

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Interferenz und Kohärenz von Licht	3
2.2 Das Michelson-Interferometer	4
3 Fehlerrechnung	6
4 Durchführung	7
5 Auswertung	8
6 Diskussion	9
Literatur	10

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll mit einem Michelson-Interferometer die Wellenlänge eines Lasers ausgemessen werden. Des Weiteren soll die Brechungsindizes von Luft sowie CO_2 ermittelt werden.

2 Theorie

2.1 Interferenz und Kohärenz von Licht

Um den Aufbau und die Funktionsweise des Michelson-Interferometers verstehen zu können, muss zuerst der grundlegende Begriff der Interferenz näher erklärt werden. Licht ist eine elektromagnetische Welle, deren Ausbreitung sich mit den Maxwell-Gleichungen beschreiben lässt. Im Allgemeinen wird die elektrische Feldstärke einer solchen Welle mit

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t - \delta) \quad (1)$$

angegeben. Dabei stellt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl mit λ als Wellenlänge dar, ω die Kreisfrequenz und δ einen beliebigen Phasenwinkel. Für Gleichungen dieser Art gilt das Superpositionsprinzip, sodass sich an einem Ort P zwei dort ankommenden Wellen überlagern. Da sich die Lichtintensität I einfacher beobachten lässt als die Feldstärke, und der Zusammenhang

$$I = \text{const} |\vec{E}|^2$$

gilt, ergibt sich für die Addition zweier Wellen

$$I_{\text{ges}} = 2\text{const} \vec{E}_0^2 (1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)). \quad (2)$$

Der zweite Teil des Summanden bildet den Interferenzterm, der abhängig von der Phasenbeziehung $(\delta_2 - \delta_1)$ der beiden einzelnen Wellen Werte aus dem Wertebereich zwischen $-2\text{const} \vec{E}_0^2$ und $+2\text{const} \vec{E}_0^2$ annehmen kann. Insbesondere verschwindet der Interferenzterm, wenn $(\delta_2 - \delta_1)$ ein ungerades Vielfaches von π ist. Des Weiteren lassen sich mit Licht aus zwei verschiedenen Lichtquellen im Allgemeinen auch keine Interferenzen beobachten. Dies liegt an der statistischen Natur der Entstehung von Licht. Wenn angeregte Atome in ihren Grundzustand zurückgehen, wird Energie in Form von elektromagnetischen Wellen abgegeben. Diese Wellen besitzen eine endliche Länge und werden zudem über die Zeit statistisch verteilt emittiert, sodass bei einer Mittelung über einen genügend großen Zeitraum der Interferenzterm verschwindet. Solches Licht wird inkohärent genannt. Kohärentes Licht, welches beispielsweise mit einem Laser erzeugt werden kann, besitzt gemäß Gleichung (1) ein festes k , ω und δ für alle emittierten Wellenzüge.

Unter geeigneten Bedingungen lassen sich allerdings auch mit gewöhnlichen Lichtquellen Interferenzen beobachten. Dazu wird eine Lichtquelle verwendet, deren Licht in zwei Strahlen zerteilt wird. Dazu kann entweder ein Strahlteiler oder eine Doppelblende, wie in Abbildung 1 zu sehen, verwendet werden. Die beiden Strahlen werden in einem Punkt

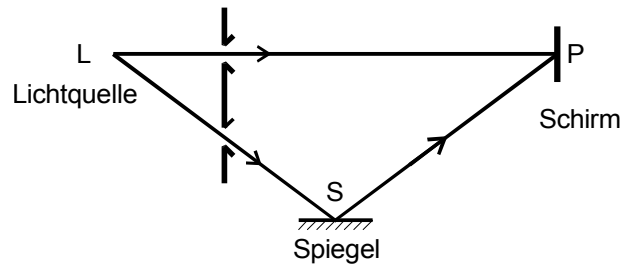


Abbildung 1: Interferenzzerzeugung mit einer gewöhnlichen Lichtquelle[1, S. 3].

P wieder zusammengeführt, wobei sie im Allgemeinen verschieden lange Wege durchlaufen sind. Dadurch besitzen sie eine Phasendifferenz, welche, wie zuvor beschrieben, für Interferenzen sorgt. Allerdings sind nicht immer Interferenzen zu beobachten, was an der Kohärenzlänge l liegt. Der Emissionsvorgang eines Lichtzuges dauert nur eine endliche Zeit, weshalb er auch nur eine endliche Länge besitzen kann. Ist der Wegunterschied der beiden Lichtstrahlen größer als die Länge der Lichtzüge, können keine Interferenzen mehr auftreten, weil die Lichtstrahlen im Punkt P zu verschiedenen Zeiten eintreffen. Die Kohärenzlänge l ist genau die Länge, bei der die Interferenzen im Punkt P verschwinden. Es gilt der Zusammenhang zwischen den maximal beobachtbaren Interferenzmaxima N im Punkt P , der Wellenlänge λ und der Kohärenzlänge l :

$$l = N\lambda.$$

2.2 Das Michelson-Interferometer

Beim Michelson-Interferometer wird mittels eines semipermeablen Materials ein Lichtstrahl geteilt, wie in Abbildung 2 zu sehen ist. Ein Teil des Lichts geht durch das Material

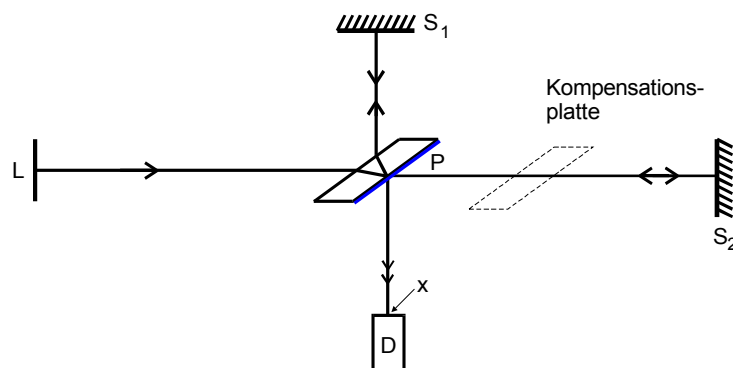


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Michelson-Interferometers[1, S. 9].

hindurch zu Spiegel S_2 , der andere Teil wird an der Platte zum Spiegel S_1 reflektiert. An den Spiegeln werden beide Lichtstrahlen wieder reflektiert, und an der Platte P treffen sie wieder zusammen und werden erneut dort geteilt. Es werden nun nur die Strahlen betrachtet, die jetzt parallel zum Detektor D laufen. Wichtig für die Beobachtung von

Interferenzen ist, dass diese beiden Strahlen kohärent sind. Dafür werden die Abstände $\overline{S_1 P}$ und $\overline{S_2 P}$ fast gleich gewählt und in den Weg von P zu S_2 wird eine Kompensationsplatte gestellt. Diese gleicht die optische Weglänge der Strahlen aus, da der Strahl zu S_1 die Platte P dreimal durchläuft, der Strahl zu S_2 allerdings nur einmal. Bei gleichen Längen $\overline{S_1 P}$ und $\overline{S_2 P}$ ist an der Stelle D ein Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$, wodurch sich die Lichtstrahlen dort auslöschen. Wird nun allerdings ein Spiegel um die Strecke Δd verschoben, so ändert sich die Intensität des Interferenzmusters am Ort D . Dadurch lässt sich mit dem abgebildeten Aufbau die Wellenlänge λ der verwendeten Lichtquelle bestimmen, da der Zusammenhang

$$\Delta d = z \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

gilt, wobei z die Anzahl der beobachteten Interferenzmaxima ist. Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung eines optischen Wegunterschiedes ist es, einen der beiden Lichtstrahlen durch ein Medium der Länge b mit einem anderen Brechungsindex $n + \Delta n$ laufen zu lassen, wie in Abbildung 3 zu sehen ist. Der optische Wegunterschied der beiden

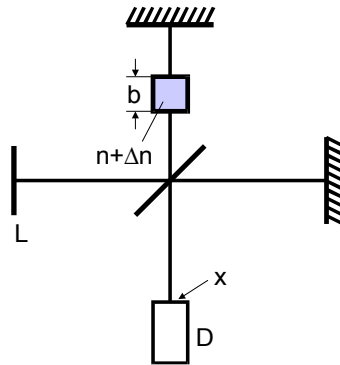


Abbildung 3: Schematischer Aufbau zur Messung von Brechungsindexunterschieden[1, S. 10].

Strahlen beträgt $\Delta n b$. Wird dieser nun dadurch vergrößert, dass die Messzelle evakuiert wird, oder der Druck p in ihr erhöht wird, so lassen sich am Ort D währenddessen z Interferenzen beobachten. Es gilt die Formel:

$$b \cdot \Delta n = \frac{z\lambda}{2}. \quad (4)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Formel

$$n = \sqrt{1 + f(\lambda)N}$$

gilt, wobei N die Anzahl von Molekülen ist, die durch Lichtwellen der Wellenlänge λ zu Schwingungen angeregt werden. Diese Formel lässt sich für Licht im sichtbaren Bereich zu

$$n = 1 + \frac{f}{2}N$$

nähern. Des Weiteren gilt in den hier verwendeten Druckbereichen die Annahme, dass sich die benutzten Gase wie ideale Gase verhalten. Dementsprechend ist die Anzahl der Moleküle bei gegebenem Druck p und einer Temperatur T gegeben durch:

$$N(p, T) = \frac{p}{T} \frac{T_0}{p_0} N_L,$$

wobei N_L die Loschmidtsche Zahl ist und p_0 und T_0 die Normalbedingungen sind. Damit ergibt sich für den Brechungsindexunterschied Δn die Formel

$$\Delta n(p, p') = \frac{f}{2} N_L \frac{T_0}{p_0} \frac{1}{T} (p - p'). \quad (5)$$

Soll der Brechungsindex unter Normalbedingungen angegeben werden, so gilt:

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'}.$$

Δn wird aus der umgestellten Gleichung (4) gewonnen, sodass sich als endgültige Formel

$$n(p_0, T_0) = 1 + \frac{z\lambda}{2b} \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'} \quad (6)$$

ergibt.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (9)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (10a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 \bar{y}} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (10c)$$

Die Regression, sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

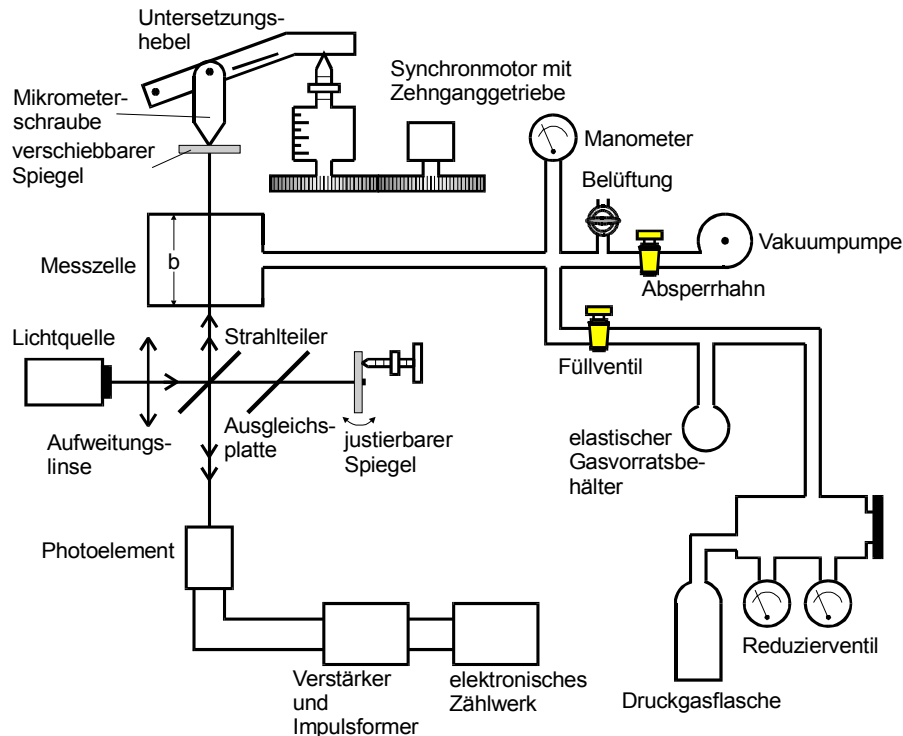


Abbildung 4: Darstellung der gesamten Messapparatur[1, S. 13].

Bevor die Messung durchgeführt werden kann, muss das Michelson-Interferometer justiert werden. Der Laser, dessen Wellenlänge auch ausgemessen werden soll, wird dazu eingeschaltet. Die beiden hellsten aus dem Interferometer austretenden Strahlen sollen nun zur Deckung gebracht werden. Dazu wird der justierbare Spiegel so eingestellt, dass die beiden Strahlen auf einer Hilfsmattscheibe genau zur Deckung kommen. Das Photoelement, welches zur Vereinfachung der Zählung genutzt wird, wird dann auf die entsprechende Höhe eingestellt, sodass das Interferenzbild genau auf den Eintrittspalt fällt.

Das Michelson-Interferometer ist nun justiert und kann zur Wellenlängenmessung genutzt werden. Dazu wird der verschiebbare Spiegel mit einem Synchronmotor und einer Mikrometerschraube verschoben. Es muss darauf geachtet werden, dass der Spiegel nicht zu schnell bewegt wird, da sonst das Photoelement nicht alle Impulse ausreichend erkennen kann. Es wird die Spiegelverschiebung d notiert, nach welcher mindestens 3000 Interferenzen vom Photoelement registriert wurden. Zudem wird die exakte Anzahl z von Interferenzen notiert. Die Messung wird zehnmal ausgeführt.

Um den Brechungsindex von Luft zu messen, wird der verschiebbare Spiegel in Ruhe gelassen. Die Messzelle wird auf einen Druck p evakuiert, welcher notiert wird. Beim Wiedereinlassen der Luft werden erneut Interferenzen gezählt, deren Anzahl z ebenfalls

notiert wird. Der sich sodann einstellende Druck wird als Normaldruck p_0 notiert. Die Messung wird achtmal wiederholt.

Für die Messung des Brechungsindex von CO_2 wird die Messzelle erneut evakuiert, der entstehende Druck p wird notiert. Sodann wird langsam CO_2 in die Messzelle gelassen und es werden erneut die Anzahl der beobachteten Interferenzen z notiert. Hier stellt sich wieder der Normaldruck p_0 ein. Da in der Messzelle noch Rückstände von Luft sein könnten, wird diese Messung siebenmal durchgeführt, um ein genaueres Ergebnis bekommen zu können.

5 Auswertung

Zur Bestimmung der Wellenlänge des Lasers werden nach (3) mehrere Datenpaare von gezählten Interferenzmaxima z mit den jeweiligen Verschiebungen des Spiegels d benötigt. Da die abgelesene Verschiebung wegen der Hebelübersetzung \ddot{U} von der tatsächlichen Verschiebung verschieden ist, wird (3) um den Faktor $\frac{1}{\ddot{U}}$ erweitert. Die Hebelübersetzung beträgt dabei:

$$\ddot{U} = 5.046.$$

Die Datenpaare sowie die jeweiligen daraus resultierenden Wellenlängen λ befinden sich in Tabelle 1. Die Wellenlängen werden gemittelt und es ergibt sich:

Tabelle 1: Messwerte zur Berechnung der Wellenlänge des Lasers.

$d / 10^{-3} \text{ m}$	z	$\lambda / 10^{-9} \text{ m}$
5,02	3009	661,25
5,04	3020	661,46
5,05	3023	662,12
5,02	3007	661,69
5,02	3008	661,47
5,01	3004	661,03
5,03	3017	660,81
5,03	3011	662,12
5,01	3003	661,25
5,02	3004	662,35

$$\lambda = (661,55 \pm 0,15) \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

Für die Bestimmung der Brechungsindizes von Luft und CO_2 werden zunächst die Normalbedingungen, die Größe der Messzelle und die Umgebungstemperatur benötigt:

Normaldruck:	$p_0 = 1,0132 \text{ bar}$
Normaltemperatur:	$T_0 = 273,15 \text{ K}$
Größe der Messzelle:	$b = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Umgebungstemperatur:	$T = 293,15 \text{ K}.$

Nach Formel (4) werden zusätzlich die Datenpaare aus dem Kammerdruck p und der gezählten Interferenzmaxima z benötigt. Die Messdaten, sowie die jeweiligen berechneten Brechungsindizes n , befinden sich in Tabelle 2. Da der vierte Wert augenscheinlich von

Tabelle 2: Messdaten zur Berechnung des Brechungsindex von Luft.

p / bar	z	n
0,1332	36	1,000 294 3
0,1332	36	1,000 294 3
0,1532	35	1,000 292 8
0,1532	33	1,000 276 0
0,1532	35	1,000 292 8
0,1732	34	1,000 291 2
0,1532	35	1,000 292 8
0,1532	35	1,000 292 8

den anderen Werten abweicht, wird er zur Bestimmung des Mittelwertes nicht beachtet. Dadurch erhöht sich die Genauigkeit des Wertes um ungefähr den Faktor 5, was ebenfalls ein Indiz dafür ist, dass dies zulässig ist. Der Wert für den Brechungsindex von Luft ist entsprechend:

$$n = 1,000\,293\,0 \pm 0,000\,000\,4.$$

Die Bestimmung des Brechungsindex von CO_2 erfolgt analog. Die gemessenen Daten sowie zugehörigen Brechungsindizes befinden sich in Tabelle 3. Der gemittelte Wert für

Tabelle 3: Messdaten zur Berechnung des Brechungsindex von CO_2 .

p / bar	z	n
0,1532	57	1,000 477
0,1532	57	1,000 477
0,1532	58	1,000 485
0,1532	58	1,000 485
0,1532	57	1,000 477
0,1532	56	1,000 468
0,1532	58	1,000 485

den Brechungsindex lautet:

$$n = 1,000\,479 \pm 0,000\,002.$$

6 Diskussion

Besonders auffällig bei den Messwerten sind die sehr kleinen Fehler der Ergebnisse. So wurde bei der Bestimmung des Brechungsindex von Luft ein Fehler von $3,74 \cdot 10^{-5} \%$,

beim Brechungsindex von CO_2 ein Fehler von $2,21 \cdot 10^{-4} \%$ und bei der Bestimmung der Wellenlänge des Lasers ein Fehler von $2,31 \cdot 10^{-2} \%$ beobachtet. Dies lässt auf eine sehr präzise Messung mit geringen statistischen Fehlern schließen.

Der Brechungsindex von Luft hat zusätzlich eine Abweichung von $1,68 \cdot 10^{-3} \%$ vom Literaturwert[2] $n = 1.0002762$ und der Brechungsindex von CO_2 eine Abweichung von $3,22 \cdot 10^{-3} \%$ vom Literaturwert[2] $n = 1.0004470$. Diese Abweichungen sind beide gering und innerhalb der Toleranz dieser Messung. Die Abweichung beim CO_2 ist größer, da sich die Messzelle nicht komplett evakuieren ließ und entsprechend noch zusätzlich ein Resbestand an Luft mit betrachtet wurde. Über die Wellenlänge des Lasers sind keine Literaturwerte bekannt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 401, Das Michelson-Interferometer*. 12. Mai 2015. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V401.pdf>.
- [2] Mikhail Polyanskiy. *refractiveindex.info*. 18. Mai 2015. eprint: <http://refractiveindex.info/?shelf=other&book=air&page=Ciddor>.