



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

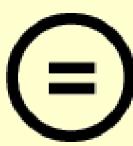
다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원 저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리와 책임은 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)



경북대학교 이학석사학위논문

ALT모형해를 이용한 허블텐션 해결

대학원 천문대기과학과

양 성 연

2019년 12월

경북대학교 대학원

ALT모형해를 이용한 히블텐션 해결

이 논문을 이학석사 학위논문으로 제출함

대학원 천문대기과학과

양 성 연

지도교수 황 재 찬

박 찬 경

양성연의 이학석사 학위논문을 인준함

2019년 12월

위원장 박 찬 경 ⑨

노 혜 팀 ⑨

황 재 찬 ⑨

경북대학교 대학원위원회

목 차

List of Figures.....	iii
List of Tables.....	v
1. 서론.....	1
2. LT 모형	6
2.1 Open LT	9
2.2 ALT	11
2.3 Density model	15
3. MCMC	19
3.1 SNIa	19
3.2 BAO	20
3.3 CMB	23
3.4 H_0 observation	24
4. 결과 및 결론.....	26
4.1 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$	27
4.2 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$	31
4.3 결론 및 토의	35
A 부록.....	40
A.1 Runge-Kutta 4 th order method	40
A.2 수치미분법	41
참고문헌	42

Abstract	44
-----------------------	-----------

List of Figures

1.1	FRW 계량에서의 물질 밀도 분포	2
1.2	LT 계량에서의 다양한 물질 밀도 분포 : 위는 우주 상수가 없을 때의 Open LT 모형이고, 아래는 우주 상수가 존재하는 ALT 모형이다	3
2.3	GBH Denisity model : 위의 그림은 Open LT 조건의 그림이고 사용된 모형 매개변수의 값은 $\Omega_{out} = 1.0$, $\Omega_{in} = 0.25$, $H_{out} = 67.66$, $H_{in} = 74.03$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다. 아래는 ALT 조건으로 허블텐션을 만족하고, 약간의 밀도 불균일이 존재하는 임의의 경우이다. 사용된 모형 매개변수의 값은 $\Omega_{out} = 0.3111$, $\Omega_{in} = 0.25$, $H_{out} = 67.66$, $H_{in} = 74.03$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다.	17
4.4	$r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC 결과	28
4.5	$r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 초신성 자료 best-fit fitting 그림 : case 1, case 2, case 3의 best-fit 결과를 OpenCDM와 Λ CDM의 경우와 비교하였다. y 축은 거리지수 값을 OpenCDM의 거리지수 값으로 표준화 한 것이고, x축은 적색편이 값이다.	29
4.6	$r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 best-fit값을 이용한 GBH 모형 구현	30
4.7	$r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC 결과	32
4.8	$r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 초신성 자료 best-fit fitting 그림 : case 1, case 2, case 3의 best-fit 결과를 OpenCDM와 Λ CDM의 경우와 비교하였다. y 축은 거리지수 값을 OpenCDM의 거리지수 값으로 표준화 한 것이고, x축은 적색편이 값이다.	33
4.9	$r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 best-fit값을 이용한 GBH 모형 구현	34
4.10	FRW 근사에서 CMB 테스트 만으로 돌린 MCMC 결과. - H_{out} 과 Ω_{out} 은 FRW의 H_0 와 Ω_M 과 같다.	37

List of Tables

1.1	Open LT model bestfit parameters [4]	4
2.2	ALT & FRW 에서의 d_C 비교 : FRW는 $H_0 = 67.66$, $\Omega_M = 0.3111$, $\Omega_\Lambda = 0.6889$ 일 경우의 d_C 이다. FRW_1 은 dverk 방법을 사용하였고, FRW_2 는 Romberg intergration을 사용하였다. ALT의 경우엔 $H_{out} = H_{in} = 67.66$, $\Omega_{out} = \Omega_{in} = 0.3111$ 이다.	12
2.3	ALT & OLT 에서의 d_C 비교 : $H_0 = 67.66$, $\Omega_{in} = 0.25$, $\Omega_{out} = 1.0$, $H_{in} = 74.03$, $H_{out} = 67.66$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다.	13
2.4	ALT & Open LT & FRW 에서의 d_C 비교 : FRW는 $H_0 = 67.66$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$ 일 경우의 d_C 이다. FRW_1 은 dverk 방법을 사용하였고, FRW_2 는 Romberg intergration을 사용하였다. Open LT와 ALT의 경우엔 $H_{out} = H_{in} = 67.66$, $\Omega_{out} = \Omega_{in} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$ 이다.	14
4.5	GBH 모형 매개변수의 사전 확률 범위.	26
4.6	$r_0 = 0.1 Gpc$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 영역	27
4.7	$r_0 = 0.1 Gpc$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 값	27
4.8	$r_0 = 1.0 Gpc$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 영역	31
4.9	$r_0 = 1.0 Gpc$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 값	31

1. 서론

현대 우주론은 우주상수(Λ)와 차가운 암흑물질(CDM)을 포함한 Λ CDM 표준모형을 기초로 하여 우주배경복사(Cosmic Microwave Background, CMB)와 BAO(Baryonic Acoustic Oscillation) 그리고 SNIa (Type Ia Supernovae)와 같은 여러 가지 관측 결과를 성공적으로 설명하고 있다. 그러나 최근 들어 σ_8 Tension과 H_0 Tension(허블 텐션) 등의 해결되지 못한 문제가 대두되고 있고 이들을 해결하기 위해서는 Λ CDM 표준모형을 벗어난 새로운 이론을 필요로 하고 있다.

그 중 H_0 텐션은 우리와 아주 가까운 우주의 천체를 관측했을 때 (A. Riese 연구진의 Cepheid 관측 [1] : $H_0 = 74.03 \pm 1.42$) 우주의 팽창속도와 Planck 인공 위성 데이터에서 해석한 우주 팽창속도 [2] ($H_0 = 67.66 \pm 0.42$)가 다른 문제를 일컫는다. 이를 설명하기 위한 무수한 연구들이 이루어지고 있는 상황이다. 그 중 변화하는 상태방정식의 암흑에너지 모형(wCDM)이나 스칼라장 암흑에너지 등의 변화하는 암흑에너지를 통한 접근이 대표적이다.

암흑에너지의 존재를 다른 매체로 대체하는 방법보다 직관적인 허블 텐션의 해결 방법이 존재한다. 바로 물질의 밀도와 공간 팽창 속도의 연관관계를 통해 설명하는 방법이다. 밀도가 작은 지역에선 약한 중력으로 공간의 팽창이 빠르고, 반대로 밀도가 큰 지역에서는 팽창이 느린다. 만약, 우리 근처에서 상대적으로 낮은 밀도 때문에 팽창 속도의 차이가 생긴다면 허블 텐션의 원인을 쉽게 설명할 수 있다.

다음의 해결법을 프리드만-로버트슨-워커 계량(Freidmann-Robertson-Walker metric : FRW metric)에서의 프리드만 방정식에서 생각해보자. 암흑에너지와 복사 항을 고려하지 않고 물질 항과 곡률항만 살아있는 경우이다. 이 경우에 우리는 곧바로 위의 해결법으로 해석하기에는 곤란함이 있다는 사실을 깨달을

수 있다.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_M - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.1)$$

$$1 = \Omega_M + \Omega_K, \quad \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_M, \quad \Omega_K = -\frac{kc^2}{a^2 H^2} \quad (1.2)$$

식 (1.1)에서 물질 밀도($\frac{8\pi G}{3}\rho_M$)가 커지면 허블 팽창률 H 가 커질 것 같지만, 자연스럽게 식 (1.2)에서 밀도항(Ω_M)이 커짐에 따라 곡률항(Ω_K)이 줄게 된다. 즉 밀도가 커지면 곡률 항($-\frac{kc^2}{a^2}$)이 작아지게 된다. 만약, 허블 팽창률이 결정될 때 커지는 밀도 항의 효과보다 줄어드는 곡률 항의 영향이 크다고 할 때, 밀도가 커지는 경우 허블 팽창률은 감소하게 된다. 그러나 문제는 프리드만 식을 한 눈에 보았을 때 어떤 항의 영향이 클 것인지 예상하기는 쉽지 않다는 점에 있다.

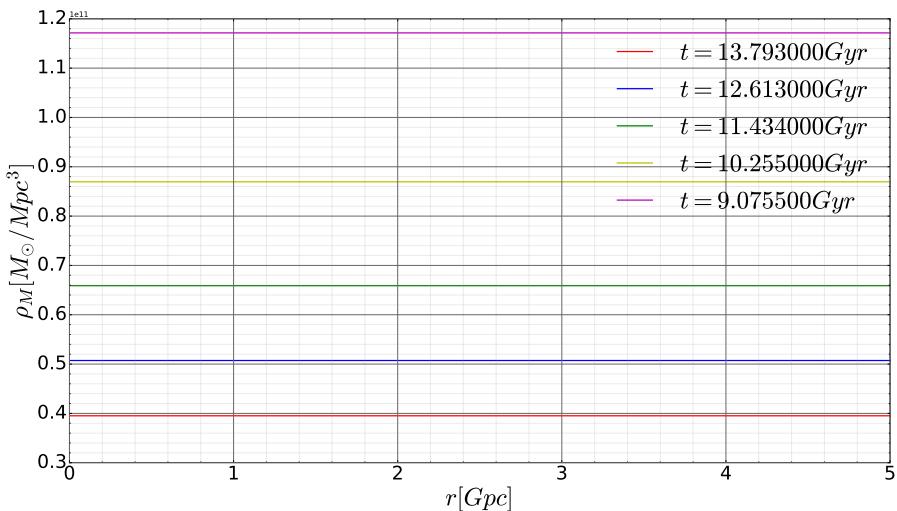


Fig. 1.1 FRW 계량에서의 물질 밀도 분포

또한, 근본적으로 FRW를 이용한 우주 모형은 우리가 등방하고 균일한 상태의 우주에 있음을 시사한다. 특히 Fig. 1.1과 같이 동일한 시간(t)에서 물질의 밀도는 공간좌표(r)에 상관없이 균일하다. 이런 계량에서는 같은 시간의 공간에

서 물질 밀도 차이에 의한 허블 팽창 속도 차이를 고려하기 곤란해진다. 이처럼, 현대 우주론의 표준 모형에서는 밀도 차이를 구현하기가 쉽지 않다.

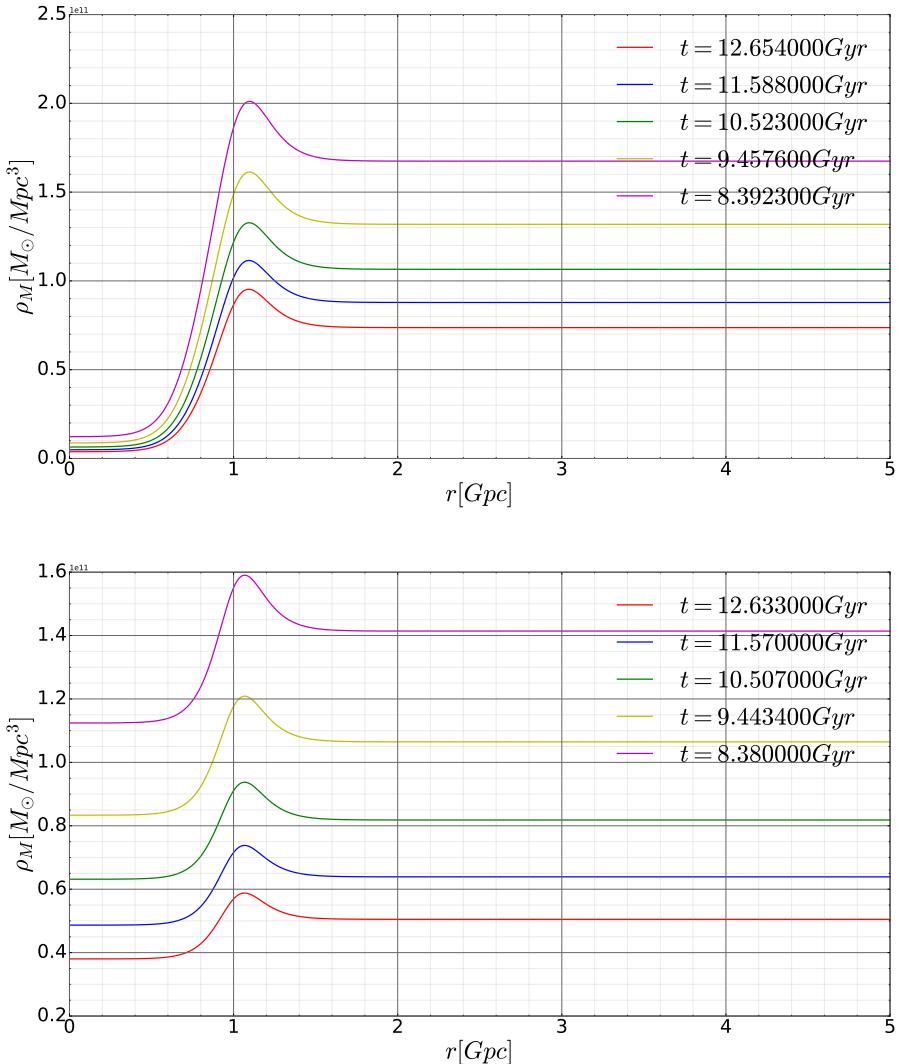


Fig. 1.2 LT 계량에서의 다양한 물질 밀도 분포 : 위는 우주 상수가 없을 때의 Open LT 모형이고, 아래는 우주 상수가 존재하는 Λ LT 모형이다.

하지만, 르메트르-톨만 계량(Lemaitre-Tolman metric: LT metric)을 사용하면 불균일한 밀도 분포 설정이 가능해진다. 불균일한 밀도 분포를 표현한 그래

그는 Fig. 1.2와 같다. 불균일한 밀도 분포에 대한 선택은 직관적인 관측 결과가 존재하지 않기 때문에 무한한 가능성으로 열려 있다.

LT 계량은 구형 대칭 계량이며 FRW 계량에서 좀 더 일반화된 경우이다. 왜냐하면, 규모 지수(Scale factor : $A(r, t)$)의 값이 시간좌표와 공간좌표에 따라 달라지기 때문이다. LT 모형은 $A(r, t) = a(t)r$, $k(r) = kr^2$ 의 조건을 취하면 FRW 계량으로 변환된다.

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{A'^2(t, r)}{1 - k(r)} dr^2 + A^2(t, r) d\Omega^2 \quad (1.3)$$

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} dr^2 + a^2(t)r^2 d\Omega^2 \quad (1.4)$$

심지어, LT 계량을 사용해 아인슈타인 방정식을 풀면, 특정 조건에서 프리드만 방정식과 비슷한 형태의 수식이 나오며 빛의 전파 방정식(Light propagation equation)도 FRW 계량에서의 경우에서 일반화 된 형태가 된다. 즉, LT는 FRW를 완벽하게 포함하고 있기 때문에 FRW에서 충분히 설명하는 각종 관측현상에 대한 해석을 LT 모형 아래에서도 내릴 수 있을 것이다. LT 모형에 대한 자세한 수식은 2절에서 설명할 예정이며 Enqvist (2007)[3]을 확인하면 더 세세한 계산과정을 확인 할 수 있다.

Table 1.1: Open LT model bestfit parameters [4]

H_{in}	H_{out}	Ω_{in}	Ω_{out}	r_0	Δr
0.56	0.43	0.13	1.0	2.5	0.64

허블 상수의 단위는 [100km/s/Mpc], 거리 좌표 단위는 [Gpc]이다. GBH 모형은 공간에 따라 달라지는 밀도 모형이며, H_{in} , H_{out} , Ω_{in} , Ω_{out} , r_0 , Δr 의 매개변수를 가지고 있는 하이퍼볼릭 탄젠트(Hyperbolic tangent) 꼴의 함수이다. 이 모형에 대한 자세한 논의는 2.3절에 있다.

이와 같은 접근법을 사용한 선행 연구로서 Garcia-Bellido et. al. (2008)[4]은 암흑에너지와 고려하지 않고 SNIa와 BAO 그리고 CMB 자료를 맞추는 LT

모형 매개변수 탐색 연구를 수행하였다. 이들은 불균일 밀도 모형으로 GBH 모형을 선택하였다. 하지만, 위 논문의 결과 중 하나인 Table 1.1 을 보면 관측을 설명하는 가장 잘 맞추는 매개변수들 중 허블 팽창률을 의미하는 H_{in} 과 H_{out} 이 실제 관측값과는 큰 편차를 보임을 쉽게 확인 할 수 있다.

이 연구는 거대 공동(Big void) LT 모델 (Open LT) 기반으로 이루어졌는데, 우주 상수가 없는 모형이다. 하지만, 현대우주론에서 CMB와 BAO와 같은 관측들은 FRW 상에서 어느 정도 우주 상수의 존재를 인정하는 결과를 내포하지만, Open LT 모형은 아예 우주 상수가 없기 때문에 Table. 1.1과 같은 이상한 허블 팽창률을 가진 것이라 추측한다.

따라서 나는, 우주 상수항을 고려한 일반적인 LT 모형 (Λ LT)을 다뤄야 위의 연구가 가진 모형의 한계를 극복할 수 있을 것이라 생각하였고, 이번 연구는 완벽하게 Λ LT 상에서 진행되었다.

이번 연구에서 Λ LT모형을 기반으로 실제 관측 데이터를 맞추기 위해 사용한 방법은 마코프 체인 몬테 카를로(Markov Chain Monte Carlo Method, MCMC) 방법으로, 그 중 가장 간단한 메트로폴리스-헤이스팅스(Metropolis-Hastings) 알고리즘을 사용하였다. 그 중에서도 관측값과 이론값의 차이를 설명하는 χ^2 인자를 모델 선호도 계산의 중요한 요소로 사용하였다. MCMC에 사용한 여러 구체적인 χ^2 계산 방법은 3절에서 자세히 설명할 예정이다.

MCMC로부터 LT 모형이 납득할만한 결과를 주었을 때, 우리는 허블 텐션 이 전혀 문제가 아니었음을 깨닫게 될 것이다. 또한, 실제로 가까운 우주와 아주 먼 곳에서의 밀도차이가 존재함으로 결과가 나온다면 Tully et. al. (2019) [5] 논문 등에서 주장하는 국부 공동(Local Void)의 존재를 이론적으로 설명할 수 있는 좋은 모델이 될 것이라 예상한다.

2. LT 모형

르메트르-톨만 계량(Lemaitre-Tolman metric: LT metric)은 FRW 계량의 일반적 형태이며, 구형 대칭 계량이다.

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2(t, r)}{1 + 2E(r)} dr^2 + R^2(t, r) d\Omega^2 \quad (2.5)$$

$$= -dt^2 + \frac{A'^2(t, r)}{1 - k(r)} dr^2 + A^2(t, r) d\Omega^2 \quad (2.6)$$

일반적으로, LT 계량은 연구하는 팀에 따라서 두 가지의 다른 표현 방식을 가지고 있다. 나는 두 번째 표현 방식을 선택 하였다. 두 표기는 다음과 같은 간단한 관계를 가지고 있다. $R(t, r) = A(t, r)$ 와 $2E(r, t) = -k(r, t)$ 이다.

LT 계량과 다음과 같은 에너지-모멘텀 텐서를 이용하여 아인슈타인 방정식을 풀 수 있다.

$$T_\mu^\nu = -\rho_M(r, t) \delta_0^\nu \delta_\mu^0 - \rho_\Lambda \delta_\mu^\nu \quad (2.7)$$

여기서 몇 가지 확인해야 할 점이 있다. 이번 연구에선 압력항이 에너지-모멘텀 텐서에 들어가 있지 않았다. 초기 우주의 정보를 고려하기 위해서는 압력항이 존재해야하는 것이 상식적이지만, 압력항이 존재했을 때의 LT모형의 해를 해석학적으로나, 수치적으로 풀어내는 것은 어려운 상황에 있다. 또한, 기존 LT 모형에서는 ρ_Λ 가 없을 때를 많이 다루는데, 그 이유는 해석학적인 풀이가 알려져 있지 않기 때문이다. 따라서 ρ_Λ 의 존재 유무가 Open LT 모델과 ALT모델의 차이를 만든다. 아인슈타인 방정식을 풀게 되면 해는 다음과 같다.

$$H_\perp^2 + 2H_\perp H_\parallel + \frac{k(r)}{A^2} + \frac{k'(r)}{AA'} = 8\pi G(\rho_M + \rho_\Lambda) \quad (2.8)$$

$$\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + k(r) = 8\pi G\rho_\Lambda A^2 \quad (2.9)$$

$$H_\perp(r, t) \equiv \frac{\dot{A}(r, t)}{A(r, t)} \quad (2.10)$$

$$H_\parallel(r, t) \equiv \frac{\dot{A}'(r, t)}{A'(r, t)} \quad (2.11)$$

H_{\perp} 는 Transverse Hubble rate라고 정의되며, H_{\parallel} 는 Longitudinal Hubble rate라고 정의 된다. 그리고 dot은 t 미분을 의미하고 prime은 r 미분을 의미한다. 즉 LT 모형에서는 두 가지 방향에서의 허블 팽창률이 정의된다. 또한, 식(2.9)는 다른 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{A}^2(r, t) = \frac{2M(r)}{A(r, t)} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda}A^2 - k(r) \quad (2.12)$$

$$= \frac{F(r)}{A(r, t)} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda}A^2 - k(r) \quad (2.13)$$

$$\frac{\dot{A}^2(r, t)}{A^2} = \frac{2M(r)}{A^3(r, t)} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda} - \frac{k(r)}{A^2(r, t)} \quad (2.14)$$

식 (2.14)는 FRW에서의 프리드만 방정식과 유사하다. $F(r)$ 과 $M(r)$ 은 많이 사용 되는 표현 방식을 모두 나타낸 것이며, 나는 $M(r)$ 를 주로 사용하였다. 둘 사이의 관계는 아래와 같고, 둘 다 오로지 r 좌표에 따라서만 임의의 값을 가진다. 따라서 $M(r)$ 의 형태를 다음과 같이 적절하게 변화 시킬 수 있다.

$$F(r) = 2M(r) = H_0^2(r)\Omega_M(r)A_0^3(r) \quad (2.15)$$

$$k(r) = -H_0^2(r)\Omega_K(r)A_0^2(r) \quad (2.16)$$

$$\Omega_K(r) = 1 - \Omega_M(r) - \Omega_{\Lambda} \quad (2.17)$$

여기서 $H_0(r) = H(r, t_0)$ 과 $A_0(r) = A(r, t_0)$ 이고, 아래 첨자에 있는 0은 현재 시간의 값을 표현한다. $M(r)$ 과 $k(r)$ 을 적절한 형태로 바꿔준다면 마치 FRW 프리드만 방정식(Friedmann Equation)에서의 H_0 와 Ω_M 을 연상시키는 $H_0(r)$ 과 $\Omega_M(r)$ 그리고 $\Omega_K(r)$ 인자들을 정의할 수 있다. 위의 세 식을 식 (2.14)에 대입하여 정리하면 놀랍게도 LT 모형에서 완벽하게 FRW의 프리드만 방정식을 모사하는 방정식을 만들 수 있게 된다. FRW에서와 LT에서의 차이는 거리 좌표(r)의 정보가 추가 되었다는 점이다. 따라서 ALT 모형에서는 같은 시간 좌표에서도 r 에 따라 규모 지수값들이 다르게 결정된다.

$$H_{\perp}^2(r, t) = H_0^2(r) \left[\Omega_M(r) \left(\frac{A_0(r)}{A(r, t)} \right)^3 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_K(r) \left(\frac{A_0(r)}{A(r, t)} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

식 (2.18)을 르메트르-프리드만 방정식이라 부른다.

LT 모형에서는 빛 전파 방정식(Light propagation or geodesic equation) 역시 계산 할 수 있다. t, r, z 에서 어떤 항을 방정식의 주 항으로 둘 것인지는 자유다 ($(\frac{dz}{dt}, \frac{dr}{dt})$, $(\frac{dz}{dr}, \frac{dt}{dr})$, $(\frac{dt}{dz}, \frac{dr}{dz})$ 모두 가능한 형태이다). 나는 $\frac{dt}{dz}$, $\frac{dr}{dz}$ 를 이용해 $t(z)$, $r(z)$ 를 구해내었다.

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sqrt{1 - k(r)}}{(1 + z)\dot{A}'(r, t)} \quad (2.19)$$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{A'(r, t)}{(1 + z)\dot{A}'(r, t)} \quad (2.20)$$

식 (2.19), (2.20)은 z 에 대한 상미분방정식으로, 수치적인 계산으로 풀 수 있다. 초기 조건을 알고 있는 중앙에 존재하는 관측자 ($r = 0, t = t_0$)부터 원하는 z 까지 계산을 진행시켜 $t(z)$, $r(z)$ 를 얻어 낼 수 있다. 마치 광원뿔(light cone)을 역추적하는 과정과 같다. 따라서 중앙 관측자의 입장에서 r, t, z 중 나머지 두 값만 알아도 나머지 하나의 값이 광원뿔상에서 결정된다.

빛 전파 방정식의 계산이 가능하면 자연스럽게 각종 거리 정보도 아래 식을 통해 획득 할 수 있다. 차례대로 광도 거리(Luminosity distance), 동행좌표계 거리(Comoving distance), 각 거리(Angular distance)이다.

$$d_L(z) = (1 + z)^2 A[r(z), t(z)] \quad (2.21)$$

$$d_C(z) = (1 + z) A[r(z), t(z)] \quad (2.22)$$

$$d_A(z) = A[r(z), t(z)] \quad (2.23)$$

또한, 중앙에 있는 관측자로부터의 이론적인 거리 지수(μ)도 계산 할 수 있게 된다.

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{Gpc}} \right) + 40 \quad (2.24)$$

2.1 Open LT

Open LT모형에선 식 (2.18)에 Ω_Λ 항이 존재하지 않는다. (Open LT는 위의 식들에서 우주 상수 관련항이 모두 제외된 경우이다.) 과거 Garcia-Beilido et. al. (2008)은 Open LT 모형이 암흑에너지가 없는 거대한 보이드 모형에서 제 1 형 초신성 자료를 Λ CDM 경우 만큼 잘 맞춘다는 것을 보였다. Open LT 관련 식들은 다음과 같다.

Open LT경우엔 르메트르-프리드만 방정식을 dt 성분과 dA 성분으로 양변에 분리하여 적분하면 아래와 같은 식으로 정리된다.

$$H_0(r)t(r) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_K(r)}} \sqrt{1 + \frac{\Omega_M A_0(r)}{\Omega_K(r)A(r,t)}} - \frac{\Omega_M(r)}{2\sqrt{\Omega_K^3}} \log \left(2\sqrt{\Omega_K(r)\Omega_M \frac{A(r,t)}{A_0(r)}} + \Omega_M(r) + 2\Omega_K(r) \frac{A(r,t)}{A_0(r)} \right) \quad (2.25)$$

LT모형에서 현재 시간 t_0 는 위의 식에서 $A(r,t) = A_0(r)$ 조건을 사용해 찾아 낼 수 있다. 위의 적분 식은 균일한 빅뱅이 가정되어 있는 모형으로써, 다시 말해서 공간에 관계 없이 빅뱅이 일어나는 시간은 일정하다. 즉 $t_{\text{Big Bang}}(r) = 0$ 이다. $t_{\text{Big Bang}}(r)$ 을 빅뱅시간이라고 부르며, 빅뱅시간때의 규모 지수 값 역시 0 이다. 즉 $A(r, t_{\text{Big Bang}}) = 0$ 이다.

Open LT의 경우엔 식 (2.18)에서 해석학적으로 풀 때개변수해가 존재한다. 매개변수는 η 를 이용하였고, $k(r)$ 이 0보다 크거나 작을 때 혹은 같을 때에 따라 해가 달라진다. $k(r) < 0$ 일 경우엔 다음과 같이 풀린다.

$$A(r,t) = \frac{M(r)}{k(r)} (1 - \cosh(\eta)) \quad (2.26)$$

$$t = t - t_{\text{Big Bang}}(r) = \frac{M(r)}{\sqrt{-k^3(r)}} (\sinh(\eta) - \eta) \quad (2.27)$$

이 해석학적인 해는 아무 r, t 를 알고 있을 때의 규모 지수 $A(r, t)$ 값을 알 수 있게 해준다. 매개변수 해의 형태로 되어있기 때문에 r, t 로만 $A(r, t)$ 를 구해내는 과정이 의아할 수 있다. 따라서 풀이의 좀 더 자세한 설명을 추가하자면, 식 (2.27)을 통해 알고있는 t 값을 통해서 η 값을 찾고, 순차적으로 찾아낸 η 와 알고 있는 r 값을 이용해 식 (2.26)식으로부터 $A(r, t)$ 값을 알아낼 수 있다.

또한 식 (2.26)와 (2.27) 그리고 우주상수 관련 항이 없는 식 (2.8), (2.9)으로부터 $A(r, t)$ 을 r, t 로 미분 했을 때의 식을 얻어 낼 수 있다.

$$\dot{A}(r, t) = \frac{M(r)}{A\sqrt{-k(r)}} \sinh(\eta) \quad (2.28)$$

$$A'(r, t) = \left(\frac{M(r)'}{M(r)} - \frac{k'(r)}{k(r)} \right) A(r, t) + \left[\left(\frac{3k'(r)}{2k(r)} - \frac{M'(r)}{M} \right) t \right] \dot{A}(r, t) \quad (2.29)$$

$$\dot{A}' = \frac{1}{2\dot{A}(r, t)A(r, t)} \left(2M'(r) - A'(r, t)\dot{A}^2(r, t) - (k(r)A'(r, t) + k'(r)A(r, t)) \right) \quad (2.30)$$

식 (2.28), (2.29)은 식 (2.26), (2.27)으로부터 유도되고, 식 (2.30)는 우주 상수항이 없는 식 (2.8), (2.9)으로부터 유도 된다. 그리고 $M'(r)$ 와 $k'(r)$ 은 식 (2.15)와 (2.16)에서 계산 할 수 있다.

$$2M'(r) = 2H_0(r)H'_0(r)\Omega_M(r)A_0^3(r) + H_0^2\Omega'_M(r)A_0^3(r) + 3H_0^2\Omega_M(r)A_0^2(r)A'_0(r) \quad (2.31)$$

$$k'(r) = -2H_0(r)H'_0(r)\Omega_K(r)A_0^2(r) - H_0^2\Omega'_K(r)A_0^2(r) - 2H_0^2\Omega_K(r)A_0(r)A'_0(r) \quad (2.32)$$

식 (2.8)에 식 (2.14)를 대입하면 식(2.33)이 나온다. 따라서 $M'(r)$ 와 $k'(r)$ 그리고 $A'(r, t)$ 을 알고 있음으로 우리는 실제 물질 밀도값 ρ_M 을 얻어 낼 수 있다.

식 (2.34)은 LT모형에서 재정의된 임계밀도이다.

$$\frac{2M'(r)}{A'(r,t)A^2(r,t)} = 8\pi G\rho_M \quad (2.33)$$

$$\rho_c(r) \equiv \frac{8\pi G}{3H_0(r)} \quad (2.34)$$

2.2 ALT

ALT는 LT모형에서 우주상수가 존재한 상태에서, 물질밀도의 약간의 불균일성을 가미할 수 있는 의미있는 모형이다. 하지만 식 (2.18)의 해석학적인 해를 가지고 있지 않았기 때문에 모든 계산을 수치적인 접근으로 해결해야 한다. 다행이도 식 (2.8)에서 (2.18)까지의 식들이 상미분방정식(ODE)에서 극복이 되는 수식들이기 때문에 접근하는 데 그다지 어려움은 없다. 수치적 방법으로 Runge-kutta 4th order method(RK4)와 Dverk method[6]를 사용하였다. 계산은 Fortran 95 언어를 사용한 코드로 진행하였다.

하지만 ALT 코드는 수치적 계산을 바탕으로 하고 있기 때문에 수치 오류를 지속적으로 인지할 필요가 있다. 특히 현재 A' 성분을 계산할 때, A 값을 구한 후 중앙 차분법을 사용하는데, A 값의 크기가 h 값과 비슷할 정도로 작을 때 A' 값이 크게 뛰어 버리는 문제가 생성되고 있다.

ALT 계산이 올바르게 진행되는지 확인하는 방법 중 하나는 ALT 코드에서 Open LT 근사와 FRW 근사를 취해 실제 Open LT, FRW 코드에서의 결과와 같은 값을 주는지 확인하는 것이다. 왜냐하면 기본적으로 ALT는 Open LT와 FRW를 포함하고 있기 때문이다. 암흑에너지 항의 값이 0이고 물질밀도의 불균일성($\rho_M(r)$ 또는 $\Omega_M(r)$)이 존재하면 Open LT가 되는 것이고, 암흑에너지 값이 0이 아니고 물질밀도의 불균일성이 존재하지 않으면 FRW가 되는 것이다.

Table 2.2는, FRW 기반 식으로 풀어 낸 두 가지의 d_C 계산과 ALT코드에서 FRW 근사($H_{out} = H_{in}$, $\Omega_{out} = \Omega_{in}$)를 사용한 계산 값을 비교한다. 다른 방식으

Table 2.2: ALT & FRW 에서의 d_C 비교 : FRW는 $H_0 = 67.66$, $\Omega_M = 0.3111$, $\Omega_\Lambda = 0.6889$ 일 경우의 d_C 이다. FRW_1 은 dverk 방법을 사용하였고, FRW_2 은 Romberg intergration을 사용하였다. ALT의 경우엔 $H_{out} = H_{in} = 67.66$, $\Omega_{out} = \Omega_{in} = 0.3111$ 이다.

z	$d_{C\text{FRW}_1}$ [Mpc]	$d_{C\text{FRW}_2}$ [Mpc]	$d_{C\text{ALT}}$ [Mpc]
0.1	432.56839	432.56839	432.56838
0.2	843.58873	843.58873	843.58870
0.3	1232.73097	1232.73097	1232.73090
0.4	1600.17156	1600.17156	1600.17146
0.5	1946.48254	1946.48254	1946.48240
0.6	2272.51940	2272.51940	2272.51922
0.7	2579.32098	2579.32098	2579.32075
0.8	2868.02759	2868.02759	2868.02730
0.9	3139.81852	3139.81852	3139.81818

로 얻어낸 두 FRW 계산은 거의 같은 값을 제시한다. 수치 계산의 차이와, LT 코드의 빛 전파 방정식 풀이 기법의 특징 때문에 z 가 증가함에 따라 FRW 계산과의 차이가 커진다. z 가 0.9가 될 때까지의 차이는 약 0.4kpc 이다. 이 차이는 ALT코드의 계산 스텝 사이즈가 작을수록 더 줄어들 것으로 보인다.

Table 2.3을 보면 Open LT의 경우를 ($\Omega_\Lambda = 0$ 또는 $\Omega_{out} = 1$) 2.1절의 수식을 이용하여 최대한 해석학적으로 푼 경우와, ALT코드를 이용해 수치적 계산으로 풀어낸 경우를 나타낸 것이다. 수치 계산의 오차 누적은 z 가 0.9일 때 약 1Mpc의 d_c 의 차이를 만들어낸다. 이는 Table 2.2에서 생기는 오차보다 훨씬 큰 차이를 제시한다. 그 이유는 근본적으로 LT모형의 수치적 계산에서 유발되는 것일 수 있다. 예를 들어, 중앙차분법의 오차는 FRW 근사와 Open LT의 경우 모두에 영향을 주는 수치적 방법이다.

Table 2.3: ALT & OLT 에서의 d_C 비교 : $H_0 = 67.66$, $\Omega_{in} = 0.25$, $\Omega_{out} = 1.0$, $H_{in} = 74.03$, $H_{out} = 67.66$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다.

z	$r[\text{Gpc}]$	$t[\text{yr}]$	$d_{C\text{ALT}}[\text{Mpc}]$
0.1	0.384	9718900456	384.28785
0.2	0.736	8696416251	744.91336
0.3	1.095	7495301241	1180.41506
0.4	1.408	6612864293	1531.87190
0.5	1.674	5956498601	1822.08376
0.6	1.914	5405979194	2083.17733
0.7	2.132	4935552826	2320.78192
0.8	2.332	4529568915	2538.29225
0.9	2.515	4176291270	2738.39558
z	$r[\text{Gpc}]$	$t[\text{yr}]$	$d_{C\text{OLT}}[\text{Mpc}]$
0.1	0.384	9728979012	384.28884
0.2	0.736	8706321568	744.96830
0.3	1.096	7503846269	1180.89369
0.4	1.408	6620952545	1532.51848
0.5	1.674	5964326849	1822.84483
0.6	1.914	5413590559	2084.04120
0.7	2.132	4942978941	2321.73933
0.8	2.332	4536835162	2539.33539
0.9	2.516	4183418403	2739.51460

Table 2.4: ALT & Open LT & FRW 에서의 d_C 비교 : FRW는 $H_0 = 67.66$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$ 일 경우의 d_C 이다. FRW_1 은 dverk 방법을 사용하였고, FRW_2 는 Romberg intergration을 사용하였다. Open LT와 ALT의 경우엔 $H_{out} = H_{in} = 67.66$, $\Omega_{out} = \Omega_{in} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0$ 이다.

z	$r[\text{Gpc}]$	$t[\text{yr}]$	$d_{C\text{ALT}}[\text{Mpc}]$	$d_{C\text{FRW}_1}[\text{Mpc}]$
0.1	0.41967	10382088049	419.67329	419.67327
0.2	0.79943	9310008926	799.43312	799.43310
0.3	1.14732	8415633399	1147.32140	1147.32138
0.4	1.46915	7659518812	1469.15653	1469.15651
0.5	1.76927	7012948775	1769.26814	1769.26814
0.6	2.05096	6454539966	2050.95700	2050.95702
0.7	2.31679	5968056490	2316.79314	2316.79318
0.8	2.56882	5540959371	2568.81512	2568.81517
0.9	2.80867	5163418590	2808.66669	2808.66677
z	$r[\text{Gpc}]$	$t[\text{yr}]$	$d_{C\text{OLT}}[\text{Mpc}]$	$d_{C\text{FRW}_2}[\text{Mpc}]$
0.1	0.41967	10392143298	419.67329	419.67327
0.2	0.79943	9320064156	799.43312	799.43310
0.3	1.14732	8425688604	1147.32140	1147.32138
0.4	1.46916	7669573989	1469.15652	1469.15651
0.5	1.76927	7023003921	1769.26813	1769.26814
0.6	2.05098	6464595081	2050.95698	2050.95702
0.7	2.31679	5978111574	2316.79311	2316.79318
0.8	2.56882	5551014425	2568.81506	2568.81517
0.9	2.80868	5173473613	2808.66661	2808.66677

하지만 FRW 근사 경우보다 약 10000배의 오차 차이가 나기 때문에 그 외의 이유일 가능성이 있다. 예를 들어, Open LT 풀이에서, 식 (2.26)과 (2.27)에서 $A(r, t)$ 를 계산할 때 사용하는 뉴턴-랩슨 방법(Newton-Raphson Method)과 같은 간단한 수치 방법에서 유발되는 차이일 수도 있다.

두 계산 결과를 비교적 정확한 FRW 코드와 비교하는 방법이 존재한다. 바로, 해석학적인 코드와, 수치적 방법을 이용한 코드에서 Open CDM 근사를 취하는 것이다. Open LT와 ALT는 $\Omega_\Lambda = 0$ 이며 $H_{out} = H_{in}$, $\Omega_{out} = \Omega_{in}$ 인 FRW 근사를 동시에 만족하는 경우 역시 다를 수 있다. 그 결과는 Table 2.4와 같다.

Table. 2.4에서 FRW_1 경우와 FRW_2 는 Table. 2.2 때와 비슷하게 거의 같은 값을 주는 것이 확인된다. 그리고 이 경우에는 d_{COLT} 와 d_{ALT} 를 비교해보면 $z = 0.9$ 에서 오차가 약 10pc 정도로 작다. 다만 표에는 없지만, $z = 2.0$ 까지 계산을 진행해보면 오차는 약 600pc 까지 증가한다. d_{COLT} 와 d_{ALT} 의 오차 차이는 항상 같은 비율로 나타나는 것이 아니라, 모형 매개변수 값의 차이따라 달라지는 것으로 판단된다.

하지만 분명한 사실은, OCDM 근사를 취했을 때 ALT 코드가 Open LT 경우보다 FRW 코드에 가까운 결과를 준다는 점이다. 이런 측면에서, Open LT의 해석학적인 풀이를 이용한 코드에서 뉴턴-랩슨 방법 등에 의해 야기되는 오차가 Table. 2.3에서 크게 나타난 것이라 판단을 하고 있다.

현재 연구는 모두 ALT 코드로 진행하고 있다. FRW 코드와의 차이를 지속적으로 수치 오류를 인지하고 수정해야 할 필요가 있다.

2.3 Density model

식 (2.15)에서의 $\Omega_M(r)$ 은 새롭게 정의된 r 에 관한 임의의 함수이다. 하지만 식 (2.18)에서 FRW의 프리드만 방정식과 비교했을 때 $\Omega_M(r)$ 은 물리적으로 현재의 물질 밀도의 의미를 내포하고 있음을 확인하였다. 따라서 $\Omega_M(r)$ 의 존재는

중심 관측자로부터 떨어진 거리에 따라 변하는 물질 밀도를 의미하고, 불균일성을 담고 있는 중요한 인자가 된다. 또한 $H_0(r)$ 역시 r 좌표에 따라 달라지게 되는데, 우리는 같은 시간에 우주 상의 물질 분포에 따라 허블 팽창률이 달라진다는 기본적 개념을 도입함으로써 두 인자간의 어떤 연관성을 확보해야 할 필요가 생겼다. 따라서 $\Omega_M(r)$ 과 $H_0(r)$ 는 원칙적으로 r 에 관한 함수이기만 하면 되는 무한의 자유도를 가지고 있지만, 최소한 둘 인자가 변화하는 양상이 비슷해야 한다는 제약조건을 생각 할 수 있다.

밀도 모형의 대표적 예시로 LT모형 연구에서 자주 쓰이는 GBH(Garcia-Bellido-Haugboelle) 모형을 보면 두 인자의 함수꼴이 거의 비슷하다는 것을 확인 할 수 있다.

$$\Omega_M(r) = \Omega_{out} + (\Omega_{in} - \Omega_{out}) \left(\frac{1 - \tanh[\frac{(r-r_0)}{2\Delta r}]}{1 + \tanh[\frac{r_0}{2\Delta r}]} \right) \quad (2.35)$$

$$H_0(r) = H_{out} + (H_{in} - H_{out}) \left(\frac{1 - \tanh[\frac{(r-r_0)}{2\Delta r}]}{1 + \tanh[\frac{r_0}{2\Delta r}]} \right) \quad (2.36)$$

식 (2.35), (2.36)과 Fig.2.3을 보면, GBH모델은 Ω_{out} , Ω_{in} , H_{out} , H_{in} , r_0 , Δr 의 총 6개의 모형 인자가 존재한다. Ω_{out} , Ω_{in} , H_{out} , H_{in} 인자들은 식 (2.35)와 식 (2.36)에서 그래프의 높낮이를 결정하는 인자며 허블 텐션을 해결하기 위한 좋은 장치가 된다. r_0 , Δr 은 두 식이 공유하는 인자로 위에서 언급한 제약조건에 해당한다고 볼 수 있다. r_0 는 그래프의 높낮이가 어느 r 좌표에서 변화하는지를 설명하고, Δr 는 변화의 급격함 정도를 설명한다.

Fig.2.3의 형태는 지구 근처에서만 보이드가 형성 되어있는 모형이라는 점에서, 코페르니쿠스 원리(Copernican principle)에 위배될 수 있다는 지적이 존재한다. 그러나, ALT의 경우엔 지구 근처의 밀도 불균일이 아주 작으면서 전반적으로 FRW를 만족할 수 있는 모형이기 때문에 다음과 같이 생각 할 수는 있다. 우주 전반에 크고 작은 보이드가 존재하지만 지구로부터 면 곳은 그 효과가 상쇄되어 FRW 모형처럼 느껴진다. 다만 지구 근처의 보이드는 그 규모가 작더라도

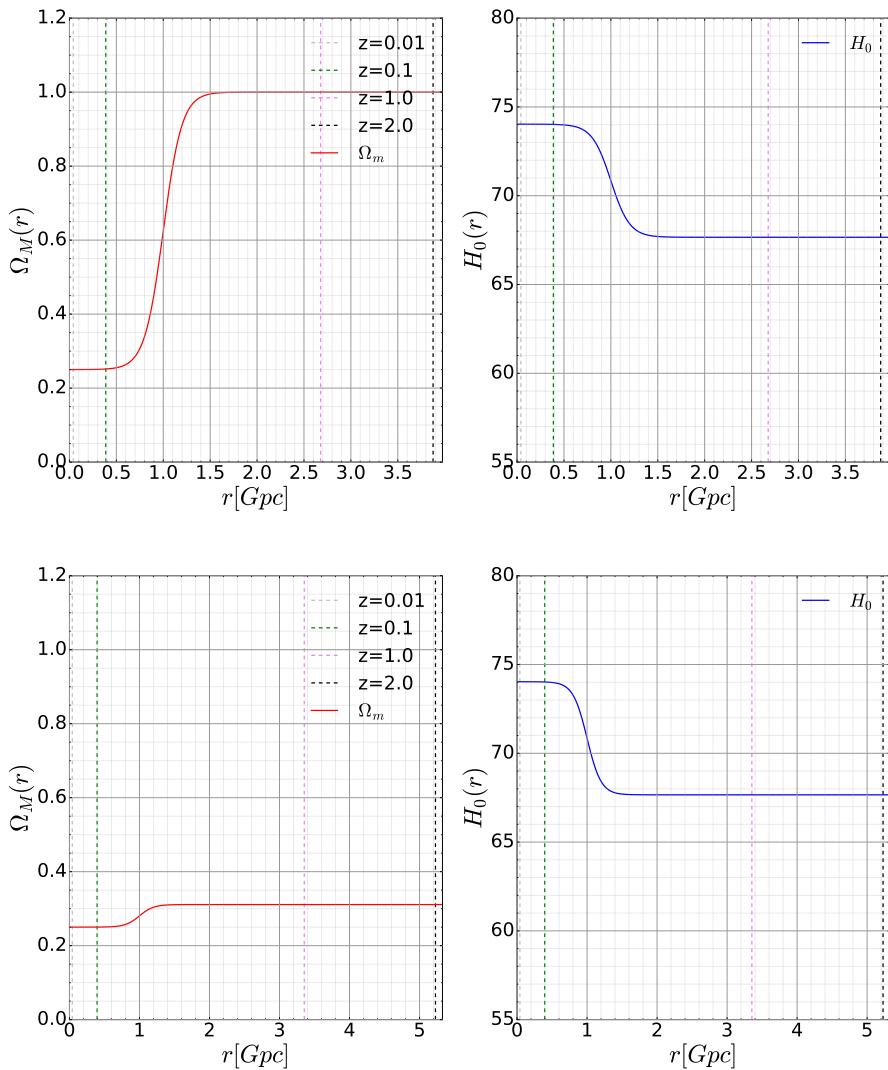


Fig. 2.3 GBH Denisity model : 위의 그림은 Open LT 조건의 그림이고 사용된 모형 매개변수의 값은 $\Omega_{out} = 1.0$, $\Omega_{in} = 0.25$, $H_{out} = 67.66$, $H_{in} = 74.03$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다. 아래는 ALT 조건으로 허블 텐션을 만족하고, 약간의 밀도 불균일이 존재하는 임의의 경우이다. 사용된 모형 매개변수의 값은 $\Omega_{out} = 0.3111$, $\Omega_{in} = 0.25$, $H_{out} = 67.66$, $H_{in} = 74.03$, $r_0 = 1.0$, $\Delta r = 0.1$ 이다.

효과가 직접적이기 때문에 고려해야 할 필요가 있다. 이와 같이 해석한다면 코페르니쿠스 원리에 위반 되지 않는 선에서 GBH 밀도 모형의 타당성을 생각할 수 있다.

GBH 모형과 유사하지만, 살짝 다른 형태를 가진 밀도 모형들도 존재한다. 이는 밀도 모형이 무한한 자유도를 가진다는 의미를 내포하기도 한다. 다음 논문에 있는, $c\nu\ln 2$, Gaussian 모형 등이 대표적이다.[7] 하지만 이와 같이 현재 LT 모형연구에 많이 쓰이는 밀도 모형들은 간단한 형태의 모형이 이라는 특징이 있다. 따라서, 염밀하게 따져보면 실제 우주의 밀도 분포를 반영한다 보기엔 무리가 있다.

그러나 현재 ALT 모형 코드는 수치계산을 바탕으로 이루어지고 있기 때문에 연속적이고 미분가능한 부드러운 밀도 변화 그래프가 아닐 때의 수치적 오류가 생기고 있어 보완이 필요하다. 더 정확하고 정밀한 연구를 위해선, 지구로부터 가까운 우주에서의 실제 우주의 적색편이 값에 따른 밀도 분포 맵과 그 자료를 사용할 수 있는 코드의 안정성이 필요할 것이다.

추가적으로 $\Omega_M(r)$ 와 $H_0(r)$ 의 r 에 대한 미분 식은 다음과 같다.

$$\Omega'_M(r) = \frac{(\Omega_{in} - \Omega_{out})}{1 + \tanh[\frac{r_0}{2\Delta r}]} \left(\frac{-\operatorname{sech}^2[\frac{r-r_0}{2\Delta r}]}{2\Delta r} \right) \quad (2.37)$$

$$H'_0(r) = \frac{(H_{in} - H_{out})}{1 + \tanh[\frac{r_0}{2\Delta r}]} \left(\frac{-\operatorname{sech}^2[\frac{r-r_0}{2\Delta r}]}{2\Delta r} \right) \quad (2.38)$$

다음 장의 MCMC 연구는 GBH 밀도 모형의 인자들의 최고 선호 영역을 찾는 방향으로 진행하였다.

3. MCMC

마코프 체인 몬테 카를로 (Markov Chavin Monte Carlo, MCMC) 방법은 확률분포로 부터 무작위 표본을 획득 하는 알고리즘 클래스이다. 몬테카를로 방법은 무작위 데이터의 표본을 얻은 뒤 그 표본으로 답을 구하는 방법이며, 마코프 체인은 이전 상태의 영향을 받는 연속적인 체인을 의미한다. 이는 베이지안 (Bayesian) 통계와 연관이 있다. MCMC 알고리즘 중 메트로폴리스-헤이스팅스 알고리즘(Metropolis-Hastings algorithm, MH)을 사용하였다. MCMC와 MH에 대한 보다 나은 내용은 이다희 (2019)[8]에 설명되어 있다.

MCMC에서 ALT 모형 중 GBH 밀도 모형의 Ω_{out} , Ω_{in} , H_{out} , H_{in} , r_0 , Δr 6개의 모형 인자를 주 매개변수로 사용하려 하였다. 관측 자료는 우주배경복사 (Cosmic Microwave Background, CMB), BAO(Baryonic Acoustic Oscillation), SNIa (Type Ia Supernovae) 그리고 Riess 연구팀과 플랑크 인공위성 연구팀의 H_0 관측 자료를 사용하였다. MCMC의 모형 타당성을 판단할 때 본 연구는 χ^2 값을 이용해 계산의 다음 단계를 결정하였다.

각 관측 자료마다의 χ^2 값 계산 방법은 전반적으로 Kouwn et. al. (arXiv : 1709.08499v2)[9]에 잘 정리 되어 있다. 논문에 정리된 방법은 FRW 기반으로 되어있기 때문에 ALT 모형에 맞게 약간의 수정을 하였다. 이어지는 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 절에서 이에 대한 자세한 방법을 소개하겠다.

3.1 SNIa

초신성 자료는 약 580개 자료점이 존재한 Union 2.1 데이터를 사용하였고 이들의 적색편이 범위는 $0.015 \leq z \leq 1.414$ 이다. 초신성 자료는 등급의 오차가 존재하기 때문에 거리지수 값으로부터 정확한 거리를 알 수 있다는 판단이 어렵다. 따라서 Riess 연구팀 등이 하듯 우리 은하 근처의 세페이드 자료를 이용해

복잡한 과정으로 초신성 자료를 알맞게 처리 해야 한다. 혹은 초신성 자료 거리 정보의 오차를 인정하고 각 자료점간의 상대적인 거리지수 차이 만을 이용할 수도 있다. 다음 방법을 사용하면 거리정보의 불확실성이 제외된 χ^2 테스트를 할 수 있다. [10]

$$\chi_{SN}^2 = c_1 - \frac{c_2^2}{c_3} \quad (3.39)$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{580} \left[\frac{\mu_{th}(z_i) - \mu_{obs}(z_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (3.40)$$

$$c_2 = \sum_{i=1}^{580} \left[\frac{\mu_{th}(z_i) - \mu_{obs}(z_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (3.41)$$

$$c_3 = \sum_{i=1}^{580} \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.42)$$

위에서 $\mu_{th}(z_i)$ 는 거리지수를 의미하며, 각 Union 2.1 데이터 i번 째 자료의 적색편이 값으로 식 (2.24)을 사용해 이론적으로 구해낸다.

FRW에서는 거리를 결정하는 중요한 매개변수가 허블 상수이기 때문에, 위의 방법은 허블 상수 값을 제약하지 않는 방법이라고 생각 할 수 있다. 이번 연구에서도 똑같은 방법을 사용 했고, ALT에서도 FRW의 H_0 와 비슷하게 비교적 가까운 거리에 영향을 주는 H_{in} 인자가 가장 큰 제외효과를 받는다고 해석된다.

3.2 BAO

ALT모형에서는 아직 건드림(Perturbation) 이론이 존재하지 않기 때문에 BAO와 CMB를 정석대로 계산 할 수 없다. 하지만 ALT는 FRW을 포함하고 있고, 특히 CMB 자료가 존재하는 중심 관측자에서 아주 먼 거리 r 에 존재한 지점은 FRW 우주와 거의 비슷할 것이라는 가정을 두고, FRW에서 사용하는 테스트를 이용하기로 하였다. 따라서, 배경 FRW 상에서 건드림 이론이 추가 된

Λ CDM과 비슷한 결과를 주는 간이 테스트를 ALT에 적용하여 사용하였다.

BAO는 바리온들이 광자로부터 이끌림에서 벗어난 시기인 벗어남 시기 (Drag Epoch, z_d)에서의 음향 지평선(r_s)과 유효 거리(Effective Distance, D_V)로 조합한 $\frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}$ 에 대한 6개의 관측 자료를 이론적인 계산 결과와 비교하여 χ^2 값을 측정 한다. 유효 거리, $D_V(z_d)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$D_V(z) \equiv \left[d_C^2(z) \frac{cz}{H_{\parallel}(z)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.43)$$

FRW와 ALT의 차이점은, 유효 거리 분모에 존재하는 허블 팽창률이 r방향에 대한 허블 팽창률이기 때문에 식 (2.11)에 정의된 $H_{\parallel}(z)$ 을 써야 한다는 점이다.

벗어남 시기는 Eisenstein & Hu (1998)[11]에 있는 맞춤식(fitting formula)을 사용하였다.

$$z_d = \frac{1291(\Omega_{out}h^2)^{0.251}}{1 + 0.659(\Omega_{out}h^2)^{0.828}} [1 + b_1(\Omega_b h^2)^{b2}] \quad (3.44)$$

$$b_1 = 0.313(\Omega_{out}h^2)^{-0.419} [1 + 0.607(\Omega_{out}h^2)^{0.674}] \quad (3.45)$$

$$b_2 = 0.238(\Omega_{out}h^2)^{0.223} \quad (3.46)$$

여기서 추가적인 MCMC 매개변수 도입의 필요성이 제기된다. 바로 Ω_b 의 존재 때문이다. 중심 관측자로부터 아주 멀리 떨어진, 즉 초기 우주는 FRW의 상황과 거의 유사하다는 가정을 하기 때문에 바리온과 빛의 성분까지 고려해야 한다. 따라서 초기 우주는 곡률이 0인 Ω_{out} 과 Ω_b 그리고 Ω_{rad} 으로 이루어진 FRW 상태라고 가정하였다. 식 (3.47)으로부터 ρ_{γ} 이 이론적으로 고정된 값으로

주어지기 때문에 MCMC에 추가되는 매개변수는 Ω_b 뿐이다.

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2 k_b^4 T^4}{15 \hbar^3 c^5}, \quad \Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{crit}} \quad (3.47)$$

$$\rho_{rad} = (1 + N_{eff} \frac{7}{8} (\frac{4}{11})^{\frac{4}{3}}) \rho_\gamma \quad (3.48)$$

$$H(a) = H_{out} \sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Omega_{out} + \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda} \quad (3.49)$$

식(3.48)에서 N_{eff} 값은 3.046을 사용하였다.[2] 식(3.49)에서 H_{out} 과 Ω_{out} 이 ALT 모형의 인자이지만, FRW에서 H_0 와 Ω_M 처럼 사용되는 것을 확인 할 수 있다. 위의 정보들을 이용하여 구한 이끌림 시기에서의 음향 지평선의 크기는 다음과 같다.

$$r_s(z) = \int_0^t c_s \frac{dt'}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{da}{a^2 H(a) [1 + a(\frac{3\Omega_b}{\Omega_\gamma})]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.50)$$

마지막으로 χ^2 값을 구하는 과정은 다음과 같다. 여기서 6개의 관측 자료는 식 (3.52)에 담겨 있다.[12]

$$C_{BAO}^{-1} = \begin{pmatrix} 4444.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 34.602 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.661157 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24532.1 & -25137.7 & 12099.1 \\ 0 & 0 & 0 & -25137.7 & 134598.4 & -64789.9 \\ 0 & 0 & 0 & 12099.1 & -64783.9 & 128837.6 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$X = \begin{pmatrix} r_s(z_d)/D_V(0.1) - 0.336 \\ D_V(0.35)/r_s(z_d) - 8.88 \\ D_V(0.57)/r_s(z_d) - 13.67 \\ r_s(z_d)/D_V(0.44) - 0.0916 \\ r_s(z_d)/D_V(0.60) - 0.0726 \\ r_s(z_d)/D_V(0.73) - 0.0592 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\chi^2_{BAO} = X^T C_{BAO}^{-1} X \quad (3.53)$$

3.3 CMB

CMB는 광자와 물질이 상호작용을 끝내는 때인 분리 시기(Decoupling epoch, z_*)를 Hu & Sugiyama(1996)에서 제시한 맞춤 식으로 부터 구해내고[13], CMB 파워스펙트럼 그래프에서 첫 번째 음향 봉우리의 위치와 관련 있는 인자들, 음향 규모(Acoustic scale, l_A)와 변동 매개 변수(Shift parameter, R)를 이용해 Planck 팀의 관측 값과 비교한다.

$$l_A = \frac{d_{C(FRW)}(z_*)}{r_s(z_*)} \quad (3.54)$$

$$z_* = 1048[1 + 0.00124(\Omega_b h^2)^{-0.738}][1 + g_1(\Omega_{out} h^2)^{g_2}] \quad (3.55)$$

$$g_1 = \frac{0.0783(\Omega_b h^2)^{-0.238}}{1 + 39.5(\Omega_b h^2)^{0.763}} \quad (3.56)$$

$$g_2 = \frac{0.560}{1 + 21.1(\Omega_b h^2)^{1.81}} \quad (3.57)$$

$$R(z_*) = \frac{\sqrt{\Omega_{out} H_{out}^2}}{c} d_{C(FRW)}(z_*) \quad (3.58)$$

위의 과정에서 Ω_{out} 과 H_{out} 을 Ω_M 과 H_0 대신에 사용한 것을 제외하면 FRW의 과정과 완벽하게 일치한다. 그 이유는 ALT에서 아주 큰 적색편이 값일 때는 d_C 를 계산 할 수 없기 때문이다. 식 (2.7)에서 압력 밀도항이 없기 때문에 압력

향이 중요해지는 초기 우주 단계에서는 현재 가지고 있는 ALT모형으로는 다를 수 없게 된다. 또 다른 문제점은, 압력항을 고려한 LT모형 풀이가 존재한다고 해도 빛전파방정식을 푸는 과정에서 정확도를 위해서는 MCMC의 한 스텝마다 엄청난 양의 계산을 수행해야 한다는 점이다. 계산량이 많아지면 계산 시간도 오래 걸리지만, 수치 계산의 오차도 더욱 크게 누적 된다. 이 두 가지 이유로 아주 큰 적색편이 값의 영역에서는 FRW 방식으로 거리 정보를 구하였다.

Shafer & Huterer (2014) [14]의 Planck 자료로 만든 (l_A, R, z_*) 을 사용하여 χ^2 값을 구한다.

$$C_{CMB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.384202 & -0.66477 & -0.073066 \\ -0.66477 & 4.444606 & -3.555612 \\ -0.073066 & -3.555612 & 4.129204 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

$$X = \begin{pmatrix} l_A(z_*) - 301.65 \\ R(z_*) - 1.7499 \\ z_* - 1090.41 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\chi^2_{CMB} = X^T C_{CMB}^{-1} X \quad (3.61)$$

3.4 H_0 observation

이번 연구의 주 목표는 허블 텐션을 ALT 모형으로 설명할 수 있는지 확인하는 것 이기 때문에 H_{in} 과 H_{out} 을 Riess팀의 측정 값과 Planck팀의 베스트핏 측정 값으로 제약 하는 것이 중요 했다. 특히 H_{out} 와 Ω_{out} 은 CMB χ^2 테스트가 없다면 MCMC로부터 제약 되지 않기에 CMB 자료를 쓰지 않을 때는 Planck 연구팀의 베스트핏 자료를 사용 하였다.

$$H_{0_{Riess}} = 74.03 \pm 1.42 \quad (3.62)$$

$$H_{0_{Planck}} = 67.66 \pm 0.42 \quad (3.63)$$

$$\Omega_{M_{Planck}} = 0.3111 \pm 0.0056 \quad (3.64)$$

위의 세 관측 값을 이용해 χ^2 를 구하는 과정은 다음과 같이 간단하다.

$$\chi^2_{Riess_{H_0}} = \left[\frac{H_{in} - H_{0_{Riess}}}{\sigma_{Riess}} \right]^2 \quad (3.65)$$

$$\chi^2_{Planck_{H_0}} = \left[\frac{H_{out} - H_{0_{Planck}}}{\sigma_{Planck_{H_0}}} \right]^2 \quad (3.66)$$

$$\chi^2_{Planck_{\Omega_M}} = \left[\frac{\Omega_{out} - \Omega_{M_{Planck}}}{\sigma_{Planck_{\Omega_M}}} \right]^2 \quad (3.67)$$

4. 결과 및 결론

최종적으로 여러가지 χ^2 계산 방법을 세 가지로 조합하여 MCMC를 진행하였다. 다만 GBH 모형 매개변수는 $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 로 고정하고, $r_0 = 0.1 \& 1.0 Gpc$ 로 고정하여, 매개 변수의 개수를 $(\Omega_{in}, \Omega_{out}, H_{in}, H_{out}, \Omega_b)$ 만 사용해 총 5가지로 줄였다. 매개변수를 줄인 이유는 계산 속도를 빠르게 하기 위함이다.

$$\text{case 1 : } SNIa + H_0 \text{ observation(Riess, Planck)} \quad (4.68)$$

$$\text{case 2 : } SNIa + BAO + H_0 \text{ observation(Riess, Planck)} \quad (4.69)$$

$$\text{case 3 : } SNIa + BAO + CMB + H_0 \text{ observation(Riess)} \quad (4.70)$$

Table 4.5: GBH 모형 매개변수의 사전 확률 범위.

Parameter	Prior range	Initial value
H_{in}	[65, 78]	74.03
H_{out}	[65, 78]	67.66
Ω_{in}	[0.1, 1.0]	0.3
Ω_{out}	[0.1, 1.0]	0.3
$\Omega_b h^2$	[0.0, 1.0]	0.02242

또한 $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 로 고정한 이유는 이유는 급격하게 변하는 밀도 모형을 가정하고 싶었던 이유도 존재한다. $r_0 = 0.1 \& 1.0 Gpc$ 두 가지 값의 경우만 생각한 이유는 0.1 Gpc 값이 로컬 보이드의 크기 약 60 Mpc에 가까운 점이기 때문이고, 1.0 Gpc은 0.1 Gpc의 열 배 정도 큰 보이드를 가정해보고 싶었기 때문이다. 물론 MCMC 코드가 안정화 된다면, 모든 매개변수를 열고 계산하는 것이 관측과의 비교를 위해선 옳은 방향이 될 것이다. 두 경우 모두 사전 확률 범위(Prior range)와 초기 값은 Table 4.5와 같이 설정하였다.

4.1 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$

Table 4.6: $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 영역

Parameter	case 1	case 2	case 3
Ω_{in}	0.2705 ± 0.0341	0.2738 ± 0.0342	0.2480 ± 0.0257
Ω_{out}	0.3099 ± 0.0056	0.3097 ± 0.0055	0.2862 ± 0.0165
H_{in}	71.41 ± 1.279	71.479 ± 1.220	71.36 ± 0.9019
H_{out}	67.9111 ± 0.4275	67.90 ± 0.4193	71.26 ± 1.207
$\Omega_b h^2$	—	0.02880 ± 0.0055	0.02374 ± 0.0011

Table 4.7: $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 값

Parameter	case 1	case 2	case 3
Ω_{in}	0.2670	0.2665	0.2423
Ω_{out}	0.3104	0.3107	0.2845
H_{in}	71.46	71.02	71.36
H_{out}	67.95	67.88	71.23
$\Omega_b h^2$	—	0.02641	0.02361
χ^2	554.76	559.013	551.999

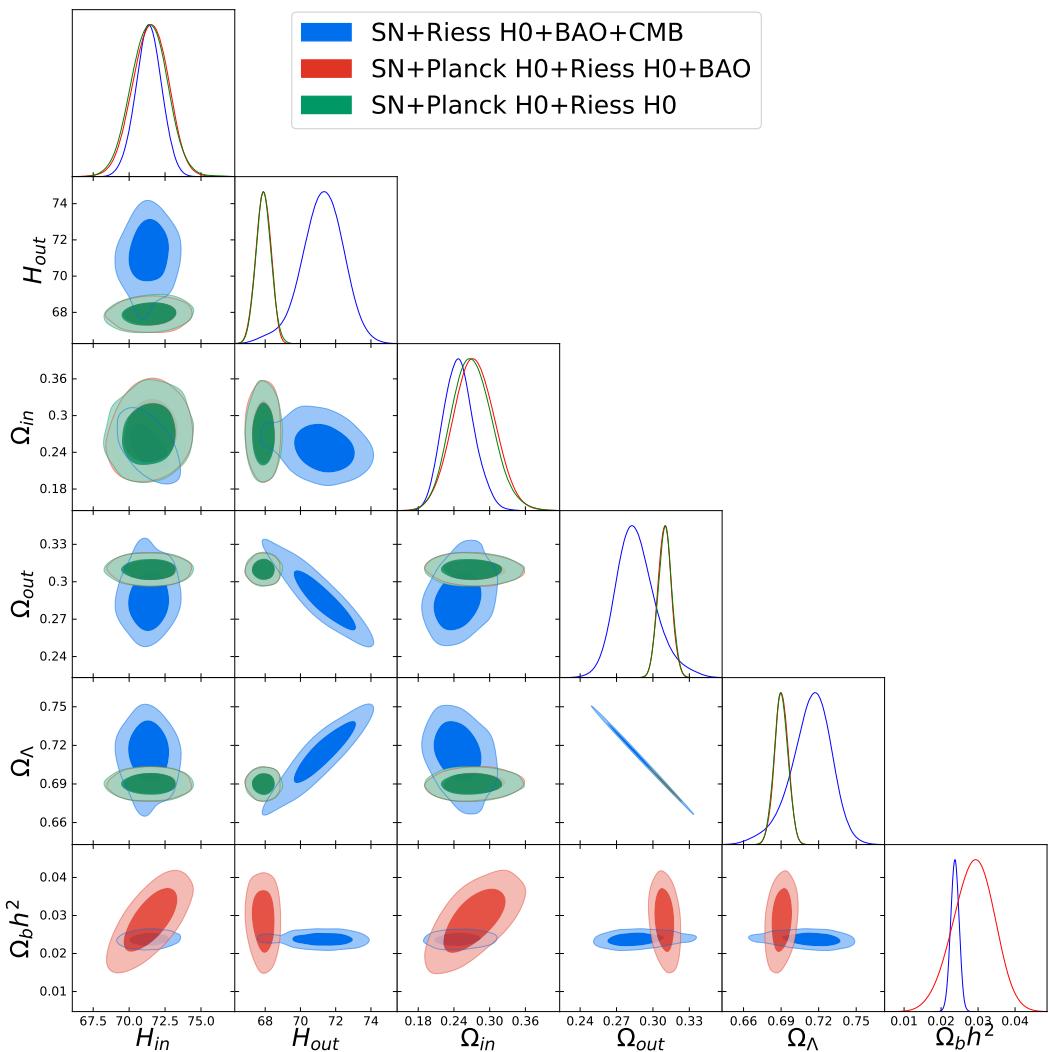


Fig. 4.4 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC 결과

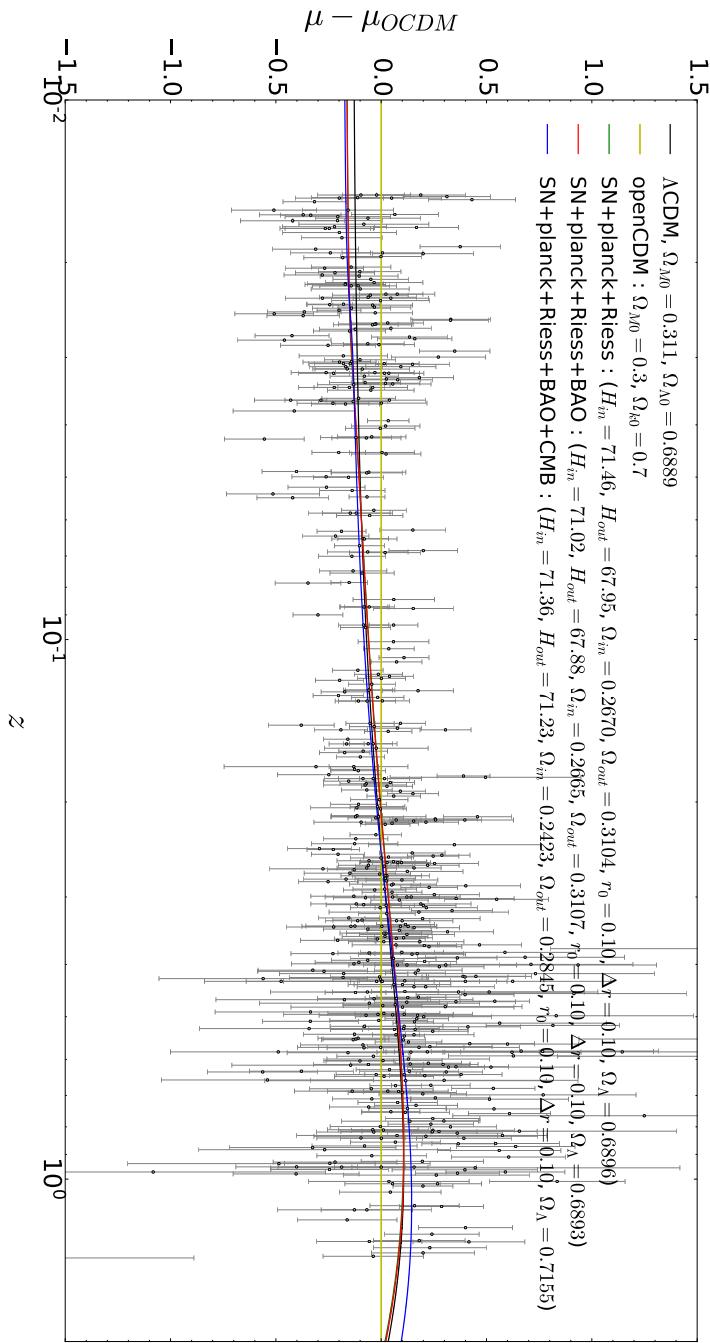


Fig. 4.5 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 초신성 자료 best-fit fitting 그림 : case 1, case 2, case 3의 best-fit 결과를 OpenCDM와 Λ CDM의 경우와 비교하였다. y축은 거리지수 값을 OpenCDM의 거리지수 값으로 표준화 한 것이고, x축은 적색편이 값이다.

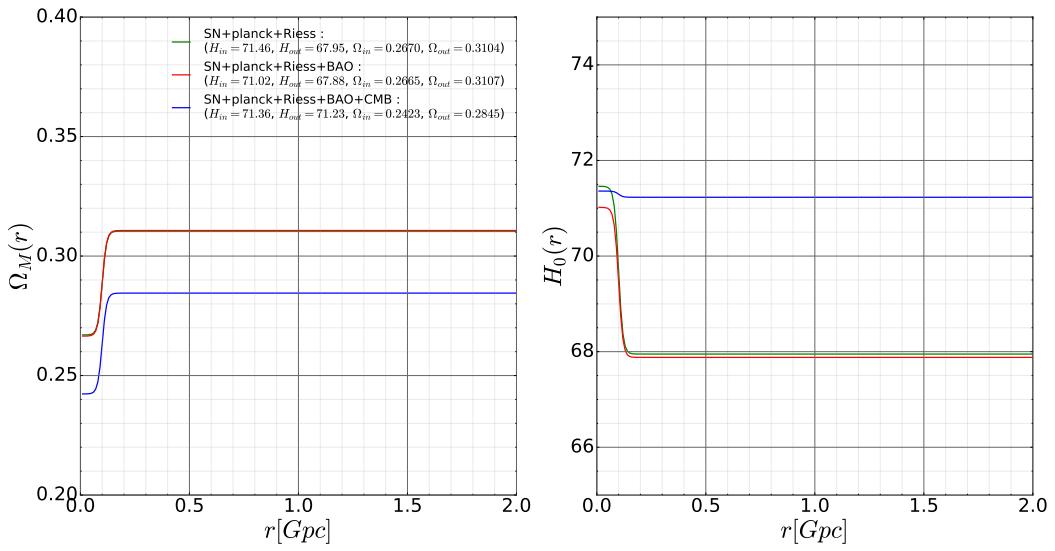


Fig. 4.6 $r_0 = 0.1$ Gpc & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 best-fit값을 이용한 GBH 모형 구현

4.2 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$

Table 4.8: $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 영역

Parameter	case 1	case 2	case 3
Ω_{in}	0.2282 ± 0.1983	0.2326 ± 0.0198	0.2466 ± 0.02195
Ω_{out}	0.3108 ± 0.0057	0.3109 ± 0.0057	0.3095 ± 0.0184
H_{in}	73.75 ± 1.340	73.67 ± 1.359	71.85 ± 0.9542
H_{out}	67.69 ± 0.4233	67.69 ± 0.4228	69.72 ± 1.218
$\Omega_b h^2$	—	0.03411 ± 0.0048	0.2396 ± 0.0006

Table 4.9: $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC best-fit 값

Parameter	case 1	case 2	case 3
Ω_{in}	0.2266	0.2297	0.2424
Ω_{out}	0.3108	0.3110	0.3623
H_{in}	73.86	73.46	72.29
H_{out}	67.66	67.64	66.529
$\Omega_b h^2$	—	0.03334	0.02442
χ^2	542.44	547.471	548.804

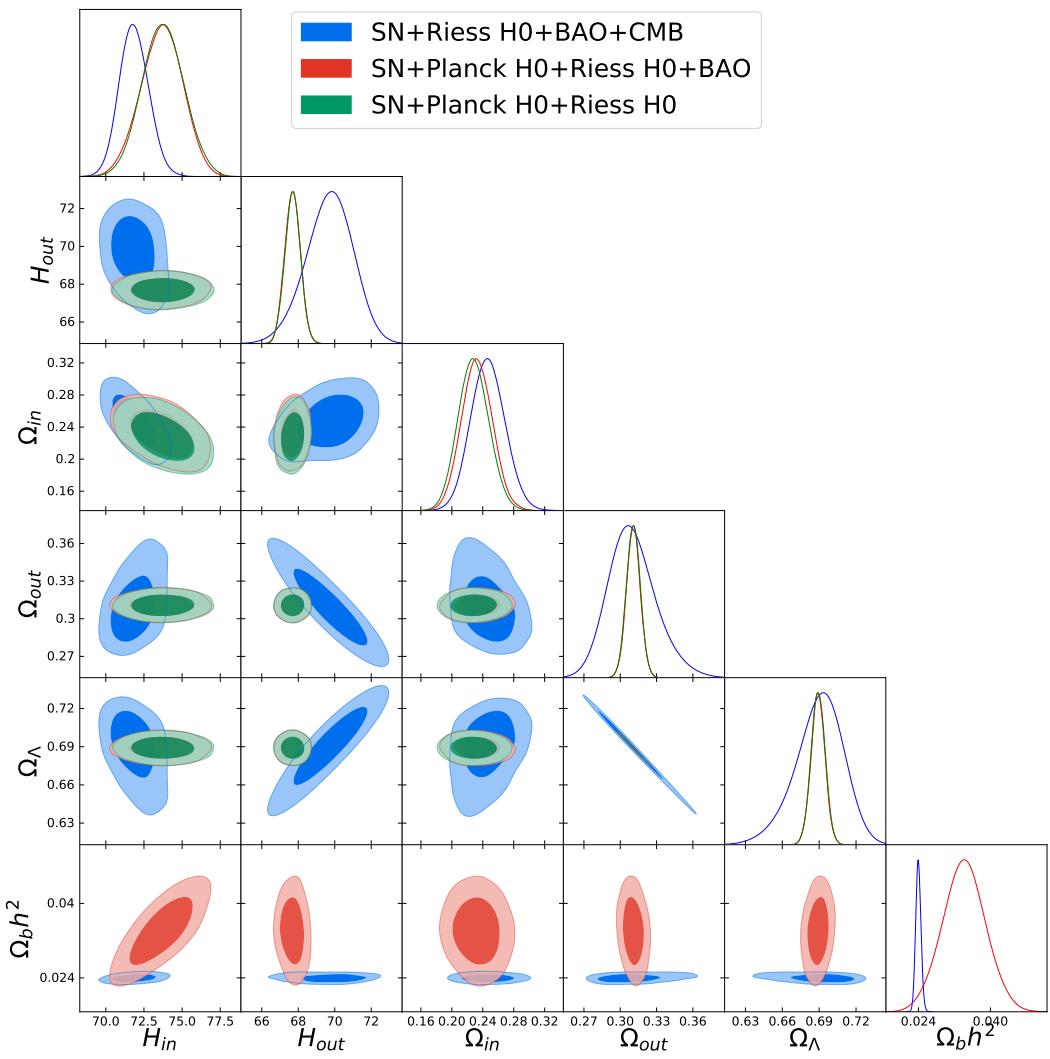


Fig. 4.7 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 MCMC 결과

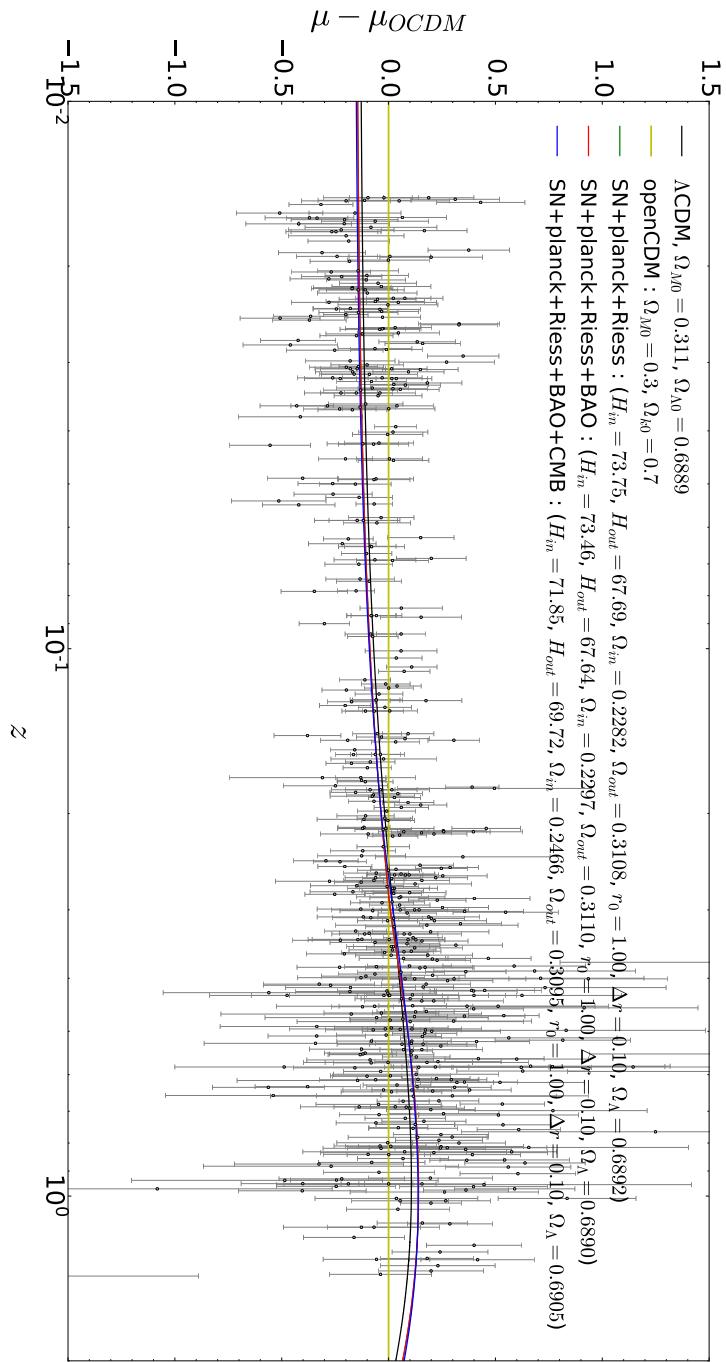


Fig. 4.8 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 초신성 자료 best-fit fitting 그림 : case 1, case 2, case 3의 best-fit 결과를 OpenCDM와 Λ CDM의 경우와 비교하였다. y축은 거리지수 값을 OpenCDM의 거리지수 값으로 표준화 한 것이고, x축은 적색편이값이다.

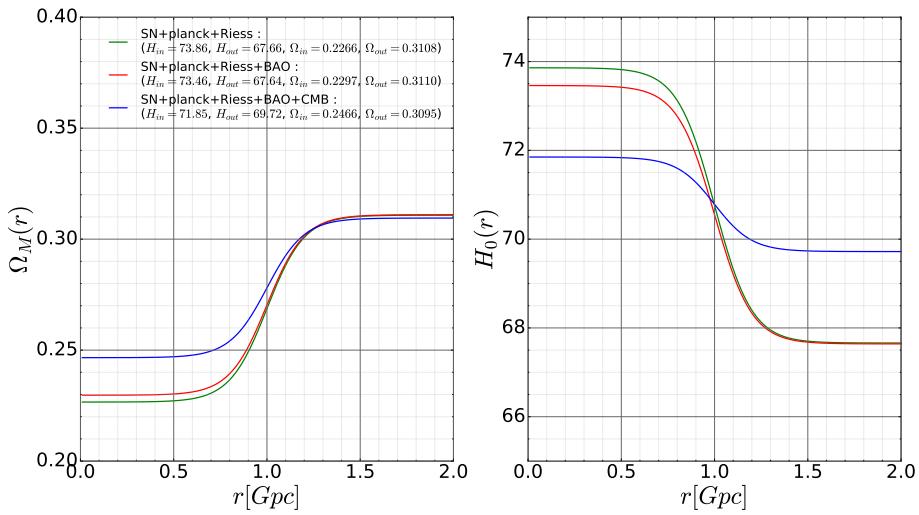


Fig. 4.9 $r_0 = 1.0 Gpc$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때의 best-fit값을 이용한 GBH 모형 구현

4.3 결론 및 토의

Fig 4.4는 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때 MCMC 모형매개변수들이 선호하는 영역을 나타낸 것이다. Table 4.6와 함께 비교했을 때 허블 팽창률의 관측 값이 세 경우 모두 Riess 팀의 관측 결과보다 낮은 지역을 선호하는 것으로 나타난다. case1과 2는 거의 비슷한 영역을 선호하고 있다. case 1에서 Ω_b 성분이 없는 이유는, SNIA 자료 맞춤에 Ω_b 인자가 사용되지 않기 때문이다. case 3은 case 2에 비해 Ω_b 값을 좁은 영역 만을 허용하고 있는 모습을 보인다.

case 3은 H_{out} 과 Ω_{out} 에서 사전 확률 범위를 거의 모두 선호하는 양상을 보인다. case1과 2에 다른 이유는 CMB 자료를 썼는가 아니면 H_0 관측 자료를 썼는가의 차이이다. 이에 대해선 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ 일 때의 결과에서 다시 한 번 언급하겠다. Ω_{in} 과 Ω_{out} 의 차이는 세 경우 모두 약 0.4의 차이를 보인다.

Fig 4.5와 Fig 4.6은 Table 4.7의 베스트 핏 정보를 이용하여 SNIA 자료 피팅과 GBH 모델을 그린 것이다. 세 경우 모두 밀도 불균일성은 표현된다. 하지만 허블 텐션 해석에 어려움이 있다. case 1과 2는 작은 허블 차이의 텐션은 설명할 수 있지만 Riess의 관측 값과 떨어져 있다는 것이 문제이다.

특히 Fig 4.6을 보면 case 3의 경우에 아예 허블 텐션이 설명되지 않으면서 밀도 불균일은 나타난다. 이는 Riess 연구팀의 관측 결과를 설명하지 못할 뿐만 아니라, 밀도와 허블 팽창률의 관계에 대한 가정까지 반박하는 결과로 보인다. 이는 이번 연구의 가정이 틀렸을지도 모른다는 가능성과, $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 는 적절한 조건이 아니라는 점 그리고 FRW 기반의 CMB test가 이번 연구에 활용하기 적절하지 않다는 총 세 가지 가능성을 제시한다.

Fig 4.7는 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ & $\frac{\Delta r}{r_0} = 0.1$ 일 때 MCMC 모형매개변수들이 선호하는 영역을 나타낸 것이다. Table 4.8와 함께 비교했을 때 case1과 case2는 Riess와 Planck 연구팀의 관측 결과에 맞게 선호 지역이 형성된 것을 확인 할 수

있다. 사실상 Ω_b 매개 변수의 존재 여부를 제외하면, case1과 case2는 다시 한 번 놀라울 정도로 비슷한 영역을 선호하고 있다.

다만, case3는 다른 경향을 보여준다. $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 경우 보다 H_{in} 값이 높아지긴 했지만, Riess 팀의 관측 영역에 들어오기에는 부족하다. 여전히 CMB 테스트는 $\Omega_b h^2$ 값을 좁은 영역으로 강하게 제약하고 있다. 이에 대한 해석은 다음과 같다. BAO 테스트에서 $\frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}$ 값 계산에서 sound horizon 값을 거의 일정하게 잡아버림으로써, D_V 계산에 영향을 주는 것으로 보인다. 따라서, D_V 는 $d_C^2(z)$ 에 비례하기 때문에 가까운 적색편이 영역(low z)에서 거리를 결정에 많은 역할을 하는 H_{in} 매개 변수에 크게 영향을 주는 것으로 판단된다.

밀도 불균일성의 측면에서 볼 때, 세 가지 경우의 베스트 핏 값이 모두 약 0.5에서 0.8 정도의 $\Omega_{out} - \Omega_{in}$ 차이를 만들고 있다. 다만 선호 영역을 전체적으로 보면, 앞선 경우와 비슷하게 case 3에서의 Ω_{out} 영역이 사전 확률 범위에 가까운 넓은 영역이라는 것을 확인 할 수가 있다. 이 이유는 두 경우를 모두 보았을 때 CMB 테스트 단독으로는 H_{out} 과 Ω_{out} 을 Planck 팀의 관측 결과에 가깝게 잡지 못하기 때문이라 판단된다. 실제로 ALT코드에서 CMB 테스트 단독으로 FRW 근사를 취해 mcmc를 진행해보면, Fig 4.10과 같이 H_{out} 과 Ω_{out} 두 값을 제약하지 못하는 것으로 나타난다.

Fig 4.8와 Fig 4.9는 Table 4.9의 베스트 핏 정보를 이용하여 SNIa 자료 피팅과 GBH 모델을 그려보았다. $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 의 경우와 다르게 허블 팽창률 영역이 관측 조건에 맞게 잘 피팅 된 이유는 Fig 4.5와 Fig 4.8의 그래프 개형 차이에서 나타나는 듯 하다. Fig 4.5에서 z 가 작은 영역에서 ($0.02 \leq z \leq 0.04$) 그래프가 상승하며 요동치는 것이, Fig 4.8에서는 중간 부분에서 흔들리는 모습으로 나타난다. 즉, 요동의 위치는 r_0 값에 따라 다르다. 이는 r_0 값에 의해 허블 팽창률 값이 H_{in} 에서 H_{out} 값으로 변화하는 과정 영향으로 요동이 형성되는 것으로 해석된다. 또한 요동의 정도는 H_{in} 과 H_{out} 간격에 기인하고, 이에

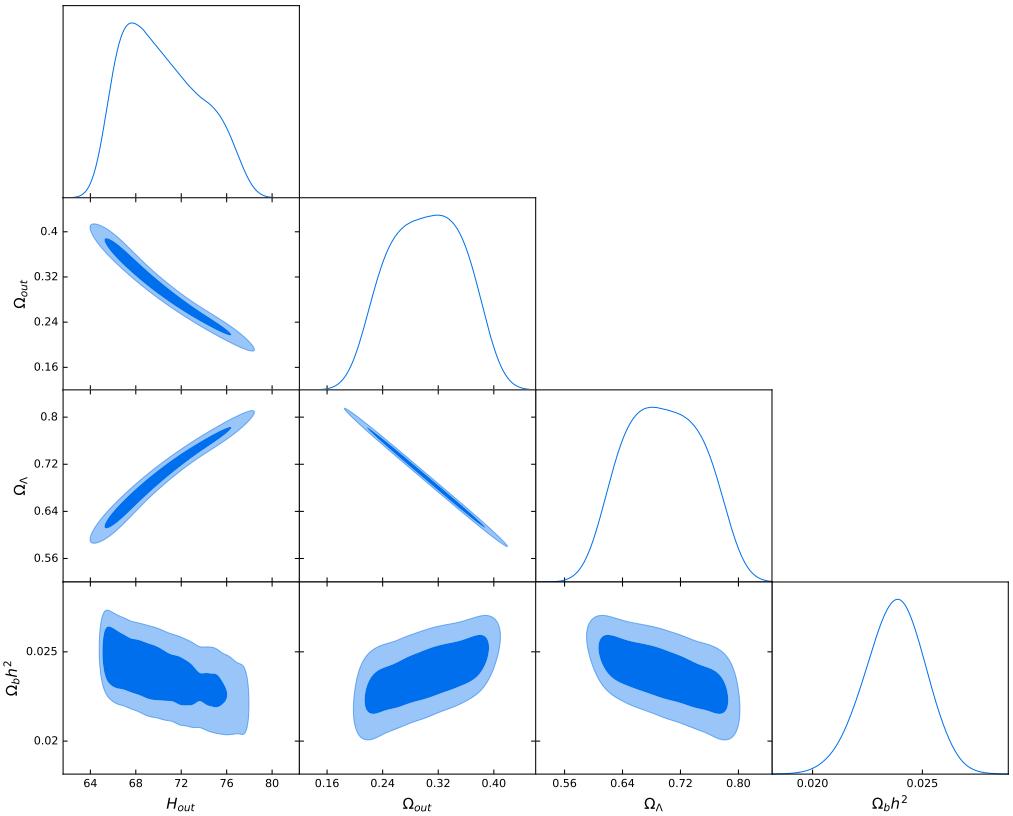


Fig. 4.10 FRW 근사에서 CMB 테스트 만으로 돌린 MCMC 결과. - H_{out} 과 Ω_{out} 은 FRW의 H_0 와 Ω_M 과 같다.

따라 SNIa 자료 피팅에 큰 영향을 주는 것으로 해석할 수 있을 듯 하다. 따라서 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 의 경우엔, 요동의 크기가 작아야 했기 때문에, H_{in} 값이 H_{out} 과 차이가 작아지는 방향으로 제약된 것이라 생각한다. Fig. 4.11은 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 경우에서 H_{in} , H_{out} 의 차이가 극심할 때의 예시이다.

최종적으로, $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 과 $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ 의 MCMC 결과는 복합적인 내용을 담고 있다. $r_0 = 1.0 \text{ Gpc}$ 모형이 좀 더 허블 텐션 해결에 가까운 모형의 결과를 내주며 전반적인 χ^2 값도 작다. 하지만 Tully et. al. (2019)에서 국부 공

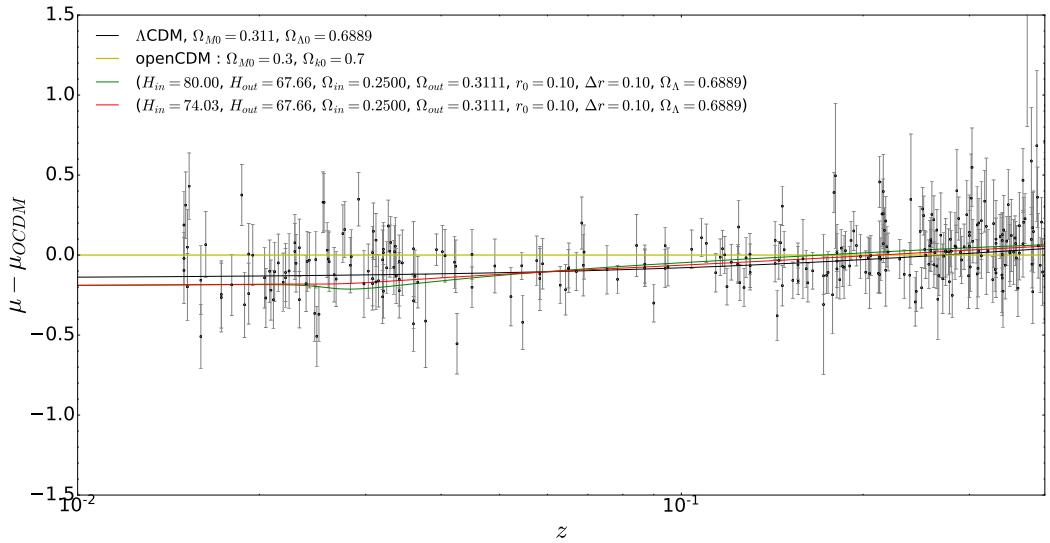


Fig. 4.11 $r_0 = 0.1 \text{ Gpc}$ 일 때 ΔH 에 따른 fitting 그래프 : 다른 모형 매개변수 값은 같지만 H_{in} 이 달라졌을 때의 경향을 보여준다. H_{in} 값과 H_{out} 값의 격차가 커지면 그래프의 요동이 더 심하게 일어나는 것을 확인 할 수 있다.

동의 반지름 크기가 약 60Mpc이라는 주장과는 거리가 멀어 보인다. 이에 따라, 추가적인 연구에서는 r_0 와 $\frac{\Delta r}{r_0}$ 매개변수까지 열고 MCMC를 진행해야 할 필요가 있다.

이외의 더 나은 ALT 모형 연구를 위해서는 다음과 같은 과정이 필요하다. 첫 번째로 수치 오류를 가능한 줄여야 한다. ALT 코드에서 큰 z 값을 계산할 때, 누적되는 수치 오류를 줄여야 높은 적색편이 값에서 더 정확한 정보를 사용할 수 있다.

두 번째로 더 복잡한 밀도모형이 필요하다. MCMC에 사용한 GBH 모형은 r_0 지점에서 급격하게 밀도와 허블 팽창률이 변하는 단순한 모델이지만, 관측을 기반으로 더 복잡한 밀도 분포 모형을 수치적으로 형성해 연구에 사용하면 더 현실적인 결과를 얻어 낼 수 있으리라 기대한다.

마지막으로 수치적 기술을 뒷받침하여 LT 모형에 대한 이론적 연구를 더 발전시켜야 한다. 현재 Λ LT 모형에는 압력 항이 존재하지 않기 때문에 초기 우주까지의 거리 정보를 계산해 낼 수 없다. 또한 건드림 이론 역시 존재하지 않기 때문에 CMB와 BAO 자료를 이용할 때 직접적으로 파워스펙트럼을 계산해 낼 수가 없다. 이와 같은 부족한 점을 해결한다면 더 의미 있는 LT 모형 연구가 가능할 것이라고 생각한다.

A. 부록

A.1 Runge-Kutta 4th order method

룽제-쿠타 4차 방법은 다음과 같다

$$y' = f(t, y) \quad (\text{A.71})$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{A.72})$$

y 는 시간 t 에 대한 미지의 함수이다. $\frac{dy}{dt}$ 는 t 와 y 로 이루어진 함수이다. 우리는 초기 조건으로 t_0 가 주어졌을 때 $y(t_0)$ 을 알고 있고, 함수 $f(t, y)$ 역시 알고 있다.

아주 작은 $h (> 0)$ 를 t 의 step size로 하였을 때, 현재값 y_n 으로부터 다음 스텝의 값 $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (\text{A.73})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{A.74})$$

매 스텝마다, k_n 성분들은 다음과 같이 구해진다.

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (\text{A.75})$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (\text{A.76})$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (\text{A.77})$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \quad (\text{A.78})$$

만약 함수 $f(t, y)$ 가 y 에 대하여 독립적이라면, 단순한 적분이 된다.

A.2 수치미분법

수치미분법에는 전방차분법, 후방차분법, 중앙차분법 같은 방법들이 존재한다.

매끄러운 함수의 x 점 근처의 $x+h$ 의 값은 테일러 근사로 부터 얻어낼 수 있다.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2 \quad (\text{A.79})$$

위의 식을 사용하면 전방차분법과 후방차분법은 다음과 같이 근사 된다.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{A.80})$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (\text{A.81})$$

중앙차분법은 위의 두 방법보다 더 정확한 결과를 준다. 테일러 공식을 확장 시키면,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_3)h^3 \quad (\text{A.82})$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\xi_3)h^3 \quad (\text{A.83})$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (\text{A.84})$$

식 A.84를 얻게 된다. 이 방법의 절단 오차는 $O(h^3)$ 이다.

오차의 측면에서 중앙차분법이 전방차분법, 후방차분법 보다 나아졌지만, 중앙차분법에도 수치적 불안정성과 급격한 기울기 분해능과 같은 문제는 남아 있다.

참고문헌

- [1] Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM : Riess et. al. ApJ 876 85 (2019)
- [2] Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters : Aghanim et. al. (arXiv:1807.06209)
- [3] Lemaitre-Tolman-Bondi model and accelerating expansion : K. Enqvist, Gen Relativ Gravit 40: 451 (2008)
- [4] Confronting Lemaitre-Tolman-Bondi models with Observational Cosmology : Juan Garcia-Bellido & Troels Haugbølle, JCAP04(2008)003
- [5] COSMICFLOWS-3: COSMOGRAPHY OF THE LOCAL VOID : R. Brent Tully et. al. ApJ 880 24 (2019)
- [6] User's guide for DVERK-a subroutine for solving non-stiff ODEs : T. Hull et al (1976)
- [7] Constraining LTB models with JLA supernovae and BAO : Vargas et. al. (arXiv:1512.02571)
- [8] 스칼라장 암흑에너지 모형의 관측적 제한 : 이다희 석사학위논문 (2019)
- [9] The Effect of Anisotropic Extra Dimension in Cosmology : Kouwn et. al. (arXiv:1709.08499v2)
- [10] Supernovae and the nature of the dark energy : Goliath et. al. A&A 380, 6-18 (2001)

- [11] Baryonic Features in the Matter Transfer Function : Daniel J. Eisenstein & Wayne Hu, ApJ 496 605 (1998)
- [12] Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP Observations : Cosmological Parameter Results) : G. Hinshaw et. al. ApJS 208 19 (2013)
- [13] Small Scale Cosmological Perturbations: An Analytic Approach : Wayne Hu & Naoshi Sugiyama, ApJ 471 542 (1996)
- [14] Chasing the Phantom : A closer look at Type Ia supernovae and the dark energy equation of state : Daniel L. Shafer & Dragan Huterer, Phys. Rev. D 89, 063510 (2014)
- [15] Detection of the Baryon Acousitc Peak in the Large-Scale Correlation Funcion of SDSS Luminous Red Galaxies : Daniel J. Eisenstein et. al. ApJ 633 560 (2005)
- [16] Lemaître, G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles, A53, 51 (1933)

ALT model solution for Hubble Tension*

Seong-Yeon Yang

Department of Astronomy and Atmospheric Sciences

Graduate School, Kyungpook National University

Daegu, Korea

(Supervised by Professor Jai – chan Hwang & Chan – Gyung Park)

(Abstract)

Hubble tension is one of the issues that are attracting attention in cosmology because it refers to a problem in which the Hubble constant measured by the Hubble Space Telescope and the Hubble constant measured by Planck satellite do not coincide. In low-density areas, the expansion of space is fast due to weak gravity, and in high-density areas, it is slow. If the difference in expansion rate is due to the relatively low density near us, the cause of Hubble tension can be easily explained. To address this problem in detail, we used the Lambda-Lemaître-Tolman (ALT) model, a spherical cosmology solution of Einstein's gravity that takes into account cosmological constants. The phenomena far from us are the conventional Λ cold dark matter (Λ CDM) model and the close phenomena are described as the local LT model. In addition, the Markov chain Monte Carlo (MCMC) method was applied to explore variables of the ALT model that fit the astronomical observations.

* A thesis submitted to the Council of the Graduate School of Kyungpook National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in December 2019