

VERSUCH 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Julia Sobolewski
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2017

Abgabe: 21.11.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Gedämpfter RLC-Kreis	3
1.2	Angeregter RLC-Kreis	4
2	Aufbau und Durchführung	6
2.1	Apparatekonstanten	6
2.2	Effektiver Widerstand und Abklingzeit	6
2.3	Aperiodischer Grenzfall	6
2.4	Frequenzabhängigkeit der Spannung	7
2.5	Frequenzabhängigkeit der Phase	7
3	Auswertung	8
3.1	Apparatekonstanten	8
3.2	Effektiver Widerstand und Abklingzeit	8
3.3	Aperiodischer Grenzfall	10
3.4	Frequenzabhängigkeit der Spannung	11
3.5	Frequenzabhängigkeit der Phase	12
4	Diskussion	15
	Literatur	16

1 Theorie

Ziel: Die folgenden Größen sollen bestimmt werden:

- der effektive Dämpfungswiderstand R_{eff} des Systems.
- Abklingdauer T_{ex} , nach der die Spannung im RLC-Kreis auf den e -ten Teil ihrer Amplitude abgefallen ist.
- der Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt.
- Frequenzabhängigkeit der Spannung.
- Phasenverschiebung zwischen der Kondensatorspannung U_C und der externen Erregerspannung U_{Err} in Abhängigkeit der Frequenz.

1.1 Gedämpfter RLC-Kreis

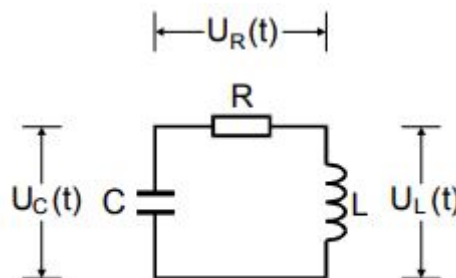


Abb.2: Gedämpfter Schwingkreis

Abbildung 1: Gedämpfter RLC-Kreis [2, S. 284]

Betrachtet wird zunächst ein einfacher RLC-Kreis. Ist in diesem eine Energiemenge eingespeichert, so wird die Energie zwischen den beiden Energiespeichern - der Kapazität C und der Induktivität L - hin und her transportiert. Allerdings wirkt der Widerstand R hier als Dämpfung, sodass ein Teil der Energie immer in Wärme umgewandelt wird und somit nach einer gewissen Zeit kein Strom mehr fließt. Mit der zweiten Kirchhoff'schen Regel lässt sich somit folgende Gleichung aufstellen:

$$0 = U_R + U_C + U_L \quad (1)$$

Dabei gilt:

$$U_R = RI \qquad U_C = \frac{Q}{C} \qquad U_L = L\dot{I}$$

Daraus ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (2)$$

Der Exponentialansatz liefert die Lösung der Differentialgleichung:

$$I = e^{-2\pi\mu t} \cdot (A_1 e^{i2\pi\nu t} + A_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (3)$$

Dabei sind $\mu = \frac{R}{4\pi L}$ und $\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Für ein reelles ν gilt $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ und die Differentialgleichung lässt sich schreiben als:

$$I(t) = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \phi_o) \quad (4)$$

Daraus lässt sich die Abklingzeit

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\mu\pi} = \frac{2L}{R} \quad (5)$$

ablesen. Ist ν jedoch imaginär, so ist

$$I \sim e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}, \quad (6)$$

wobei der Exponent nun auf Grund ν reell ist. Da es sich hierbei um eine Exponentialfunktion mit negativem Vorzeichen im Exponent handelt, fällt sie stark. Am schnellsten fällt die Funktion jedoch, wenn $\nu = 0$, also wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad (7)$$

ist. Dieser Fall wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet.

1.2 Angeregter RLC-Kreis

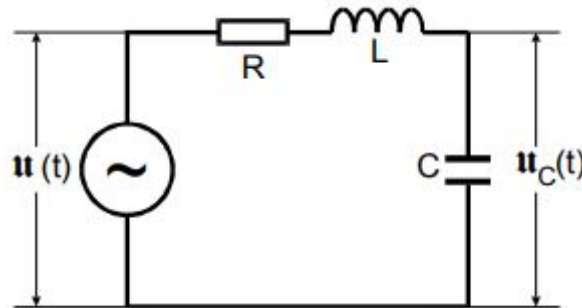


Abbildung 2: Angeregter RLC-Kreis [2, S. 289]

Zunächst wird ein Wechselstromgenerator an den RLC-Kreis angeschlossen. Die Differentialgleichung

$$LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

beschreibt den Spannungsverlauf des Kondensators und wird gelöst durch

$$U_C = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad (9)$$

Die Phasenverschiebung zur Erregerspannung U_{Err} ist gegeben durch:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (10)$$

Für die Phasen $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\phi_2 = \frac{3\pi}{4}$ ergeben sich folgende ω :

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (11)$$

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (12)$$

Eine weitere wichtige Größe ist die Resonanzfrequenz, also die Frequenz, für die U_C maximal wird. Um diese zu erhalten, muss zunächst der Betrag der Spannung U_C in Abhängigkeit von ω gebildet werden:

$$|U_C(\omega)| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (13)$$

An dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |U_C(\omega)| = 0$ und $\lim_{\omega \rightarrow 0} |U_C(\omega)| = U_0$ sind. Ebenfalls lässt sich mit ihr die Resonanzfrequenz bestimmen:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (14)$$

Wird nun der Fall $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{2L^2}$ betrachtet, erhält man die Kreisfrequenz ω_0 des LC-Schwingkreises

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (15)$$

Ist dies tatsächlich der Fall, so gilt

$$U_{C,\text{max}} = q \cdot U_{\text{Err}}, \quad (16)$$

wobei der Faktor q als Güte bezeichnet wird und wie folgt definiert ist:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (17)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Gleichung (13) ist die Breite der Resonanzkurve. Für diese werden ω_+ und ω_- , die, wenn sie in Gleichung (13) eingesetzt werden, den Betrag der Amplitude um den Faktor $1/\sqrt{2}$ verringern, benötigt. Wenn $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ ist, gilt für die Breite der Resonanzkurve:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (18)$$

Im Falle einer schwachen Dämpfung gilt dabei zusätzlich:

$$\omega_+ - \omega_- = \omega_1 - \omega_2 \quad (19)$$

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Apperatekonstanten

Zunächst werden die Apperatekonstanten bestimmt. Dazu wird zunächst überprüft, welches der drei Geräte vorliegt und die Gerätenummer abgelesen. Die dazugehörigen Werte werden vom vorliegenden Material abgelesen.

2.2 Effektiver Widerstand und Abklingzeit

Um die Amplitudenabnahme des RLC-Kreises zu bestimmen, wird zunächst die folgende Schaltung aufgebaut:

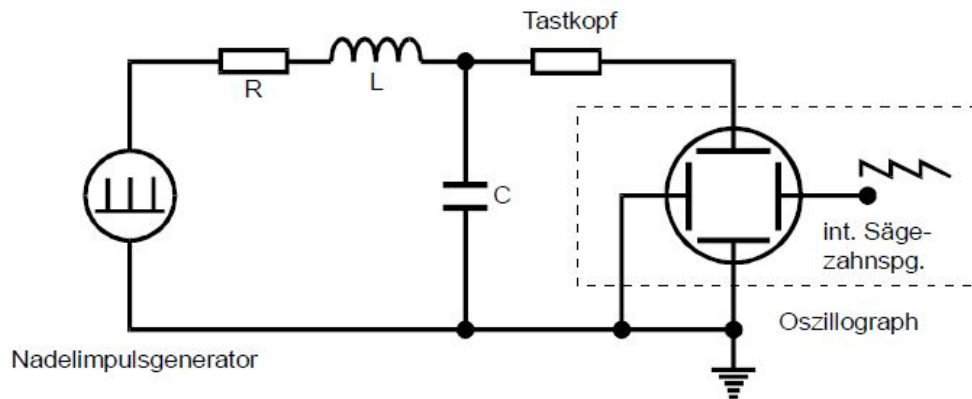


Abbildung 3: Messschaltung zur Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes R_{ap} [2, S. 294]

Dabei ist zu beachten, dass der kleinere Widerstand zu verwenden ist. Sind alle Parameter des Oszilloskops und des Generators optimal eingestellt, so lässt sich nun der Spannungsverlauf auf dem Bildschirm des Oszilloskops erkennen. Ist dies der Fall, wird der Cursor des Oszilloskops auf das lokale Maximum gesetzt und die Werte der Spannung U_C und der Zeit t abgelesen. Der Vorgang wird dann 15 mal für andere Maxima wiederholt.

2.3 Aperiodischer Grenzfall

Hier wird die gleiche Schaltung wie in 2.2 verwendet, mit dem Unterschied, dass nun ein variabler Widerstand verwendet wird. Dieser wird zunächst auf den kleinsten einstellbaren Widerstand eingestellt. Danach wird er solange erhöht, bis die Überschwüfung der Spannung gerade eben nicht mehr zu beobachten ist. Der eingestellte Wert wird daraufhin notiert.

2.4 Frequenzabhängigkeit der Spannung

Um die Frequenzabhängigkeit der Spannung herauszufinden, wird zunächst folgende Schaltung aufgebaut:

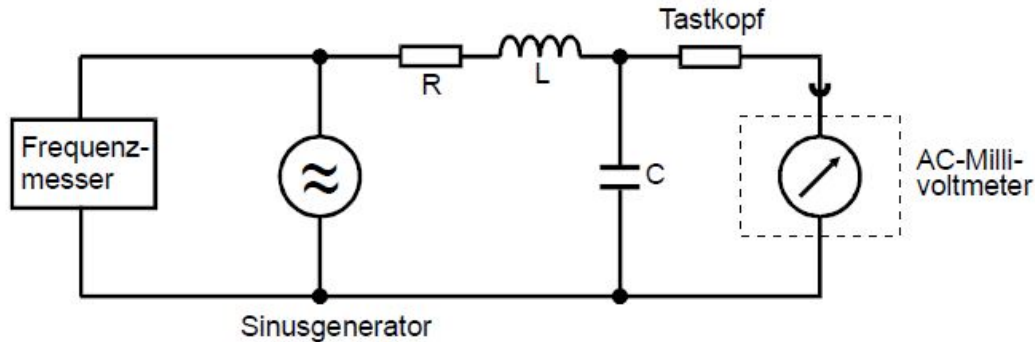


Abbildung 4: Schaltung zur Aufnahme des Frequenzganges eines RLC-Kreises [2, S. 295]

Die Frequenz am Generator wird möglichst klein eingestellt und an die Schaltung angeschlossen. Daraufhin sollte bei korrekt eingestelltem Oszilloskop der Spannungsverlauf angezeigt werden. Ist dies getan, wird die Frequenz am Generator schrittweise erhöht und die jeweilige Amplitude mit der entsprechenden Frequenz notiert. Zu beachten ist dabei jedoch, dass im Bereich ± 5 kHz um das ausgerechnete Maximum die Frequenz in 1 kHz-Schritten erhöht wird.

2.5 Frequenzabhängigkeit der Phase

Um die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung zu messen, werden beide Spannungen auf das Oszilloskop abgebildet. Dazu wird folgende Schaltung genutzt:

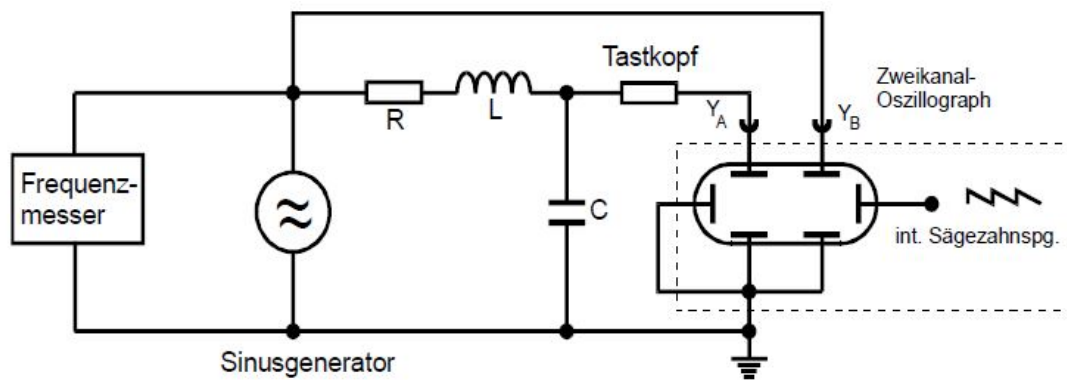


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bei einem RLC-Kreis [2, S. 296]

Nun wird, wie bei 2.4, die Frequenz eingestellt und daraufhin schrittweise erhöht. Es werden dieselben Frequenzen verwendet wie in 2.4. Dabei werden nach jeder Erhöhung die Cursor auf die Amplituden der Kurven gelegt. Die Zeitdifferenz Δt - in (5) als Abstand a eingetragen - wird daraufhin abgelesen und notiert. Die Periodenlänge b lässt sich berechnen und muss nicht gemessen werden.

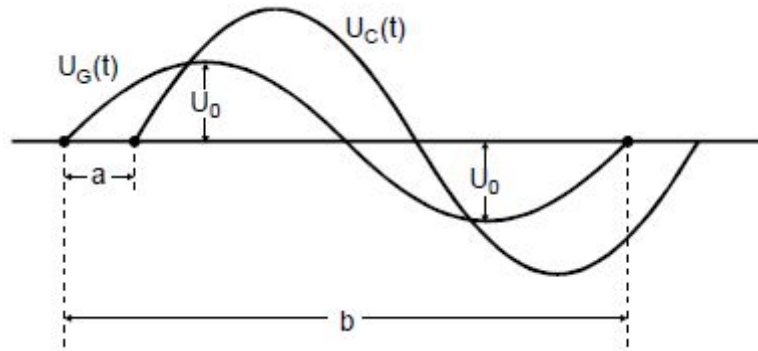


Abbildung 6: Phasenverschiebung zweier Spannungen [1, S. 282]

3 Auswertung

3.1 Apparatekonstanten

- Induktivität der Spule: $L = (3,56 \pm 0,03) \text{ mH}$
- Kapazität des Kondensators: $C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$
- kleinerer Widerstand: $R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$
- größerer Widerstand: $R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$
- Generatorwiderstand: $R_g = 50 \Omega$

3.2 Effektiver Widerstand und Abklingzeit

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 1.

Tabelle 1: Messdaten

U_C / V	$t / \mu\text{s}$
4	17,8
32	15,7
58	14,1
86	13,0
112	12,1
140	11,6
166	11,2
194	10,8
220	10,6
248	10,4
274	10,3
302	10,2

Aus diesen Messwerten folgt der Graph:

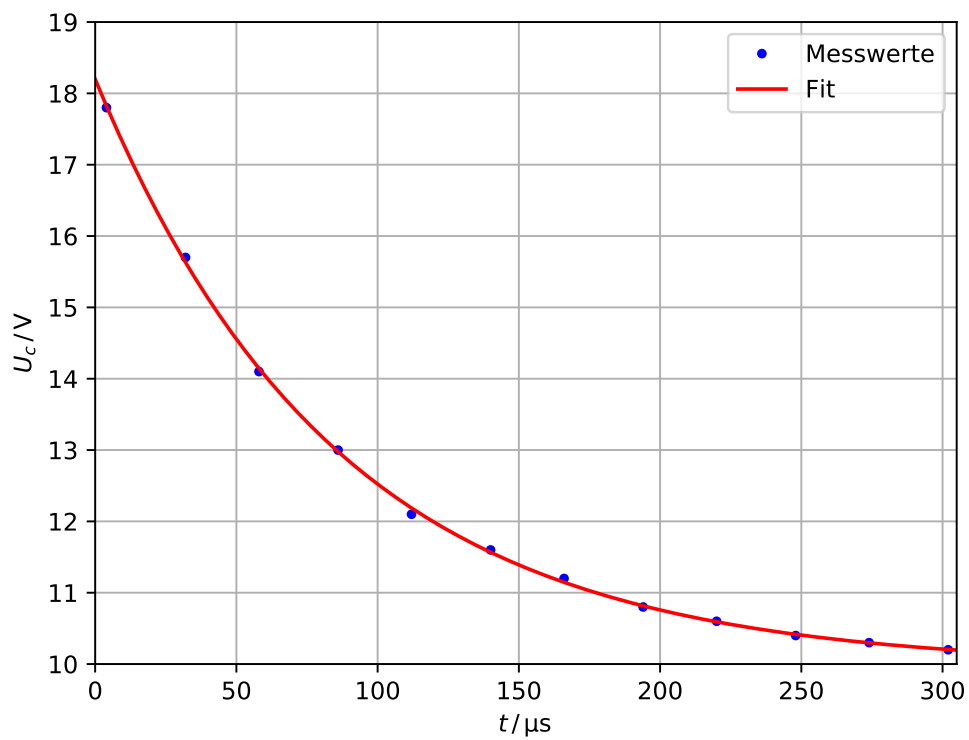


Abbildung 7: U_C - t -Diagramm zur Bestimmung des effektiven Widerstandes und der Abklingzeit

Mithilfe der Messwerte wird eine exponentiale Regression $a \cdot \exp(-b) + c$ durchgeführt, die den Exponenten $b = (11\,684,87 \pm 190,89) \text{ Hz}$ liefert. Da $U \sim I$ gilt, folgt aus Gleichung (3)

$$\begin{aligned} R_{\text{eff}} &= (82,50 \pm 1,52) \, \Omega \\ T_{\text{ex}} &= (85,58 \pm 1,40) \, \mu\text{s} \end{aligned}$$

Die Fehler erhält man aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (20)$$

Obwohl nur der kleinere Widerstand R_1 verwendet wurde, ist der effektive Widerstand mehr als doppelt so groß. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Generatorwiderstand mit beachtet werden muss. In den nachfolgenden Rechnungen wird immer der Gesamtwiderstand verwendet.

Der Theoriewert für den effektiven Widerstand ergibt sich aus

$$R_{\text{eff, theo}} = R_1 + R_g = (80,3 \pm 0,1) \, \Omega,$$

während der Theoriewert für die Abklingzeit

$$T_{\text{ex, theo}} = (87,92 \pm 0,76) \, \mu\text{s},$$

sich aus Gleichung (5) bestimmen lässt.

3.3 Aperiodischer Grenzfall

Der experimentelle Wert für den Widerstand, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt beträgt

$$R_{\text{ap}} = 1290 \, \Omega.$$

Der Theoriewert

$$R_{\text{ap, theo}} = (1677,96 \pm 710,92) \, \Omega$$

ergibt sich aus Gleichung (7).

3.4 Frequenzabhängigkeit der Spannung

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2: Messwerte

ν / kHz	U_C / V
15	11,0
20	11,8
25	13,3
30	15,6
31	16,2
32	16,7
33	17,3
34	17,6
35	17,8
36	17,8
37	17,6
38	17,2
39	16,6
40	15,8
45	12,4
50	10,2
55	8,8

Aus den Messwerten ergibt sich folgende Grafik:

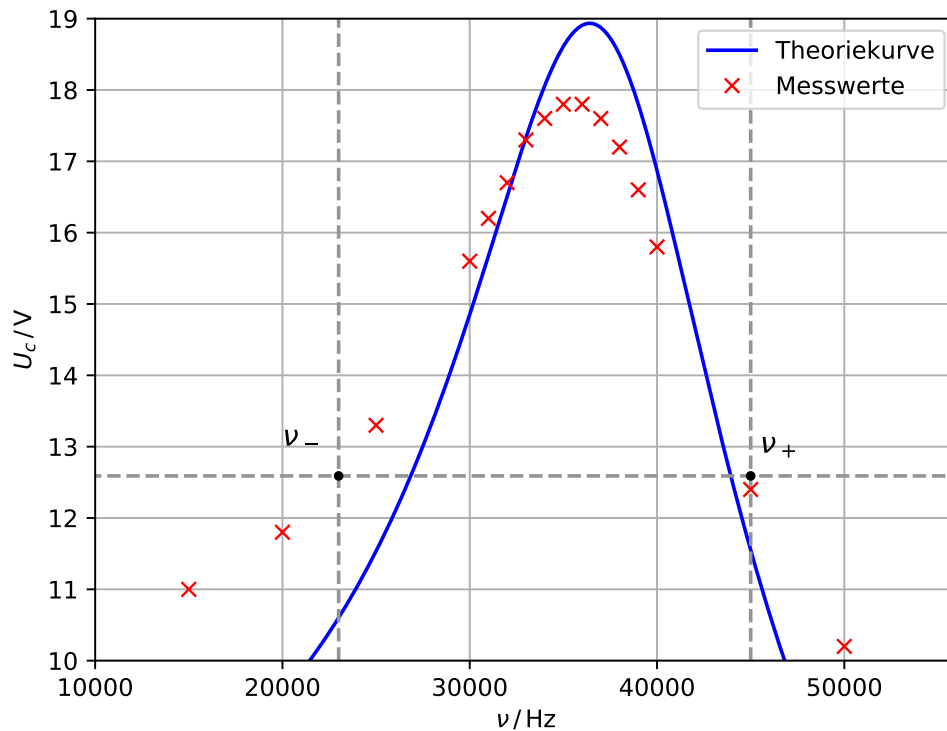


Abbildung 8: U_C - ν -Diagramm zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Spannung

Die Güte des Schwingkreises ist damit

$$q = 2,780 \pm 0,009.$$

Die Breite der Resonanzkurve beträgt nach Gleichung (18)

$$\nu_+ - \nu_- = 22\,000 \text{ Hz}.$$

Die Theoriewerte ergeben sich aus den Gleichungen (17), (15) und (18):

$$\begin{aligned} q_{\text{theo}} &= 2,609 \pm 0,012 \\ (\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}} &= (14\,499,78 \pm 123,97) \text{ Hz} \end{aligned}$$

3.5 Frequenzabhängigkeit der Phase

Die aufgenommenen Messwerte befinden sich in Tabelle 3

Tabelle 3: Messdaten

ν / kHz	$a / \mu\text{s}$
15	2,0
20	2,4
25	2,8
30	3,6
31	4,0
32	4,0
33	4,8
34	5,2
35	5,6
36	6,4
37	6,8
38	7,6
39	7,6
40	8,0
45	8,8
50	8,4
55	8,0

Die Phase berechnet sich aus:

$$\Phi = \frac{a}{b} \cdot 360^\circ. \quad (21)$$

Dabei ist b die Periodendauer der Generatorspannung, die sich aus $b = 1/\nu$ ergibt. Daraus ergibt sich der Graph:

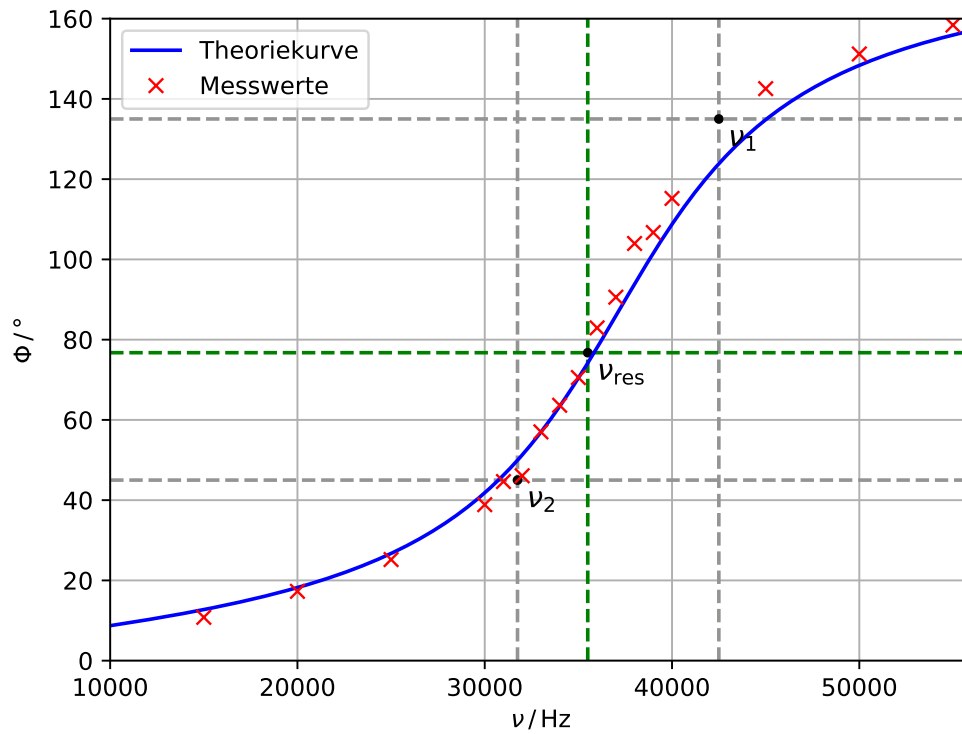


Abbildung 9: Φ - ν -Diagramm zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase

Die Resonanzfrequenz beträgt

$$\nu_{\text{res}} = 35\,500 \text{ Hz}$$

und ν_1 und ν_2 sind

$$\nu_1 = 42\,500 \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = 31\,750 \text{ Hz}$$

Die Theoriewerte ergeben sich aus den Gleichungen (14) und (12):

$$\nu_{\text{res}} = (36\,410,57 \pm 142,48) \text{ Hz}$$

$$\nu_1 = (45\,765,00 \pm 7155,73) \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = (31\,265,20 \pm 4887,38) \text{ Hz}.$$

4 Diskussion

Abweichungen:

$$\delta_{R_{\text{eff}}} = 2,73\%$$

$$\delta_{T_{\text{ex}}} = 2,66\%$$

$$\delta_{R_{\text{ap}}} = 23,12\%$$

$$\delta_q = 6,55\%$$

$$\delta_{\nu_+ - \nu_-} = 51,73\%$$

$$\delta_{\nu_{\text{res}}} = 2,50\%$$

$$\delta_{\nu_1} = 7,13\%$$

$$\delta_{\nu_2} = 1,55\%$$

Allgemein lässt sich sagen, dass das Experiment überwiegend gute Ergebnisse liefert. Die Abweichungen von R_{eff} , T_{ex} , q , ν_{res} , ν_1 und ν_2 liegen mit unter 10% im Rahmen der Messungenauigkeiten. Die einzigen Werte mit besonders hohen Abweichungen sind R_{ap} und $\nu_+ - \nu_-$. Beim aperiodischen Grenzfall lässt sich die Abweichung dadurch erklären, dass aufgrund der begrenzten Auflösung des Oszilloskops und der daraus resultierenden Dicke, der abgebildeten Linie, äußerst schwer zu erkennen ist wann das "Überschwingen" tatsächlich verschwindet. Die Breite der Resonanzkurve ist besonders fehlerbehaftet, da die Werte für ν_+ und ν_- per Hand aus dem Graphen mit den Messwerten genommen werden müssen und dies automatisch zu Fehlern bzw. Ungenauigkeiten beim Ablesen führt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *V354 - Gedämpfte und Erzwungene Schwingungen*. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.