

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Fehlerrechnung</b>	<b>4</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>5</b>
4.1 Schallgeschwindigkeitsbestimmung . . . . .	5
4.2 Fehlstellen-Untersuchung . . . . .	5
4.3 Vermessung eines Augenmodells . . . . .	6
<b>5 Auswertung</b>	<b>6</b>
5.1 Schallgeschwindigkeitsbestimmung . . . . .	6
5.2 Fehlstellen-Untersuchung . . . . .	9
5.3 Vermessung eines Augenmodells . . . . .	11
<b>6 Diskussion</b>	<b>12</b>
<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Schallgeschwindigkeit in Acryl mit verschiedenen Ultraschallmessmethoden bestimmt. Zusätzlich wird ein Acrylblock auf Fehlstellen untersucht und es sollen die Abmessungen eines Augenmodells ermittelt werden.

## 2 Theorie

Schallwellen verhalten sich ähnlich wie elektromagnetische Wellen, zum Beispiel Licht. Sie schwingen entlang der Ausbreitungsrichtung und sind damit eine longitudinale Welle:

$$p(x, t) = p_0 + v_0 Z \cos(\omega t - kx). \quad (1)$$

Dabei ist  $Z$  die akustische Impedanz  $Z = c\rho$ , also abhängig von der Schallgeschwindigkeit  $c$  im Material und der Materialdichte  $\rho$ .  $p(x, t)$  ist die orts- und zeitabhängige Druckverteilung. Dies ist auch der Grund, warum die Schallgeschwindigkeit und damit die Impedanz im Gegensatz zu ihren elektromagnetischen Gegenstücken materialabhängig sind: Schall breitet sich aus, indem vorhandene Moleküle zum Schwingen gebracht werden. Die meisten weiteren Eigenschaften von Wellen sind aber auch hier erfüllt, wie zum Beispiel Reflexion und Brechung. Der Reflexionskoeffizient  $R$  ergibt sich dabei nach

$$R = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2, \quad (2)$$

wobei entsprechend auch  $T = 1 - R$  für den Transmissionskoeffizienten gilt. Sie geben jeweils an, welcher Anteil der Schallwellen an einer Grenzfläche reflektiert respektive transmittiert wird. Zusätzlich schwächt sich die Ausgangsintensität  $I_0$  der Schallwellen exponentiell ab:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{\alpha x}. \quad (3)$$

Dabei ist  $\alpha$  eine negative, materialabhängige Zahl. Bei Luft ist diese Abschwächung sehr stark, weswegen im Experiment ein Kontaktmittel verwendet wird.

In diesem Versuch wird Ultraschall verwendet, also Schallwellen mit einer Frequenz zwischen  $20 \cdot 10^3$  Hz und  $1 \cdot 10^9$  Hz. Eine Möglichkeit solche hohen Frequenzen zu erzeugen ist die Verwendung von piezoelektrischen Kristallen. Diese können, wenn sie in ein elektrisches Wechselfeld gebracht werden und eine ihrer polaren Achsen in Richtung des elektrischen Feldes zeigt, zu Schwingungen angeregt werden, wobei Ultraschall entsteht. Wenn die Anregungsfrequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt, kommt es zur Resonanz, und es werden sehr große Schwingungsamplituden erreicht. Als Empfänger von Ultraschall kann ebenfalls wieder ein piezoelektrischer Kristall genutzt werden, der durch Auffangen des Ultraschalls in Schwingung versetzt wird.

Es gibt zwei grundlegende Techniken, um mit Ultraschall Informationen über ein zu untersuchendes Objekt zu bekommen. Beim Durchschallungs-Verfahren befindet sich auf einer Seite der Probe ein Ultraschallsender, welcher Schallimpulse durch die Probe sendet. Auf der gegenüberliegenden Seite der Probe befindet sich ein Empfänger. Falls

sich innerhalb der Probe Fehlstellen befinden, so wird am Empfänger eine verminderte Intensität des Impulses registriert. Eine genaue Ortsbestimmung dieser Fehlstelle ist mit diesem Verfahren jedoch nicht möglich. Das zweite Verfahren ist das Impuls-Echo-Verfahren. Hierbei befinden sich Ultraschallsender und Empfänger auf einer Seite der Probe. An einer Grenzfläche wird der Schallimpuls reflektiert und dann vom Empfänger registriert. Die Laufzeit  $t$  des Echos kann bei Fehlstellen dazu benutzt werden, die Größe der Fehlstelle zu bestimmen. Über

$$s = \frac{1}{2}ct \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{s}{c}, \quad (5)$$

mit bekannter Schallgeschwindigkeit und der gemessenen Laufzeit des Signals, kann dann die Lage der Fehlstelle in der Probe berechnet werden. Auch zur Darstellung der Laufzeitdiagramme gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum einen den A-Scan, bei welchem die Echoamplituden als Funktion der Laufzeit aufgetragen werden, wodurch sich ein eindimensionales Ergebnis ergibt. Zum anderen den B-Scan, bei welchem der Sender über die Probe bewegt wird. Die Amplituden werden in verschiedenen Helligkeitsstufen oder Farben dargestellt, sodass hier ein zweidimensionales Bild als Ergebnis geliefert werden kann.

### 3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (6)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (8)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (9a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (9b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (9c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

Fehler werden nach DIN auf eine geltende Ziffer gerundet. Sollte diese Zahl eine 1 sein, so wird, ebenfalls nach DIN, eine weitere Ziffer angegeben. Der zugehörige Wert wird mit der gleichen Anzahl an Nachkommastellen wie der Fehler angegeben. Ausnahmen sind Werte, bei denen der Fehler größer als der eigentliche Wert ist. In diesem Fall wird eine geltende Ziffer des Wertes angegeben. Im Falle einer 1 wird erneut auch die nächste Ziffer angegeben, der Fehler wird entsprechend gerundet.

## 4 Durchführung

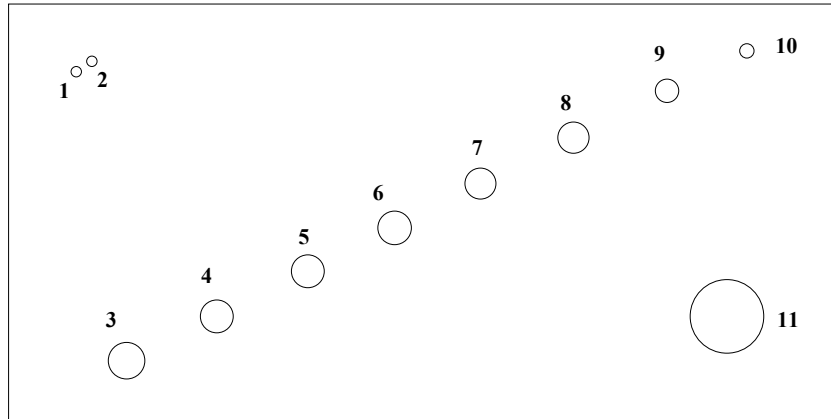
### 4.1 Schallgeschwindigkeitsbestimmung

Um die Schallgeschwindigkeit  $c$  zu bestimmen, werden in diesem Versuch drei unterschiedlich große Acrylzyylinder verwendet. Diese werden zuerst mit einer Schieblehre ausgemessen und die Längen werden notiert. Anschließend wird an einen der Zylinder von oben auf die Stirnseite eine  $2 \cdot 10^6$  Hz-Sonde mit Koppelgel gesetzt. Diese wird mit einem Ultraschallechoskop verbunden, welches im REFLEC.-Modus sein muss. Zur Auswertung wird ein an das Echoskop angeschlossener Laptop benutzt. Mittels eines A-Scans wird die Laufzeit eines Echos bestimmt, wobei im Auswertungsprogramm des Rechners die Cursor-Funktion zur Ausmessung der Zeitdifferenzen der angezeigten Impulse genutzt wird. Zu beachten ist, dass der erste angezeigte Impuls der Sendeimpuls ist, sodass die Zeitdifferenz vom ersten zum zweiten Impuls gemessen und notiert werden muss. Die Messung wird für die anderen beiden Zylinder wiederholt. Um einen systematischen Fehler, bedingt durch die verschiedenen Anpassungsschichten der Ultraschallsonden, rechnerisch zu eliminieren, wird die Messung für alle drei Zylinder auch noch mit einer  $4 \cdot 10^6$  Hz-Sonde wiederholt.

Um die Schallgeschwindigkeit mit der Durchschallmethode zu bestimmen, wird der Zylinder horizontal in eine Vorrichtung gelegt. Das Echoskop wird in den TRANS.-Modus umgestellt und die beiden  $2 \cdot 10^6$  Hz-Sonden werden wieder mit Koppelgel an den beiden Stirnseiten des Zylinders befestigt. Die Zeitdifferenz wird auch hier vom ersten zum zweiten Impuls gemessen und notiert. Die Messung wird ebenfalls für alle drei Zylinder wiederholt.

### 4.2 Fehlstellen-Untersuchung

Ein Acrylblock mit elf unterschiedlich großen Fehlstellen an verschiedenen Stellen soll nun vermessen werden. Dazu wird zuerst die Höhe des Acrylblocks mit einer Schieblehre ermittelt und notiert. An die Oberseite des Blocks wird eine  $1 \cdot 10^6$  Hz-Sonde mit Wasser als Kontaktmittel gekoppelt. Das Echoskop muss wieder in den REFLEC.-Modus zurückgeschaltet werden. Nun wird die Sonde über den Block bewegt und die zu den unterschiedlichen Fehlstellen gehörenden Zeitdifferenzen der angezeigten Impuls werden wieder ausgemessen und notiert. Der Block wird nun umgedreht, sodass dieselbe Messung von der gegenüberliegenden Seite durchgeführt werden kann. So kann später die Größe



**Abbildung 1:** Darstellung des zu untersuchenden Blockes[1, S. 5].

der Fehlstellen berechnet werden. Des Weiteren wird auch ein B-Scan des Blocks angefertigt, und zwar sowohl mit einer  $4 \cdot 10^6$  Hz-Sonde, als auch mit einer  $1 \cdot 10^6$  Hz-Sonde. Dafür wird die jeweilige Sonde über den Block bewegt und das vom Auswertungsprogramm erzeugte Bild wird gespeichert.

### 4.3 Vermessung eines Augenmodells

Ein Augenmodell wird mit dem Impuls-Echo-Verfahren ausgemessen. Dazu wird eine  $2 \cdot 10^6$  Hz-Sonde verwendet, die mit etwas Koppelgel auf die Hornhaut des Auges gekoppelt wird. Die Sonde wird so positioniert, dass auf dem Auswertungsbild 4 Impulse zu sehen sind. Der erste ist der Sendeimpuls, der zweite und dritte gehören zum Anfang beziehungsweise zum Ende der Linse und der vierte wird an der Netzhaut reflektiert. Die Zeitdifferenzen werden notiert.

## 5 Auswertung

### 5.1 Schallgeschwindigkeitsbestimmung

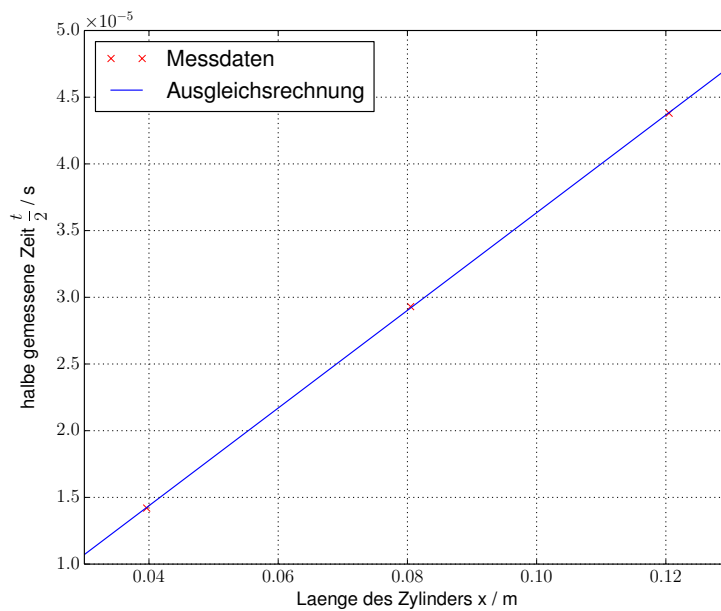
Die für die Messung der Schallgeschwindigkeit benutzten Zylinder haben folgende Längen:

kleiner Zylinder	$l_{kl} = 0,039\,65\text{ m}$
mittlerer Zylinder	$l_m = 0,080\,50\text{ m}$
großer Zylinder	$l_{gr} = 0,120\,50\text{ m}.$

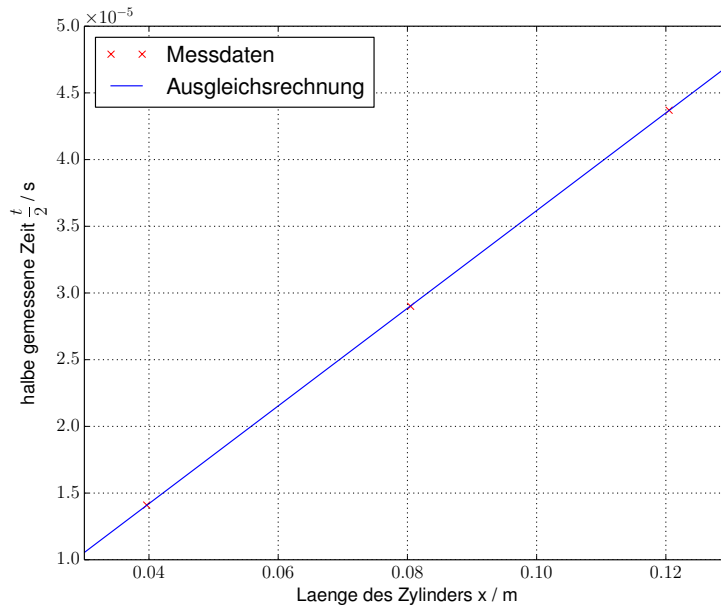
Die gemessenen Laufzeiten der drei Messungen für den jeweiligen Zylinder befinden sich in Tabelle 1. Da beim Impuls-Echo-Verfahren die doppelte Strecke durchlaufen wurde, werden diese Zeiten ebenfalls halbiert angegeben. Nach (4) werden die Messwerte für die unterschiedlichen Messmethoden in jeweils einem Diagramm mit linearer Regression dargestellt, zu sehen in Abbildungen 2, 3 und 4. Die Kehrwerte der Steigungen entspre-

**Tabelle 1:** Laufzeiten zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

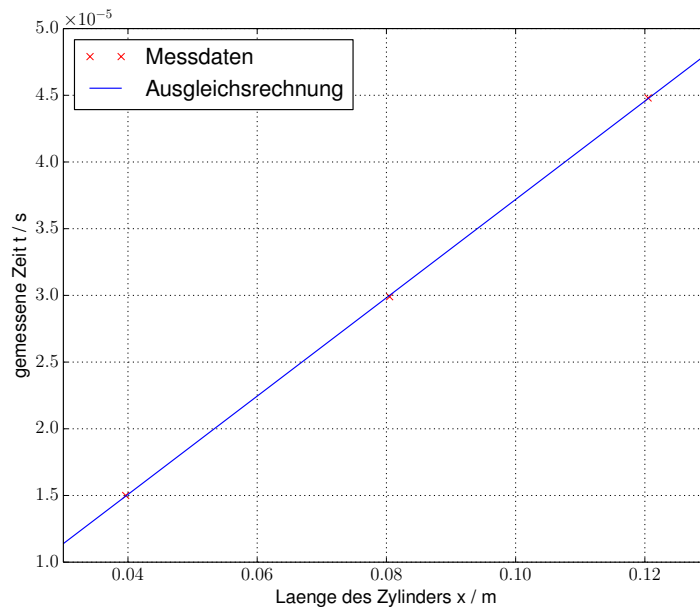
	Impuls-Echo-Verfahren				Durchschallungs-Verfahren
	$2 \cdot 10^6 \text{ Hz}$		$4 \cdot 10^6 \text{ Hz}$		$2 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
	$t / 10^{-6} \text{ s}$	$\frac{t}{2} / 10^{-6} \text{ s}$	$t / 10^{-6} \text{ s}$	$\frac{t}{2} / 10^{-6} \text{ s}$	$t / 10^{-6} \text{ s}$
kleiner Zylinder	28,4	14,2	28,2	14,1	15,0
mittlerer Zylinder	58,6	29,3	58,0	29,0	29,9
großer Zylinder	87,6	43,8	87,4	43,7	44,8



**Abbildung 2:** Lineare Regression zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit; Impuls-Echo-Verfahren mit einer  $2 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ -Sonde.



**Abbildung 3:** Lineare Regression zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit; Impuls-Echo-Verfahren mit einer  $4 \cdot 10^6$  Hz-Sonde.



**Abbildung 4:** Lineare Regression zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit; Durchschallungs-Verfahren mit einer  $2 \cdot 10^6$  Hz-Sonde.

chen den jeweiligen berechneten Schallgeschwindigkeiten, die Achsenabschnitte sind die systematischen Fehler  $\zeta$  der Sonden:

Impuls-Echo-Verfahren:

$$c_{2\text{MHz}} = (2731 \pm 15) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c_{4\text{MHz}} = (2731 \pm 6) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\zeta_{2\text{MHz}} = (-0,27 \pm 0,18) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\zeta_{4\text{MHz}} = (-0,43 \pm 0,07) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Durchschallungs-Verfahren:

$$c_{2\text{MHz}} = (2713 \pm 16) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\zeta_{2\text{MHz}} = (0,33 \pm 0,19) \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Die Schallgeschwindigkeiten werden gemittelt und es wird sowohl der Fehler nach (6) und nach (7) bestimmt. Der größere von beiden, in diesem Fall der Fehler des Mittelwertes, wird angegeben und in weiteren Rechnungen verwendet:

$$c = (2725 \pm 9) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## 5.2 Fehlstellen-Untersuchung

Die Höhe des zu untersuchenden Blockes wurde gemessen:

$$h = 0,08025 \text{ m}.$$

Die Abstände  $s_{\text{oben}}$  der Fehlstellen von oben wurden nach

$$s_{\text{oben}} = h - c \cdot \frac{t_{\text{oben}}}{2} \quad (10)$$

bestimmt, wobei  $c$  die im vorherigen Auswertungsteil bestimmte Schallgeschwindigkeit ist und  $t_{\text{oben}}$  die Laufzeiten des Schalls bei der Messung von oben sind. Die Abstände  $s_{\text{unten}}$  der Fehlstellen werden entsprechend mit  $t_{\text{unten}}$  berechnet. Die Dicke  $d$  der Fehlstellen berechnet sich nach

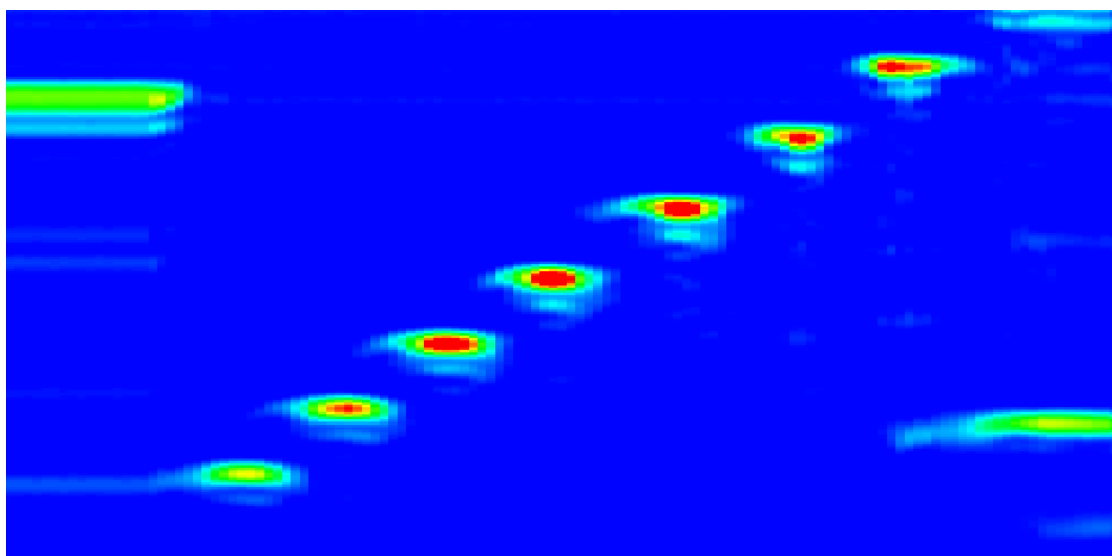
$$d = h - s_{\text{oben}} - s_{\text{unten}}. \quad (11)$$

Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 2. Die B-Scans sind in den Abbildungen 5 und 6 zu sehen. Zu erkennen ist, dass die  $1 \cdot 10^6$  Hz-Sonde alle Fehlstellen anzeigt, wohingegen die andere Sonde nur die oberen, und auch diese nur schwach, anzeigt. Dies liegt an der Frequenzabhängigkeit der Tiefenaufösung, so scheint diese bei der  $1 \cdot 10^6$  Hz-Sonde deutlich besser zu sein. Das dargestellte Bild dieser Sonde ist gut genug, um, wenn eine konstante Abtastgeschwindigkeit gesichert werden kann, auf die Abstände der Fehlstellen zu schließen. Dies konnte in diesem Versuch jedoch nicht durchgeführt werden.

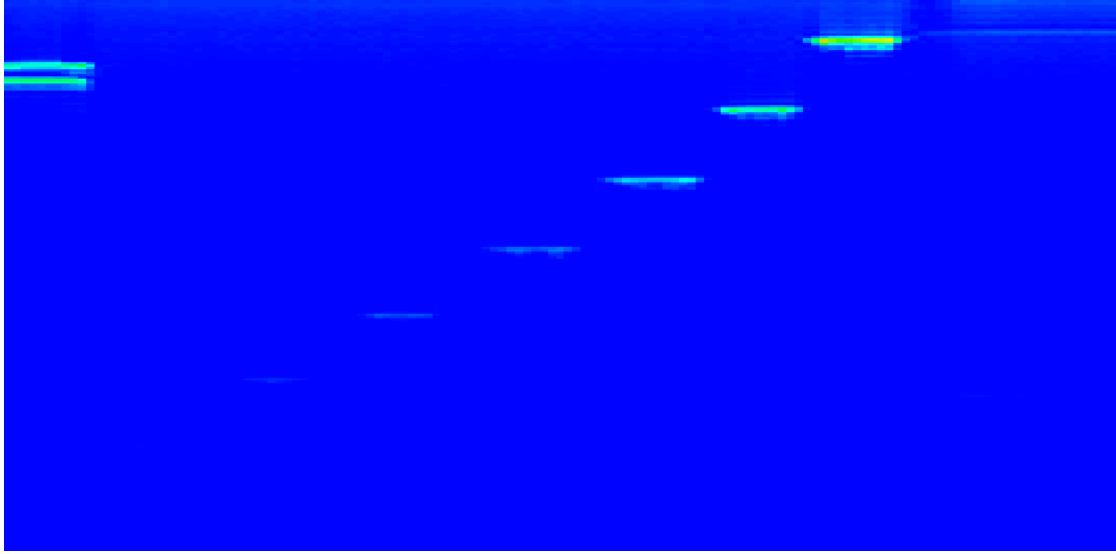


**Tabelle 2:** Bestimmung der Lage und Dicke der Fehlstellen.

Lochnummer	$t_{\text{oben}} / 10^{-6} \text{ s}$	$s_{\text{oben}} / 10^{-3} \text{ m}$	$t_{\text{unten}} / 10^{-6} \text{ s}$	$s_{\text{unten}} / 10^{-3} \text{ m}$	$d / 10^{-3} \text{ m}$
1	15,4	$20,98 \pm 0,07$	44,0	$59,96 \pm 0,19$	$-0,7 \pm 0,2$
2	13,0	$17,71 \pm 0,06$	46,2	$62,95 \pm 0,20$	$-0,4 \pm 0,2$
3	44,4	$60,50 \pm 0,19$	9,5	$12,94 \pm 0,04$	$6,80 \pm 0,19$
4	39,0	$53,14 \pm 0,17$	15,5	$21,12 \pm 0,07$	$5,98 \pm 0,18$
5	33,6	$45,79 \pm 0,14$	21,6	$29,43 \pm 0,09$	$5,03 \pm 0,17$
6	28,1	$38,29 \pm 0,12$	28,0	$38,15 \pm 0,12$	$3,80 \pm 0,17$
7	22,3	$30,39 \pm 0,10$	34,0	$46,33 \pm 0,15$	$3,53 \pm 0,17$
8	16,4	$22,35 \pm 0,07$	39,7	$54,10 \pm 0,17$	$3,80 \pm 0,18$
9	10,5	$14,31 \pm 0,05$	45,5	$62,00 \pm 0,20$	$3,9 \pm 0,2$
10	4,7	$6,40 \pm 0,02$	51,7	$70,4 \pm 0,2$	$3,4 \pm 0,2$
11	40,2	$54,78 \pm 0,17$	10,7	$14,58 \pm 0,05$	$10,89 \pm 0,18$



**Abbildung 5:** B-Scan des Blocks mit einer  $1 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ -Sonde.



**Abbildung 6:** B-Scan des Blocks mit einer  $4 \cdot 10^6$  Hz-Sonde.

### 5.3 Vermessung eines Augenmodells

Bei der Vermessung des Auges konnten vier starke Peaks gemessen werden. Dabei wird der erste der Hornhaut beziehungsweise dem Sondenende, der zweite dem Anfang der Linse, der dritte dem Ende der Linse und der letzte der Netzhaut zugeordnet. Es wird wie im vorherigen Abschnitt vorgegangen, um die Abmessungen im Auge zu berechnen. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass die Schallgeschwindigkeiten nun variieren:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Kammerflüssigkeit[2, S. 474] (1. Abschnitt)} & c_1 = 1532 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \text{Linsenmaterial[1, S. 6] (2. Abschnitt)} & c_2 = 2500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \text{Glaskörperflüssigkeit[1, S. 6] (3. Abschnitt)} & c_3 = 1410 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
 \end{array}$$

Es ergeben sich entsprechend für die Abstände folgende Formeln:

$$\text{Abstand Hornhaut - Anfang der Linse: } s_1 = \frac{1}{2}c_1t_1 \quad (12)$$

$$\text{Abstand Hornhaut - Ende der Linse: } s_2 = \frac{1}{2}c_2(t_2 - t_1) + s_1 \quad (13)$$

$$\text{Abstand Hornhaut - Netzhaut: } s_3 = \frac{1}{2}c_3(t_3 - t_2) + s_2 \quad (14)$$

Im Folgenden sind die gemessenen Daten und errechneten Ergebnisse aufgeführt:

$$t_1 = 10,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$t_2 = 16,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$t_3 = 22,1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$s_1 = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_2 = 15,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_3 = 19,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

## 6 Diskussion

Die hier durchgeführten Methoden eignen sich sehr gut zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. So liegt der vorliegende Literaturwert[3, S. 103] von 2730 m/s innerhalb der Genauigkeit des hier gemessenen Wertes von  $(2725 \pm 9) \text{ m/s}$ .

Auffällig ist jedoch, dass die Sonden nicht dazu geeignet waren, kleine Fehlstellen in den Größenordnungen von Millimetern auszumessen. Dies zeigt sich auch an den negativen berechneten systematischen Fehlern, was nicht möglich sein sollte. Die Ungenauigkeiten der Messungen lagen vermutlich an den mehreren vom Computer registrierten Peaks an der ersten Grenzfläche mit dem Material. So war es nicht möglich zu bestimmen, auf welchen dieser Ausschläge die Nulllinie des Cursors zu kalibrieren war.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch US1, Grundlagen der Ultraschalltechnik*. 14. Apr. 2015. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/UltraschallGL.pdf>.
- [2] F. Wilhelm G. Dunker C. Ohrloff. „12. Kongress der Deutschsprachigen Gesellschaft für Intraokularlinsen-Implantation und refraktive Chirurgie“. In: (1999).
- [3] G. Sorge. „Faszination Ultraschall“. In: *Teubner* (2002).