Curs 7

Sisteme dinamice generate de ecuaţii diferenţiale autonome

Dacă funcţia necunoscută dintr-o ecuaţie diferenţială este $x = x(t)$ atunci forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul I este:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

O ecuaţie diferenţială se numeşte *ecuaţie autonomă* dacă variabila funcţiei necunoscute nu apare în mod explicit în expresia ecuaţiei diferenţiale (funcţia f nu depinde explicit de variabila t), adică aceasta este de forma:

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{7.1}$$

De exemplu, ecuaţia

$$x' = t^2 \cdot x + x^3$$

nu este o ecuaţie diferenţială autonomă deoarcece variabila t apare explicit în expresia acesteia, iar ecuaţia

$$x' = x + x^3$$

este o ecuaţie diferenţială autonomă, variabila t nu apare explicit în expresia ecuaţiei.

7.1 Fluxul generat de o ecuaţie diferenţială autonomă. Portret fazic

Se consideră ecuaţia autonomă (7.1). Avem următorul rezultat:

Teorema 7.1.1 *Dacă $f \in C^1(\mathbb{R})$ atunci problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = & f(x) \\ x(0) = & \eta \end{cases} \tag{7.2}$$

are o unică soluţie saturată pentru orice $\eta \in \mathbb{R}$.

Printr-o *soluţie saturată* a unei ecuaţii diferenţiale înţelegem o soluţie definită pe cel mai mare interval posibil. Notăm prin $x(t,\eta)$ unica soluţie a problemei Cauchy (7.2), astfel soluţia

$$x(\cdot,\eta) : I_\eta \to \mathbb{R},$$

unde intervalul I_η este maximal (în general, intervalul maximal depinde de alegerea valorii η). Din Teorema de comportare la frontieră a soluţiilor saturate avem că interval maximal I_η este un interval deschis de forma:

$$I_\eta = \left(\alpha_\eta, \beta_\eta\right),$$

(valorile α_η, β_η putând fi valori finite sau infinite) şi pentru ca problema Cauchy (7.2) să fie bine definită trebuie ca $0 \in I_\eta$ ceea ce implică relaţia

$$\alpha_\eta < 0 < \beta_\eta.$$

Fluxul φ generat de ecuaţia (7.1) este soluţia saturată a problemei Cauchy (7.2) şi se defineşte în următorul mod:

$$\varphi : W \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t,\eta) = x(t,\eta)$$

unde mulţimea W este definită de

$$W = \{I_\eta \times \{\eta\} : \ \eta\in\mathbb{R}\}.$$

Dacă $I_\eta = \mathbb{R}$ atunci $W = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Pentru orice t fixat putem defini operatorul

$$\eta \longmapsto \varphi(t,\eta),$$

acest operator se numeşte *sistemul dinamic* generat de ecuaţia (7.1).

Proprietăţi:

1. $\varphi(0,\eta) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t+s,\eta) = \varphi(t+s,\varphi(s,\eta))$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\forall t,\eta \in I_\eta$;
3. φ este continuu în raport cu η.

Definiţia 7.1.1 *Pentru $\eta \in \mathbb{R}$ fixat avem mulţimile:*

$$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,\beta_\eta)} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita pozitivă a lui } \eta,$$

$$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(\alpha_\eta,0]} \varphi(t,\eta) - \textit{se numeşte orbita negativă a lui } \eta,$$

$$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) - \textit{se numeşte orbita a lui } \eta.$$

Definiţia 7.1.2 *Reuniunea tuturor orbitelor împreună cu sensul de parcurgere al acestora formează portretul fazic generat de ecuaţia (7.1).*

Exemplul 7.1.1 *Fie ecuaţia*

$$x' = -x. \tag{7.3}$$

Fluxul generat de ecuaţia (7.3) este soluţia saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = & -x \\ x(0) = & \eta \end{cases} \tag{7.4}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (7.3) este de forma

$$x(t) = c \cdot e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Din condiţia iniţială

$$x(0) = \eta \Longrightarrow c = \eta.$$

Deci soluţia problemei Cauchy (7.4) este

$$x(t, \eta) = \eta \cdot e^{-t}.$$

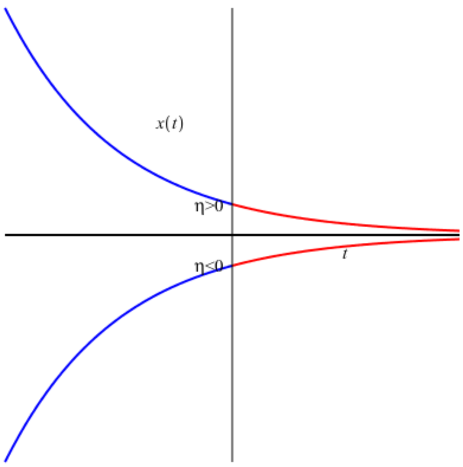
Se observă că cel mai mare interval pe care putem considera această soluţie este $\mathbb{R}$ pentru orice η fixat ($\alpha_\eta = -\infty$ şi $\beta_\eta = +\infty$), deci

$$I_\eta = \mathbb{R}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Astfel, fluxul generat de ecuaţia (7.3) este

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(t, \eta) = x(t, \eta) = \eta \cdot e^{-t}.$$



Soluţiile ecuaţiei $x' = -x$ după valorile lui η.

Pentru determinarea portretului fazic mai întâi trebuie să determinăm orbitele pentru fiecare η fixat. Observăm că sunt trei cazuri posibile:

- (i) $\eta = 0$

  avem că
  $$\varphi(t,0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
  de unde obţinem că
  $$\gamma(0) = \{0\},$$
  adică orbita lui $\eta = 0$ se reduce la punctul $\{0\}$.

- (ii) $\eta < 0$

  avem că orbita negativă este
  $$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(-\infty,0]} \varphi(t,\eta) = \underrightarrow{(-\infty,\eta]}$$
  cu sensul de parcurgere crescător de la $-\infty$ la η (am pus în evidenţă acest lucru prin săgeata de sub interval),

  orbita pozitivă este
  $$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,+\infty)} \varphi(t,\eta) = \underrightarrow{[\eta,0)}$$
  tot cu un sens de parcurgere crescător de la η la 0, iar întreaga orbita este
  $$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) = \underrightarrow{(-\infty,0)}$$
  cu sens de parcurgere crescător. Se observă că orbita întreagă este aceeaşi pentru orice $\eta < 0$, aceasta fiind intervalul $(-\infty, 0)$.

- (iii) $\eta > 0$

  avem că orbita negativă
  $$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t\in(-\infty,0]} \varphi(t,\eta) = \underleftarrow{[\eta,+\infty)}$$
  cu sensul de parcurgere descrescător de la $+\infty$ la η, orbita pozitivă este
  $$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t\in[0,+\infty)} \varphi(t,\eta) = \underleftarrow{(0,\eta]}$$
  cu un sens de parcurgere descrescător la η la 0, iar întreaga orbita este
  $$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) = \underleftarrow{(0,+\infty)}$$
  cu sens de parcurgere descrescător. Se observă că orbita întreagă este aceeaşi pentru orice $\eta > 0$, aceasta fiind intervalul $(0, +\infty)$.

În concluzie avem următoarele orbite:

$$\begin{aligned}
\gamma(\eta) &= \underrightarrow{(-\infty,0)} - \text{ pentru } \eta<0 \text{ cu sens de parcurgere crescător}\\
\gamma(0) &= \{0\} - \text{pentru } \eta=0\\
\gamma(\eta) &= \underleftarrow{(0,+\infty)} - \text{ pentru } \eta>0 \text{ cu sens de parcurgere descrescător}
\end{aligned}$$

Portretul fazic poate fi vizualizat grafic printr-o axă pe care sunt reprezentate orbitele $(-\infty,0)$, $\{0\}$, $(0,+\infty)$ împreună cu sensul de parcurgere al acestora:

Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = -x$.

Exemplul 7.1.2 *Fie ecuaţia*

$$x' = x. \tag{7.5}$$

Fluxul generat de ecuaţia (7.5) este soluţia saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = & x \\ x(0) = & \eta \end{cases} \tag{7.6}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (7.5) este de forma

$$x(t) = c \cdot e^t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Din condiţia iniţială

$$x(0) = \eta \Longrightarrow c = \eta.$$

Deci soluţia problemei Cauchy (7.6) este

$$x(t,\eta) = \eta \cdot e^t.$$

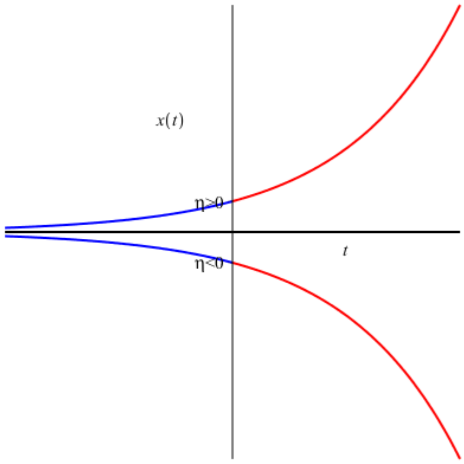
Se observă că cel mai mare interval pe care putem considera această soluţie este $\mathbb{R}$ pentru orice η fixat ($\alpha_\eta = -\infty$ şi $\beta_\eta = +\infty$), deci

$$I_\eta = \mathbb{R}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

Astfel, fluxul generat de ecuaţia (7.5) este

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(t,\eta) = x(t,\eta) = \eta \cdot e^t.$$



Soluţiile ecuaţiei $x' = x$ după valorile lui η.

Pentru determinarea portretului fazic mai întâi trebuie să determinăm orbitele pentru fiecare η fixat. Observăm că avem trei cazuri:

- (i) $\eta = 0$

  avem că
  $$\varphi(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
  de unde obţinem că
  $$\gamma(0) = \{0\},$$
  adică orbita lui $\eta = 0$ se reduce la punctul $\{0\}$.

- (ii) $\eta < 0$

  avem că orbita negativă
  $$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \varphi(t, \eta) = \underleftarrow{[\eta, 0)}$$
  cu sensul de parcurgere descrescător de la 0 la η,

  orbita pozitivă este
  $$\gamma^+(\eta) = \bigcup_{t \in [0, +\infty)} \varphi(t, \eta) = \underleftarrow{(-\infty, \eta]}$$
  tot cu un sens de parcurgere descrescător de la η la $-\infty$, iar întreaga orbita este
  $$\gamma(\eta) = \gamma^+(\eta) \cup \gamma^-(\eta) = \underleftarrow{(-\infty, 0)}$$
  cu sens de parcurgere descrescător. Se observă că orbita întreagă este aceeaşi pentru orice $\eta < 0$ fiind intervalul $(-\infty, 0)$.

- (iii) $\eta > 0$

  avem că orbita negativă este
  $$\gamma^-(\eta) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \varphi(t, \eta) = \underrightarrow{(0, \eta]}$$

cu sensul de parcurgere crescător de la 0 la η, orbita pozitivă este

$$\gamma^{+}(\eta) = \bigcup_{t\in[0,+\infty)} \varphi(t,\eta) = \underrightarrow{[\eta,+\infty)}$$

cu un sens de parcurgere crescător de la η la $+\infty$, iar întreaga orbita este

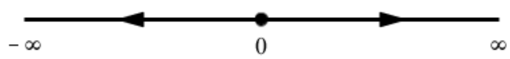
$$\gamma(\eta) = \gamma^{+}(\eta) \cup \gamma^{-}(\eta) = \underrightarrow{(0,+\infty)}$$

cu sens de parcurgere crescător. Se observă că orbita întreagă este aceeaşi pentru orice $\eta > 0$ fiind intervalul $(0,+\infty)$.

În concluzie avem următoarele orbite:

$$\begin{aligned}
\gamma(\eta) &= \underleftarrow{(-\infty,0)} - \text{ pentru } \eta < 0 \text{ cu sens de parcurgere crescător} \\
\gamma(0) &= \{0\} - \text{pentru } \eta = 0 \\
\gamma(\eta) &= \underrightarrow{(0,+\infty)} - \text{ pentru } \eta > 0 \text{ cu sens de parcurgere crescător}
\end{aligned}$$

Portretul fazic poate fi vizualizat grafic printr-o axă pe care sunt reprezentate orbitele $(-\infty,0)$, $\{0\}$, $(0,+\infty)$ împreună cu sensul de parcurgere al acestora:



Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = x$.

Este clar că obţinerea portretului fazic pe baza analizei valorilor fluxului este condiţionată de rezolvarea problemei Cauchy (7.2). Ecuaţia (7.1) este una rezolvabilă, aceasta fiind o ecuaţie cu variabile separabile, dar se ştie că în foarte multe cazuri soluţia generală este obţinută în formă implicită lucru care face imposibil determinarea expresiei fluxului. Se pune problema dacă nu se poate obţine portretul fazic fără a fi nevoie să rezolvăm explicit problema Cauchy (7.2).

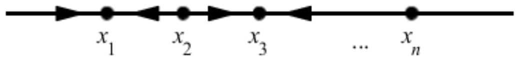
Portretul fazic poate fi obţinut direct din analiza semnului funcţiei $f(x)$. Mai întâi rezolvăm ecuaţia

$$f(x) = 0.$$

Fie x_1, ..., x_n soluţiile reale ale acestei ecuaţii în ordine crescătoare. Construim tabelul cu semnul funcţiei f

x	$-\infty$	$\dots$	x_1		x_2		x_3		$\dots$	x_n
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\dots$	0
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		

Astfel orbitele sunt determinate de punctele x_1, ..., x_n, adică vor fi intervalele $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2), ..., (x_{n-1},x_n), $(x_n,+\infty)$ cu sensul de parcurgere crescător dacă semnul funcţiei f este pozitiv, respectiv cu sens de parcurgere descrescător dacă semnul funcţiei f este negativ, la care se vor adauga punctele $\{x_1\}$, ..., $\{x_n\}$.



Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = f(x)$.

Exemplul 7.1.3 *În cazul ecuaţiei*

$$x' = x - x^3 \tag{7.7}$$

funcţia f este

$$f(x) = x - x^3$$

Soluţiile ecuaţiei

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x - x^3 = 0 \Longrightarrow x \cdot \left(1 - x^2\right) = 0$$

sunt

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Tabelul cu semnul funcţiei f este

x	$-\infty$		-1		0		1	
$f(x) = x - x^3$		$++$	0	$--$	0	$++$	0	$-$
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$

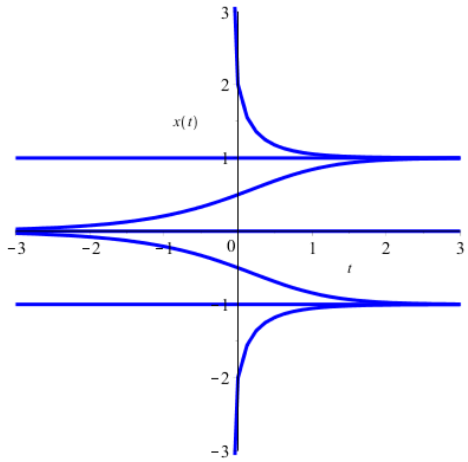
ceea ce implică faptul că portretul fazic generat de ecuaţia (7.7) este de forma:

Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = x - x^3$.

Portretul fazic obţinut ne furnizează, fără a rezolva ecuaţia (7.7), următoarele informaţii:

- dacă $\eta < -1$ soluţiile $x(t, \eta)$ cresc de la $-\infty$ la -1 şi $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, \eta) = -1$
- dacă $\eta = -1$ atunci avem soluţia constantă $x(t, -1) \equiv -1$
- dacă $-1 < \eta < 0$ soluţiile $x(t, \eta)$ descresc de la 0 la -1 şi $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, \eta) = 0$, respectiv $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, \eta) = -1$
- dacă $\eta = 0$ atunci avem soluţia constantă $x(t, 0) \equiv 0$
- dacă $0 < \eta < 1$ soluţiile $x(t, \eta)$ cresc de la 0 la 1 şi $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t, \eta) = 0$, respectiv $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, \eta) = 1$

- dacă $\eta > 1$ soluţiile $x(t, \eta)$ descresc de la ∞ la 1 şi $\lim_{t \to +\infty} x(t, \eta) = 1$



Soluţiile ecuaţiei $x' = x - x^3$.

7.2 Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie ecuaţia autonomă (7.1)

$$x' = f(x).$$

Definiţia 7.2.1 *Soluţiile constante*

$$x(t) \equiv x^*$$

ale ecuaţiei (7.1) se numesc soluţii de echilibru sau soluţii staţionare.

Valoarea $x^* \in \mathbb{R}$ se numeşte punct de echilibru sau punct staţionar.

Se observă că dacă $x(t) \equiv x^*$ este o soluţie de echilibru a ecuaţiei autonome (7.1) atunci $x^* \in \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei

$$f(x) = 0 \tag{7.8}$$

sau cu alte cuvinte, rădăcinile reale ale funcţiei f sunt puncte de echilibru.

În studiul ecuaţiilor autonome este important studiul proprietăţilor de stabilitate a punctelor de echilibru. Avem următoarele noţiuni de stabilitate:

Definiţia 7.2.2 *Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru al ecuaţiei autonome (7.1). Spunem că punctul de echilibru x^* este:*

(a) local stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < \delta$ atunci

$$|\varphi(t, \eta) - x^*| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

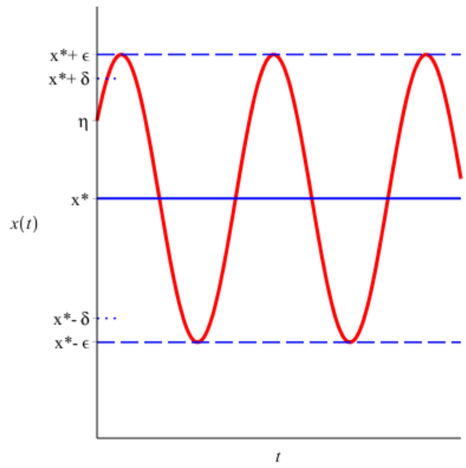
unde $\varphi(t, \eta)$ este fluxul generat de (7.1).

(b) local asimptotic stabil dacă este local stabil şi în plus există $r > 0$ astfel încât dacă $|\eta - x^*| < r$ atunci

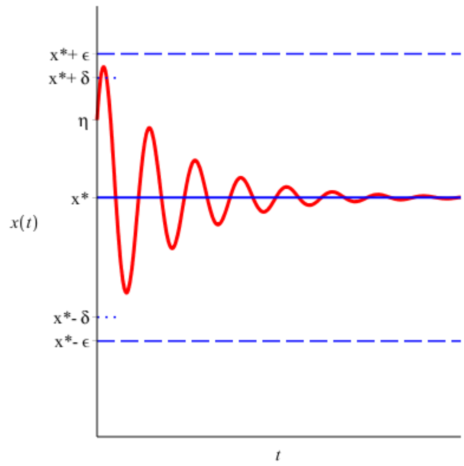
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| \to 0, \quad \textit{pentru } t \to +\infty,$$

unde $\varphi(t,\eta)$ este fluxul generat de (7.1).

(c) instabil dacă nu este local stabil.



Punct de echilibru x^* local stabil



Punct de echilibru x^* local asimptotic stabil.

Exemplul 7.2.1 *Să considerăm ecuaţia (7.3)*

$$x' = -x.$$

În acest caz funcţia $f(x)$ este

$$f(x) = -x.$$

Din ecuaţia

$$f(x) = 0 \Longrightarrow -x = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

deci punctul de echilibru corespuzător este $x^* = 0$. Am văzut că fluxul generat este (vezi Exemplul 7.1.1 de determinarea fluxului)

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(t,\eta) = \eta \cdot e^{-t}.$$

Avem că:

$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = \left|\eta \cdot e^{-t}\right| = |\eta| \cdot e^{-t},$$

ştiind că

$$e^{-t} \leq 1, \ \forall t \in [0, +\infty),$$

rezultă că
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{-t} \leq |\eta|, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$
Astfel, pentru $\varepsilon > 0$ *fixat alegem* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ *şi obţinem că pentru orice* η *cu proprietatea că*
$$|\eta| = |\eta - x^*| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$
avem
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{-t} \leq |\eta| = |\eta - x^*| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$
ceea ce demonstrează că punctul de echilibru $x^* = 0$ *este local stabil. Mai mult, are loc*
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{-t} \to 0 \text{ pentru } t \to +\infty,$$
ceea ce implică faptul că punctul de echilibru $x^* = 0$ *este asimptotic stabil (de fapt, punctul de echilibru* $x^* = 0$ *este global asimptotic stabil deoarece proprietatea de mai sus are loc pentru orice* $\eta \in \mathbb{R}$*, nu este necesar ca* η *să fie în apropierea punctului de echilibru* $x^* = 0$*).*

Exemplul 7.2.2 *Să considerăm ecuaţia (7.5)*
$$x' = x.$$
În acest caz funcţia $f(x)$ *este*
$$f(x) = x.$$
Din ecuaţia
$$f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0,$$
deci punctul de echilibru este $x^* = 0$*. Am văzut ca fluxul generat este*
$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi(t,\eta) = \eta \cdot e^t.$$
Avem că:
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = \left|\eta \cdot e^t\right| = |\eta| \cdot e^t.$$
Se observă că pentru $\varepsilon = 1$ *avem că pentru orice* $\delta > 0$ *şi orice* η *cu proprietatea*
$$|\eta| = |\eta - x^*| < \delta$$
există o valoarea $t_1 = t_1(\delta) > 0$ *astfel încât*
$$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^t > 1 = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1(\delta),$$
($e^t \to +\infty$ *când* $t \to +\infty$*), ceea ce ne arată că punctul de echilibru este* $x^* = 0$ *este instabil.*

Exemplul 7.2.3 *Considerăm cazul general al ecuaţiei liniare omogene*
$$x' = a \cdot x \tag{7.9}$$

unde $a \in \mathbb{R}$. *În acest caz funcţia* $f(x)$ *este*

$$f(x) = a \cdot x.$$

Din ecuaţia

$$f(x) = 0 \Longrightarrow a \cdot x = 0,$$

deducem:

dacă $a \neq 0$ *atunci există un singur punct de echilibru* $x^* = 0$

dacă $a = 0$ *atunci există o infinitate de puncte de echilibru, orice valoare* $x^* \in \mathbb{R}$ *este punct de echilibru.*

Determinarea fluxului revine la determinarea soluţiei saturate a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = & a \cdot x \\ x(0) = & \eta \end{cases}$$

Astfel, avem

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{array}{ll} \varphi(t,\eta) = \eta \cdot e^{a \cdot t} & \textit{pentru } a \neq 0 \\ \varphi(t,\eta) = \eta & \textit{pentru } a = 0. \end{array}$$

- (i) *Cazul* $a \neq 0$

  în acest caz punctul de echilibru este $x^* = 0$. *Avem că*

  $$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{a \cdot t}.$$

  Dacă $a < 0$ *atunci*

  $$e^{a \cdot t} < 1, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

  deci, pentru $\varepsilon > 0$ *fixat alegem* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ *şi avem că pentru orice* η *cu proprietatea că*

  $$|\eta| = |\eta - x^*| < \delta$$

  are loc

  $$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{a \cdot t} \leq |\eta| = |\eta - x^*| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

  ceea ce demonstrează că punctul de echilibru $x^* = 0$ *este local stabil. Mai mult, şi în acest caz are loc*

  $$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{a \cdot t} \to 0 \textit{ pentru } t \to +\infty,$$

  ceea ce implică faptul că punctul de echilibru $x^* = 0$ *este asimptotic stabil.*

  Dacă $a > 0$ *atunci*

  $$e^{a \cdot t} \to +\infty, \quad \textit{pentru } t \to +\infty,$$

  deci

  $$|\varphi(t,\eta) - x^*| = |\eta| \cdot e^{a \cdot t} \to +\infty \textit{ pentru } t \to +\infty$$

  ceea ce ne arată că $x^* = 0$ *este instabil.*

- (ii) *Cazul* $a = 0$

  în acest caz orice valoare $x^* \in \mathbb{R}$ *este punct de echilibru. Avem că*

  $$|\varphi(t, \eta) - x^*| = |\eta - x^*|.$$

  Pentru $\varepsilon > 0$ *fixat alegem* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ *şi obţinem că pentru orice* η *cu proprietatea că*

  $$|\eta| = |\eta - x^*| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

  avem

  $$|\varphi(t, \eta) - x^*| = |\eta - x^*| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

  ceea ce demonstrează că punctul de echilibru x^* *este local stabil fără a fi asimptotic stabil deoarece*

  $$|\varphi(t, \eta) - x^*| = |\eta - x^*| \nrightarrow 0 \quad \textit{pentru } t \to +\infty.$$

În concluzie, pentru ecuaţia (7.9) avem următoarele situaţii:

- dacă $a < 0$ atunci ecuaţia (7.9) are un singur punct de echilibru $x^* = 0$ care este global asimptotic stabil

- dacă $a > 0$ atunci ecuaţia (7.9) are un singur punct de echilibru $x^* = 0$ care este instabil

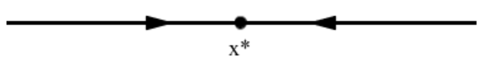
- $a = 0$ atunci orice valoare $x^* \in \mathbb{R}$ este punct de echilibru, acesta fiind local stabil.

Este evident faptul că determinarea stabilităţii unui punct de echilibru pe baza definiţiei poate fi aplicată doar în cazul ecuaţiilor diferenţiale pentru care poate fi determinată expresia fluxului sau, cu alte cuvinte, ecuaţiile pentru care se pot determina soluţiile în formă explicită. Se ştie că există un număr foarte mare de ecuaţii pentru care acest lucru nu peste posibil, astfel, se pune problema dacă nu există şi alte metode care să ne furnizeze informaţii despre proprietatea de stabilitate a punctelor de echilibru.

O metoda de determinare a stabilităţii punctelor de echilibru este *metoda portretului fazic*, acesta putând fi determinat pe baza semnului funcţiei f. Am văzut că portretul fazic furnizează informaţii despre comportamentul soluţiilor fără a fi nevoie de determinarea explicită a acestora, în consecinţă, prin analiza portretului putem determina stabilitatea soluţiilor de echilibru în felul următor:

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este către acesta atunci punctul de echilibru este local asimptotic stabil

- dacă sensul de parcurgere al orbitelor din vecinătatea punctului de echilibru este dinspre acesta atunci punctul de echilibru este instabil



Punct de echilibru local asimptotic stabil

Punct de echilibru instabil

Exemplul 7.2.4 *În cazul ecuaţiei (7.7)*

$$x' = x - x^3$$

punctele de echilibru sunt

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

iar portretul fazic corespunzător este

Portretul fazic generat de ecuaţia $x' = x - x^3$. Punctele $x_1 = 1$ şi $x_3 = 1$ sunt local asimptotic stabile, iar punctul $x_2 = 0$ este instabil.

Din portretul fazic deducem că punctele de echilibru $x_1 = -1$ şi $x_3 = 1$ sunt local asimptotic stabile (săgeţile sunt orientate către punctul de echilibru), iar punctul de echilibru $x_2 = 0$ este instabil (săgeţile sunt orientate dinspre punctul de echilibru).

O altă metodă de determinare a stabilităţii punctului de echilibru este *metoda liniarizării* sau *metoda primei aproximaţii.* Am văzut în Exemplul 7.2.3 că în cazul ecuaţiei liniare

$$x' = a \cdot x$$

avem cele trei situaţii, dacă $a < 0$ atunci punctul de echilibru $x^* = 0$ care este global asimptotic stabil, dacă $a > 0$ atunci punctul de echilibru $x^* = 0$ care este instabil, iar dacă $a = 0$ atunci orice valoare $x^* \in \mathbb{R}$ este punct de echilibru, acesta fiind local stabil. Ideea metodei liniarizării este de a aproxima ecuaţia neliniară (7.1)

$$x' = f(x)$$

printr-o ecuaţie liniară într-o vecinătate a punctului de echilibru. Fie $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru pentru ecuaţia (7.1). Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei f în punctul $x = x^*$ este

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots$$

Ştiind că x^* este un punct de echilibru, deci

$$f(x^*) = 0,$$

şi luând din această dezvoltare doar partea liniară, atunci funcţia f este aproximată prin

$$f(x) \simeq f'(x^*) \cdot (x - x^*)$$

pe o anumită vecinătate a punctului x^*, ceea ce înseamnă că ecuaţia (7.1) este aproximată prin

$$x' = f(x) \quad \simeq x' = \ f'(x^*) \cdot (x - x^*) \ .$$

Notând prin

$$y = x - x^*$$

avem că

$$y' = x',$$

deci ecuaţia (7.1) este aproximată prin ecuaţia

$$y' = f'(x^*) \cdot y \tag{7.10}$$

numită şi *ecuaţia liniarizată* în punctul de echilibru x^*. Se observă că pe poziţia parametrului a din cazul ecuaţiei liniare omogene este valoarea $f'(x^*)$ şi astfel obţinem următorul criteriu de stabilitate cunoscut sub numele de criteriul stabilităţii în primă aproximaţie sau criteriul stabilităţii liniarizate.

Teorema 7.2.1 (Criteriul de stabilitate în primă aproximaţie) *Fie ecuaţia autonomă (7.1) şi $x^* \in \mathbb{R}$ un punct de echilibru corespunzător pentru care există $f'(x^*)$. Atunci:*

(a) Dacă $f'(x^*) < 0$ atunci punctul de echilibru x^* este local asimptotic stabil.

(b) Dacă $f'(x^*) > 0$ atunci punctul de echilibru x^* este instabil.

Evident, demostraţia acestei teoreme este mult mai tehnică dar aceasta se bazează pe faptul că într-o vecinătate a punctului de echilibru x^* ecuaţia neliniară se comportă ca şi ecuaţia liniarizată (7.10), dacă $f'(x^*) < 0$ atunci punctul de echilibru $x = 0$ est asimptotic stabil pentru ecuaţia liniarizată ceea ce va implica faptul că punctul de echilibru x^* este asimptotic stabil într-o vecinătate a acestuia pentru ecuaţia neliniară (de aici stabilitatea locală), iar dacă $f'(x^*) > 0$ atunci punctul de echilibru $x = 0$ este instabil pentru ecuaţia liniarizată ceea ce va implica instabilitatea lui x^* pentru ecuaţia neliniară. Se observă, de asemenea, că acest criteriu nu poate fi aplicat în cazul în care $f'(x^*) = 0$.

Avantajul acestei metode este uşurinţa de aplicare, dezavantajul acesteia este că în cazul stabilităţii local asimptotice criteriul nu ne dă informaţii legate de vecinătatea punctului de echilibru x^* (intervalul din jurul lui x^*) numit şi *bazinul de atracţie* pentru care are loc proprietatea că alegând o valoare din acest interval ca valoare iniţială soluţia problemei Cauchy corespunzătoare să tindă către soluţia de echilibru. Pentru a obţine această informaţie este necesară determinarea portretului fazic de unde se obţin orbitele pentru care are loc proprietatea de convergenţă către soluţia de echilibru.

Exemplul 7.2.5 *Să considerăm, din nou, ecuaţia (7.7)*

$$x' = x - x^3$$

pentru care avem punctele de echilibru

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Funcţia f este

$$f(x) = x - x^3$$

iar

$$1 - 3x^2.$$

Astfel, avem

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= f'(-1) = -2 < 0 \\ f'(x_3) &= f'(1) = -2 < 0 \end{aligned}$$

de unde deducem că $x_1 = -1$*şi* $x_3 = 1$ *sunt local asimptotic stabile, iar*

$$f'(x_2) = f'(0) = 1 > 0$$

deci $x_2 = 0$ *este instabil. Din analiza portretului fazic vedem că bazinul de atracţie al punctului de echilibru* $x_1 = -1$ *este* $(-\infty, 0)$*, iar bazinul de atracţie punctului de echilibru* $x_3 = 1$ *este* $(0, +\infty)$*.*