



## Merkblatt Analysis: Extrempunkte bestimmen

### 1. Was sind Extrempunkte?

Extrempunkte sind Hochpunkte, Tiefpunkte oder Sattelpunkte einer Funktion. Sie geben die Stellen an, an denen eine Funktion ihr Maximum oder Minimum (lokal oder global) erreicht.

### 2. Vorgehen zur Extrempunktbestimmung

1. **Funktion ableiten:** Bestimme die 1. Ableitung  $f'(x)$ .
2. **Notwendige Bedingung:** Setze  $f'(x) = 0$  und löse nach  $x$  (kritische Punkte).
3. **2. Ableitung:** Bestimme die 2. Ableitung  $f''(x)$ .
4. **Hinreichende Bedingung:** Untersuche die kritischen Punkte mit  $f''(x)$ :
  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  Tiefpunkt
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$  Hochpunkt
  - $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$  weitere Untersuchung nötig (z.B. 3. Ableitung oder Vorzeichenwechsel von  $f'(x)$ )
5. **Funktionswerte berechnen:** Setze die  $x$ -Werte in  $f(x)$  ein, um die  $y$ -Werte der Extrempunkte zu erhalten.

### 3. Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) = 0$ , aber  $f'(x)$  wechselt an  $x_0$  das Vorzeichen (z.B. Wendepunkt mit waagrechter Tangente).

### 4. Beispiel 1: Schritt-für-Schritt – Extrempunkte einer kubischen Funktion

Gegeben:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

*Schritt 1: 1. Ableitung bilden*

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

*Schritt 2: Notwendige Bedingung – Nullstellen der 1. Ableitung*

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

*Schritt 3: 2. Ableitung bilden*

$$f''(x) = 6x - 6$$

*Schritt 4: Hinreichende Bedingung prüfen*

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 0$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = 2$$

*Schritt 5: Funktionswerte berechnen*

$$f(0) = 2, f(2) = -2$$

**Ergebnis:** Hochpunkt  $(0|2)$ , Tiefpunkt  $(2|-2)$



## 5. Beispiel 2: Schritt-für-Schritt – Sattelpunkt

Gegeben:  $g(x) = x^3$

*Schritt 1: 1. Ableitung*

$$g'(x) = 3x^2$$

*Schritt 2: Notwendige Bedingung*

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

*Schritt 3: 2. Ableitung*

$$g''(x) = 6x, \quad g''(0) = 0$$

*Schritt 4: Vorzeichenwechsel prüfen*

$g'(x)$  wechselt an  $x = 0$  das Vorzeichen (von negativ zu positiv), daher Sattelpunkt bei  $x = 0$

$$g(0) = 0$$

**Ergebnis:** Sattelpunkt (0|0)

## 6. Übersicht: Vorgehen in Kurzform

- 1. Ableitung  $\rightarrow$  Nullstellen  $\rightarrow$  Kandidaten
- 2. Ableitung  $\rightarrow$  Vorzeichen prüfen
- Funktionswerte berechnen
- Sattelpunkt:  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) = 0$ , aber kein Extremum

## 7. Tipps und Hinweise

- Bei  $f''(x_0) = 0$  immer weiter prüfen (z.B. 3. Ableitung oder Monotonieverhalten).
- Bei Anwendungen: Randwerte nicht vergessen (z.B. Definitionsbereich beachten)!
- Skizze hilft beim Verständnis.

## 8. Übungsaufgabe

Bestimme alle Extrempunkte und Sattelpunkte der Funktion  $h(x) = x^4 - 4x^2$  Schritt für Schritt.