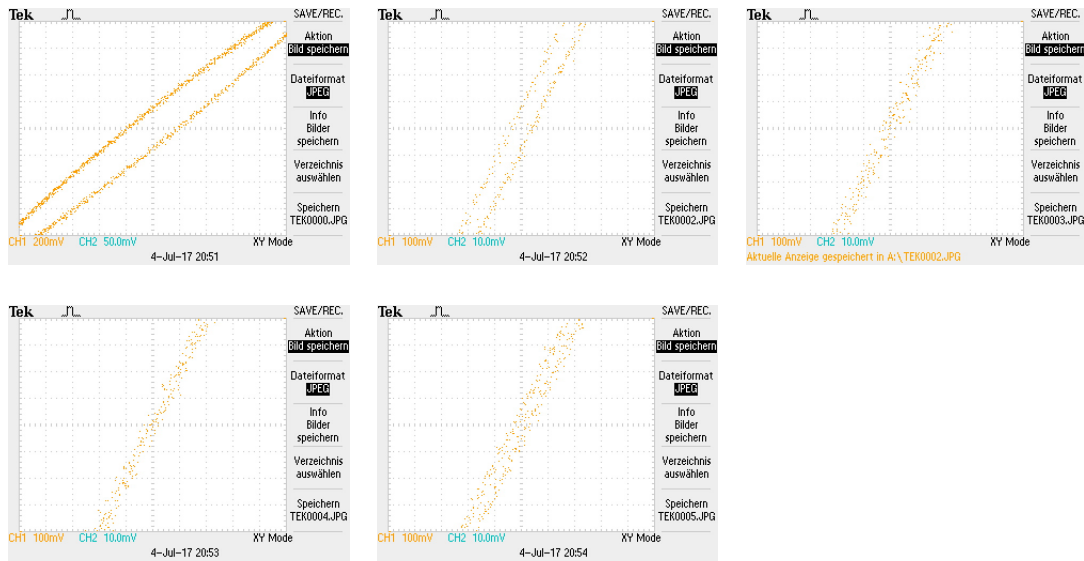


Abbildung 3.8: Änderung der Lissajous-Figuren durch Frequenzänderungen. Bei der Resonanzfrequenz ergibt sich das Bild einer Geraden (Bild unten links).

Durch das Einstellen einer sehr hohen Auflösung lässt sich die Resonanzfrequenz auf unter 1 Hz genau bestimmen (s. Abb. 3.8). Die Unsicherheit auf die Resonanzfrequenz sollte empirisch aus Mehrfachmessungen ermittelt werden bzw. durch sinnvolle Abschätzung des Ablesefehlers.

Zur Bestimmung der Breite der Stromkurve wird wieder die X-t-Darstellung verwendet (**DISPLAY/X-t**). Mit dem Cursor wird für die Resonanzfrequenz die maximale Spannung  $U_{max}$  am Widerstand abgelesen (s. Abb. 3.9a, Achtung: Symmetrie beachten, messen Sie daher das Maximum und das Minimum!).

Die Breite der Stromkurve ergibt sich nun aus den beiden Punkten, an denen der Spannungsabfall auf  $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$  gesunken ist. Dazu wird der Cursor auf diese Spannung eingestellt und die Frequenz so verändert, dass sich die Kurvenmaxima an den Cursor anlegen (s. Abb. 3.9b und c). Die Unsicherheit auf die beiden gefundenen Frequenzen bestimmt man durch Mehrfachmessungen bzw. schätzt den Ablesefehler sinnvoll ab. Überzeugen sie sich davon, dass bei den gefundenen beiden Frequenzen die Phasenverschiebung zwischen Strom und Gesamtspannung  $\pm 45^\circ$  beträgt.

Überlegen sie sich, wie sie die Spannungsüberhöhung an der Spule und am Kondensator zur Bestimmung der Güte mit Hilfe des Oszilloskopes verwenden können.

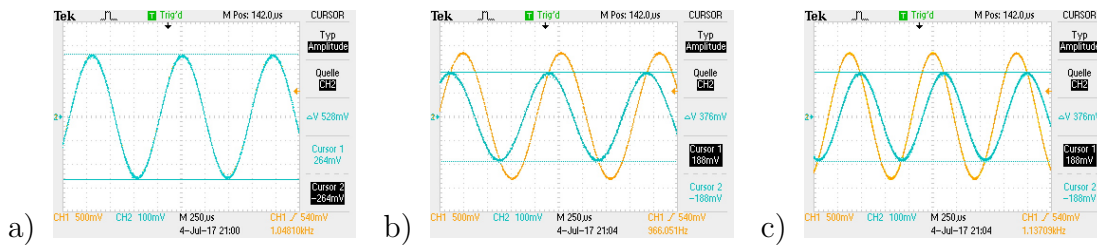


Abbildung 3.9: a) Messung des maximalen Spannungsabfalls ( $U_{max}$ ) am Widerstand bei der Resonanzfrequenz. b) und c) Bestimmung der beiden Frequenzen bei den Punkten  $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ .

**Hinweise zur Nutzung des Oszilloskops** Beim Messen mit dem Oszilloskop sollten verschiedene Dinge berücksichtigt werden um eine möglichst hohe Messgenauigkeit zu erhalten.

- Die Schrittweite des Cursors passt sich mit der Auflösung des jeweiligen Kanals an. Hier sollte abgewogen werden, welche Auflösung für die jeweilige Messung ausreichend im Verhältnis der Breite der Kurve und der Unsicherheit des Wertes liegt.
- Wenn ein Spannungswert mit dem Cursor abgelesen werden soll, ist es ratsam, eine sehr hohe Spannungsauflösung und Zeitauflösung zu wählen und mittels des Positionsreglers das zu messende Maximum in die Mitte des Schirmes zu verschieben. Dort ist die Kurve meist so breit, dass ein Mittelwert und Fehler anhand der Breite der Verteilung bestimmt werden können.
- Das Betrachten von Lissajous-Figuren mit extrem hoher Auflösung ist mit dem Auge nicht einfach, da die Anzahl der Punkte gering ist und man keine Struktur erkennen kann. Hier sollte unter dem Punkt **DISPLAY** / **Nachleuchten** eine Zeit von bis zu ca. 2 s eingestellt werden. Eine zu kurze Nachleuchtzeit erschwert das Sehen der Punkte, wobei ein zu langes Nachleuchten eine feine Einstellung und Erkennung des Resonanzfalles erschwert.
- Screenshots können am Oszilloskop mit Hilfe der **PRINT**-Taste auf einen USB-Stick gespeichert werden. Dabei können unter anderem die Datei und Bildformate eingestellt werden, sowie was gespeichert werden soll. Der Speichervorgang kann einige Zeit dauern!

### 3.3.2 Parallelschwingkreis von L, R und C

Bei der Parallelschaltung einer Spule, eines Kondensators und eines Ohmschen Widerstandes (Abbildung 3.10a) liegt an allen Widerständen die gleiche Spannung  $U_{\sim} = U_0 \cdot e^{i\omega t}$  an.

Nach der Knotenregel teilt sich der von der angelegten Spannung ausgehende Gesamtstrom  $I$  in die Anteile  $I_R$  durch den Ohmschen Widerstand  $R$ ,  $I_C$  durch die Kapazität  $C$  und  $I_L$  durch die Induktivität  $L$  auf:

$$I = I_R + I_C + I_L \quad (3.11)$$

Die Addition muß unter Beachtung der Phasenverschiebungen der einzelnen Ströme erfolgen. Wegen Gleichung 3.11 gilt:

$$\frac{U_{\sim}}{Z} = \frac{U_{\sim}}{R} + i\omega C \cdot U_{\sim} + \frac{U_{\sim}}{i\omega L} \rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Bei Parallelschaltung addieren sich also die inversen Widerstände zur inversen Impedanz. Statt der Widerstände benutzt man daher oft auch direkt die sogenannten **Leitwerte**, die inversen Widerstände: Der Wirkanteil heißt **Konduktanz**, der Blindanteil **Suszeptanz** und der Scheinanteil **Admittanz**.

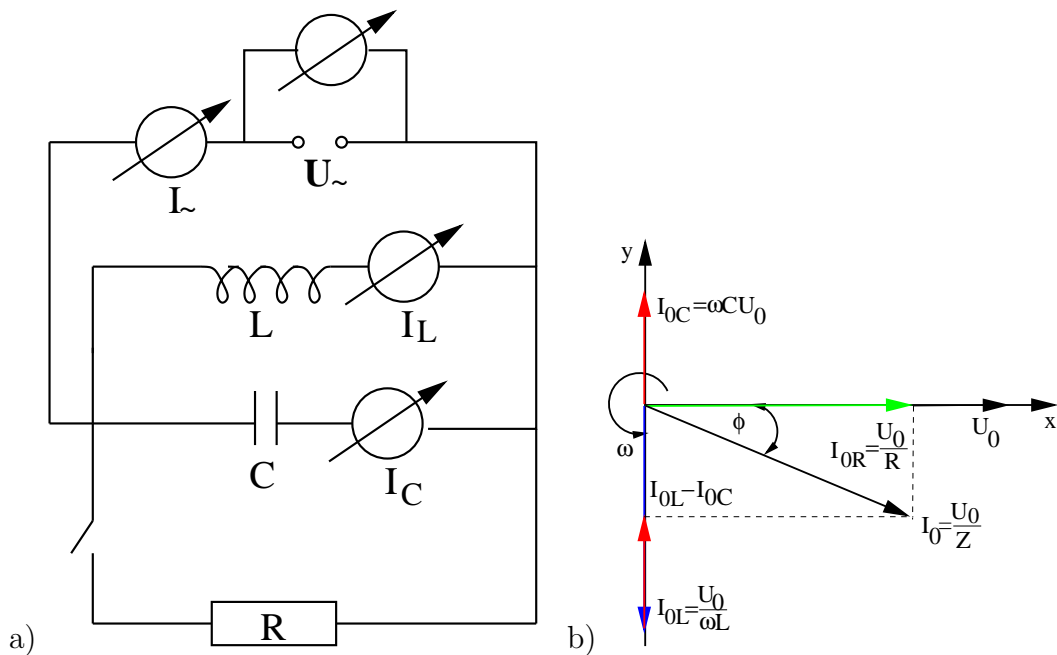


Abbildung 3.10: a) Schaltbild eines L,R und C Parallelschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

In komplexer Schreibweise gilt:

Widerstände	Leitwerte
$X_R = R$	$Y_R = \frac{1}{R}$
$X_L = R_L + i\omega L$	$Y_L = \frac{R_L - i\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}$
$X_C = \frac{1}{i\omega C}$	$Y_C = i\omega C$

In Gleichung 3.12 wurde berücksichtigt, dass Spulen auch einen Ohmschen Anteil  $R_L$  haben.

Der gesamte komplexe Leitwert ist:

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right) \quad (3.13)$$

und der Betrag des Gesamtleitwertes beträgt:

$$Y = \sqrt{\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}\right]^2}$$

**Gesamtimpedanz** Die Impedanz für einen Parallelschwingkreis berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \frac{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L}{X_R X_L X_C} \rightarrow \\ Z &= \frac{X_R X_L X_C}{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L} \end{aligned}$$

Nach einiger Rechnerei findet man für die (komplexe) Impedanz:

$$Z = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{C}\right)^2 + \frac{RR_L \cdot (R+R_L)}{(\omega C)^2} - i \left[ \frac{(RR_L)^2}{\omega C} + R^2 \frac{L}{C} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]}{\left(\frac{L}{C} + RR_L\right)^2 + \left(R \cdot \omega L - \frac{R+R_L}{\omega C}\right)^2}$$

**Resonanzfrequenz** (siehe auch Anhang 3.5) Aus dem komplexen Leitwert der Gleichung 3.13 lässt sich die Resonanzfrequenz berechnen, indem der Imaginärteil zu null gesetzt wird:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{L} \cdot R_L^2}{LC}}$$

Man erkennt unmittelbar, dass sich für  $R_L = 0$  die schon vom Serienkreis her bekannte Resonanzfrequenz ergibt:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.14)$$

Für  $\omega_0$  wird der Leitwert minimal und damit die Impedanz maximal, im Gegensatz zum Serienschwingkreis. Der Strom kann praktisch nur noch durch den Ohmschen Widerstand fließen. Der LC-Schwingkreis bedeutet für den Strom einen unendlich großen Widerstand. Wegen  $R_L \neq 0$  sperrt das LC-Glied nicht vollständig.

Der gesamte zum RLC-Schwingkreis hinfließende Strom beträgt:

$$I = Y \cdot U_{\sim} = \left( \left[ \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] + i \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] \right) \cdot U_0 \cos \omega t$$

Damit folgt:

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)} \quad \text{mit} \quad I_0 = \sqrt{\left[ \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2} \cdot U_0$$

und

$$\tan \phi_I = - \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}}{\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}} \quad (3.15)$$

**Stromresonanz** Ähnlich wie die Spannungsresonanz bei Serienschwingkreisen kann beim Parallelschwingkreis eine Stromresonanz auftreten, die insbesondere bei hoher Frequenz gefährlich werden kann. Betrachtet sei der einfachere Fall, bei dem nur eine Spule und ein Kondensator parallel geschaltet sind. Dann gilt für den Strom durch die Spule:

$$I_L = \frac{U_0}{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{i(\omega t - \phi_L)}$$

Die Ströme durch Kondensator und Spule haben im Grenzfall  $R_L \rightarrow 0$  eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zueinander. Die Summe beider Ströme ergibt den resultierenden Strom:

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)}$$

mit der Phasenverschiebung  $\phi_I$  aus Gleichung 3.15. Die Impedanz berechnet sich zu:

$$Z = \frac{1}{\omega C} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 + (\omega L)^2}{R_L^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (3.16)$$

Für die Resonanzfrequenz von Gleichung 3.14 werden induktiver und kapazitiver Widerstand gleich groß und damit heben sich die beiden Ströme auf. Dann wird die Impedanz (Gleichung 3.16) des Schwingkreises (praktisch) unendlich groß. Der Strom in den Zuleitungen wird null, während im Schwingkreis ein beträchtlicher Strom pulsieren kann. Dies ist der Fall der Stromresonanz. In diesem Fall stellt der

Schwingkreis also einen unendlich großen Widerstand dar und sperrt den Stromfluss in den Zuleitungen vollständig.

Stromresonanz erreicht man, wenn  $R_L$  gegen  $\omega L$  vernachlässigt werden kann, also für hohe Frequenzen. Dann gilt mit Gleichung 3.16 und vernachlässigbarem  $R_L$  bei Resonanz ( $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$ ):

$$Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{L}{C R_L}$$

Damit folgt für die Stromüberhöhung:

$$\frac{(I_L)_0}{I_0} = \frac{(I_C)_0}{I_0} = \frac{U_0}{\omega_0 L} \cdot \frac{Z_{res}}{U_0} = \omega_0 C \cdot Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C R_L} = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.17)$$

Die Stromüberhöhung hat ungefähr die gleiche Größe wie die Spannungsüberhöhung nach Gleichung 3.10. Die Gleichung 3.17 gibt die Güte für einen LC-Parallelschwingkreis an.

**Güte bei Parallelschaltung**  $R$ ,  $L$  und  $C$  seien parallelgeschaltet und die Verluste in Spule und Kondensator seien im Ohmschen Widerstand berücksichtigt (bzw. vernachlässigbar!). Wie beim Serienschwingkreis ist die Güte definiert durch die Form der Resonanzkurve. Bei konstanter angelegter Spannung wird bei der Resonanzfrequenz der zum Schwingkreis hinfließende Strom minimal. Daher findet man die Breite der Resonanzkurve zwischen den Frequenzen, bei denen der Strom die Werte  $\sqrt{2} \cdot I_{min}$  annimmt. Man kann die Güte auch über die Stromüberhöhung definieren. Eine genaue Rechnung liefert für die Güte des Parallelschwingkreises:

$$Q_P = \frac{R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}}{1 + R \cdot R_L \cdot \frac{C}{L}} \quad (3.18)$$

Für kleine Werte von  $R$  gilt:

$$Q_P = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (3.19)$$

und für große Werte von  $R$ :

$$Q_P = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.20)$$

**Messung der Güte:**

- 1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.
- 2.) Aus der Stromüberhöhung an der Resonanzstelle nach Gleichung 3.17.
- 3.) Durch Berechnung aus den Komponenten des Schwingkreises.

## Messungen mit Cassy-Systemen

### Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B.  $2,2 \mu\text{F}$ ) und ein Ohmscher Widerstand (z.B.  $100 \Omega$ ) werden gemäß Abbildung 3.10 auf der Rastersteckplatte parallel geschaltet und an Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Strom durch die Spule oder durch den Kondensator wird mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

### Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie den Gesamtstrom  $I$  im Kreis und die in den Einzelkreisen fließenden Ströme als Effektivwerte!

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu  $\pm 10 \text{ V}$  Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung  $V_p$ , Gleichspannungsoffset  $V=$  und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B.  $3 \text{ V}$  ein.

**Achtung:** Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf  $100 \text{ ms}$  und die Anzahl auf  $0$  gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter / Formel / FFT** die Frequenz  $f_1$  als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein:  $f_1 = f_0 + (n - 1) * 20$  mit  $f_0$  =Startfrequenz.

Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz  $f_0$  um  $20 \text{ Hz}$  bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B.  $1000 \text{ Hz}$  das vorher definierte Symbol  $f_1$  eingegeben wird.

Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis  $5 \text{ kHz}$  begrenzt, aber frühestens nach  $2 \text{ s}$  nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_1 < 5000 \text{ and } \Delta t > 2$$

Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann  $f_1$  eingegeben werden.

Messungen der Impedanz  $Z$  (in CASSY als Formel definieren!), des Gesamtstromes  $I$ , der Phasenverschiebung  $\phi$  und der Stromüberhöhung als Funktion der Frequenz sind in den Abbildungen 3.11a-c) gezeigt. Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve und die Stromüberhöhungen können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und die Ablesfehler abgeschätzt werden. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

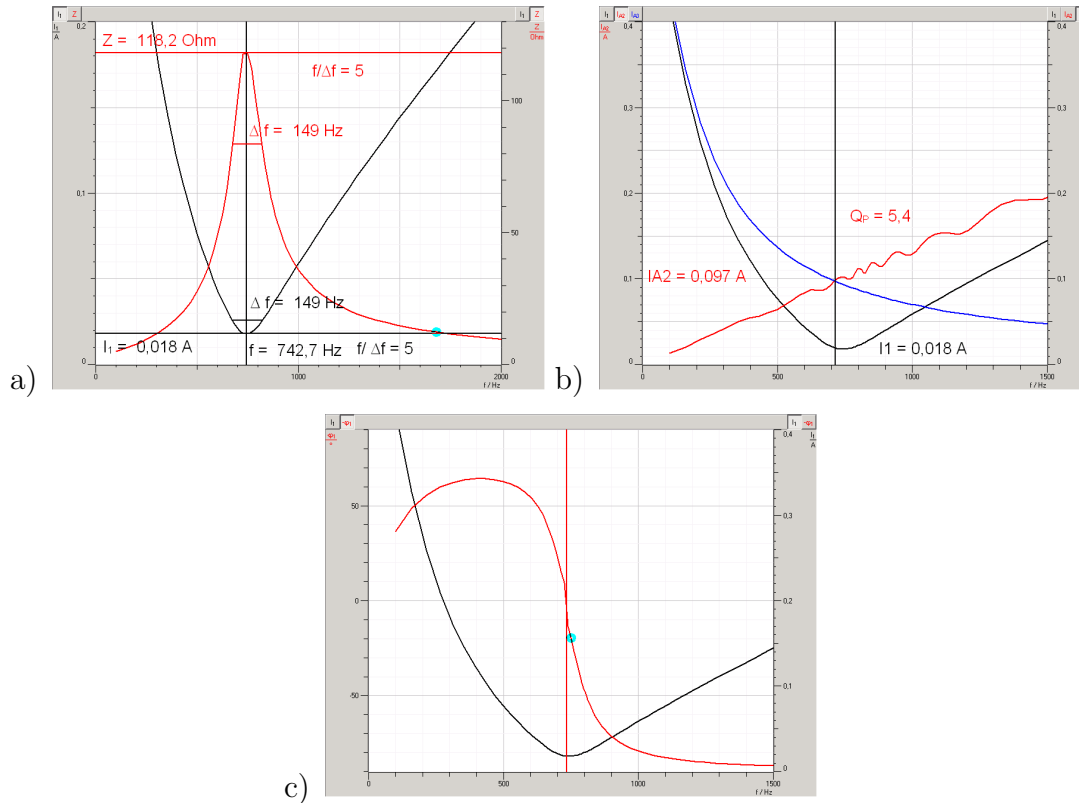


Abbildung 3.11: Messung der a) Resonanzkurven  $I(f)$  und  $Z(f)$ , b) der Phasenverschiebung und c) der Stromüberhöhungen eines Parallelschwingkreises mit einer Spule mit 500 Windungen und einem Kondensator mit  $4,7 \mu\text{F}$ .



## 3.4 Eigenständige Versuche

Nach Absprache mit den Betreuern des Versuches werden Versuche zur Thematik Hochpass- bzw. Tiefpassfilter durchgeführt.

Ziel soll sein, sich zur oben genannten Thematik einen Versuchsaufbau aus den zur Verfügung stehenden Bauteilen, eine Versuchsdurchführung und Auswertung eigenständig zu erarbeiten und die erzielten Ergebnisse mit einem theoretischen Modell zu vergleichen.

Im folgenden einige Hinweise zu hoch- und Tiefpassfiltern:

### Übertragungsfunktion eines Hoch- und Tiefpass 1. Ordnung

Ein einfacher Hoch- bzw. Tiefpass besteht aus einer Serienschaltung eines Widerstandes mit einem Kondensator (Schaltskizze siehe 3.12) oder einer Spule.

Eine mögliche Aufgabe könnte sein, eine Sinus-Wechselspannung an den Schaltkreis anzulegen und die Ausgangsspannung an Hoch- und/oder Tiefpass in Abhängigkeit der Frequenz der eingehenden Spannung zu messen und das Modell zu überprüfen. Die Übertragungsfunktion der Beträge der Spannungen lautet dann für den Hochpass:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\omega \cdot C \cdot R})^2 + 1}}$$

und für den Tiefpass:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2}}$$

mit der sogenannten Grenzfrequenz  $\omega = \frac{1}{R \cdot C}$ .

### Signalform eines Hoch- und Tiefpass

Wenn an einen Hoch- oder Tiefpass eine Rechteckspannung angelegt wird, deren Frequenz kleiner ist als die Grenzfrequenz des verwendeten RC-Gliedes, kann man periodisch die Auflade- oder Entladekurve eines Kondensators beobachten. Dadurch entsteht eine typische Signalform der Ausgangsspannung (siehe Abbildung 3.12b). Für den Hochpass gilt:

$$U_{out} = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dU_{in}}{dt}$$

Die Ausgangsspannung ist proportional zur zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung, weswegen man auch von einem Differenzierglied spricht.

Für den Tiefpass gilt:

$$U_{out} = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{RC} \int (U_{in} - U_{out}) dt$$

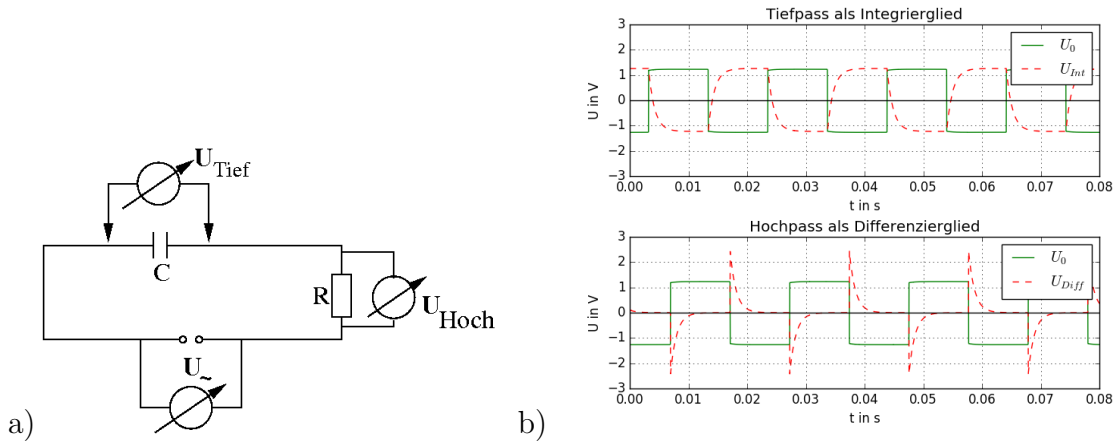


Abbildung 3.12: a) Schaltung eines Hoch- und/oder Tiefpasses. b) Antwortverhalten eines Hoch- bzw. Tiefpasses auf eine angelegte Rechteckspannung.

Die Ausgangsspannung ist proportional zum Integral über die Differenz von Ein- und Ausgangsspannung. Deswegen bezeichnet man den Tiefpass auch als Integrierglied.

Im Fourierspektrum der anliegenden und abfallenden Spannungen sollte dann die Unterdrückung von tiefen Frequenzen beim Hochpass bzw. hohen Frequenzen beim Tiefpass gut erkennbar sein. Ähnliche Überlegungen können auch für andere Arten und Formen von angelegten Wechselspannungen angestellt werden.

### Aufbauten und Messungen

Für die Aufbauten auf den Rastersteckplatten stehen die im Praktikum vorhandenen Widerstände, Kondensatoren und/oder Spulen zur Verfügung. Die Messungen können entweder mit den CASSY-Systemen durchgeführt werden oder mit dem Funktionsgenerator FG100 und den Oszilloskopen.

## 3.5 Anhang

### Resonanzfrequenzen des Serienschwingkreises

Die Resonanzkreisfrequenzen für maximalen Strom, minimale Impedanz und die Kreisfrequenz bei der Phasenverschiebung  $\phi = 0$  stimmen alle überein und betragen unabhängig von den Ohmschen Widerständen des Serienschwingkreises (siehe auch Gleichung 3.9)

$$\omega_{0S} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Viel komplizierter sind die Berechnungen der Frequenzen der maximalen Spannungen, die an Kondensator und Spule abfallen. Beide Kreisfrequenzen sind gegenüber  $\omega_0$  verschoben. Und zwar gilt immer  $\omega_{0C} < \omega_0$  und  $\omega_{0L} > \omega_0$ .

Die Kreisfrequenz für das Maximum der Kondensatorspannung beträgt:

$$\omega_{0C} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{(R + R_L)^2}{2 \cdot L^2}}$$

Bei der Spule ist die Angabe einer geschlossenen Formel für  $\omega_{0L}$  wegen des Ohmschen Widerstandes der Spule ( $R_L$ ) und des äußeren Ohmschen Widerstandes ( $R$ ) sehr umständlich. Falls jedoch  $R = 0$  angenommen werden kann, gilt annähernd:

$$\omega_{0L}(R \rightarrow 0) \approx \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} + \frac{R_L^2}{2 \cdot L^2}}$$

Wenn der Ohmsche Widerstand der Spule größer gemacht wird, wird der maximale Spannungsabfall an der Spule größer als der am Kondensator.

Wenn  $R_L$  dagegen sehr klein gemacht werden kann (dicker Draht oder Supraleitung), führt ein äußerer Ohmscher Widerstand  $R$  zwar zu einer Verschiebung der Resonanzkreisfrequenz zu

$$\omega_{0L}(R_L \rightarrow 0) \approx \sqrt{\frac{1}{L \cdot C - \frac{(RC)^2}{2}}},$$

die maximalen Spannungswerte  $U_{0L}$  und  $U_{0C}$  sind aber gleich groß.

### Resonanzfrequenz des Parallelschwingkreises

Die angegebene Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{0P}$  (Gleichung 3.14) für das Minimum des Gesamtstroms ist unter Umständen eine grobe Näherung. Das erkennt man unmittelbar an der Funktion für den Gesamtleitwert. Um das Minimum dieser Funktion zu finden genügt es nicht, einfach den 2. Term ("Imaginärteil") Null zu setzen, sondern man muss den ganzen Ausdruck unter der Wurzel berücksichtigen; die Kreisfrequenz kommt nämlich auch im 1. Term unter der Wurzel vor.

Die Suche nach dem exakten Minimum des Leitwertes  $Y$  führt jedoch schnell auf sehr unübersichtliche Ausdrücke, die Berechnung der zugehörigen Frequenz ist nicht trivial!

Eine einfachere Methode, eine oft gute Näherung der gesuchten Frequenz zu finden besteht darin, die Ströme  $I_L$  und  $I_C$  gleich zu setzen. Dies trifft in unmittelbarer Nähe des Minimums für den Gesamtstrom zu. Wenn man im C-Zweig keinen Ohmschen Widerstand hat, führt der Ohmsche Widerstand der Spule  $R_L$  immer dazu, dass die so berechnete Frequenz etwas unterhalb der wirklichen Resonanzfrequenz liegt. Setzt man  $I_L = I_C$ , so gilt:

$$\frac{1}{R_L^2 + (\omega L)^2} = (\omega C)^2$$

$$\omega^2 \cdot (C \cdot R_L)^2 + \omega^4 \cdot (C \cdot L)^2 - 1 = 0.$$

Daraus folgt:

$$\omega_{1,2}^2 = -\frac{R_L^2}{2L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_L^2}{2L^2}\right)^2 + \frac{1}{(LC)^2}}$$

Da die gesuchte Kreisfrequenz reell sein muss, gilt für  $I_L = I_C$  :

$$\omega_{0P} = \sqrt{-\frac{R_L^2}{2L^2} + \sqrt{\left(\frac{R_L^2}{2L^2}\right)^2 + \frac{1}{(LC)^2}}}$$

Abbildung. 3.13 zeigt den Gesamtstrom in einem Parallelschwingkreis mit 'künstlich' erhöhtem Innenwiderstand der Spule. Die Frequenzberechnung nach der 'groben' Methode liefert ungefähr 904 Hz, an der Stelle  $I_L = I_C$  beträgt die Frequenz 998 Hz und das echte Minimum des Stroms liegt bei ungefähr 1055 Hz. Die Frequenzunterschiede können also beträchtlich sein!

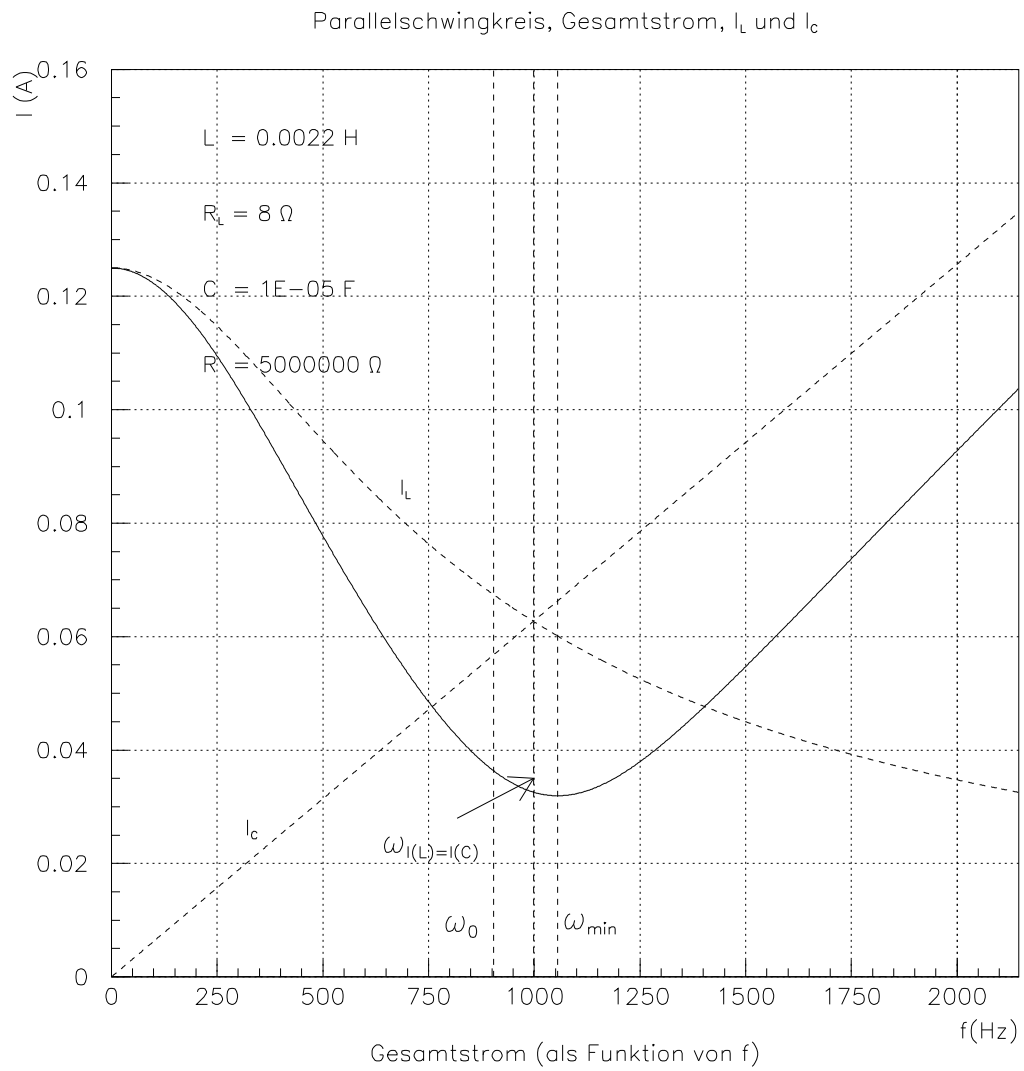


Abbildung 3.13: Gesamtstrom, verschiedene Berechnungen des Minimums