Curs 9

Sisteme dinamice generate de sisteme planare de ecuaţii diferenţiale autonome

Printr-un sistem planar de ecuaţii diferenţiale înţelegem un sistem format din două ecuaţii diferenţiale, astfel un sistem planar de ecuaţii diferenţiale autonome (în expresia ecuaţiilor nu apare în mod explicit variabila t) are forma

$$\begin{cases} x'(t) & = f_1(x,y) \\ y'(t) & = f_2(x,y) \end{cases} \tag{9.1}$$

9.1 Fluxul generat de un sistem planar. Portret fazic

Se consideră sistemul (9.1). Avem următorul rezultat:

Teorema 9.1.1 *Dacă* $f=(f_1,f_2)\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ *atunci problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x'(t) & = f_1(x,y) \\ y'(t) & = f_2(x,y) \\ x(0) & = \eta_1 \\ y(0) & = \eta_2 \end{cases} \tag{9.2}$$

are o unică soluţie saturată pentru orice $\eta=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2$.

Printr-o *soluţie saturată* se înţelege o soluţie definită pe cel mai mare interval posibil. Notăm prin $(x(t,\eta),y(t,\eta))$ unica soluţie a problemei Cauchy (9.2), astfel soluţia

$$(x(\cdot,\eta),y(\cdot,\eta)):I_\eta\to\mathbb{R}^2,$$

unde intervalul I_η este maximal (în general, intervalul maximal depinde de alegerea valorii η). Din Teorema de comportare la frontieră a soluţiilor saturate avem că interval maximal I_η este un interval deschis de forma:

$$I_\eta=\left(\alpha_\eta,\beta_\eta\right),$$

(valorile α_η, β_η putând fi valori finite sau infinite) şi pentru ca problema Cauchy (9.2) să fie bine definită trebuie ca $0 \in I_\eta$ ceea ce implică relaţia

$$\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta.$$

Fluxul φ generat de sistemul (9.1) este soluţia saturată a problemei Cauchy (9.2) şi se defineşte în următorul mod:

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t,\eta) = (x(t,\eta), y(t,\eta))$$

unde mulţimea W este definită de

$$W = \left\{ I_\eta \times \{\eta\} : \ \eta \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$ atunci $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Pentru orice t fixat putem defini operatorul

$$\eta \longmapsto \varphi(t,\eta),$$

acest operator se numeşte *sistemul dinamic* generat de sistemul (9.1).

Proprietăţi:

1. $\varphi(0,\eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$;
2. $\varphi(t+s,\eta) = \varphi(t+s, \varphi(s,\eta))$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$, $\forall t, \eta \in I_\eta$;
3. φ este continuu în raport cu η.

Definiţia 9.1.1 *Pentru $\eta \in \mathbb{R}^2$ fixat avem mulţimile:*

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t \in [0,\beta_\eta)} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita pozitivă a lui } \eta,$$

$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (\alpha_\eta,0]} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita negativă a lui } \eta,$$

$$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) - \textit{se numeşte orbita a lui } \eta.$$

Definiţia 9.1.2 *Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formează portretul fazic generat de generat de sistemul (9.1).*

Exemplul 9.1.1 *Fie sistemul:*

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}. \tag{9.3}$$

Ne propunem să determinăm fluxul şi portretul fazic corespunzător.

Fluxul este dat de soluţia saturată (soluţia definită pe cel mai mare interval posibil) a problemei Cauchy ataşate sistemului (9.3)

$$\begin{cases} x' & = y \\ y' & = -x \\ x(0) & = \eta_1 \\ y(0) & = \eta_2 \end{cases} \tag{9.4}$$

Mai întâi determinăm soluţia generală a sistemului (9.3). Observăm că sistemul este unul liniar omogen cu coeficienţi constanţi, soluţia generală poate fi determinată fie prin metoda reducerii la o ecuaţie diferenţială de ordinul II cu coeficienţi constanţi sau metoda ecuaţiei caracteristice (vezi Cursul 4). Vom determina soluţia prin metoda reducerii la o ecuaţie diferenţială de ordinul II cu coeficineţi constanţi.

Derivând în raport cu t prima ecuaţie obţinem

$$x'' = y',$$

dar din a doua ecuaţie a sistemului avem că

$$y' = -x,$$

de unde deducem că

$$x'' = -x,$$

astfel componenta $x(t)$ a sistemului satisface ecuaţia liniară omogenă de ordinul II cu coeficienţi constanţi

$$x'' + x = 0. \tag{9.5}$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este de forma

$$r^2 + 1 = 0$$

ce are rădăcinile

$$r_{1,2} = \pm i,$$

astfel, sistemul fundamental de soluţii este

$$x_1(t) = \cos(t) \text{ şi } x_2(t) = \sin(t),$$

soluţia generală a ecuaţiei (9.5) fiind de combinaţia liniară a celor două soluţii din sistemul fundamental, adică

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Expresia celei de a doua componente a sistemului, $y(t)$, se obţine din prima ecuaţiei a acestuia

$$y = x',$$

deci

$$y(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Folosind condiţiile iniţiale obţinem valorile constantelor de integrare, c_1, c_2, în funcţie de η_1, η_2

$$x(0) = \eta_1 \Longrightarrow c_1 = \eta_1$$
$$y(0) = \eta_2 \Longrightarrow c_2 = \eta_2$$

înlocuind în expresia soluţiei generale obţinem

$$x(t,\eta) = x(t,\eta_1,\eta_2) = \eta_1 \cos(t) + \eta_2 \sin(t),$$
$$y(t,\eta) = y(t,\eta_1,\eta_2) = -\eta_1 \sin(t) + \eta_2 \cos(t).$$

Cel mai mare interval pe care putem considera soluţiile $x(t,\eta)$, $y(t,\eta)$ este $I_\eta = \mathbb{R}$, astfel fluxul generat de sistemul (9.3) este

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \varphi(t,\eta) &= \varphi(t,\eta_1,\eta_2) = (x(t,\eta_1,\eta_2), y(t,\eta_1,\eta_2)) \\ &= (\eta_1 \cos(t) + \eta_2 \sin(t), -\eta_1 \sin(t) + \eta_2 \cos(t)). \end{aligned}$$

Pentru determinarea portretului fazic trebuie sa determinăm orbitele pentru fiecare vector de date iniţiale $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem două cazuri:

I. Cazul $(\eta_1,\eta_2) = (0,0)$

Se observă că

$$\varphi(t,0,0) = (0,0), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem că orbita se reduce la un punct şi anume originea

$$\gamma(0,0) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,0,0) = \{(0,0)\}.$$

II. Cazul $(\eta_1,\eta_2) \neq (0,0)$

În acest caz avem că orbita este mulţimea

$$\gamma(\eta_1,\eta_2) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,\eta_1,\eta_2) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} (\eta_1 \cos(t) + \eta_2 \sin(t), -\eta_1 \sin(t) + \eta_2 \cos(t)),$$

adică mulţimea punctelor din plan $M(x_M, y_M)$ unde

$$\begin{cases} x_M &= \eta_1 \cos(t) + \eta_2 \sin(t) \\ y_M &= -\eta_1 \sin(t) + \eta_2 \cos(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina ce curbă din plan descriu punctele $M(x_M, y_M)$ date prin relaţiile parametrice de mai sus trebuie eliminat parametrul t. Dacă calculăm

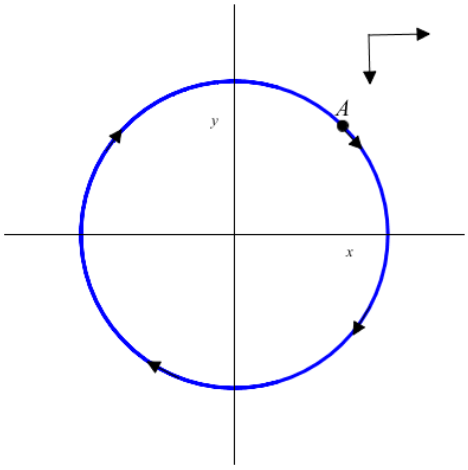
$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= (\eta_1 \cos(t) + \eta_2 \sin(t))^2 + (-\eta_1 \sin(t) + \eta_2 \cos(t))^2 \\ &= \eta_1^2 \cos^2(t) + 2\eta_1\eta_2 \cos(t)\sin(t) + \eta_2^2 \sin^2(t) + \\ &\quad + \eta_1^2 \sin^2(t) - 2\eta_1\eta_2 \cos(t)\sin(t) + \eta_2^2 \cos^2(t) \\ &= \eta_1^2 + \eta_2^2 \end{aligned}$$

deci coordonatele punctelor $M(x_M, y_M)$ satisfac ecuaţia

$$x_M^2 + y_M^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$$

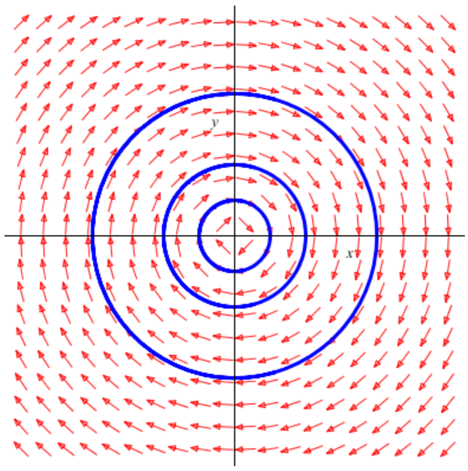
ce reprezintă ecuaţia cercului centrat in origine $O(0,0)$ şi de rază $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$.

În concluzie, sistemul (9.3) are două tipuri de orbite: punctul $O\,(0,0)$ ce se obţine pentru $(\eta_1, \eta_2) = (0,0)$ şi cercuri centrate în origine $O\,(0,0)$ ce trec prin punctul de coordonate (η_1, η_2) de rază $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ pentru $(\eta_1, \eta_2) \neq (0,0)$. Pentru a determina portretul fazic mai avem nevoie de sensul de parcurgere al orbitelor. Principiul de determinare este următorul: se fixează un punct A în cadranul I unde $x > 0$ şi $y > 0$. Din ecuaţiile sistemului (9.3) deducem că în vecinătatea punctului A avem că $x' > 0$ şi $y' < 0$, deci x trebuie să crească şi y trebuie să descrească, prin compunerea celor două direcţii deducem sensul de parcurgere al orbitei în cadranul I. Raţionamentul se poate aplica în mod similar şi pentru celelalte cadrane, dar cum orbitele sunt curbe închise sensul de parcurgere va rămâne acelaşi pe întreaga orbită (vezi figura de mai jos)



Stabilirea sensului de parcurgere al orbitelor pentru sistemul (9.3).

În MAPLE sensul de parcurgere al orbitelor este dat de câmpul de direcţii (săgeţile ce reprezintă tangentele la orbite) aşa cum se vede în figura de mai jos:



Portretul fazic al sistemului (9.3).

Este evident faptul că metoda de determinare a portretului fazic pe baza definiţiei nu poate fi aplicată decât în cazul sistemelor rezolvabile (practic doar cazul sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi). O altă metodă de determinare a acestuia este prin intermediul ecuaţiei diferenţiale a orbitelor, aceasta se deduce în felul următor. Ştim că

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x,y) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = f_1(x,y), \\ y' &= f_2(x,y) \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = f_2(x,y), \end{aligned}$$

împărţind cele două relaţii obţinem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} \tag{9.6}$$

ce reprezintă o ecuaţie diferenţială având funcţia necunoscută x de variabilă y, $x(y)$, sau invers

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \tag{9.7}$$

ce reprezintă o ecuaţie diferenţială având funcţia necunoscută y de variabilă x, $y(x)$. Ecuaţiile (9.6) sau (9.7) reprezintă ecuaţia diferenţială a orbitelor, soluţia generală corespunzătoare reprezentând ecuaţiile curbelor din planul xOy ce descriu orbitele. Dacă această ecuaţie difernţială este una rezolvabilă putem determina ecuaţiile orbitelor fără a mai fi necesar să rezolvăm sistemul (9.6).

În cazul Exemplului 9.1.1, pentru sistemul (9.3) avem:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y, \\ f_2(x,y) &= -x, \end{aligned}$$

deci ecuaţia diferenţială a orbitelor corespunzătoare a sistemului (9.3) este de forma:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x},$$

de unde obţinem

$$\begin{aligned} y \cdot dy &= -x \cdot dx \Longrightarrow 2y \cdot dy = -2x \cdot dx \Longrightarrow \int 2y \cdot dy = -\int 2x \cdot dx \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \int 2y \cdot dy = -\int 2x \cdot dx \Longrightarrow y^2 = -x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

adică ecuaţia implicită a orbitelor este de forma

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

deci orbitele cercuri centrate în originea $O(0,0)$ şi de rază $\sqrt{c}$, aceasta fiind determinată de condiţiile iniţiale.

9.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie sistemul de ecuaţii autonome (9.1):

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(x,y) \\ y'(t) &= f_2(x,y) \end{cases}$$

Definiţia 9.2.1 *Soluţiile constante*

$$\begin{cases} x(t) &\equiv x^* \\ y(t) &\equiv y^* \end{cases}$$

ale sistemului (9.1) se numesc soluţii de echilibru sau soluţii staţionare.

Vectorul $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ se numeşte punct de echilibru sau punct staţionar.

Se observă că dacă

$$\begin{cases} x(t) &\equiv x^* \\ y(t) &= y^* \end{cases}$$

este o soluţie de echilibru a sistemului (9.1) atunci punctul de echilibru $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ este soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0 \end{cases} \tag{9.8}$$

În studiul sistemelor de ecuaţii autonome este important studiul proprietăţilor de stabilitate a punctelor de echilibru. Ca şi în cazul punctelor de echilibru pentru ecuaţii autonome, avem următoarele noţiuni de stabilitate:

Definiţia 9.2.2 *Fie $X^*(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ un punct de echilibru al sistemului (9.1). Spunem că punctul de echilibru $X^*(x^*, y^*)$ este:*

(a) local stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $\|\eta - X^*\| < \delta$ atunci

$$\|\varphi(t,\eta) - X^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

unde $\varphi(t,\eta)$ este fluxul generat de (9.1), iar prin $\|\cdot\|$ am notat o normă din $\mathbb{R}^2$ (de exemplu norma max

$$\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

(b) local asimptotic stabil dacă este local stabil şi în plus există $r > 0$ astfel încât dacă $\|\eta - X^*\| < r$ atunci

$$\|\varphi(t,\eta) - X^*\| \to 0, \quad \textit{pentru } t \to +\infty,$$

unde $\varphi(t,\eta)$ este fluxul generat de (9.1).

(c) instabil dacă nu este local stabil.

Cazul sistemelor liniare

Considerăm cazul unui sistem planar de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = a_{11}x + a_{12}y \\ y'(t) & = a_{21}x + a_{22}y \end{array} \right. \tag{9.9}$$

sau dacă folosim notaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sistemul (9.9) devine

$$X' = A \cdot X. \tag{9.10}$$

Este evident faptul că originea planului xOy, punctul $O(0,0)$, este un punct de echilibru pentru sistemul liniar (9.9). Ne interesează în ce condiţii acesta este stabil. Fluxul generat de sistemul (9.9) este soluţia problemei Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ll} X' & = A \cdot X \\ X(0) & = \eta \end{array} \right.$$

unde $\eta \in \mathbb{R}^2$. Aşa cum am văzut în Cursul 4, în cazul metodei matriciale de rezolvare a sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi, o matrice fundamentală de soluţii este dată de matricea exponenţială

$$U(t) = e^{tA}$$

soluţia generală a sistemului fiind de forma

$$X(t) = e^{tA} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2.$$

Din condiţia iniţială

$$X(0) = \eta \Longrightarrow \mathbf{c} = \eta,$$

deci expresia fluxului va fi

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, \eta) = e^{tA} \cdot \eta.$$

Facem estimarea

$$\|\varphi(t,\eta) - (0,0)\| = \left\|e^{tA} \cdot \eta\right\| \le c_{\|\cdot\|} \cdot \left\|e^{tA}\right\| \cdot \|\eta\|,$$

unde $c_{\|\cdot\|}$ este o constantă ce depinde de norma din $\mathbb{R}^2$ folosită.

Se observă că dacă există un $M > 0$ astfel încât

$$\left\|e^{tA}\right\| \le M, \ \forall t > 0,$$

cu alte cuvinte matricea exponenţială e^{tA} este mărginită, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (alegem $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{c_{\|\cdot\|} \cdot M + 1}$) astfel încât dacă

$$\|\eta\| = \|\eta - (0,0)\| < \delta$$

avem

$$\|\varphi(t,\eta)-(0,0)\| = \left\|e^{tA}\cdot\eta\right\| < \varepsilon, \quad \forall t>0,$$

adică punctul de echilibru $O(0,0)$ este local stabil. Dacă în plus

$$\left\|e^{tA}\right\| \to 0 \text{ pentru } t\to+\infty$$

atunci

$$\|\varphi(t,\eta)-(0,0)\| \le c_{\|\cdot\|}\cdot\left\|e^{tA}\right\|\cdot\|\eta\| \to 0 \text{ pentru } t\to+\infty,$$

deci punctul de echilibru $O(0,0)$ este asimptotic stabil. Din teorema de structură a matricii exponenţiale e^{tA} avem că:

(i) matricea exponenţială e^{tA} este mărginită $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ pentru orice λ valoare proprie matricii A, egalitatea cu 0 având loc pentru valori proprii simple.

(ii) $\left\|e^{tA}\right\| \to 0$ pentru $t\to+\infty \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\lambda<0$ pentru orice λ valoare proprie matricii A.

Folosind aceste observaţii deducem următorul criteriu de stabilitate a originii pentru sisteme liniare (teorema de mai jos este valabilă şi în cazul general al sistemelor de n ecuaţii liniare):

Teorema 9.2.1 (Criteriul de stabilitate pentru sisteme liniare) *Fie sistemul liniar (9.9). Atunci punctul de echilibru $O(0,0)$ este:*

(a) local stabil $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda\le 0$ *pentru orice λ valoare proprie matricii A, egalitatea cu* 0 *având loc pentru valori proprii simple.*

(b) asimptotic stabil $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda<0$ *pentru orice λ valoare proprie matricii A.*

(c) instabil $\Longleftrightarrow$ *există λ o valoare proprie matricii A cu* $\operatorname{Re}\lambda>0$ *sau* $\operatorname{Re}\lambda=0$ *şi λ nu este valoare proprie simplă.*

În cazul sistemelor liniare planare valorile proprii ale matricii A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

sau explicit

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\cdot\lambda + \det A = 0, \tag{9.11}$$

unde

$$\operatorname{tr} A = a_{11}+a_{22}$$

este urma matricii A (trace) şi

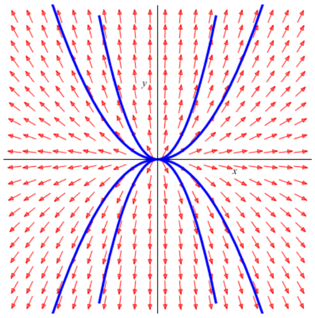
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

este determinantul matricii A. Întrucât ecuaţia caracteristică (9.11) este o ecuaţie polinomială de gradul II matricea A va avea două valori proprii λ_1, λ_2 (distincte sau nu). Pornind de la natura valorilor proprii λ_1, λ_2 se poate clasifica tipul punctului de echilibru $O(0,0)$:

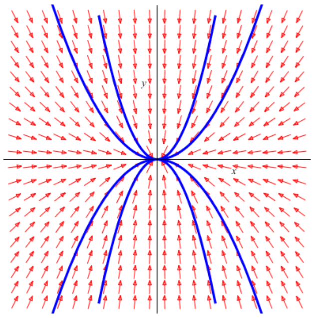
Clasificarea punctului de echilibru $O\,(0,0)$:

Spunem că punctul de de echilibru $O\,(0,0)$ este:

(i) **de tip nod** dacă $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

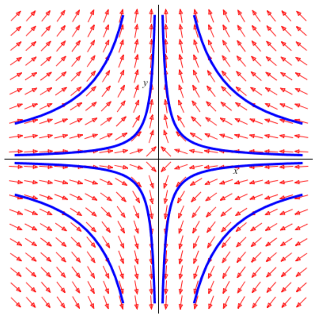


Nod instabil, cazul $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 > 0$.



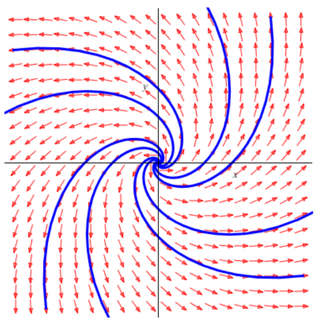
Nod asimptotic stabil, cazul $\lambda_1 < 0$ şi $\lambda_2 < 0$.

(ii) **de tip şa** dacă $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

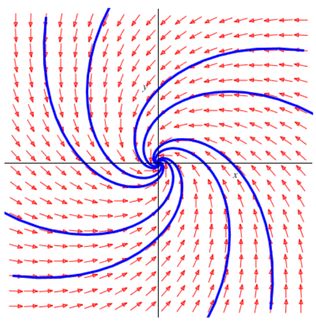


Punctul de tip şa, cazul $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Punctul de tip şa este întotdeauna instabil.

(iii) **de tip focus** dacă $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ şi $\alpha \neq 0$

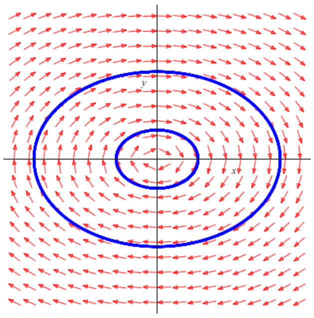


Focus instabil, cazul $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ şi $\alpha > 0$.



Focus asimptotic stabil, cazul $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < 0$.

(iv) **de tip centru** dacă $\lambda_{1,2} = i\beta \in \mathbb{C}$



Punctul de tip centru, cazul $\lambda_{1,2} = i\beta \in \mathbb{C}$. Punctul de tip centru este întordeauna local stabil.

Cazul sistemelor neliniare

În cazul general, al sistemelor neliniare o metodă de determinare a stabiltăţii punctului de echilibru este *metoda liniarizării* sau *metoda primei aproximaţii,* ideea metodei liniarizării este de a aproxima sistemul neliniar (9.1)

$$\begin{cases} x'(t) & = f_1(x,y) \\ y'(t) & = f_2(x,y) \end{cases}$$

printr-un sistem liniar într-o vecinătate a punctului de echilibru. Fie $X^*(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$ un punct de echilibru pentru sistemul neliniar (9.1). Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei vectoriale $f = (f_1, f_2)$ în punctul $X^*(x^*,y^*)$ este

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= f_1(x^*,y^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*) + ... \\ f_2(x,y) &= f_2(x^*,y^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*) + ... \end{aligned}$$

Ştiind că $X^*(x^*,y^*)$ este un punct de echilibru, deci

$$\begin{cases} f_1(x^*,y^*) & = 0 \\ f_2(x^*,y^*) & = 0 \end{cases}$$

şi luând din această dezvoltare doar partea liniară, atunci funcţia $f = (f_1, f_2)$ este aproximată prin

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*) \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea jacobiană* ataşată funcţiei vectoriale $f = (f_1, f_2)$, astfel

$$f(x,y) \simeq J_f(X^*) \cdot (X - X^*)$$

iar sistemul (9.1) este aproximat în vecinătatea punctului de echilibru $X^*(x^*, y^*)$ prin sistemul

$$X' = f(X) \simeq X' = J_f(X^*) \cdot (X - X^*)$$

Notând prin

$$Y = X - X^*$$

avem că

$$Y' = X',$$

deci sistemul (9.1) este aproximat prin sistemul

$$Y' = J_f(X^*) \cdot Y \tag{9.12}$$

numit şi *sistemul liniarizat* în punctul de echilibru $X^*(x^*, y^*)$. Se observă că pe poziţia matricii A din cazul sistemului liniar (9.10) este matricea

$$J_f(X^*) = J_f(x^*, y^*),$$

astfel obţinem următorul criteriu de stabilitate cunoscut sub numele de criteriul stabilităţii în primă aproximaţie sau criteriul stabilităţii liniarizate pentru sisteme:

Teorema 9.2.2 (Criteriul de stabilitate în primă aproximaţie pentru sisteme) *Fie sistemul neliniar (9.1) şi $X^*(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ un punct de echilibru corespunzător. Atunci:*

(a) Dacă $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pentru orice λ valoare proprie matricii $J_f(x^*, y^*)$ atunci punctul de echilibru $X^*(x^*, y^*)$ este local asimptotic stabil.

(b) Dacă există λ o valoare proprie matricii $J_f(x^*, y^*)$ cu $\operatorname{Re}\lambda > 0$ atunci punctul de echilibru $X^*(x^*, y^*)$ este instabil.

Se observă că, spre deosebire de cazul liniar, din Criteriul de stabilitate în primă aproximaţie nu se pot trage concluzii în situaţia în care avem o valoare proprie simplă λ a matricii $J_f(x^*, y^*)$ cu $\operatorname{Re}\lambda = 0$ şi toate celelalte cu partea reală strict negativă, pentru a obţine stabilitatea local asimptotică este necesar ca toate valorile proprii sa aibă partea reală strict negativă.