第二章　随机变量及其分布

2.1　随机变量

1. 随机变量的定义

设 $\Omega=\{w\}$ 为随机试验 E 的样本空间，$\xi(w)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，如果对任一实数 x，$\{\xi(w)\leqslant x\}$ 是一随机事件，则称 $\xi=\xi(w)$ 为**随机变量**.

一般地，常用希腊字母 ξ,η,ζ 表示随机变量.

2. 随机变量的分布函数

设 ξ 是样本空间 Ω 上的随机变量，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，称 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$ 为随机变量 ξ 的**分布函数**.

对于任意实数 $a,b(a<b)$，有

$$P(\xi>a)=1-P(\xi\leqslant a)=1-F(a),$$
$$P(a<\xi\leqslant b)=P(\xi\leqslant b)-P(\xi\leqslant a)=F(b)-F(a),$$
$$P(\xi=x)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(x-\varepsilon<\xi\leqslant x)=F(x)-F(x-0).$$

分布函数的性质：

定理　设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，则

1° $F(x)$ 单调不减，即对任意 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

2° $0\leqslant F(x)\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$；

3° $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

4° $F(x)$ 为右连续函数，即对任意的实数 x，有 $F(x+0)=F(x)$.

反之，具有以上四个性质的函数，一定是某个随机变量的分布函数.

3. 随机变量的概率分布

随机变量的一切可能值的集合——值域，与它取各可能值或在值域内各部分取值的概率，二者总称为随机变量的**概率分布**.

4. 随机变量的分类

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{离散型随机变量}\\ \text{连续型随机变量}\\ \text{混合型随机变量}\\ \text{奇异型随机变量（既非离散型又非连续型）}\end{cases}$$

2.2　离散型随机变量

1. 定义

若随机变量 ξ 只取有限个或可列个值 $x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$，则称 ξ 为**离散型随机变量**. 称

$$P(\xi=x_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$$

为随机变量 ξ 的**概率分布列**（简称**分布列**）.

离散型随机变量 ξ 的分布列可表示为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

其中第一行是 ξ 的一切可能取值，第二行是 ξ 取相应值的概率，即

$$P(\xi=x_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots,n,\cdots).$$

2. 离散型随机变量 ξ 的分布列的性质

1°非负性：$p_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n,\cdots)$.

2°规范性：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=x_k)=p_k\ (k=1,2,\cdots)$，由概率的可加性知，$\xi$ 的分布函数为

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=P\Big(\bigcup_{x_k\leqslant x}(\xi=x_k)\Big)=\sum_{x_k\leqslant x}P(\xi=x_k)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

如果离散型随机变量 ξ 只取有限个值，分布函数 $F(x)$ 的图形是阶梯形曲线，在 $x=x_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 处有跃度为 p_k 的跳跃.

若已知随机变量的分布函数为 $F(x)$，则有

$$P(\xi=b)=F(b)-F(b-0),$$
$$P(\xi\leqslant b)=F(b),$$
$$P(\xi\geqslant b)=1-F(b-0),$$
$$P(\xi>b)=1-F(b),$$
$$P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a),$$
$$P(a\leqslant\xi<b)=F(b-0)-F(a-0),$$
$$P(a<\xi<b)=F(b-0)-F(a),$$
$$P(a\leqslant\xi\leqslant b)=F(b)-F(a-0).$$

2.3　常见的离散型随机变量及其分布

1. 单点分布（退化分布）

若随机变量 ξ 恒取常数 C，即 $P(\xi=C)=1$，则称 ξ 服从**单点分布**.

2. 两点分布（0-1 分布）

若随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1
P	$1-p$	p

其中 $0<p<1$，则称 ξ 服从**两点分布**，亦称 ξ 服从 **0-1 分布**，简记为 $\xi\sim$0-1.

两点分布可用来描述只有两种可能结果的随机试验.

3. 二项分布 $B(n,p)$

若随机变量 ξ 的分布列为

$$P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n),$$

其中 $0<p<1, q=1-p$，则称 ξ 服从参数为 n,p 的**二项分布**，记为 $\xi\sim B(n,p)$. $P(\xi=k)$ 简记为 $b_k(n,p)$ 或 b_k.

当 $n=1$ 时，二项分布退化为两点分布.

二项分布是离散型随机变量概率分布中重要的分布之一，它以 n 重伯努利试验为背景，具有广泛的应用.

当 n,p 固定时，$b_k(n,p)$ 随 k 变化的情况. 由于对固定的 n,p 有

$$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{b_k(n,p)}{b_{k-1}(n,p)}=\frac{C_n^kp^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}$$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}=1+\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

二项分布有如下性质：

1° 当 $k<(n+1)p$ 时，$b_k(n,p)>b_{k-1}(n,p)$；

2° 当 $k>(n+1)p$ 时，$b_k(n,p)<b_{k-1}(n,p)$；

3° 当 $k=(n+1)p$ 时，$b_k(n,p)=b_{k-1}(n,p)$.

使 $b_k(n,p)$ 取极大值的项 $b_m(n,p)$ 称为 $b_k(n,p)$ 的**中心项**，而 m 称为最可能出现次数.

4. 泊松分布

若随机变量 ξ 的概率分布列为 $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$，$\lambda>0$，则称 ξ 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记作 $\xi\sim P(\lambda)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1,$$

由于 $$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}}=\frac{\lambda}{k}.$$

于是 $P(\xi=k)$ 在 $k<\lambda$ 时，随 k 的增大而增大；$k>\lambda$ 时，随 k 的增大而减小. 在 $k=[\lambda]$ 时，$P(\xi=k)$ 达到最大值，当 λ 为整数时，有两个相等的最大值 $P(\xi=\lambda)$ 和 $P(\xi=\lambda-1)$.

定理(Poission 定理)　设随机变量 ξ_n 服从二项分布 $(n=1,2,\cdots)$，其分布列为 $$P(\xi_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

其中 p_n 与 n 有关. 如果 p_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$（$\lambda$ 为正常数），则有

定理(Poission 定理)　设随机变量 ξ_n 服从二项分布 $(n=1,2,\cdots)$，其分布列为 $$P(\xi_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

其中 p_n 与 n 有关. 如果 p_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$（$\lambda$ 为正常数），则有

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

当 n 较大，p 较小时，有 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，即二项分布 $B(n,p)$ 近似于泊松分布 $P(\lambda)$，其中 $\lambda=np$.

5. 几何分布(等待分布)

若随机变量 ξ 的分布列为 $$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

其中 $0<p<1$，则称 ξ 服从参数为 p 的**几何分布**，记作 $\xi\sim G(p)$.

几何分布与重复独立试验有关，可用来计算等待"事件 A 出现"总共等待了 k 次的概率，因而又称为等待分布.

6. 超几何分布

若随机变量 ξ 的分布列为 $$P(\xi=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

其中 $0\leqslant n\leqslant N$，$0\leqslant M\leqslant N$，则称 ξ 服从参数为 n,M,N 的**超几何分布**，记作 $\xi\sim H(n,M,N)$.

有 N 件产品，其中 M 件废品，任意抽取 n 件，其中废品数 ξ 服从超几何分布.

若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p$，即在无穷多产品中，废品率是 p，则在 n,p 保持不变的条件下，有 $$\lim_{N\to\infty}\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

即超几何分布的极限是二项分布.

2.4　连续型随机变量

1. 定义

设随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$，若存在非负可积函数 $f(x)$，使对任意实数 x，有 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,x\in R,$$

则称 ξ 是**连续型随机变量**，$f(x)$ 为随机变量 ξ 的**概率密度函数**，简称**密度**.

2. 密度函数的性质

1° $f(x)\geqslant0$；　2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；　3° $P(a<\xi\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx$；

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$.

性质 1°，2°是概率密度的基本性质，一个函数当且仅当具备这两条性质时，才能作为某个随机变量的密度函数.

$f(x)$ 反映了概率在 x 处的"密集程度". 当 Δx 充分小时，有 $f(x)\Delta x\approx P(x<\xi\leqslant x+\Delta x)$，说明 ξ 落在 $(x,x+\Delta x]$ 上的概率近似地等于 $f(x)\Delta x$.

特别地，对于连续型随机变量 ξ，它取任何特定值 a 的概率为 0，即 $P(\xi=a)=0$. 这表明，一个事件的概率为 0，此事件不一定是不可能事件；同样地，某事件的概率为 1，该事件也不一定是必然事件，因此 $$P(a<\xi<b)=P(a\leqslant\xi\leqslant b)=P(a\leqslant\xi<b)=P(a<\xi\leqslant b).$$

2.5　常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

设 $[a,b]$ 为任一区间，若随机变量 ξ 的概率密度函数为 $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 ξ 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**，记作 $\xi\sim U[a,b]$.

ξ 的分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

若 $\xi\sim U[a,b]$，则对于满足 $a<c<d<b$ 的任意 c、d，均有 $$P(c\leqslant\xi\leqslant d)=\int_c^d\frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}.$$

这表明 ξ 在 $[a,b]$ 内的任一子区间 $[c,d]$ 内取值的概率仅与区间的长度 $l=d-c$ 成正比，而与区间 $[c,d]$ 的位置无关，这就是均匀分布的直观意义. 均匀分布可用来描述在某个区间上具有等可能结果的随机试验的统计规律性.

2. 指数分布

若随机变量 ξ 的概率密度函数为 $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，则称 ξ 服从参数为 λ 的**指数分布**，记作 $\xi\sim E(\lambda)$. 其分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

指数分布具有"无记忆性". 设 $\xi\sim E(\lambda)$，则对于任意的 $s>0,t>0$，有 $$P(\xi>s+t\mid\xi>s)=\frac{P(\xi>s+t)}{P(\xi>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(\xi>t).$$

3. Γ 分布

若随机变量 ξ 的概率密度函数为 $$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\quad x>0,\text{常数 }\alpha>0,\beta>0,$$

则称 ξ 服从参数为 α,β 的 **Γ 分布**，记作 $\xi\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

定义中的 $$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\quad(\alpha>0),$$

当 $\alpha=1$ 时，$f(x)=\beta e^{-\beta x}$，即 $\Gamma(1,\beta)$ 就是指数分布 $E(\beta)$.

4. 正态分布

若连续型随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$ 为常数，则称 ξ 服从参数 μ,σ 的**正态分布**，记作 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，称 ξ 为正态变量.

正态分布的概率密度函数的图形是一条钟形曲线，又称**正态曲线**.

正态变量的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

正态曲线有如下特征：

1° $f(x)$ 是偶函数，曲线 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称.

2° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，曲线 $f(x)$ 以 x 轴为水平渐近线.

3° 在 $(-\infty,\mu)$ 内 $f(x)$ 单增，在 $(\mu,+\infty)$ 内 $f(x)$ 单减，当 $x=\mu$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

4° 在 $(-\infty,\mu-\sigma)$ 及 $(\mu+\sigma,+\infty)$ 内，曲线 $f(x)$ 向下凸，在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内，曲线 $f(x)$ 向上凸，$(\mu\pm\sigma,f(\mu\pm\sigma))$ 是曲线 $f(x)$ 的两个拐点.

5° 当固定 σ 让 μ 变动时，曲线沿 x 轴平行移动，不改变曲线的形状，只改变其位置. 当固定 μ 让 σ 变动时，σ 越大，曲线越“扁平”，即分布相对比较分散；σ 越小，曲线越“陡峭”，即分布越集中在 $x=\mu$ 附近.

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 ξ 服从标准正态分布，记作 $\xi\sim N(0,1)$. 标准正态分布的概率密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$，标准正态变量的分布函数为 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad(-\infty<x<+\infty)$.

$\Phi(x)$ 具有如下性质：

1° $\Phi(0)=0.5$； 2° $\Phi(+\infty)=1$； 3° $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；

4° $P(a<\xi\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)$.

对于一般正态分布的计算，可以通过换元积分化为标准正态分布，然后再查表求得.

设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则有

$$P(a<\xi\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

令 $b=x,a=-\infty$，则有

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

称 $\eta=\frac{\xi-\mu}{\sigma}$ 为 ξ 的标准化变换.

2.6 随机变量函数的分布

1. 离散型随机变量函数的分布

设离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

$\eta=g(\xi)$ 为 ξ 的函数，现求 η 的分布列：

$$P(\eta=y_k)=P(g(\xi)=y_k)=P(\xi=x_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是 $\eta=g(\xi)$ 的分布列为

设离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

$\eta=g(\xi)$ 为 ξ 的函数，现求 η 的分布列：

$$P(\eta=y_k)=P(g(\xi)=y_k)=P(\xi=x_k)=p_k\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是 $\eta=g(\xi)$ 的分布列为

$\eta=g(\xi)$	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$
$P(\eta=y_i)(y_i=g(x_i))$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

2° 若 $g(x_k)$ 中存在两个或两个以上的值相等，例如 $y_i=y_j=y_t=\bar{y}$，则 η 取 $\bar{y}$ 这个确定值的概率等于 η 取 y_i,y_j,y_t 这些值的概率之和，即

$$\begin{aligned}P(\eta=\bar{y})&=P(\eta=y_i)+P(\eta=y_j)+P(\eta=y_t)\\&=P(\xi=x_i)+P(\xi=x_j)+P(\xi=x_t)\\&=p_i+p_j+p_t.\end{aligned}$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1)分布函数法

设连续型随机变量 ξ 的概率密度为 $f_\xi(x)$，函数 $\eta=g(\xi)$ 的分布函数为

$$F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P(g(\xi)\leqslant y),$$

然后两端对 y 求导，即得 η 的概率密度函数 $f_\eta(y)$.

(2)公式法

定理 设 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $f_\xi(x)$，又函数 $y=g(x)$ 严格单调，反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导数，则 $\eta=g(\xi)$ 也是连续型随机变量，其密度函数为

$$f_\eta(y)=\begin{cases}f_\xi[g^{-1}(y)]\,|[g^{-1}(y)]'|, & \alpha<y<\beta;\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\alpha=\min[g(-\infty),g(+\infty)]$，$\beta=\max[g(-\infty),g(+\infty)]$.

问 2.1 随机变量与微积分中讨论的函数有什么区别？

答 随机变量虽然是一个实值单值函数，但它与微积分中讨论的函数有本质区别. 第一，随机变量是定义在样本空间上的，而不一定是实数值；第二，随机变量的取值是随机的，它取每一个可能值都是有一定概率的；第三，随机变量是随机事件的数量化.

问 2.2 分布函数 $F(x)$ 是什么样的函数？

答 定义中的 $\{\xi\leqslant x\}$ 表示事件“随机变量 ξ 取值不大于 x”，$F(x)$ 是以事件 $\{\xi\leqslant x\}$ 的概率定义的函数，其自变量 x 取值在 $(-\infty,+\infty)$ 内，值域为 $[0,1]$.

3σ 规则 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)=P(|\xi-\mu|<\sigma)=0.682\,6,$$

$$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)=P(|\xi-\mu|<2\sigma)=0.954\,4,$$

$$P(\mu-3\sigma<\xi\leqslant\mu+3\sigma)=P(|\xi-\mu|<3\sigma)=0.997\,3.$$

正态随机变量线性函数性质 如果 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\eta=\frac{\xi-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

如果 $\xi\sim N(0,1)$，则 $\eta=\sigma\xi+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$.

如果 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\eta=a\xi+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

综合练习题二

1. 填空题

(1)进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，在 n 次成功之前已经失败的次数 ξ 的分布列为________.

解 因为前 $n+k-1$ 次试验属于伯努利试验，第 $n+k$ 次为成功试验.

所以 $P(\xi=k)=C_{n+k-1}^{k}(1-p)^{k}p^{n+k-1-k}\cdot p=C_{n+k-1}^{k}(1-p)^{k}p^{n}$.

(2)设 $\xi\sim U[0,2]$，则 $P\left(|\xi|<\frac{1}{3}\right)=$________.

解 因 $\xi\sim U[0,2]$，故 ξ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ 故

$$P\left(|\xi|<\frac{1}{3}\right)=P\left(-\frac{1}{3}<\xi<\frac{1}{3}\right)=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x\Big|_{0}^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{6}.$$

(3)设随机变量 ξ 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.24 & 0.31 & c & 0.15\end{pmatrix}$，则 $c=$________.

解 因 $\sum\limits_{i}p_i=1$，故

$$0.24+0.31+c+0.15=1,$$
$$c=1-(0.24+0.31+0.15)=1-0.7=0.3.$$

(4)随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant a;\\ 1, & x>a,\end{cases}$ 则 $a=$________，ξ 服从________分布.

解 因 $F(x)$ 为右连续函数，故 $\lim\limits_{x\to a^{+}}F(x)=F(a)$，即 $1=2a$，故 $a=\frac{1}{2}$.

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\\ 1, & x>\frac{1}{2},\end{cases}$ 对 $F(x)$ 求导可得 $f(x)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 $\xi\sim U[0,\frac{1}{2}]$.

(5)设 $\xi\sim N(3,0.1^2)$，则 $P(|\xi-3|<0.3)=$________，$P(|\xi-3|<$________$)=0.95$.

解 因 $\xi\sim N(3,0.1^2)$，故 $\frac{\xi-3}{0.1}\sim N(0,1)$. 故

$$P(|\xi-3|<0.3)=P\left(\left|\frac{\xi-3}{0.1}\right|<\frac{0.3}{0.1}\right)=P\left(\left|\frac{\xi-3}{0.1}\right|<3\right)$$
$$=P\left(-3<\frac{\xi-3}{0.1}<3\right)=\Phi(3)-\Phi(-3)=\Phi(3)-[1-\Phi(3)]=2\Phi(3)-1$$
$$=2\times 0.998\,7-1=1.997\,4-1=0.997\,4,$$

设 $P(|\xi-3|<a)=0.95$. 因

$$P(|\xi-3|<a)=P\left(\left|\frac{\xi-3}{0.1}\right|<\frac{a}{0.1}\right)=P\left(\left|\frac{\xi-3}{0.1}\right|<10a\right)$$
$$=P\left(-10a<\frac{\xi-3}{0.1}<10a\right)=\Phi(10a)-\Phi(-10a)=\Phi(10a)-[1-\Phi(10a)]$$
$$=2\Phi(10a)-1=0.95,$$

故 $\Phi(10a)=\frac{1+0.95}{2}=0.975$. 因 $\Phi(1.96)=0.975$，

故 $10a=1.96$，$a=0.196$.

(6)从一批子弹中任意取 5 发试射，如果没有一发子弹落在靶心 2cm 以外，则整批子弹将被接受，设弹着点与靶心的距离 ξ(cm)的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Axe^{-x^2}, & 0<x<3;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $A=$________，任一发子弹落在靶心 2cm 以内的概率为________，这批子弹被接受的概率为________.

解 因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，故

$$\int_0^3 Axe^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}A\int_0^3\mathrm{d}(e^{-x^2})=-\frac{1}{2}Ae^{-x^2}\Big|_0^3=-\frac{1}{2}A(e^{-9}-1)=A\,\frac{1-e^{-9}}{2}.$$

故 $A=\frac{2}{1-e^{-9}}$.

$$P(\xi<2)=\int_{-\infty}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{2}{1-e^{-9}}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$=0+\frac{1}{1-e^{-9}}(-1)\int_0^2\mathrm{d}(e^{-x^2})=\frac{1}{1-e^{-9}}(-1)e^{-x^2}\Big|_0^2$$
$$=\frac{1}{1-e^{-9}}(-1)(e^{-4}-1)=\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}.$$

(6)从一批子弹中任意取 5 发试射，如果没有一发子弹落在靶心 2cm 以外，则整批子弹将被接受，设弹着点与靶心的距离 ξ(cm)的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Axe^{-x^2}, & 0<x<3;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $A=$________，任一发子弹落在靶心 2cm 以内的概率为________，这批子弹被接受的概率为________.

设事件 A 表示这批子弹被接受，则所求概率为 $P(A)$. 事件 A_i 表示第 i 发子弹落在靶心 2cm 以内 $(i=1,2,3,4,5)$，则 A_i 相互独立且 $P(A_i)=\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}$ $(i=1,2,3,4,5)$，则

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)=\prod_{i=1}^{5}P(A_i)=\left(\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}\right)^5.$$

(7)测量圆的直径，设其近似值在区间 $[a,b]$ 内服从均匀分布 $(a>0,b>0)$，则圆面积的概率密度为________.

解 设 ξ 表示直径近似值，则 $\xi\sim U[a,b]$，所求为 $\eta=\pi\left(\frac{\xi}{2}\right)^2$ 的概率密度.

因为

$$\xi\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P\left(\pi\left(\frac{\xi}{2}\right)^2\leqslant y\right)=P\left(-2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\leqslant\xi\leqslant 2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)$$
$$=\int_{-2\sqrt{\frac{y}{\pi}}}^{2\sqrt{\frac{y}{\pi}}}f(x)\mathrm{d}x,$$

即当 $\frac{\pi a^2}{4}<y<\frac{\pi b^2}{4}$ 时，$f_\eta(y)=F'_\eta(y)=\frac{1}{b-a}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}$.

2. 选择题

(1)随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上(　　).

(A)处处连续　　(B)必有间断点

(C)处处左连续　　(D)处处右连续

解　选(D).

因分布函数 $F(x)$ 为右连续函数,即 $\forall\ x\in R$,有

$$F(x+0)=F(0).$$

(2)设 $f(x)=Ae^{-2x}(x>0)$,是某个随机变量的密度函数,则 A 的值是(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)-2　　(D)$\frac{1}{2}$

解　选(B).　因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,即 $\int_0^{+\infty}Ae^{-2x}\mathrm{d}x=1$,

$$\int_0^{+\infty}Ae^{-2x}\mathrm{d}x=A\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}A(0-1)=\frac{1}{2}A,$$

故 $A=2$.

(3)设随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)=A+Be^{-\frac{1}{2}x^2}(x>0)$,则 A,B 的值是(　　).

(A)$A=1,B=1$　　(B)$A=1,B=-1$

(C)$A=-1,B=1$　　(D)$A=-1,B=-1$

解　选(B).

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(A+Be^{-\frac{1}{2}x^2})=1$,

$$\lim_{x\to+\infty}(A+Be^{-\frac{1}{2}x^2})=A,$$

故 $A=1$.

又因 $F(x)$ 是右连续函数,　故 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$,即 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+Be^{-\frac{1}{2}x^2})=0$,

可得 $1+B=0$,　故 $B=-1$.

(4)设随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)=1-\frac{1}{3}e^{-3x},x\geqslant0$,则 $P(\xi=0)$ 是(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{2}{3}$

解　选(D).

因 $P(\xi=x)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}P(x-\varepsilon<\xi\leqslant x)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}[F(x)-F(x-\varepsilon)]$

$$=F(x)-\lim_{\varepsilon\to0}F(x-\varepsilon)=F(x)-F(x-0),$$

故 $P(\xi=0)=F(0)-F(0-0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}$.

(5)设随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{5}(x^2+3), & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$ 记 $P(\xi=0)=p,P(\xi=1)=q$,则有(　　).

(A)$p=\frac{3}{5},q=\frac{1}{5}$　　(B)$p=\frac{1}{5},q=\frac{3}{5}$

(C)$p=0,q=0$　　(D)$p=0,q=\frac{4}{5}$

解　选(A).

因 $P(\xi=0)=F(0)-F(0-0)=\frac{3}{5}-0=\frac{3}{5}$,

$$P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=1-\frac{1}{5}(1^2+3)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5},$$

故 $p=\frac{3}{5},q=\frac{1}{5}$.

连续型随机变量的分布函数一定连续,但分布函数连续的随机变量不一定是连续型变量.

分布函数连续是连续型随机变量的必要不充分条件.

"分布函数连续" 这个条件只能等价(充要条件)于 "任意点的概率值为0" .

(6)设 $\xi\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots\\ 0.7 & 0.7k & 0.7k^2 & 0.7k^3 & \cdots & 0.7k^n & \cdots\end{bmatrix}$,则 k 的值为(　　).

(A)0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

解　选(C).

因 $\sum\limits_n p_n=1$,　故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}0.7k^n=0.7\sum\limits_{n=0}^{\infty}k^n=0.7\frac{1}{1-k}=1$,即 $1-k=0.7$,

故 $k=0.3$.

(7)设函数 $f(x)=\sin x(x\in D)$,是某个随机变量的密度函数,则 D 为(　　).

(A)$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　(B)$[0,\pi]$　　(C)$[0,2\pi]$　　(D)$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

解　选(A).

因密度函数有性质(1)$f(x)\geqslant0$;(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,

(7)设函数 $f(x)=\sin x(x\in D)$,是某个随机变量的密度函数,则 D 为(　　).

(A)$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　(B)$[0,\pi]$　　(C)$[0,2\pi]$　　(D)$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

解　选(A).　因密度函数有性质(1)$f(x)\geqslant0$;(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,

故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(x)=\sin x\geqslant0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)=1.$$

(8)设随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=k\cos2x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right)$,则 k 的值为(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)1　　(C)2　　(D)$\frac{1}{4}$

解　选(B).

因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,　$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}k\cos2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k\sin2x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}k[1-(-1)]=k$,

故 $k=1$.

3. **计算题**

(1)设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=A\left(\frac{2}{3}\right)^k (k=1,2,3)$,求常数 A.

解 因 $\sum_k P(\xi=k)=1$,

故 $A\left[\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}\right]=A\left[\frac{18}{27}+\frac{12}{27}+\frac{8}{27}\right]=A\,\frac{38}{27}=1$, 即 $A=\frac{27}{38}$.

(2)设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=1-(1+x)e^{-x}, x>0$,求:①ξ 的密度函数;②$P(\xi\leqslant 1)$.

解 ①因 $f(x)=F'(x)$,

故 $f(x)=-e^{-x}-(1+x)e^{-x}-1=-e^{x}+e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}(x>0)$;

(3)设 ξ 的分布列为

ξ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(3)设 ξ 的分布列为

ξ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 $\eta=\cos\xi$ 的分布列.

解 $\eta=\cos\xi$ 的分布列为

$\xi=\cos\xi$	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(4)设随机变量 ξ 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,求 $\eta=1-\xi^3$ 的密度函数.

解 先求 η 的分布函数 $F_\eta(y)$,

$F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P(1-\xi^3\leqslant y)=P(\xi\geqslant\sqrt[3]{1-y})=1-F_\xi(\sqrt[3]{1-y})$,

再由 $f_\eta(y)=F'_\eta(y)$ 得

(4)设随机变量 ξ 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,求 $\eta=1-\xi^3$ 的密度函数.

解 先求 η 的分布函数 $F_\eta(y)$,

$F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P(1-\xi^3\leqslant y)=P(\xi\geqslant\sqrt[3]{1-y})=1-F_\xi(\sqrt[3]{1-y})$,

再由 $f_\eta(y)=F'_\eta(y)$ 得

$$f_\eta(y)=F'_\xi(\sqrt[3]{1-y})\,\frac{1}{3}(1-y)^{-\frac{2}{3}}(-1)$$
$$=\frac{1}{\pi\left[1+(1-y)^{\frac{2}{3}}\right]}\left(-\frac{1}{3}\right)(1-y)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=-\frac{1}{3\pi\left[1+(1-y)^{\frac{2}{3}}\right](1-y)^{\frac{2}{3}}}.$$

(5)设 ξ 服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布,求 $\eta=\sqrt{|\xi|}$ 的密度函数.

解 因 $\xi\sim U[-1,1]$,

故 $\xi\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

先求 η 的分布函数 $F_\eta(y)$,

$$F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=P(\sqrt{|\xi|}\leqslant y),$$

当 $y<0$ 时,$F_\eta(y)=0$,故 $f_\eta(y)=0$.

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,$F_\eta(y)=P(|\xi|\leqslant y^2)=P(-y^2\leqslant\xi\leqslant y^2)$

$$=\int_{-y^2}^{y^2} f(x)\,dx,$$

故 $f_\eta(y)=F'_\eta(y)=2y$.

模拟试题自测

1. **填空题**

(1)设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=A\,\frac{\lambda^k}{k!}\ (k=1,2,\cdots),\lambda>0$,则常数 $A=$________.

因 $1=\sum_{k=1}^{\infty}A\,\frac{\lambda^k}{k!}=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)=A(e^{\lambda}-1)$,

故 $A=\frac{1}{e^{\lambda}-1}=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.

(2)设随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-2x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 则 $A=$________,ξ 的分布函数为 $F(x)=$________.

因 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}Ax^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-2x})$

$=-\frac{1}{2}A\left[x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2x}d(x^2)\right]=\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}x\,d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}A\left[xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\right]$

(2)设随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-2x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 则 $A=$________,ξ 的分布函数为 $F(x)=$________.

因 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}Ax^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-2x})$

$=-\frac{1}{2}A\left[x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2x}d(x^2)\right]=\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}A\int_0^{+\infty}x\,d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}A\left[xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\right]$

$=-\frac{1}{2}A\,\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{4}A(0-1)$, 故 $A=4$.

即 $f(x)=\begin{cases}4x^2e^{-2x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

因 $F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$,故当 $x\leqslant 0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$.

当 $x>0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x 4t^2e^{-2t}dt=-2\int_0^x t^2d(e^{-2t})$

$=-2t^2e^{-2t}\Big|_0^x+2\int_0^x 2te^{-2t}dt=-2x^2e^{-2x}-2\int_0^x t\,d(e^{-2t})$

(2)设随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-2x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 则 $A=$________，ξ 的分布函数为 $F(x)=$________.

即 $f(x)=\begin{cases}4x^2e^{-2x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

因 $F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，故当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$.

当 $x>0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}4t^2e^{-2t}\mathrm{d}t=-2\int_{0}^{x}t^2\mathrm{d}(e^{-2t})$$
$$=-2t^2e^{-2t}\Big|_0^x+2\int_0^x 2te^{-2t}\mathrm{d}t=-2x^2e^{-2x}-2\int_0^x t\mathrm{d}(e^{-2t})$$
$$=-2x^2e^{-2x}-2te^{-2t}\Big|_0^x+2\int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t=-2x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-e^{-2t}\Big|_0^x$$
$$=-2x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-(e^{-2x}-1)$$
$$=1-(2x^2+2x+1)e^{-2x},$$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ 1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x>0.\end{cases}$

(3)若随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $c=$________时，有 $P(\xi\geqslant c)=\frac{1}{2}$.

因 $P(\xi\geqslant c)=\int_{c}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-e^{-\lambda x}\Big|_c^{+\infty}$

$=-(0-e^{-\lambda c})=e^{-\lambda c}$，

故 $e^{-\lambda c}=\frac{1}{2}$ 即 $-\lambda c=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$. $c=\frac{1}{\lambda}\ln 2$.

(4)设随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 对 ξ 进行三次独立重复观察，用 η 表示事件 $\left(\xi\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 出现的次数，则 $P(\eta=2)=$________.

因 $P\left(\xi\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，

故 $\eta\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$， $P(\eta=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.

(5)设随机变量 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\eta=e^{\xi}$ 的概率密度为 $f_\eta(y)=$________.

因函数 $y=e^x$ 单增，反函数为 $x=\ln y$，其导数为 $x'=\frac{1}{y}$，

故 η 的概率密度为

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(6)设随机变量 $\xi\sim B(2,p)$，$\eta\sim B(3,p)$，若 $P(\xi\geqslant 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(\eta\geqslant 1)=$________.

由 $P(\xi\geqslant 1)=\frac{5}{9}$ 可得

$$1-C_2^0p^0(1-p)^2=\frac{5}{9}，即\ 1-(1-p)^2=\frac{5}{9}\Rightarrow$$
$$(1-p)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow 1-p=\frac{2}{3}\Rightarrow p=\frac{1}{3},$$

故 $P(\eta\geqslant 1)=1-C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$.

(7)若随机变量 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<\xi\leqslant 4)=0.3$，则 $P(\xi\leqslant 0)=$________.

因 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，故 $\frac{\xi-2}{\sigma}\sim N(0,1)$.

因 $P(2<\xi\leqslant 4)=P\left(\frac{2-2}{\sigma}<\frac{\xi-2}{\sigma}\leqslant\frac{4-2}{\sigma}\right)=P\left(0<\frac{\xi-2}{\sigma}\leqslant\frac{2}{\sigma}\right)$

$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5$，

故 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.3+0.5=0.8$.

故 $P(\xi\leqslant 0)=P\left(\frac{\xi-2}{\sigma}\leqslant\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

(8)设随机变量 $\xi\sim U[1,6]$，则方程 $t^2+\xi t+1=0$ 有实根的概率是________.

因方程 $t^2+\xi t+1=0$ 有实根 $\Rightarrow\Delta=\xi^2-4\geqslant 0\Rightarrow\xi^2\geqslant 4\Rightarrow|\xi|\geqslant 2$，

故所求概率为 $P(|\xi|\geqslant 2)=P(\xi\geqslant 2$ 或 $\xi\leqslant -2)$. 因 $\xi\sim U[1,6]$，

故 $P(\xi\geqslant 2$ 或 $\xi\leqslant -2)=P(\xi\geqslant 2)=\int_2^6\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(6-2)=\frac{4}{5}$.

(9)已知随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x)=\frac{c}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，则 $c=$________，ξ 的分布函数 $F(x)=$________.

因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{1+x^2}\mathrm{d}x=1\Rightarrow c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=1$，

$\Rightarrow c\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1\Rightarrow c\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$，$\Rightarrow c\pi=1$. 故 $c=\frac{1}{\pi}$.

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\arctan t\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left[\arctan x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{1}{2}\right).$$

(10)在独立重复试验中，每次试验成功的概率均为 p，设第 r 次成功恰好出现在第 k 次试验，则 k 的分布律为________.

ξ 可能取值为 $r,r+1,\cdots$，$(\xi=k)$ 表示前 $k-1$ 次试验中出现 $r-1$ 次成功，第 k 次试验出现成功，故 ξ 的分布律为

$$P(\xi=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}p=C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,k=r,r+1,\cdots.$$