第四章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

1. 设离散型随机变量 ξ 的分布律为 $P(\xi=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 为 ξ 的数学期望，记为 $E(\xi)$，简称为期望或均值，即

$$E(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

2. 设连续型随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 为 ξ 的数学期望，记为 $E(\xi)$，简称为期望或均值，即

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $y=g(x)$ 是连续函数，而 $\eta=g(\xi)$ 是随机变量的函数.

3. 设 $y=g(x)$ 是连续函数，而 $\eta=g(\xi)$ 是随机变量的函数.

(1)若 ξ 是离散型随机变量，分布列为 $P(\xi=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots)$，且级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $E(\eta)=E[g(\xi)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$.

(2)若 ξ 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $E(\eta)=E[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

4. 数学期望的性质

(1)设 c 是一常数，则 $E(c)=c$.

(2)设 ξ 为一随机变量，c 是常数，则 $E(c\xi)=cE(\xi)$.

(3)设 a,b 是常数，则 $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$.

(4)设 $E(\xi),E(\eta)$ 存在，则 $E(\xi\pm\eta)=E(\xi)\pm E(\eta)$，这一性质可推广到有限个随机变量的情形.

(5)若 ξ,η 相互独立，且 $E(\xi),E(\eta)$ 存在，则 $E(\xi\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$. 这一性质可推广到有限个相互独立的随机变量的情形.

4.2 方差

1. 设 ξ 是一随机变量，若 $E[\xi-E(\xi)]^2$ 存在，则称之为随机变量 ξ 的方差，记作 $D(\xi)$，即

$$D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2.$$

特别地，当 ξ 为离散型随机变量，其概率分布为 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$，则

$$D(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(\xi)]^2 p_k.$$

若 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，则

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(\xi)]^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 方差计算中常用公式 $D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$.

(1)对任意常数 c，有 $D(c)=0$， (2)对任意常数 a、b，有 $D(a\xi+b)=a^2D(\xi)$，

(3)设 $E(\xi),E(\eta)$ 均存在，则

$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2E[(\xi-E(\xi))(\eta-E(\eta))]$，

(4)若 ξ,η 相互独立，则 $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$，

特别地，$D(\xi-\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

4.3 协方差与相关系数

1. 设 (ξ,η) 为二维随机变量，若 $E[(\xi-E(\xi))(\eta-E(\eta))]$ 存在，则称它为 ξ 与 η 的协方差，记作 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$，即

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E(\xi))(\eta-E(\eta))]=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta),$$

特别地

$$\mathrm{cov}(\xi,\xi)=E[(\xi-E(\xi))(\xi-E(\xi))]=E[\xi-E(\xi)]^2=D(\xi),$$

$$\mathrm{cov}(\eta,\eta)=E[(\eta-E(\eta))(\eta-E(\eta))]=E[\eta-E(\eta)]^2=D(\eta),$$

所以方差 $D(\xi),D(\eta)$ 是协方差的特例.

2. 设 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ 存在，且 $D(\xi),D(\eta)$ 大于零，则称

$$\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}$$

为 ξ 与 η 的相关系数，记作 $\rho_{\xi\eta}$，简记为 ρ，即

$$\rho_{\xi\eta}=\rho=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}.$$

3. 协方差及相关系数的性质

(1)$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\eta,\xi)$，

(2)$\mathrm{cov}(\xi_1+\xi_2,\eta)=\mathrm{cov}(\xi_1,\eta)+\mathrm{cov}(\xi_2,\eta)$，

(3)$\mathrm{cov}(a\xi,b\eta)=ab\,\mathrm{cov}(\xi,\eta)$，

(4)$\mathrm{cov}(\xi,a)=\mathrm{cov}(\eta,b)=0$，其中 a,b 为任意常数，

(5)$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$，

(6)$|\rho_{\xi\eta}|\leqslant 1$，

(7)$|\rho|=1$ 的充要条件是 $P(\eta=a\xi+b)=1$，其中 a,b 为常数，

(8)若 $\rho=0$，则称 ξ 与 η 不相关；若 ξ 与 η 独立，则 ξ 与 η 不相关，但反之不真. 若 (ξ,η) 为二维正态随机变量，则 ξ,η 独立 $\Leftrightarrow\rho=0$.

4.4 常用分布的数学期望与方差

1. 两点分布

分布律 $P(\xi=k)=p^k(1-p)^{1-k}\quad(k=0,1)$，

数学期望 $E(\xi)=p$， 方差 $D(\xi)=p(1-p)$.

2. 二项分布

分布律 $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$，

数学期望 $E(\xi)=np$，

方差 $D(\xi)=np(1-p)$.

3. 泊松分布

分布律 $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\cdots)$，

数学期望 $E(\xi)=\lambda$，

方差 $D(\xi)=\lambda$.

4. 均匀分布

概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

数学期望 $E(\xi)=\frac{a+b}{2}$，

方差 $D(\xi)=\frac{1}{12}(b-a)^2$.

5. **正态分布**

概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$,

数学期望 $E(\xi)=\mu$,

方差 $D(\xi)=\sigma^2$.

6. **指数分布**

概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$

数学期望 $E(\xi)=\frac{1}{\lambda}$,

方差 $D(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}$.

问 4.1 不相关与相互独立的关系.

答 若 ξ,η 的相关系数 $\rho_{\xi\eta}=0$,称 ξ,η 不相关;当 $P\{\xi\leqslant x,\eta\leqslant y\}=P\{\xi\leqslant x\}P\{\eta\leqslant y\}$ 时,称 ξ,η 相互独立.

当 ξ,η 相互独立时,$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$,故 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0$,所以有 $\rho_{\xi\eta}=\frac{E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}=0$,即 ξ,η 不相关;反之,若 ξ,η 不相关,则 ξ,η 不一定相互独立.

例如,$(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则 ξ,η 相互独立的充要条件是 $\rho=0$,即此时随机变量 ξ,η 不相关与相互独立是等价的. 同时也说明,不相关可以相互独立.

再如,(ξ,η) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则易求出 $E(\xi)=0$,$E(\eta)=0$,$E(\xi\eta)=0$,$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$,$\rho_{\xi\eta}=0$,故 ξ,η 不相关. (ξ,η) 关于 ξ,η 的边沿概率密度分别为

再如,(ξ,η) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则易求出 $E(\xi)=0$,$E(\eta)=0$,$E(\xi\eta)=0$,$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$,$\rho_{\xi\eta}=0$,故 ξ,η 不相关. (ξ,η) 关于 ξ,η 的边沿概率密度分别为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因为 $f(\xi,\eta)\neq f_\xi(x)f_\eta(y)$,故 ξ,η 不是相互独立的,说明不相关可以不是相互独立.

综合练习题四

1. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

则 $E(\xi)=$________.

(A) $\int_0^{+\infty}x^4dx$ (B) $\int_0^1 x^4dx+\int_1^{+\infty}xdx$

(C) $\int_0^1 3x^2dx$ (D) $\int_0^1 3x^3dx$

解 由 ξ 的分布函数可得其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

故 $E(\xi)=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\int_0^1 3x^3dx$. 因此应选(D).

2. 设 $P(\xi=n)=P(\xi=-n)=\frac{1}{2n(n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $E(\xi)=$________.

(A)0 (B)1 (C)0.5 (D)不存在

解 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_np_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n$ 不绝对收敛,

由数学期望的定义知,ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 不存在. 因此应选(D).

3. 设随机变量 ξ 与 η 独立,且 $Z=2\xi-\eta+1$. 则 $D(Z)=$________.

(A)$4D(\xi)-D(\eta)$ (B)$4D(\xi)+D(\eta)$

(C)$2D(\xi)+D(\eta)+1$ (D)$2D(\xi)-D(\eta)+1$

解 因为 ξ 与 η 相互独立,所以 $D(Z)=D(2\xi-\eta+1)=D(2\xi)+D(\eta)=4D(\xi)+D(\eta)$.

因此应选(B).

4. 设随机变量 ξ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a}{b}(a-|x|), & |x|<a;\\ 0, & |x|\geqslant a,\end{cases}$$

且已知 $D(\xi)=1$,则常数 $a=$________,$b=$________.

解 因为 $|x|<a$,说明 $a>0$,所以

$$E(\xi)=\frac{a}{b}\left[\int_{-a}^{0}x(a+x)dx+\int_0^a x(a-x)dx\right]=0,$$

$$E(\xi^2)=\frac{a}{b}\left[\int_{-a}^{0}x^2(a+x)dx+\int_0^a x^2(a-x)dx\right]=\frac{a^5}{6b},$$

由 $D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=1$ 得

$$\frac{a^5}{6b}=1. \quad ①$$

又因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,所以 $\frac{a}{b}\left[\int_{-a}^{0}(a+x)dx+\frac{a}{b}\int_0^a(a-x)dx\right]=1$,

解得

$$\frac{a^3}{b}=1. \quad ②$$

由①,②得 $a^2=6$,即 $a=\sqrt{6}$,$b=6\sqrt{6}$.

5. 设随机变量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互独立.且都服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布，令 $\eta=\frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$，则 η^2 的数学期望 $E(\eta^2)=$________.

(A)$\frac{\lambda}{3}$　　(B)λ^2　　(C)$\frac{\lambda}{3}+\lambda^2$　　(D)$\frac{\lambda^2}{3}+\lambda$

$E(\xi_i)$

解　因为 $\xi_i\sim P(\lambda)$，所以$(\xi_i)=\lambda,D(\xi_i)=\lambda\quad(i=1,2,3)$，

$$E(\eta)=E\left[\frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\right]=\frac{1}{3}\times3\lambda=\lambda,$$

$$D(\eta)=D\left[\frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\right]=\frac{1}{9}\times3\lambda=\frac{\lambda}{3},$$

故 $E(\eta^2)=D(\eta)+[E(\eta)]^2=\frac{\lambda}{3}+\lambda^2$.

因此应选(C).

6. 设随机变量 ξ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}},$$

则以下________成立.

(A)$P(\xi<1)=P(\xi>1)$　　(B)$P(\xi\leqslant0)<P(\xi\geqslant2)$

(C)$E(\xi)=1$　　(D)$D(\xi)=1$

解　因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times1}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times1^2}}$，所以 $\xi\sim N(1,1)$，其 $E(\xi)=\mu=1$，$D(\xi)=\sigma^2=1$.

由于 $f(x)$的曲线关于 $x=\mu=1$ 对称，故 $P(\xi<1)=P(\xi>1)$.

因此应选(A)、(C)、(D).

7. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则 $\mu=$________，$\sigma^2=$________，又若已知 $\int_{-\infty}^{c}f(x)dx=\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$，则常数 $c=$________.

解　由 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times(\sqrt{3})^2}}$知

$$\mu=2,\sigma^2=3.$$

由于 $f(x)$曲线关于 $x=\mu=2$ 对称，又 $\int_{-\infty}^{c}f(x)dx=\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$，则可知 $c=2$.

8. 设二维随机变量(ξ,η)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则以下________成立.

(A)$E(\xi)=E(\eta)=1.5$　　(B)$E(\xi)=E(\eta)=\frac{7}{12}$

(C)$D(\xi)=D(\eta)=\frac{11}{144}$　　(D)$D(\xi+\eta)=\frac{11}{72}$

解　$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1dy\int_0^1x(x+y)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\right)dy=\left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}y^2\right]_0^1=\frac{7}{12},$$

同理 $E(\eta)=\frac{7}{12}$，

又 $E(\xi^2)=\int_0^1dy\int_0^1x^2(x+y)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}y\right)dy=\left[\frac{1}{4}y+\frac{1}{6}y^2\right]_0^1=\frac{5}{12}$，

故 $D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$，　同理 $D(\eta)=\frac{11}{144}$，

即应选(B)、(C).

9. 如果 ξ 与 η 不相关，则________成立.

(A)$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$　　(B)$D(\xi-\eta)=D(\xi)-D(\eta)$

(C)$D(\xi\cdot\eta)=D(\xi)\cdot D(\eta)$　　(D)$E(\xi\cdot\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$

解　因为 ξ 与 η 不相关，所以 $\rho=0$，即

$$\operatorname{cov}(\xi\cdot\eta)=0,\quad E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0,$$

故 $E(\xi\cdot\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$.

又 $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2\operatorname{cov}(\xi\cdot\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

因此应选(A)、(D).

10. 如果 ξ 与 η 独立，则________成立.

(A)$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$　　(B)$D(\xi\pm\eta)=D(\xi)+D(\eta)$

(C)$D(\xi\cdot\eta)=D(\xi)D(\eta)$　　(D)$D(\xi-\eta)=D(\xi)-D(\eta)$

解　因为 ξ 与 η 独立，所以 ξ 与 η 不相关，即 $\rho=0$，所以

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0,\quad D(\xi\pm\eta)=D(\xi)+D(\eta).$$

因此应选(A)、(B).

11. 如果随机变量 ξ 与 η 满足 $D(\xi+\eta)=D(\xi-\eta)$，则必须有________成立.

(A)ξ 与 η 独立　　(B)ξ 与 η 不相关

(C)$D(\eta)=0$　　(D)$D(\xi)\cdot D(\eta)=0$

解　因为 $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$，

$$D(\xi-\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2\operatorname{cov}(\xi,-\eta)=D(\xi)+D(\eta)-2\operatorname{cov}(\xi,\eta),$$

又因为 $D(\xi+\eta)=D(\xi-\eta)$，所以 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$，即 $\rho=0$，故 ξ 与 η 不相关，

因此应选(B).

12. 设 ξ 与 η 相互独立，且 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，若 $Z_1=\xi-\eta$，$Z_2=\xi+\eta$，则 Z_1 与 Z_2 的相关系数 $\rho=$________.

解　因为 ξ 与 η 相互独立，所以

$$DZ_1=D(\xi-\eta)=D(\xi)+D(\eta)=\sigma_1^2+\sigma_2^2,$$

$$DZ_2=D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)=\sigma_1^2+\sigma_2^2,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)&=E(Z_1\cdot Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)\\&=E(\xi^2-\eta^2)-E(\xi-\eta)E(\xi+\eta)\end{aligned}$$

12. 设 ξ 与 η 相互独立，且 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，若 $Z_1 = \xi - \eta$，$Z_2 = \xi + \eta$，则 Z_1 与 Z_2 的相关系数 $\rho =$ ________.

解 因为 ξ 与 η 相互独立，所以

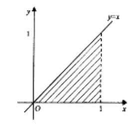
$$DZ_1 = D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

$$DZ_2 = D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) &= E(Z_1 \cdot Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) \\
&= E(\xi^2 - \eta^2) - E(\xi - \eta)E(\xi + \eta) \\
&= E(\xi^2) - E(\eta^2) - [E(\xi) - E(\eta)][E(\xi) + E(\eta)] \\
&= E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 - E(\eta^2) + [E(\eta)]^2 \\
&= D(\xi) - D(\eta) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2
\end{aligned}$$

故相关系数为 $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}} = \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

13. 设二维随机变量 (ξ, η) 是 $R = \{(x, y), 0 < x < y < 1\}$ 上的均匀分布，则 ξ 与 η 的相关系数 $\rho =$ ________.



解 由已知条件知，(ξ, η) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(ξ, η) 关于 ξ 和 η 的边沿密度函数为

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_0^x 2\mathrm{d}y = 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \int_y^1 2\mathrm{d}x = 2 - 2y, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此 $E(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot (2 - 2y)\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

因此 $E(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot (2 - 2y)\mathrm{d}y = \frac{1}{3},$$

$$E(\xi\eta) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x 2xy\mathrm{d}y = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

$$E(\xi^2) = \int_0^1 x^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2) = \int_0^1 y^2(2 - 2y)\mathrm{d}y = \frac{1}{6},$$

故 $D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \dfrac{1}{2} - (\dfrac{2}{3})^2 = \dfrac{1}{18}$,

$$D(\eta) = E(\eta^2) - [E(\eta)]^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}.$$

即 $\rho = \dfrac{E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{18}} = \dfrac{1}{2}$.