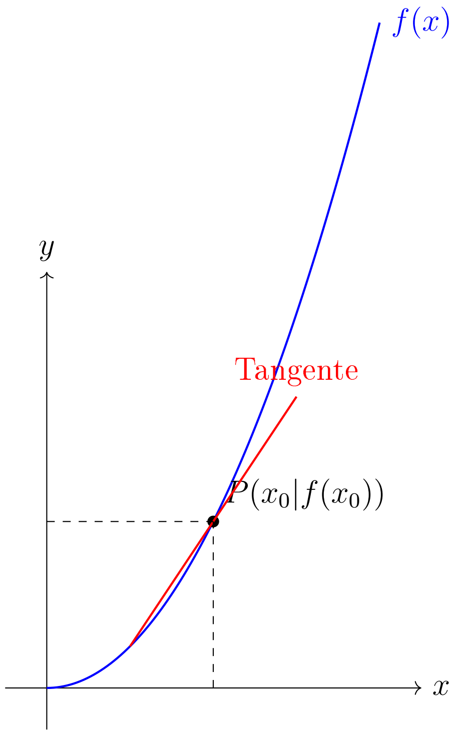
Erklärung: Mathematisches Differenzieren

Das Differenzieren ist ein zentrales Werkzeug der Mathematik, um die Änderungsrate (Steigung) einer Funktion an einer bestimmten Stelle zu bestimmen. Die Ableitung $f'(x)$ gibt an, wie stark sich der Funktionswert $f(x)$ ändert, wenn man x geringfügig verändert.

1. Bedeutung der Ableitung

- Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion im Punkt x.
- Ist $f'(x) > 0$, so steigt die Funktion an dieser Stelle; ist $f'(x) < 0$, so fällt sie.
- Ist $f'(x) = 0$, so liegt ein Extrempunkt (Hoch-/Tiefpunkt oder Sattelpunkt) vor.

2. Grafische Veranschaulichung



Die rote Gerade ist die Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt x_0. Ihre Steigung entspricht der Ableitung $f'(x_0)$.

3. Mathematische Definition

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert als

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Das ist der Grenzwert des Differenzenquotienten, wenn h gegen 0 geht.

4. Beispiel

Gegeben sei $f(x) = x^2$. Die Ableitung ist $f'(x) = 2x$. Für $x_0 = 2$ gilt:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Das bedeutet: Die Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $x = 2$ beträgt 4.