Теория вероятностей и математическая статистика

доц. Флегель Александр Валерьевич

flegel@cs.vsu.ru

2014

Условные вероятности

Пример 1.

Допустим, что студент выучил из 28 билетов 4 четных и 12 нечетных. По классической схеме вероятность того, что студент получит выученный билет (событие A), равна

$$P(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

Пусть к моменту прихода студента осталось 14 билетов и все они нечетные (событие B). Какова вероятность события A при условии, что B произошло.

$$P(A|B) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Условные вероятности

Пример 2.

N карточек трех типов: N_B – черные (обе стороны черные), N_A – белые (обе стороны белые), N_{AB} – разноцветные (одна сторона белая, а другая черная). Вынимается одна карточка.

1. Какова вероятность $P(A)$ появления белого цвета (событие A) в предположении, что карточки извлекаются с равными вероятностями?

$$P(A) = \frac{N_A}{N};$$

2. Наудачу выбранная карточка положена на стол, и ее верхняя сторона оказалась черной (событие B). Какова в этом случае вероятность $P(A|B)$ того, что другая сторона белая?

$$P(A|B) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Условные вероятности. Общее определение.

Пусть (Ω, U, P) — произвольное вероятностное пространство. Если $A, B \in U$ и $P(B) > 0$, то **условная вероятность** события A при условии, что произошло событие B, определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

в правой части которой символ P понимается как вероятность в рассматриваемом вероятностном пространстве.

Пусть теперь некоторое событие B с $P(B) > 0$ фиксировано. Функция

$$P_B(A) = P(A|B) = P(AB)/P(B),$$

определенная для $\forall A \in U$, удовлетворяет аксиомам теории вероятностей, в частности

$$P(A|B) \geqslant 0, \quad P(\Omega|B) = 1, \quad P(A_1+A_2|B) = P(A_1|B)+P(A_2|B) \quad (A_1 \cdot A_2 = \emptyset).$$

Для функции условной вероятности $P_B(A)$ справедливы все следствия из аксиом. Кроме того,

$$P(B|B) = 1,$$

$$P_B(A|C) = P(A|BC).$$

Вероятность произведения событий

Теорема умножения вероятностей.

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

Обобщение по индукции (цепное правило):

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

Формула полной вероятности

Пусть A — произвольное событие, события $B_1, B_2, \dots, B_n$ попарно несовместны, $P(B_k) > 0, k = 1, \dots, n$, и $A \subset B_1 + B_2 + \dots + B_n$.
Тогда имеет место следующая формула (**формула полной вероятности**):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A|B_k).$$

Доказательство:
Событие A можно представить в виде суммы попарно *несовместных* событий:

$$A = AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n.$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(AB_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A|B_k). \quad \square$$

- Формулу можно распространить на случай *счетной* системы попарно несовместных событий B_k, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$

Формулы Байеса

Заменив в равенстве

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности, получим **формулы Байеса**:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры

Пример 1. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25%, вторая — 35%, третья — 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно $5\%, 4\%, 2\%$.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным?
б) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт произведен первой, второй и третьей машиной, если он оказался дефектным?

Решение.
а) A — событие, состоящее в том, что случайный болт — дефектный; B_1, B_2, B_3 — события, состоящие в том, что этот болт произведен соответственно первой, второй и третьей машинами.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.40 \cdot 0.02 = 0.0345. \end{aligned}$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры

Пример 1. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25%, вторая — 35%, третья — 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно $5\%, 4\%, 2\%$.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным?

б) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт произведен первой, второй и третьей машиной, если он оказался дефектным?

Решение.

б)

$$P(B_1|A) = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.0345} = \frac{125}{345},$$
$$P(B_2|A) = \frac{0.35 \cdot 0.04}{0.0345} = \frac{140}{345},$$
$$P(B_3|A) = \frac{0.40 \cdot 0.02}{0.0345} = \frac{80}{345}$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры

Пример 2. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Какова вероятность извлечь наудачу из урны белый шар?

Решение.

Пусть B_k — событие, состоящее в том, что утеряно k белых шаров ($k=0,1$); A — событие, состоящее в том, что шар, извлеченный из оставшихся, оказался белым.

$$P(B_0)=\frac{N-M}{N},\quad P(B_1)=\frac{M}{N},\quad P(A|B_0)=\frac{M}{N-1},\quad P(A|B_1)=\frac{M-1}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}+\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}=\frac{M}{N}.$$

Независимость событий

События A и B называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

В случае $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$ независимость A и B эквивалентна любому из равенств

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B).$$

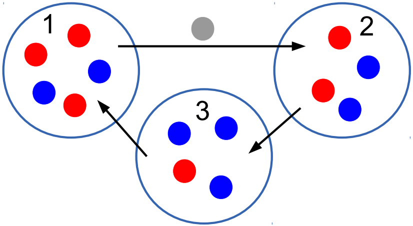
- В основе независимости событий лежит их физическая независимость, сводящаяся к тому, что множества случайных факторов, приводящих к тому или другому исходу опыта, не пересекаются (или почти не пересекаются).

Последовательности испытаний

Конечные последовательности испытаний

Задача

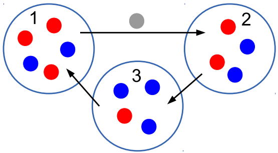
В урне 1 — **2 синих** и **3 красных** шара; в урне 2 — **2 синих** и **2 красных**; в урне 3 — **3 синих** и **1 красных**.



Из первой урны наугад один шар переложен во вторую. После этого из второй урны также наугад — в третью; наконец, из 3 $\to$ 1.

- Какой состав шаров в урне 1 наиболее вероятен?
- Что более вероятно: изменение состава шаров урны 1 или сохранение?

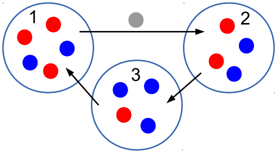
Конечные последовательности испытаний



Пусть A_k — событие, состоящее в том, что при k-м перекладывании ($k = 1, 2, 3$) был переложен синий шар.
$\Omega = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$
На введенные формально обозначения для элементарных событий можно смотреть как на произведения случайных событий.
Состав шаров известен, если известно какой шар в данную урну переложен $\Rightarrow$ заданы вероятности $P(A_1), P(\overline{A}_1), P(A_2|A_1), P(A_3|A_1\overline{A}_2)$ и т.д.

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{125}$$

Конечные последовательности испытаний



$$P(A_1A_2A_3)=\frac{24}{125},\;\; P(\overline{A}_1A_2A_3)=\frac{24}{125},\;\; P(A_1\overline{A}_2A_3)=\frac{12}{125},\;\; P(A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{6}{125},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{18}{125},\;\; P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{8}{125},\;\; P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=\frac{6}{125},\;\; P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{27}{125}.$$

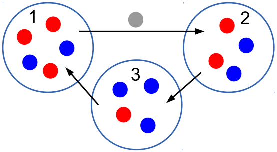
По этим вероятностям однозначно определяется вероятность любого случайного события. Пусть B_l $(l=1,2,3)$ — [в первой урне после перекладывания оказалось l белых шаров].

$$B_1=\{A_1A_2\overline{A}_3,\; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\},\qquad P(B_1)=14/125$$

$$B_2=\{A_1A_2A_3,\; A_1\overline{A}_2A_3,\; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3,\; \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\},\qquad P(B_2)=60/125$$

$$B_3=\{\overline{A}_1A_2A_3,\; \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\},\qquad P(B_3)=51/125$$

Конечные последовательности испытаний



$$B_1 = \{A_1 A_2 \overline{A}_3,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3\},$$

$$B_2 = \{A_1 A_2 A_3,\ A_1 \overline{A}_2 A_3,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3\},$$

$$B_3 = \{\overline{A}_1 A_2 A_3,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3\},$$

$$P(B_1) = \frac{14}{125}, \qquad P(B_2) = \frac{60}{125}, \qquad P(B_3) = \frac{51}{125}$$

- Вероятность сохранения состава шаров — $60/125$.
- **Более вероятно изменение состава шаров в первой урне, но наиболее вероятным составом является певоначальный состав.**

Конечные последовательности испытаний

Последовательность из n испытаний, в каждом из которых может произойти один из N исходов.

Определение: Под последовательностью из n испытаний будем понимать дискретное вероятностное пространство (Ω, U, P), в котором

$$\Omega = \{(l_1 l_2 \dots l_n)\}, \quad l_k = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, \dots, n,$$

и вероятностями $p(l_1 l_2 \dots l_n)$, задаются формулой

$$p(l_1 l_2 \dots l_n) = p(l_1) p(l_2|l_1) p(l_3|l_1 l_2) \cdots p(l_n|l_1 \dots l_{n-1}),$$

где числа $p(l_1), p(l_2|l_1), \cdots, p(l_n|l_1 \dots l_{n-1})$ удовлетворяют условиям:

1) $p(l_1) \geqslant 0$, $\sum_{l_1=1}^{N} p(l_1) = 1$;
2) $p(l_2|l_1) \geqslant 0$, $\sum_{l_2=1}^{N} p(l_2|l_1) = 1 \quad \forall l_1$;

   ....

3) $p(l_n|l_1 \dots l_{n-1}) \geqslant 0$, $\sum_{l_n=1}^{N} p(l_n|l_1 \dots l_{n-1}) = 1 \quad \forall l_1, l_2, \dots, l_n$

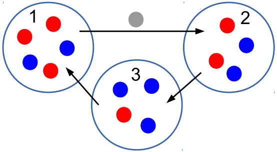
Конечные последовательности испытаний

Распределение вероятностей:

$$P(A) = \sum_{(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in A} p(l_1, l_2, \ldots, l_n), \qquad \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_n = 1}^{N} p(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$$

Число $p(l_k | l_1 l_2 \ldots l_{k-1})$ является условной вероятностью появления в k-м испытании исхода l_k при условии, что до этого была получена цепочка исходов $(l_1 l_2 \ldots l_{k-1})$.

Конечные последовательности испытаний



$$n = 3, \quad N = 2.$$

1) $p(1) = 2/5$, $p(2) = 3/5$;
2) $p(1|1) = 3/5$, $p(2|1) = 2/5$, $p(1|2) = 2/5$, $p(2|2) = 3/5$;
3) $p(1|11) = p(1|21) = 4/5$, $p(2|11) = p(2|21) = 1/5$,
$p(1|12) = p(1|22) = 3/5$, $p(2|12) = p(2|22) = 2/5$,

где исходы “1” и “2” соответствуют извлечению синего и красного шара.

- Вероятности $p(i|jk)$ не зависят от j, т.к. на состав последней пары влияет только цвет шара, переложенного из второй урны.

Конечные последовательности испытаний

Определение:
Последовательность испытаний, в которой условные вероятности $p(l_t|l_1 \dots l_{t-1})$ не зависят от $l_1, \dots, l_{t-2}$,

$$p(l_t|l_1 \dots l_{t-1}) = p^{(t)}_{l_{t-1} l_t}$$

называются **цепью Маркова**.

В случае, когда $p(l_t|l_1 \dots l_{t-1})$ не зависят от $l_1, \dots, l_{t-1}$, последовательность испытаний называется **последовательностью независимых испытаний**.

Последовательность независимых испытаний

Определение:

Под **последовательностью** n **независимых испытаний**, в каждом из которых может осуществиться один из N исходов (обозначим исходы $1, 2, \dots, N$), мы будем понимать вероятностное пространство (Ω, U, P), в котором

$$\Omega = \{(l_1 l_2 \dots l_n)\}, \quad l_k = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, \dots, n,$$

и вероятности $p(l_1 l_2 \dots l_n)$, приписываемые цепочкам из результатов отдельных испытаний, задаются формулой

$$p(l_1 l_2 \dots l_n) = p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_n},$$

где $p_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, N$, $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$.

Число p_k является вероятностью появления исхода k в фиксированном испытании.

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_n = 1}^{N} p(l_1, l_2, \dots, l_n) = 1$$

Последовательность независимых испытаний

Если событие $A_1(k)$ заключается в том, что в первом испытании наступил исход k, то

$$A_1(k) = \{(l_1 l_2 \ldots l_n) : l_1 = k\}, \qquad P(A_1(k)) = \sum_{l_2,\ldots,l_n=1}^{N} p_k p_{l_2} \cdots p_{l_n} = p_k.$$

Более общий случай:

$$A_{i_1\ldots i_s}(L_1, \ldots, L_s) = \{(l_1 l_2 \ldots l_n) : l_{i_1} = L_1, \ldots, l_{i_s} = L_s\},$$

$$P(A_{i_1\ldots i_s}(L_1, \ldots, L_s)) = p_{L_1} p_{L_2} \cdots p_{L_s}.$$

Последовательность независимых испытаний

Теорема: События $A = A_{i_1 \ldots i_s}(L_1, \ldots, L_s)$ и $B = B_{j_1 \ldots j_t}(L'_1, \ldots, L'_t)$, **независимы, если** $(i_1 \ldots i_s) \cap (j_1 \ldots j_t) = \emptyset$.

Доказательство в частном случае. Пусть

$$A = \{(l_1 \ldots l_n) : l_1 = 2\}, \qquad B = \{(l_1 \ldots l_n) : l_2 = 1, l_4 = 3\}.$$

Тогда

$$AB = \{(l_1 \ldots l_n) : l_1 = 2, l_2 = 1, l_4 = 3\}.$$

$$P(A) = \sum_{l_2, \ldots, l_n = 1}^{N} p_2 p_{l_2} \cdots p_{l_n} = p_2, \quad P(B) = \sum_{l_1, l_3, l_5, l_6, \ldots, l_n = 1}^{N} p_{l_1} p_2 p_{l_3} p_3 p_{l_5} p_{l_6} \cdots p_{l_n} = p_1 p_3$$

$$P(AB) = \sum_{l_2, l_5, l_6, \ldots, l_n = 1}^{N} p_2 p_1 p_{l_3} p_3 p_{l_5} \cdots p_{l_n} = p_2 p_1 p_3 \quad \Rightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B).$$

Испытания Бернулли

Независимые испытания при $N = 2$ называют **испытаниями Бернулли**.
Исходы 1 и 2 называют “успехом” (1) и “неудачей” (0), и их вероятности p_1 и p_2 полагают равными p и $q = 1 - p$.
Элементарные события — цепочки вида (из n элементов)

$$110001\ldots1.$$

Вероятность:

$$P(110001\ldots1) = p^m q^{n-m},$$

где m — число успехов (1).

Испытания Бернулли

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, U, P).
$\mu_n = \mu_n(110001\dots1)$ — случайная величина, равная числу успехов в первых n испытаниях схемы Бернулли.

$$\mu_4 = \mu_4(1101) = 3, \mu_4 = \mu_4(0000) = 0$$

Найдем вероятности событий

$$\{\mu_n = m\} = \{(110001\dots1) : \mu_n(110001\dots1) = m\}.$$

Теорема

Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, то

$$P(\mu_n = m) = p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Полиномиальная схема

Для схемы испытаний с произвольным N введем случайные величины ξ_k, равные числам исходов k, $k = 1, 2, \ldots, N$.

$$P(\xi_1 = m_1, \xi_2 = m_2, \ldots, \xi_N = m_N) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_N!} p_1^{m_1} \cdots p_N^{m_N},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_N$ — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $m_1 + m_2 + \cdots + m_N = n$.
Вероятность каждой цепочки:

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_N^{m_N}.$$

$$C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \cdots C_{n-m_1-\cdots-m_{N-1}}^{m_N} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_N!}$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

$n \gg 1$

Теорема Пуассона

Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

при любом постоянном m, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Часто эта формула используется при $n > 100$ и $np < 30$.

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если $n \to \infty$, p $(0 < p < 1)$ постоянно, величина

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad (-\infty < a \leqslant x_m \leqslant b < \infty)$$

ограничена равномерно по m и n, то

$$P(\mu_n = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_m^2/2}(1 + \alpha_n(m)),$$

где $|\alpha_n| < C/\sqrt{n}$ при $x_m \in [a, b]$, $C > 0$ — постоянная.

Формулу $P(\mu_n = m) \approx e^{-x_m^2/2}/\sqrt{2\pi npq}$ часто используют при $n > 100$ и при $npq > 20$.

$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad m \to \infty$.

m и n должны отличаться не очень сильно.

Для $P(\mu_n = 0)$ локальная теорема дает плохое приближение.

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если p $(0 < p < 1)$ постоянно, то при $n \to \infty$ величина

$$P\left(a \leqslant \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \to 0$$

равномерно по a и b, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$.

Приближенная формула

$$P\left(a \leqslant \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

используется в тех случаях, когда возможно использование формулы $P(\mu_n = m) \approx e^{-x_m^2/2}/\sqrt{2\pi npq}$.

Случайные величины

Определения и примеры

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — произвольное вероятностное пространство. **Случайной величиной** X назовем действительную функцию $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, такую, что при любом действительном x

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Так как $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, то

$$\begin{aligned}
(X \geqslant x) &= \overline{(X < x)} \in \mathcal{F}, && (1)\\
(x_1 \leqslant X < x_2) &= \overline{(X < x_2)} \setminus (X < x_1) \in \mathcal{F}, && (2)\\
(X = x) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x \leqslant X < x + \frac{1}{n} \right) \in \mathcal{F}. && (3)
\end{aligned}$$

Для вычисления вероятностей событий вида (1)-(3) достаточно при любом x знать вероятность

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Функция распределения

Функция $F_X(x) \equiv F(x)$,

$$F(x) = P(X < x),$$

действительной переменной x, $-\infty < x < \infty$, называется **функцией распределения** случайной величины X.

- Так как $(X < x_2) = (x_1 \leqslant X < x_2) + (X < x_1)$, то

$$P(X < x_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2) + P(X < x_1).$$

  $P(x_1 \leqslant X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
- $P(X \geqslant x) = 1 - F(x)$.
- $P(X = x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[F\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - F(x)\right] = F(x+0) - F(x)$

Функция распределения. Примеры

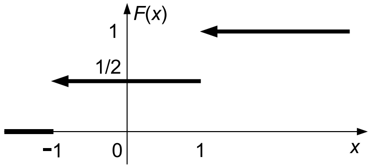
Пример 1.

Два игрока по одному разу подбрасывают симметричную монету. Если выпал “орел”, то первый игрок получает 1 рубль, а если выпала “решка”, то — отдает 1 рубль. Для описания данной игры естественно положить $\Omega = \{\text{Орел,Решка}\}$ и $P(\{\text{Орел}\}) = P(\{\text{Решка}\}) = 1/2$. Случайная величина X, равная выигрышу первого игрока, определяется следующим образом:

$$X = X(\text{Орел}) = 1, \quad X = X(\text{Решка}) = -1.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ 1/2, & -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

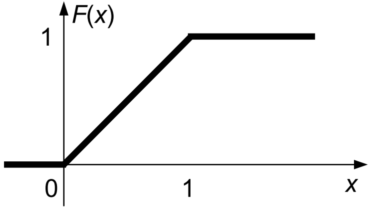


Функция распределения. Примеры

Пример 2.

Пусть в единичный квадрат $\Omega = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ наудачу брошена точка. Элементарными событиями ω являются точки квадрата Ω; σ-алгебра $\mathcal{F}$ порождается квадрируемыми подмножествами квадрата. Вероятность — площадь. Случайное событие, например — первая координата брошенной точки, $X = X(u, v) = u$. Найдем функцию распределения величины X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Функция распределения. Примеры

Пример 3.

Пусть один раз подбрасывается монета. Если выпал “орел”, то на этом опыт заканчивается. Если выпала “решка”, то на отрезок $[0, 1]$ наудачу бросается точка. Пространство элементарных событий:

$$\Omega = \{\text{орел}; (\text{решка}, u)\}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

σ-алгебра $\mathcal{F}$ порождается событиями

$$\{\text{орел}\}; \ \{(\text{решка}, u) : a \leqslant u < b\}, \quad 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1.$$

Пусть вероятности равны:

$$P(\{\text{орел}\}) = \frac{1}{2}, \ \ P(\{(\text{решка}, u) : a \leqslant u < b\}) = \frac{b-a}{2}.$$

Рассмотрим случайную величину X:

$$X(\text{орел}) = -1, \quad X(\text{решка}, u) = u.$$

Функция распределения. Примеры

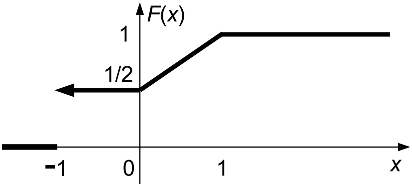
Пример 3 (продолжение).

Так как

$$(X < x) = \begin{cases} \emptyset, & x \leqslant -1, \\ \{\text{орел}\}, & -1 < x \leqslant 0, \\ \{\text{орел}\} + \{(\text{решка}, u) : 0 \leqslant u < x\}, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ 1/2, & -1 < x \leqslant 0, \\ (x+1)/2, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



Функция распределения. Свойства

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(+\infty) = 1.$$

Теорема:

1. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$ (непрерывность слева).

Доказательство на лекции. См. также, например, Чистяков В.П. Курс теории вероятностей.

Любая функция $G(x)$, обладающая тремя свойствами, указанными в теореме, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Случайная величина X называется **величиной дискретного типа**, если существует конечное или счетное множество чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (без предельных точек) таких, что

$$P(X = x_n) = p_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для дискретной случайной величины закон распределения полностью определяется указанием значений x_n, $n = 1, 2, \dots$, и вероятностей p_n, с которыми эти значения принимает X.

$F(x)$ — ступенчатая; скачок в точке x_n равен p_n.

Случайная величина X называется **величиной абсолютно непрерывного типа**, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что $\forall x$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'.$$

Функция $f(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей**.

$$P(a \leqslant X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$P(X = a) = \lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant X < a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+1/n} f(x)dx = 0$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$$

Если x — точка непрерывности $f(x)$, то при $\Delta x \to 0$

$$P(x < X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Плотность распределения вероятностей. Свойства

1. $f(x) \geqslant 0, \qquad -\infty < x < \infty;$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$
3. $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$.

Плотность распределения полностью определяет распределение случайной величины.

Плотность распределения абсолютно непрерывной величины непрерывна.

Плотность распределения вероятностей. Примеры

Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-(x-a)^2/(2\sigma^2)\right], \quad -\infty < a < \infty; \quad \sigma > 0.$$

Случайная величина называется нормально распределенной с параметрами (a, σ).

Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \quad a < b. \end{cases}$$

Примеры дискретных распределений

Биномиальное распределение

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad 0 < p < 1; \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Пуассоновское распределение

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \ldots; \quad \lambda > 0.$$

Геометрическое распределение

$$P(X = m) = (1-p)^{m-1} p, \quad m = 0, 1, \ldots; \quad 0 < p < 1.$$

Гипергеометрическое распределение

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min(M, n).$$

Совместные распределения нескольких случайных величин

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы случайные величины

$$X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Каждому $\omega \Longrightarrow$ n-мерный вектор.

Определение

Функцию от переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n),$$

назовем **многомерной функцией распределения** случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$.

Совместные распределения нескольких случайных величин

Свойства многомерной функции распределения

- $F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна по каждому аргументу,
- $\lim\limits_{x_1 \to +\infty, \ldots, x_n \to +\infty} F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$
- $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$
- $\lim\limits_{x_n \to +\infty} F_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1 \ldots X_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$

Аналогичное свойство выполняется при переходе к пределу по любому аргументу.

Случайный вектор дискретного типа

$$\exists\, \vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}), \quad k = 1, 2, \ldots :$$

$$P(X_1 = x_{k1}, \ldots, X_n = x_{kn}) = p_{x_{k1} x_{k2} \cdots x_{kn}}, \qquad \sum_{(x_{k1}, \ldots, x_{kn})} p_{x_{k1} \cdots x_{kn}} = 1.$$

Совместные распределения нескольких случайных величин

Случайный вектор абсолютно непрерывного типа

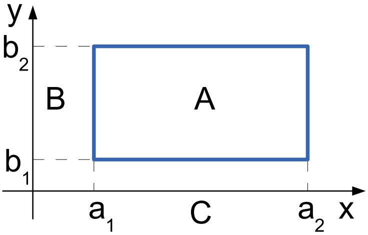
$$\exists\ f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad \forall\ x_1, \ldots, x_n$$

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx_1' \int_{-\infty}^{x_2} dx_2' \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dx_n'\ f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

Функция $f_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ называется **плотностью распределения вероятностей** случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$.
Для любого квадрируемого множества B в n-мерном пространстве

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in B) = \iint\limits_B \ldots \int f_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

$n = 2$



$$A = (a_1 \leqslant X < a_2, b_1 \leqslant Y < b_2)$$
$$B = (X < a_1, Y < b_2)$$
$$C = (X < a_2, Y < b_1)$$

Пусть $F(x, y) = F_{XY}(x, y) = P(X < x, Y < y)$.
Тогда $(X < a_2, Y < b_2) = A + B + C$. Так как $BC = (X < a_1, Y < b_1)$, то

$$P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC) = F(a_1, b_2) + F(a_2, b_1) - F(a_1, b_1).$$

$$P(A) = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1).$$

$$(X, Y) - \text{абс. непр. вектор} \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy\, f(x, y).$$

$n = 2$

По двумерной функции распределения можно найти одномерные функции распределения.

$$(X < x) = (X < x, Y < +\infty) \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty).$$

Таким образом,

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(x, \infty),$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(\infty, y),$$

Если (X, Y) — абс. непр. вектор, то

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x', y')dy' \right) dx' = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx',$$

где $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x', y')dy'$ — плотность распределения X.

$n = 2$

Пусть (X, Y) — вектор дискретного типа:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Пусть $\quad p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$

$$P(X = x_i) = p_i, \qquad P(Y = y_j) = p_j.$$

Независимость случайных величин

Определение:

Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются **независимыми в совокупности** или просто **независимыми**, если при любых действительных $x_1, \dots, x_n$

$$F_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Альтернативное определение:

Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, если при любых множествах $B_1, \dots, B_n$ (на которых определены вероятности событий $X_k \in B_k$) имеет место равенство

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) P(X_2 \in B_2) \cdots P(X_n \in B_n).$$

Теорема 1:

Если $\forall\, x, y$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

то при любых $a_k < b_k$, $k = 1, 2$,

$$P(a_1 \leqslant X < b_1, a_2 \leqslant Y < b_2) = P(a_1 \leqslant X < b_1) P(a_2 \leqslant Y < b_2).$$

Теорема 2:

Пусть распределение величин X, Y задается формулой

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

Случайные величины X, Y независимы тогда и только тогда, когда при любых i, j

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j,$$

где

$$P(X = x_i) = p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \qquad P(Y = y_i) = p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Теорема 3:

Пусть $f_{XY}(x, y)$ — плотность распределения случайных величин X, Y. Случайные величины X, Y независимы тогда и только тогда, когда во всех точках непрерывности функций $f_{XY}(x, y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ имеем

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Функции от случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — произвольное вероятностное пространство и $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — некоторая случайная величина.
Суперпозиция X, заданной на Ω, и функция $\varphi(x) : x \mapsto \varphi$, заданной на действительной прямой, является функцией

$$Y = \varphi[X(\omega)] = Y(\omega),$$

заданной на Ω.

Для дискретных вероятностных пространств функция Y — случайная величина.
Для произвольных вероятностных пространств требуется, чтобы $\forall\ y$

$$(Y < y) \in \mathcal{F}$$

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание

Математическим ожиданием $M(X)$ случайной величины $X = X(\omega_k)$, заданной на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется число

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} X(\omega_k) p_k,$$

если ряд абсолютно сходится.

Математическим ожиданием $M(X)$ случайной величины $X = X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданной на абсолютно непрерывном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется число

$$M(X) = \int \cdots \int_{\Omega} X(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Математическое ожидание

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ и событиям ω_k приписаны вероятности $p_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$.
Положим $X = X(\omega_k) = x_k$.
Среднее значение случайной величины X:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_N x_N.$$

Пусть проводится n независимых испытаний, каждое из которых состоит в том, что X принимает определенное значение.
Пусть получены следующие значения:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \qquad y_k \in (x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Тогда

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_N x_N}{n}, \qquad \frac{n_k}{n} \approx p_k.$$

Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины X, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется число

$$M(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega),$$

если интеграл Лебега, стоящий в правой части равентсва, существует.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x).$$

Математическое ожидание

Теорема 1:

Пусть (X, Y) — дискретный случайный вектор, для которого

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{ij} p_{ij} = 1.$$

Если ряд

$$\sum_{ij} |g(x_i, y_j)| p_{ij}$$

сходится, то случайная величина $\xi = g(X, Y)$ имеет математическое ожидание

$$M(\xi) = \sum_{ij} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

Для $n = 1$ и $g(x) = x$: $\quad M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k).$

Математическое ожидание

Теорема 2:

Пусть (X, Y) — абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью распределения $f(x, y)$. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| f(x, y) dxdy$$

сходится, то математическое ожидание случайной величины $\xi = g(X, Y)$ существует и

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy.$$

Для $n = 1$ и $g(x) = x$: $\quad M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$

Свойства математического ожидания

1. Если C постоянная, то $M(C) = C$.
2. Если C постоянная, то $M(CX) = CM(X)$.
3. Для любых величин X
$$|M(X)| \leqslant M(|X|).$$
4. Для любых случайных величин X_1 и X_2
$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2).$$
Если существуют какие-нибудь два из участвующих в равенстве математических ожиданий, то существует и третье.
5. Если случайные величины X_1 и X_2 независимы, то
$$M(X_1 X_2) = M(X_1)M(X_2).$$
Из существования любых двух математических ожиданий следует существование третьего.

Дисперсия

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется число

$$D(X) = M[(X - M(X))^2],$$

если математическое ожидание в правой части равенства существует.

Дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания. Величину $\sqrt{D(X)}$ называют **средним квадратическим отклонением**.

$$M[(X-M(X))^2] = M[X^2-2XM(X)+(M(X))^2] = M(X^2)-2M(X)M(X)+[M(X)]^2$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Дисперсия

Для абсолютно непрерывной случайной величины

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Для дискретной случайной величины

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M(X))^2 P(X = x_k),$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = 1.$

Свойства дисперсии

1. Для любой случайной величины X имеем $D(X) \geqslant 0$.
2. Если C постоянная, то $D(C) = 0$.
3. Если C постоянная, то $D(CX) = C^2 D(X)$.
4. Если случайные величины X_1 и X_2 независимы, то

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2).$$

Ковариация. Коэффициент корреляции

Рассмотрим две произвольные случайные величины.

Число
$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = M[(X_1 - M(X_1))(X_2 - M(X_2))]$$
называется **ковариацией** случайных величин X_1, X_2.

- $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = M(X_1 X_2) - M(X_1)M(X_2)$
- $\mathrm{cov}(X, X) = D(X)$
- $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathrm{cov}(X_2, X_1)$
- $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2\mathrm{cov}(X_1, X_2)$

Ковариация. Коэффициент корреляции

Теорема:

Если для случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ существуют $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, то при любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеем

$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}c_ic_j.$$

Так как при любых $c_1, \ldots, c_n$ дисперсия неотрицательна, то квадратичная форма неотрицательно определена.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_1) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_1, X_m) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_1) & \operatorname{cov}(X_2, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_2, X_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{cov}(X_m, X_1) & \operatorname{cov}(X_m, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_m, X_m) \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Для $m = 2$: $\det(X_1, X_2) = D(X_1)D(X_2) - \operatorname{cov}^2(X_1, X_2) \leqslant 0$.

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2)| \leqslant \sqrt{D(X_1)D(X_2)}$$

Ковариация. Коэффициент корреляции

Для независимых случайных величин

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0.$$

Если $\operatorname{cov}(X_1, X_2) \neq 0$, то величины X_1 и X_2 зависимы.

Для количественной характеристики степени зависимости используется **коэффициент корреляции** $\rho(X_1, X_2)$, определяемый следующим равенством:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}.$$

Свойства коэффициента корреляции

1. $|\rho(X_1, X_2)| \leqslant 1$
2. Если X_1 и X_2 независимы, то $\rho(X_1, X_2) = 0$
3. Если $X_2 = AX_1 + B$, где A и B постоянные, то $|\rho(X_1, X_2)| = 1$