第三章　多维随机变量及其分布

3.1　二维随机机变量及其联合分布函数

设 ξ,η 为同一样本空间 Ω 上的随机变量，则称向量 (ξ,η) 为 Ω 上的二维随机变量或二维随机向量．对任意实数 x,y，称二元函数 $F(x,y)=P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)$ 为 (ξ,η) 的联合分布函数，它具有下述性质：

(1) $F(x,y)$ 是 x 或 y 的不减函数．即对任意固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$；对于任意固定的 x，当 $y_1<y_2$ 时，$F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$．

(2) $F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续，即在其间断点 (x_0,y_0) 处，有

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x,y_0)=F(x_0,y_0),\qquad \lim_{y\to y_0^+}F(x_0,y)=F(x_0,y_0).$$

(3) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对于任意固定的 y，有

$$F(-\infty,y)=P(\xi<-\infty,\eta\leqslant y)=0.$$

对于任意固定的 x，有

$$F(x,-\infty)=P(\xi\leqslant x,\eta<-\infty)=0,$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

设 ξ,η 为同一样本空间 Ω 上的随机变量，则称向量 (ξ,η) 为 Ω 上的二维随机变量或二维随机向量．对任意实数 x,y，称二元函数 $F(x,y)=P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)$ 为 (ξ,η) 的联合分布函数，它具有下述性质：

(1) $F(x,y)$ 是 x 或 y 的不减函数．即对任意固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$；对于任意固定的 x，当 $y_1<y_2$ 时，$F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$．

(2) $F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续，即在其间断点 (x_0,y_0) 处，有

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x,y_0)=F(x_0,y_0),\qquad \lim_{y\to y_0^+}F(x_0,y)=F(x_0,y_0).$$

(3) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对于任意固定的 y，有

$$F(-\infty,y)=P(\xi<-\infty,\eta\leqslant y)=0.$$

对于任意固定的 x，有

$$F(x,-\infty)=P(\xi\leqslant x,\eta<-\infty)=0,$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,\qquad F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

(4) 对于任意的 $x_1<x_2,y_1<y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0.$$

3.2　二维随机变量的边沿分布函数

设 (ξ,η) 是二维随机变量，x,y 为任意实数，称一元函数 $F_\xi(x)=P(\xi\leqslant x)=P(\xi\leqslant x,\eta<+\infty)$ 为 (ξ,η) 关于 ξ 的边沿分布函数；称一元函数 $F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P(\xi<+\infty,\eta\leqslant y)$ 为 (ξ,η) 关于 η 的边沿分布函数．

3.3　二维离散型随机变量

1. 定义

如果二维随机变量 (ξ,η) 的可能值为有限个或可列个实数对 $(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$，则称 (ξ,η) 为二维离散型随机变量．

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots),$$

称表达式 $P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$ 为二维离散型随机变量 (ξ,η) 的联合概率分布列，简称联合分布列．

3. 二维离散型随机变量的边沿分布

设二维离散型随机变量的联合分布列

$$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots),$$

---

3. 二维离散型随机变量的边沿分布

设二维离散型随机变量的联合分布列

$$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots),$$

则称 $P(\xi=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}\quad(i=1,2,\cdots)$ 为 (ξ,η) 关于 ξ 的边沿分布，记作 $p_{i\cdot}$；称

$$P(\eta=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}\quad(j=1,2,\cdots)$$

为 (ξ,η) 关于 η 的边沿分布，记作 $p_{\cdot j}$．

联合分布与边沿分布可用表表示．

ξ \ η	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

3.4　二维连续型随机变量及其联合概率密度

1. 定义

设二维随机变量 (ξ,η) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，若存在非负可积二元函数 $f(x,y)$，使对任意实数 x 和 y 都有

$$F(x,y)=P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

这里的 $f(x,y)\geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 是二维连续型随机变量的联合概率密度必须具有的性质．

2. 二维连续型随机变量的边沿概率密度

设二维连续型随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，称一元函数 $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 为 (ξ,η) 关于 ξ 的边沿概率密度；称一元函数 $f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 为 (ξ,η) 关于 η 的边沿概率密度．

3. 二维连续型随机变量的联合分布函数与联合概率密度、边沿分布函数与边沿概率密度及事件概率的关系

---

(1) 已知二维连续型随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 (ξ,η) 的联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v.$$

关于 ξ 的边沿分布函数

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u.$$

关于 η 的边沿分布函数

$$F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}v.$$

关于 ξ 的边沿概率密度

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

关于 η 的边沿概率密度

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(ξ,η) 落在 xOy 平面上区域 D 内的概率

$$P((\xi,\eta)\in D)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2)已知二维连续型随机变量(ξ,η)的联合分布函数为$F(x,y)$，则在(ξ,η)的联合概率密度$f(x,y)$的连续点(x,y)处有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

(ξ,η)关于ξ,η的边沿分布函数分别为

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty),\quad F_\eta(y)=F(+\infty,y).$$

事件$(a<\xi\leqslant b,c<\eta\leqslant d)$的概率

$$P(a<\xi\leqslant b,c<\eta\leqslant d)=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$

3.5 均匀分布与正态分布

常见的二维连续型随机变量是二维均匀分布和二维正态分布.

1. 均匀分布

称(ξ,η)服从区域G上的均匀分布，若(ξ,η)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$S(G)$为G的面积，$0<S(G)<+\infty$.

2. 二维正态分布

若二维随机变量(ξ,η)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$和$\rho$都是常量，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$，称$(\xi,\eta)$为服从参数$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布，记为$(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，$\xi,\eta$的边沿分布分别为$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\xi$与$\eta$独立的充要条件是$\rho=0$.

3.6 二维随机变量的相互独立性

设(ξ,η)为二维随机变量，若对任意实数x,y，有

$$P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)=P((\xi\leqslant x)\cap(\eta\leqslant y))=P(\xi\leqslant x)\cdot P(\eta\leqslant y)$$

则称随机变量ξ,η相互独立.

设(ξ,η)为二维随机变量，若对任意实数x,y，有

$$P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)=P((\xi\leqslant x)\cap(\eta\leqslant y))=P(\xi\leqslant x)\cdot P(\eta\leqslant y)$$

则称随机变量ξ,η相互独立.

(1)设二维随机变量(ξ,η)的联合分布函数为$F(x,y)$，ξ与η的边沿分布函数分别为$F_\xi(x),F_\eta(y)$，则随机变量ξ与η相互独立的充要条件是：对任意实数x,y有

$$F(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y).$$

(2)设(ξ,η)是离散型二维随机变量，其联合分布列及边沿分布列分别为$p_{ij},p_{i\cdot},p_{\cdot j}$，则$\xi$与$\eta$相互独立的充要条件是

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$$

对一切i,j成立.

(3)设(ξ,η)是连续型二维随机变量，其联合密度函数及边沿密度函数分别为$f(x,y),f_\xi(x),f_\eta(y)$，则$\xi$与$\eta$相互独立的充要条件是：对任意实数$x,y$，$f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$.

3.7 条件分布

1. 二维离散型随机变量的条件分布

设(ξ,η)为二维随机变量，若对于固定的i，有$P(\xi=x_i)>0$，则称

$$P(\eta=y_j|\xi=x_i)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{p(\xi=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad(j=1,2,\cdots)$$

为在$\xi=x_i$的条件下随机变量η的条件分布列.

同样，对固定的j，若$P(\eta=y_j)>0$，则称

$$P(\xi=x_i|\eta=y_j)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{P(\eta=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad(i=1,2,\cdots)$$

为在$\eta=y_j$的条件下随机变量ξ的条件分布列.

如果ξ与η相互独立，则

$$P(\eta=y_j|\xi=x_i)=p_{\cdot j},\quad P(\xi=x_i|\eta=y_j)=p_{i\cdot}.$$

2. 二维连续型随机变量的条件概率密度

设(ξ,η)为二维连续随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$，若$f_\eta(y)>0$，则称

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$$

为在$\eta=y$条件下ξ的条件概率密度；若$f_\xi(x)>0$，则称

2. 二维连续型随机变量的条件概率密度

设(ξ,η)为二维连续随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$，若$f_\eta(y)>0$，则称

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$$

为在$\eta=y$条件下ξ的条件概率密度；若$f_\xi(x)>0$，则称

$$f_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$$

为在$\xi=x$条件下η的条件概率密度.

如果ξ,η相互独立，则

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=f_\xi(x),f_{\eta|\xi}(y|x)=f_\eta(y).$$

3.8 随机变量函数的分布

1. $Z=\xi+\eta$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若ξ与η相互独立，则

1. $Z=\xi+\eta$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若ξ与η相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(z-y)\cdot f_\eta(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)\cdot f_\eta(z-x)\mathrm{d}x.$$

2. $Z=\frac{\xi}{\eta}$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y.$$

特别地，当ξ与η相互独立时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_\xi(yz)f_\eta(y)\mathrm{d}y.$$

3. $M=\max(\xi,\eta)$及$N=\min(\xi,\eta)$的分布

设ξ,η是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为$F_\xi(x),F_\eta(y)$，则

$$F_{\max}(z)=F_\xi(z)F_\eta(z),$$

3. $M=\max(\xi,\eta)$ 及 $N=\min(\xi,\eta)$ 的分布

设 ξ,η 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_\xi(x),F_\eta(y)$，则

$$F_{\max}(z)=F_\xi(z)F_\eta(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_\xi(z)][1-F_\eta(z)].$$

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_{\xi_i}(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，则 $M=\max(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $N=\min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{\xi_1}(z)F_{\xi_2}(z)\cdots F_{\xi_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{\xi_1}(z)][1-F_{\xi_2}(z)]\cdots[1-F_{\xi_n}(z)].$$

特别地，若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立且具有相同分布函数 $F(x)$，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

问　如何理解 $F(x,-\infty)=0,F(-\infty,y)=0,F(-\infty,-\infty)=0$ 和 $F(+\infty,+\infty)=1$？

答　随机变量 (ξ,η) 的分布函数 $F(x,y)=P(\xi\leqslant x,\eta\leqslant y)$ 可看作 (ξ,η) 落在无穷矩形区域：$\{\xi\leqslant x,\eta\leqslant y\}$ 内的概率. 所以对二维随机变量分布函数几个重要取值 $F(x,-\infty)=0,F(-\infty,y)=0,F(-\infty,-\infty)=0$ 和 $F(+\infty,+\infty)=1$，有如下几何意义：

$F(x,-\infty)$ 就是将矩形的上边界无限向下移，则"(ξ,η) 落在无穷矩形内"趋于不可能事件，概率趋于 0；

$F(-\infty,y)$ 就是将矩形的右边界无限向左移，则"(ξ,η) 落在无穷矩形内"趋于不可能事件，概率趋于 0.

$F(-\infty,-\infty)$ 就是将矩形的右上边界无限向左下移，则"(ξ,η) 落在无穷矩形内"趋于不可能事件，概率趋于 0；

$F(+\infty,+\infty)$ 就是将无穷矩形扩大为全平面，则"(ξ,η) 落在无穷矩形内"趋于必然事件，概率趋于 1.

综合练习题三

(1)设二维随机变量 (ξ,η) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $F_\xi(x)=$________；$P(\xi\leqslant 1,\eta\leqslant 2)=$________.

解　当 $x>0$ 时

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)})=1-e^{-x},$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$F_\xi(x)=0$，故 $F_\xi(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$$P(\xi\leqslant 1,\eta\leqslant 2)=F(1,2)=1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}.$$

(2)设二维随机变量 (ξ,η) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $A=$________.

解　由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，得

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}A\sin(x+y)\mathrm{d}y=A\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos(x+y)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=A\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x-\cos(\frac{\pi}{2}+x)]\mathrm{d}x$$

$$=2A,$$

故 $A=\frac{1}{2}$.

(3)设二维随机变量 (ξ,η) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $f_\xi(x)=$________；　$f_\eta(y)=$________.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 15xy^2\mathrm{d}y=5x^4,$$

故 $f_\xi(x)=\begin{cases}5x^4, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 15xy^2\mathrm{d}x=\frac{15}{2}y^2(1-y^2),$$

故 $f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{15}{2}y^2(1-y^2), & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(4)若二维随机变量 $(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $\xi\sim$________；$\eta\sim$________；且 ξ 与 η 相互独立的充要条件为________.

解　令 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=u,\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=v$，

故 $\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$. 同理 $\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot(u^2-2\rho uv+v^2)\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{\rho^2u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

(5)设二维随机变量(ξ,η)的联合分布为

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	α	β

$\alpha=$________,$\beta=$________时,ξ,η相互独立.

解 ξ,η的边沿分布如下:

ξ	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\alpha+\beta$

η	1	2
P	$\frac{1}{6}+\alpha$	$\frac{1}{3}+\beta$

由ξ,η相互独立的充要条件有:

$$P(\xi=1,\eta=1)=P(\xi=1)\cdot P(\eta=1),\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\alpha\right)\Rightarrow\alpha=\frac{1}{6}.$$

$$P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)\cdot P(\eta=2),\quad \frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\beta\right)\Rightarrow\beta=\frac{1}{3}.$$

经检验,当$\alpha=\frac{1}{6},\beta=\frac{1}{3}$时,$\xi,\eta$相互独立.

2. 选择题

(1)设随机变量ξ,η的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

则(ξ,η)的联合密度函数为( ).

(A)$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & x>0,y<0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (B)$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y<0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(C)$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}+e^{-y}, & x>0,y<0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (D)以上结论均不正确

解 选择(D),因为ξ,η不一定相互独立.

(2)设随机变量ξ和η相互独立,其分布列分别为

ξ	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

η	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则以下结论正确的是( ).

(2)设随机变量ξ和η相互独立,其分布列分别为

ξ	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

η	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则以下结论正确的是( ).

(A)$\xi=\eta$ (B)$P(\xi=\eta)=1$

(C)$P(\xi=\eta)=\frac{1}{2}$ (D)以上都不正确

解 $P(\xi=\eta)=P(\xi=0,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)$

$$=P(\xi=0)\cdot P(\eta=0)+P(\xi=1)P(\eta=1)\text{(因为}\xi,\eta\text{独立)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

故选(C).

(3)设$\xi\sim N(0,1),\eta\sim N(1,1)$,且它们相互独立,则( ).

(A)$P(\xi+\eta\leqslant 0)=\frac{1}{2}$ (B)$P(\xi+\eta\leqslant 1)=\frac{1}{2}$

(C)$P(\xi-\eta\leqslant 0)=\frac{1}{2}$ (D)$P(\xi-\eta\leqslant 1)=\frac{1}{2}$

解 因为$\xi\sim N(0,1),\eta\sim N(1,1)$,所以$\xi+\eta\sim N(1,2)$,$\frac{\xi+\eta-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$,故由对称性知$P\left(\frac{\xi+\eta-1}{\sqrt{2}}\leqslant 0\right)=\frac{1}{2}$,即$P(\xi+\eta-1\leqslant 0)=\frac{1}{2}$,于是$P(\xi+\eta\leqslant 1)=\frac{1}{2}$,故选(B).

注 一般地,设随机变量ξ和η相互独立,且$\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,则

$$\xi+\eta\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2),\ \xi-\eta\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2),$$

本题中$\xi+\eta\sim N(1,2),\xi-\eta\sim N(-1,2)$,然后把它们化成标准正态分布.