УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Крыловецкий Александр Абрамович
каф. цифровых технологий

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики.
4. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики.
5. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям

математической физики.
6. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики.
7. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple.
8. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики.
9. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике, образовании.

1 Введение

Частной производной функции $f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

называется предел отношения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение, содержащее неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные. Наиболее часто встречаются уравнения для функций двух или трех переменных.

В курсе уравнений математической физики изучаются уравнения в частных производных, возникающие в физических задачах.

Примеры уравнений первого порядка – содержащих частные производные только первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1}$$

Примеры уравнений второго порядка – содержащих частные производные второго и, возможно, первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{2}$$

Рассмотрим простейшее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad u=u(x,y). \tag{3}$$

Очевидно, что его решение:

$$u(x,y)=\varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Следующий пример уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \quad \text{где } f(y) - \text{заданная функция.} \tag{5}$$

Общее решение

$$u(x,y) = \int f(y)dy + \varphi(x), \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

□ Упражнение. Проверить, что общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

есть

$$u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция.

Правило дифференцирования сложной функции $f(g)$, где $g(x)$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Правило дифференцирования сложной функции несколь-ких переменных. Пусть функция

$$u = u(v, ..., w),$$

где

$$v = v(x, y, ..., t),$$
$$...$$
$$w = w(x, y, ..., t).$$

Тогда ее частная производная по x имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + ... + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

В нашем случае $u = \varphi(v)$, где $v = y/x$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(v)' \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(v)' \left(\frac{1}{x}\right)$$

Подставляем в уравнение

$$x\varphi(v)' \left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\varphi(v)' \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Простейшее уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{9}$$

Заменим $\dfrac{\partial u}{\partial y} = v$. Тогда наше уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

Его общее решение $v = f(y)$. Тогда, возвращаясь к замене, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y). \tag{11}$$

Общее решение

$$u(x, y) = \int f(y)dy + \psi(x), \tag{12}$$

или

$$u(x, y) = \psi(x) + \varphi(y). \tag{13}$$

□ Упражнение. Проверить, что (13) есть общее решение (9).

□ Упражнение. Проверить, что функция $u(x, y) = x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

2 Классификация ДУ с частными производными второго порядка

$\surd\surd$ Уравнением с частными производными 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}) = 0 \tag{15}$$

Линейное относительно старших производных уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{16}$$

здесь коэффициенты a_{ij} являются функциями x и y.

Линейное уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \tag{17}$$

причем $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{f}$ – зависят только от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{f}$ не зависят от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то (17) – линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Если $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, то (17) – однородное уравнение.

Рассмотрим вопрос о приведении уравнения вида (16) к наиболее простому виду. Для этого рассмотрим замену переменных:

$$\mathbf{x} \to \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{18}$$

$$\mathbf{y} \to \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{19}$$

По правилу нахождения производной сложной функции:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{x}} \tag{20}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{y}} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{y}} + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{y}} \tag{21}$$

Далее

$$\mathbf{u_{xx} = (u_\xi \xi_x)_x + (u_\eta \eta_x)_x =}$$

$$= \boldsymbol{u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi\xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x + u_\eta\eta_{xx} =}$$

$$= \boldsymbol{u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}} \quad (22)$$

Аналогично,

$$\boldsymbol{u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y +}$$

$$\boldsymbol{+ u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}}$$

$$\boldsymbol{u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}}$$

Подставляем вычисленные значения производных в уравнение (16):

$$\boldsymbol{\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0} \quad (23)$$

Коэффициенты при старших производных имеют вид:

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \tag{24}$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \tag{25}$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \tag{26}$$

Очевидно, что наиболее простой вид рассматриваемое уравнение будет иметь, если $\tilde{a}_{11} = 0$ и $\tilde{a}_{22} = 0$.

Для того чтобы $\tilde{a}_{11} = 0$, необходимо, чтобы функция $\varphi(x, y)$ была решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \tag{27}$$

Для того чтобы $\tilde{a}_{22} = 0$, необходимо, чтобы функция $\psi(x, y)$ была решением уравнения (27).

Теорема. Для того чтобы функция $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяла уравнению (27), необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}} \tag{28}$$

было общим интегралом уравнения

$$\boxed{\mathbf{a}_{11}(\mathbf{dy})^2 - 2\mathbf{a}_{12}\mathbf{dxdy} + \mathbf{a}_{22}(\mathbf{dx})^2 = \mathbf{0}} \tag{29}$$

Докажем необходимость. Пусть функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (27). Тогда из (27) получаем:

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{30}$$

Из (28) находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \tag{31}$$

и подставляем в уравнение (30):

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0 \tag{32}$$

и отсюда получаем уравнение (29).

Докажем достаточность. Пусть $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (29), которое мы перепишем еще раз:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0$$

Отсюда получаем

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0.$$

Подставляя сюда (31), находим

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0$$

Отсюда,

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если $\xi = \varphi(x, y)$ и $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения

$$\boxed{a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0} \tag{33}$$

то коэффициент при $u_{\xi\xi} = 0$.

Если $\xi = \psi(x, y)$ и $\psi(x, y) = const$ есть другой независимый интеграл этого уравнения, то коэффициент при $u_{\eta\eta} = 0$.

Уравнение (33) называется характеристическим, а его интегралы – характеристиками.

Уравнение (33) распадается на два:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}} \tag{34}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}} \tag{35}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0 \tag{36}$$

$\surd\surd$ Если $\boxed{a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0}$, то уравнение (36) — уравнение гиперболического типа.

В этом случае правые части (34) и (35) действительны и различны. Получаем соответствующие общие интегралы $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$. Далее выполняем замену переменных

$$\xi=\varphi(x,y), \qquad \eta=\psi(x,y) \tag{37}$$

и разделив на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ получаем уравнение вида

$$\boxed{u_{\xi\eta}=G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)} \tag{38}$$

Полученное уравнение – каноническая форма уравнений гиперболического типа.

Далее выполним замену

$$\xi=\alpha+\beta$$
$$\eta=\alpha-\beta$$

или

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$$
$$\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

Т.е. $u = u(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$, вычисляем производные

$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{u_\alpha + u_\beta}{2}$$
$$u_\eta = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta = \frac{u_\alpha - u_\beta}{2}$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha}\alpha_\xi\alpha_\eta + u_{\alpha\beta}\alpha_\xi\beta_\eta + u_\alpha\alpha_{\xi\eta} +$$
$$+ u_{\beta\alpha}\beta_\xi\alpha_\eta + u_{\beta\beta}\beta_\xi\beta_\eta + u_\beta\beta_{\xi\eta} = \frac{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}}{4}$$

Подставляя в уравнение (38), получаем:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = G_1} \tag{39}$$

$\surd\surd$ Если $\boxed{a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0}$, то уравнение (36) — уравнение параболического типа.

В этом случае уравнения (34) и (35) совпадают:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

Соответственно, возникает только один общий интеграл

$$\varphi(x, y) = const.$$

Выбираем переменные следующим образом:

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \eta = \eta(x, y) \tag{40}$$

где функция $\eta(x, y)$ – любая независимая от φ. Рассмотрим коэффициент $\tilde{a}_{11}$. С учетом $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ находим

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0. \tag{41}$$

Тогда для $\tilde{a}_{12}$ имеем

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0 \quad (42)$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{12} = 0.$$

В результате мы получаем каноническую форму уравнения параболического типа:

$$\boxed{u_{\eta\eta} = \Phi}$$

$\surd\surd$ Если $\boxed{a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0}$, то уравнение (36) — уравнение эллиптического типа.

В этом случае правые части уравнений (34) и (35) комплексны. Если

$$\varphi(x, y) = C$$

– есть комплексный интеграл уравнения (34), то

$$\varphi^*(x, y) = C^*$$

– есть комплексный интеграл уравнения (35).

Если ввести новые переменные

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \eta = \varphi^*(x, y)$$

то уравнение эллиптического типа приводится к формально тому же виду, что и гиперболическое, но с комплексными переменными. Для того, чтобы перейти к действительным переменным, сделаем замену:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \qquad \beta = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$$

или

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \qquad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta)$$

Отсюда,

$$\xi = \alpha + i\beta \qquad \eta = \alpha - i\beta$$

□ Упражнение. Показать, что при такой замене

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}, \qquad \tilde{a}_{12} = 0.$$

В результате наше уравнение приводится к виду

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi}$$

Если из коэффициентов при старших производных составить матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix} \tag{43}$$

то знак детерминанта матрицы $\boldsymbol{A}$ будет определять тип уравнения:

$\mathbf{det}\boldsymbol{A} > \mathbf{0}$ – эллиптический;

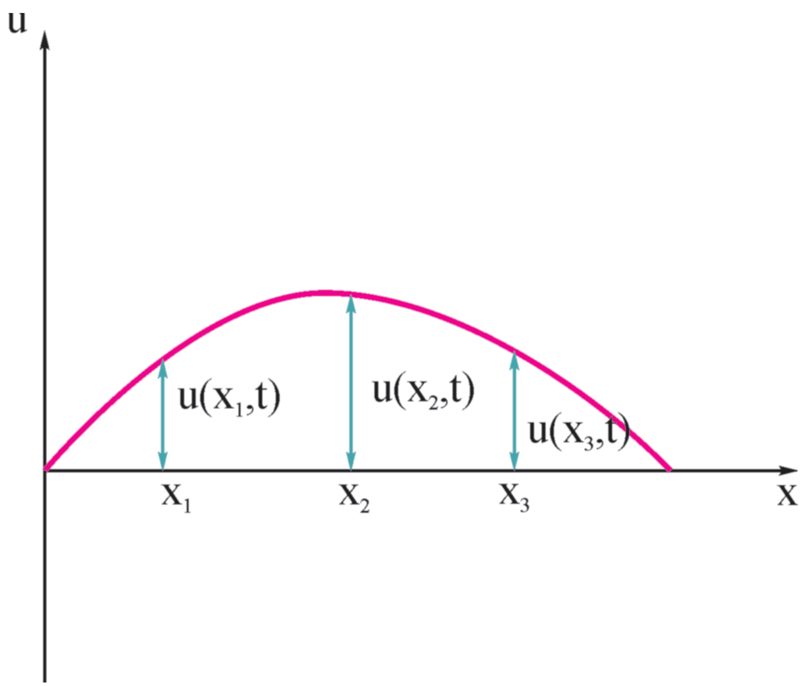
$\mathbf{det}\boldsymbol{A} < \mathbf{0}$ – гиперболический;

$\mathbf{det}\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ – параболический.

3 Уравнения гиперболического типа

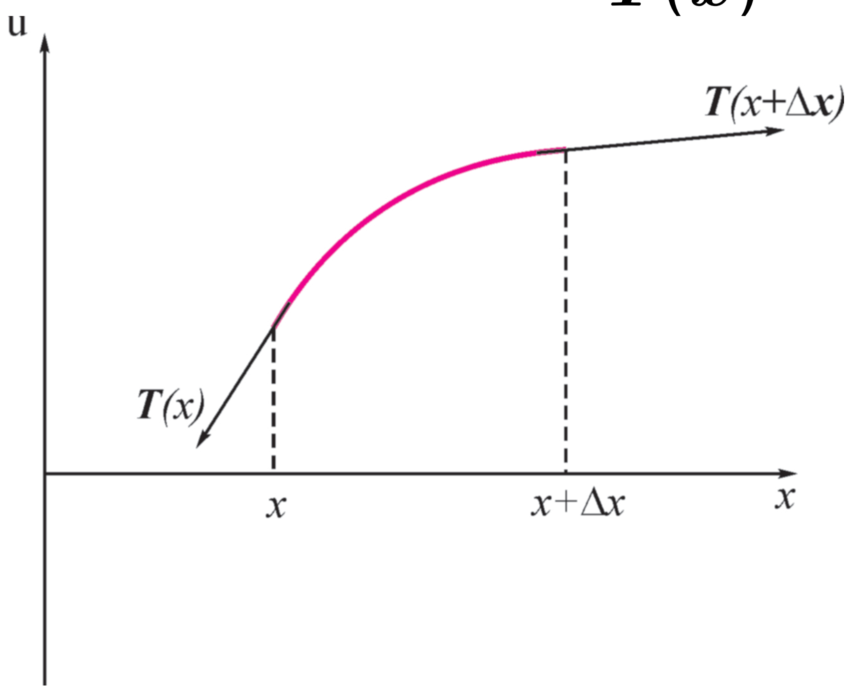
3.1 Основные задачи

3.1.1 Поперечные колебания струны



Рассмотрим струну, колеблющуюся в одной плоскости. Для описания процесса колебаний вводится функция $\boldsymbol{u(x,t)}$ – вертикальное смещение струны, так что $\boldsymbol{u = u(x,t)}$ – уравнение струны в данный момент. В нашей модели струна – гибкая упругая нить, что означает, что напряжения в струне всегда направлены по касательной к струне. Мы будем рассматривать малые колебания струны. В этом приближении можно показать, что сила натяжения струны не зависит от x и t, т.е.

$$T(x) = T_0 = const \tag{44}$$



Для получения уравнения малых колебаний струны составим ее уравнение движения. Рассмотрим элемент струны от x до $x + \Delta x$ и запишем для него уравнение движения в проекциях на вертикальную ось:

$$T \sin\alpha|_{x+\Delta x} - T \sin\alpha|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x u_{tt} \tag{45}$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, то можно пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с

$$\operatorname{tg}\alpha = u_x$$

В этом приближении

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = u_x$$

В результате уравнение движения может быть переписано в виде

$$T\frac{1}{\Delta x}(u_x(x+\Delta x) - u_x(x)) + F(x,t) = \rho(x)u_{tt} \tag{46}$$

При $\Delta x \to 0$ получаем

$$Tu_{xx} + F(x,t) = \rho(x)u_{tt} \tag{47}$$

Полученное уравнение – уравнение малых поперечных колебаний струны. В случае однородной струны $\rho = const$ его можно переписать в виде

$$\boxed{a^2u_{xx} + f(x,t) = u_{tt}} \tag{48}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$$

– плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получаем однородное уравнение

$$\boxed{a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0} \tag{49}$$

3.1.2 Продольные колебания стержня

Уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид:

$$\boxed{a^2 u_{xx} + f(x,t) = u_{tt}} \tag{50}$$

где

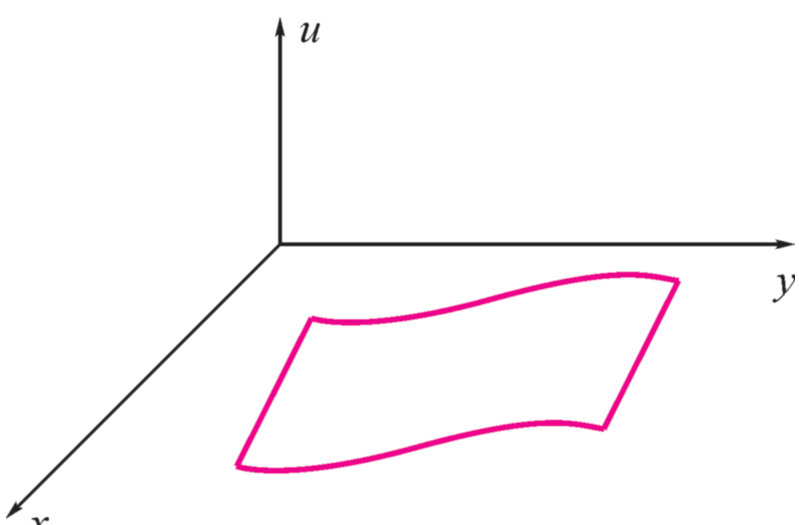
$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho}},$$

k – модуль Юнга стержня,

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}.$$

□ Упражнение. Получить уравнение (50).

3.1.3 Поперечные колебания мембраны



Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Мы будем рассматривать только поперечные колебания мембраны. Дифференциальное уравнение таких колебаний имеет вид

$$\boldsymbol{T_0(u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t) = \rho(x, y)u_{tt}} \tag{51}$$

Для однородной мембраны

$$\boxed{\boldsymbol{a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) = u_{tt}}} \tag{52}$$

где

$$\boldsymbol{a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}}$$

$$\boldsymbol{f(x, y, t) = \frac{F(x, y, t)}{\rho}}$$

3.2 Граничные и начальные условия

Постановка реальной физической задачи должна быть такова, чтобы ее решение было однозначным. Дифференциальные уравнения с частными производными (и с обыкновенными тоже!) имеют бесчисленное множество решений. Поэтому если физическая задача сводится к решению уравнения с частными производными необходимо сформулировать некоторые дополнительные условия.

В случае простейшей задачи о поперечных колебаниях струны дополнительные условия могут быть двух видов: начальные и краевые (граничные).

Начальные условия показывают в каком состоянии находилась струна в момент начала колебаний, например при $t = 0$. Начальное положение точек струны задается условием

$$\boxed{u|_{t=0} = f(x)} \tag{53}$$

начальная скорость

$$\boxed{u_t|_{t=0} = F(x)} \tag{54}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – заданные функции.

Краевые условия показывают, что происходит на концах струны во время колебаний. Если концы струны закреплены, то

$$\boxed{u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0} \tag{55}$$

Из физических соображений очевидно, что задание начальных и граничных условий полностью определяет процесс и описывающее его единственное решение.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то полную задачу можно заменить предельной задачей с начальными условиями для неограниченной области:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{u_t}\big|_{t=0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Эта задача называется задачей Коши.

3.3 Метод распространяющихся волн

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (56)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (57)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x).$$

Преобразуем наше уравнение к каноническому виду. Запишем характеристическое уравнение

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

Характеристическое уравнение распадается на два

$$dx - adt = 0 \quad dx + adt = 0$$

Интегралы

$$x - at = C_1 \quad x + at = C_2$$

Сделаем замену переменных по общим правилам

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

$$u_t(\xi(x,t),\eta(x,t)) = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi a - u_\eta a$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}a^2 - u_{\xi\eta}a^2 + u_{\eta\eta}a^2 - u_{\eta\xi}a^2$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$$

Подставляем

$$u_{\xi\xi}a^2 - u_{\xi\eta}a^2 + u_{\eta\eta}a^2 - u_{\eta\xi}a^2 - a^2u_{\xi\xi} - a^2u_{\eta\eta} - 2a^2u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Общее решение полученного уравнения мы уже находили (см. (9),(13)):

$$\boxed{u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)} \tag{58}$$

или

$$\boxed{u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)} \tag{59}$$

Теперь мы должны потребовать, чтобы решение (59) удовлетворяло начальным условиям:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \tag{60}$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \tag{61}$$

Проинтегрируем (61):

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C$$

В результате получаем систему для нахождения f_1 и f_2:

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \tag{62}$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C \tag{63}$$

Складывая и вычитая, находим:

$$\boldsymbol{f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz + \frac{C}{2}} \tag{64}$$

$$\boldsymbol{f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz - \frac{C}{2}} \tag{65}$$

Подставляем найденные $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ в (59):

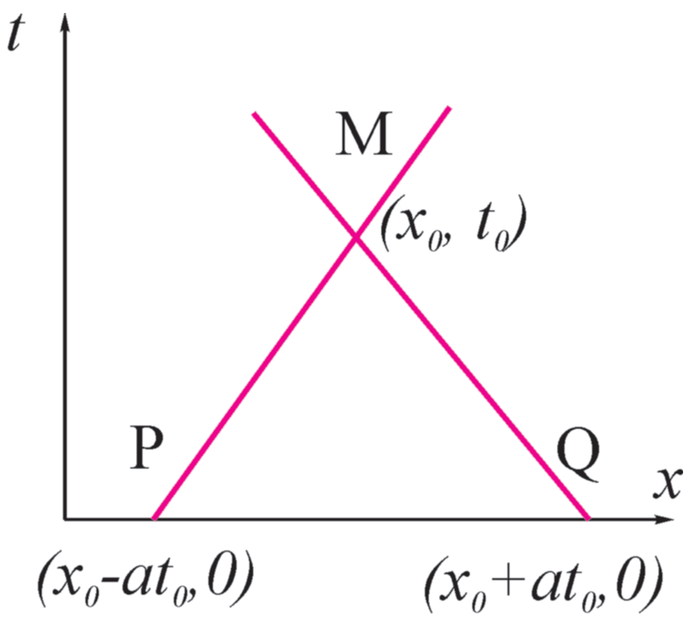
$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + {}} \\ \boldsymbol{{} + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz - \int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz\right]} \tag{66}$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz} \tag{67}$$

Формула (67) – формула Даламбера. Она была получена в предположении существования решения рассматриваемой задачи. Любое решение задачи Коши для бесконечной струны дается формулой Даламбера, что доказывает единственность решения. Сам метод вывода формулы Даламбера доказывает существование решения.

Полученное решение с физической точки зрения представляет собой процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Функция $f(x-at)$ представляет собой неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся в положительном направлении оси

x со скоростью a — распространяющаяся или бегущая волна; функция $f(x+at)$ – волна, бегущая в отрицательном направлении оси x. Таким образом, общее решение задачи Коши для бесконечной струны представляет собой суперпозицию двух волн, одна из которых распространяется направо со скоростью a, другая налево с той же скоростью.



Для исследования решения (67) удобно ввести плоскость состояний или фазовую плоскость (x, t). Рассмотрим фиксированную точку M (x_0, t_0) и проведем через нее характеристики $x - at = C_1 = x_0 - at_0$ и $x + at = C_2 = x_0 + at_0$. Очевидно, что эти характеристики пересекут ось x

в точках $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$. Найдем значение функции $u(x,t)$ в точке М:

$$u(x_0,t_0) = f_1(x_0 - at_0) + f_2(x_0 + at_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \tag{68}$$

Т.о., отклонение струны в точке М определяется начальным отклонением в вершинах характеристического треугольника PQM и значением начальной скорости на стороне PQ:

$$u(M) = \frac{1}{2}(\varphi(P) + \varphi(Q)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{PQ} \psi(z)\,dz \tag{69}$$

3.4 Метод разделения переменных

Метод разделения переменных носит также название метода Фурье и является наиболее распространенным методом решения уравнений с частными производными. Рассмотрим его на примере струны с закрепленными концами. Уравнение колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{70}$$

Граничные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{71}$$

Начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{72}$$

Будем искать решение в виде произведения функции зависящей только от x и только от t:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{73}$$

Подставляя (73) в (70) получаем

$$X''T = \frac{1}{a^2}T''X$$

Разделим левую и правую часть нашего равенства на произведение XT:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} \tag{74}$$

В (74) левая часть является функцией только x, правая часть – только t, причем оно должно выполняться во всей области значений переменных. Это возможно только в том случае если правая и левая часть равны некой константе:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda \tag{75}$$

В результате получаем ОДУ для нахождения неизвестных функций X и T:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{76}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{77}$$

Из граничных условий

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0$$

Таким образом для нахождения функции $X(x)$ мы получили задачу на собственные функции и собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля): найти значения параметра λ (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\boxed{X'' + \lambda X = 0} \tag{78}$$

$$\boxed{X(0) = X(l) = 0}$$

а также соответствующие им решения – собственные функции.

Рассмотрим возможные значения параметра λ.

1. $\lambda < 0$

В этом случае общее решение уравнения (78) ищем в виде:

$$X = Ce^{\alpha x}$$

Тогда:

$$X' = C\alpha e^{\alpha x}$$

$$X'' = C\alpha^2 e^{\alpha x}$$

Подставляем в (78):

$$C\alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda C e^{\alpha x} = 0$$

Отсюда

$$\alpha^2 + \lambda = 0$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$$

И в результате общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Из граничных условий

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = C_1 e^{\beta} + C_2 e^{-\beta} = 0$$

Из первого уравнения находим $C_1 = -C_2$, подставляем во второе

$$C_1(e^{\beta} - e^{-\beta}) = 0$$

Отсюда получаем $C_1 = 0$, тогда и $C_2 = 0$.

Таким образом, мы показали, что при $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений.

2. $\lambda = 0$. В этом случае тоже не возникает нетривиальных решений.

□ Упражнение. Доказать, что при $\lambda = 0$ рассматриваемая задача не имеет нетривиальных решений.

3. $\lambda > 0$. В этом случае общее решение имеет вид

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda} x + D_2 \sin\sqrt{\lambda} x$$

Из граничных условий находим

$$X(0) = D_1 = 0$$

$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0$$

Отсюда

$$\sin\sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$$

где n любое целое число.

Таким образом нетривиальные решения нашей задачи возможны лишь при значениях

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Таким образом, мы нашли собственные значения, им будут соответствовать собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Здесь D_n – произвольная постоянная. Найденным собственным значениям соответствуют решения уравнения для функции T:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \tag{79}$$

Здесь A_n и B_n – произвольные постоянные. Таким образом, мы нашли частные решения исходного уравнения колебаний струны:

$$u_n(x,t) = X_n(t) T_n(t) \tag{80}$$

или

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{81}$$

Очевидно, что сумма частных решений также будет удовлетворять исходному уравнению и граничным условиям:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{82}$$

Неизвестные константы надо определить из начальных условий:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x). \tag{83}$$

Т.е.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x) \tag{84}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l} a \sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x) \tag{85}$$

Формулы (84) и (85) представляют из себя разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье. Для нахождения неизвестных констант умножим левую и правую части уравнения (84) на $\sin\frac{\pi m}{l}x$ и проинтегрируем их по dx от 0 до l:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi m}{l}x\,dx = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx \tag{86}$$

Для вычисления интеграла в левой части последнего равенства воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi(n-m)}{l}x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi(n+m)}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)}\sin\frac{\pi(n-m)}{l}x\Big|_0^l - \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)}\sin\frac{\pi(n+m)}{l}x\Big|_0^l$$

$$= 0, \quad \text{если} \quad m \neq n.$$

$$= \frac{1}{2}l, \quad \text{если} \quad m = n.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx = \delta_{mn}\frac{l}{2} \tag{87}$$

Подставляя (87) в (86), получаем

$$\boldsymbol{A_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx} \tag{88}$$

Аналогично для $\boldsymbol{B_m}$ получаем

$$\boldsymbol{B_m = \frac{2}{\pi m a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx} \tag{89}$$

Физическая интерпретация решения

Перепишем функцию $u_n(x)$ в другом виде

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x = \\ = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n) \quad (90)$$

где

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \qquad \frac{\pi n}{l}a\gamma_n = -\mathrm{arctg}\frac{B_n}{A_n}$$

Таким образом, каждая определенная точка струны с координатой x_0 колеблется по закону

$$\boxed{u_n(x_0,t) = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x_0 \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n)} \qquad (91)$$

или

$$\boxed{z_n(t) = Z_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n)} \qquad (92)$$

где

$$\boxed{Z_n = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0}$$

– амплитуда колебаний. Т.е. все точки струны колеблются в одинаковой фазе, но с разными амплитудами. Такое движение струны представляет из себя стоячую волну. Точки, у которых амплитуда колебаний равна нулю называются узлами стоячей волны, точки у которых амплитуда максимальная – пучности стоячей волны. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi n}{l} a} \tag{93}$$

и носят название собственных частот колебаний струны.

Самая низкая частота $(n = 1)$ или самый низкий тон называется основным тоном струны:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_1 = \frac{\pi}{l} a}}, \tag{94}$$

остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются обертонами.

Вынужденные колебания струны

Метод разделения переменных позволяет решить задачу о вынужденных колебаниях струны, уравнение которых имеет вид:

$$a^2 u_{xx} + f(x,t) = u_{tt} \tag{95}$$

Начальные и краевые условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{96}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{97}$$

Будем искать решение в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

При этом функция $v(x,t)$ будет решением однородного уравнения

$$a^2 v_{xx} = v_{tt}$$

с начальными и краевыми условиями

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0 \tag{98}$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad v_t(x,0)=\psi(x). \tag{99}$$

а функция $w(x,t)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$a^2 w_{xx}+f(x,t)=w_{tt} \tag{100}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$w(0,t)=w(l,t)=0$$

$$w(x,0)=w_t(x,0)=0$$

Функция $v(x,t)$ описывает свободные колебания струны, происходящие вследствие начального возмущения, $w(x,t)$ – вынужденные колебания без начальных возмущений. Решение $v(x,t)$ нам уже известно. $w(x,t)$ будем искать в виде ряда по собственным функциям однородной задачи:

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x} \qquad (101)$$

Очевидно, что при таком выборе решения граничные условия удовлетворяются автоматически. Для того, чтобы удовлетворить начальным условиям, надо потребовать

$$\gamma_k(0) = \gamma_k'(0) = 0$$

Перепишем уравнение (100) в виде

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t) \qquad (102)$$

и подставляя сюда (101) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma''(t) + \frac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2} \gamma_k(t) \right] \sin \frac{\pi k}{l} x = f(x,t) \qquad (103)$$

Разлагая функцию $f(x,t)$ в ряд по той же системе функций, получим

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x \tag{104}$$

где

$$\beta_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx \tag{105}$$

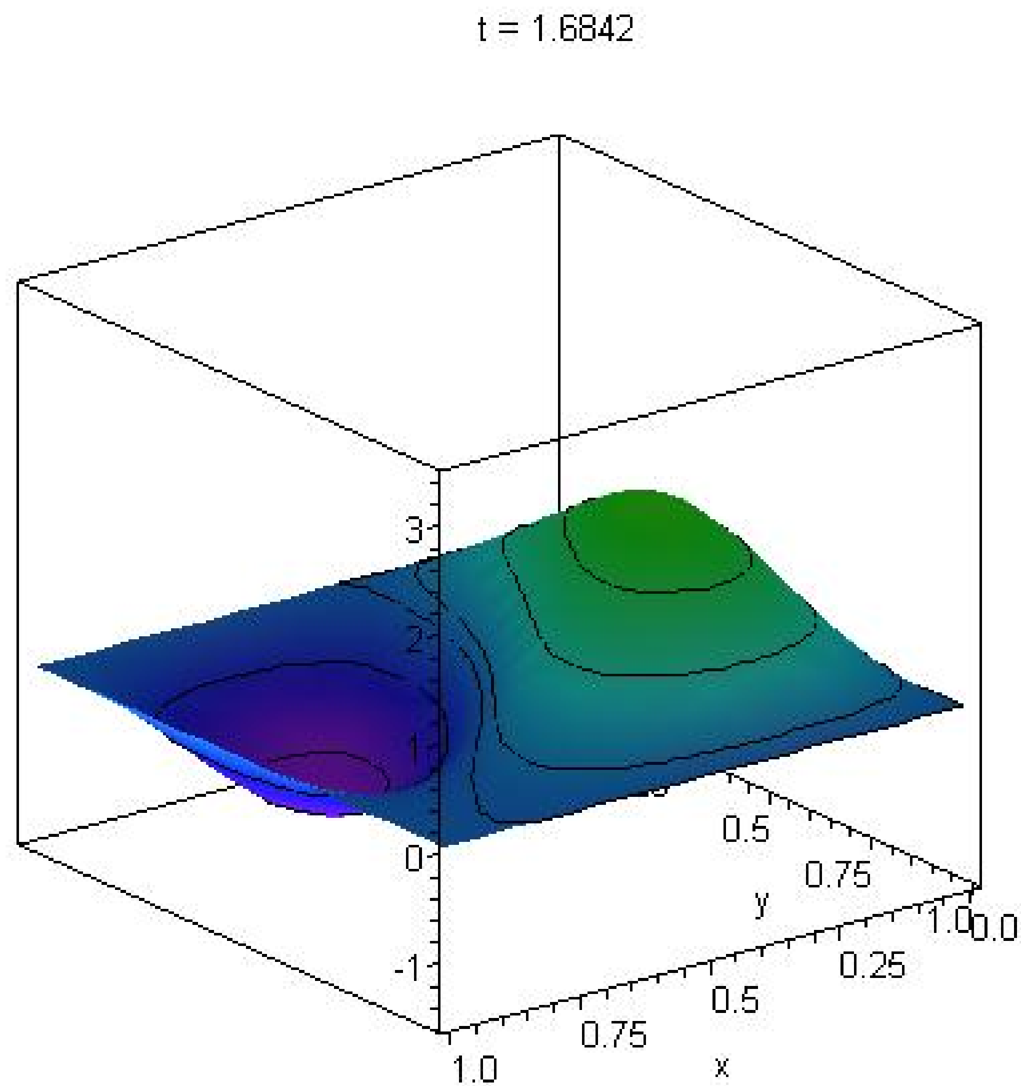
Подставляя (104) в (102) и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях получим обыкновенные дифференциальные уравнения для нахождения неизвестных функций $\gamma_k(t)$:

$$\gamma_k''(t) + \frac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2} \gamma_k(t) = \beta_k(t) \tag{106}$$

Общее решение этого неоднородного уравнения представляется в виде сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\boxed{\gamma_k(t) = A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t + \gamma_k^{\text{но}}(t)} \qquad (107)$$

3.5 Колебания прямоугольной мембраны



Рассмотрим мембрану, имеющую в состоянии покоя форму прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$. Уравнение колебаний мембраны

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \tag{108}$$

начальные условия

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \tag{109}$$
$$u_t(x, y, 0) = F(x, y), \tag{110}$$

граничные условия

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(l, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, m, t) = \tag{111}$$

Будем решать задачу методом Фурье. Для этого будем искать решение в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \tag{112}$$

Из граничных условий (111) следует

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \tag{113}$$

Подставляя (112) в (108), получим

$$XYT'' = a^2(X''YT + XY''T).$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Анализируя последнее равенство, заключаем

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2, \quad \frac{T''}{T} = -(\lambda^2 + \mu^2) \tag{114}$$

В результате, для функции $X(x)$ получаем

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{115}$$

для функции $Y(y)$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0, \tag{116}$$

для функции $T(t)$

$$T'' + a^2(\lambda^2 + \mu^2)T = 0. \tag{117}$$

Решение (115) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \tag{118}$$

решение (3.5) имеет вид

$$Y(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y. \tag{119}$$

Из краевого условия $X(0) = X(l) = 0$ находим $\mathrm{C}_1 = 0$ и

$$\lambda l = \pi k, \quad \text{где } k \text{ – целое число.}$$

Аналогично, из $Y(0) = Y(m) = 0$ находим $D_1 = 0$ и

$$\mu m = \pi n, \quad \text{где } n \text{ – целое число.}$$

В результате получаем собственные числа и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \qquad X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{120}$$

$$\mu_n = \frac{\pi n}{m}, \qquad Y_n(y) = \sin\frac{\pi n y}{m}. \tag{121}$$

Уравнение для функции $T(t)$ принимает вид:

$$T'' + \pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right) T(t) = 0. \tag{122}$$

Решение этого уравнения, зависящее от двух параметров k и n, имеет вид:

$$T_{kn}(t) = a_{kn}\cos\omega_{kn}t + b_{kn}\sin\omega_{kn}t. \tag{123}$$

Здесь

$$\boxed{\omega_{kn} = \pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}} \tag{124}$$

– собственные частоты колебаний мембраны.

Таким образом, частное решение уравнения колебаний прямоугольной мембраны имеет вид

$$u_{kn}(x, y, t) = (a_{kn} \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \sin \omega_{kn} t) \sin \lambda_k x \sin \mu_n y \tag{125}$$

Оно может быть приведено к виду

$$u_{kn}(x, y, t) = F_{kn} \sin(\omega_{kn} t + \varphi_{kn}) \sin \lambda_k x \sin \mu_n y, \tag{126}$$

где

$$F_{kn} = \sqrt{a_{kn}^2 + b_{kn}^2}, \quad \mathrm{tg} \varphi_{kn} = \frac{a_{kn}}{b_{kn}}.$$

Отсюда видно, что каждая точка мембраны с координатами (x, y) совершает простое гармоническое колебание с частотой ω_{kn} и амплитудой $F_{kn} \sin \lambda_k x \sin \mu_n y$. Все точки колеблются в одной фазе. Точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\sin \lambda_k x = 1, \quad \sin \mu_n y = 1$$

будут колебаться с наибольшей амплитудой называются пучностями. Линии, точки которых не колеблются (амплитуда равна нулю), называются узловыми линиями.

Общее решение нашей задачи о колебаниях мембраны представляется как сумма частных

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{kn}\cos\omega_{kn}t + b_{kn}\sin\omega_{kn}t)\sin\lambda_k x\sin\mu} \tag{127}$$

Неизвестные коэффициенты a и b ищутся из начальных условий:

$$u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi n}{m}y = f(x,y) \tag{128}$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{kn}b_{kn}\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi n}{m}y=F(x,y) \tag{129}$$

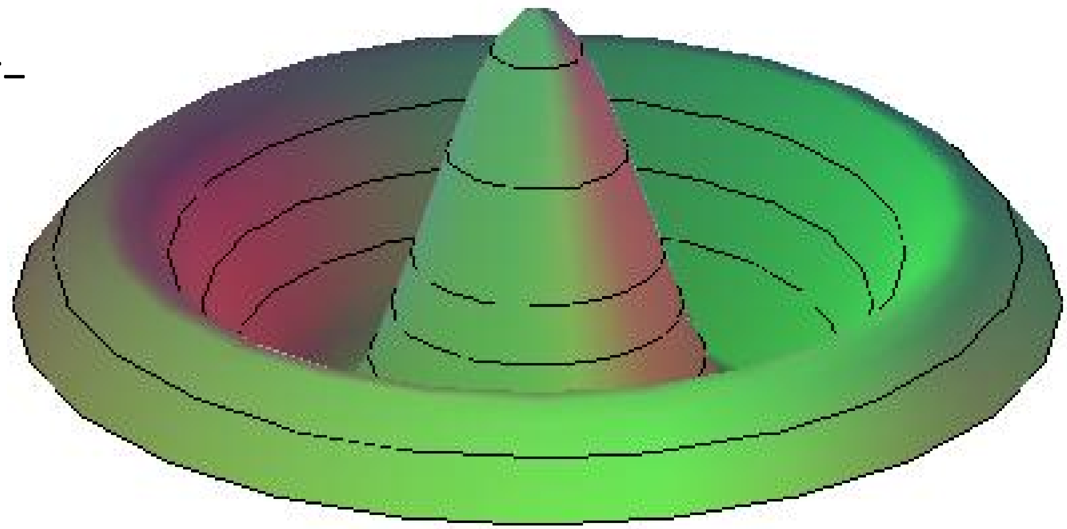
Формулы (128) и (129) представляют собой разложение функции двух переменных в двойной ряд Фурье. Коэффициенты этого разложения находятся аналогично коэффициентам однократного ряда и имеют вид

$$a_{kn}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi n}{m}y\,dxdy \tag{130}$$

$$b_{kn}=\frac{4}{lm\omega_{kn}}\int_0^l\int_0^m F(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi n}{m}y\,dxdy \tag{131}$$

3.6 Колебания круглой мембраны

Применим метод решения задачи о колебаниях прямоугольной мембраны к колебаниям круглой мембраны. Пусть мембрана в состоянии покоя занимает круг радиуса R с центром в начале координат. Введем полярные координаты r и φ:



$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Выполняя замену переменных $u(x, y, t) \to u(r, \varphi, t)$ уравнение колебаний мембраны приводится к виду

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right). \tag{132}$$

Граничное условие будет иметь вид

$$u(R, \varphi, t) = 0$$

начальные условия

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi),$$

$$u_t(r, \varphi, 0) = F(r, \varphi).$$

Будем рассматривать только осесимметричные колебания мембраны, т.е. начальные условия не должны зависеть от угла φ. Очевидно, что и в любой момент времени скорости и отклонения точек не будут зависеть от угла, поэтому наша задача упрощается:

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \tag{133}$$

граничные условия

$$u(R, t) = 0$$

начальные условия

$$u(r, 0) = f(r),$$
$$u_t(r, 0) = F(r).$$

Будем искать решение в виде

$$u(r, t) = U(r)T(t). \tag{134}$$

Из краевого условия сразу находим

$$U(R) = 0.$$

Подставляя (134) в уравнение, получаем

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{U'' + U'/r}{U} = -\lambda^2 \tag{135}$$

В результате приходим к уравнениям

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \tag{136}$$

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \lambda^2 U = 0. \tag{137}$$

В последнем уравнении сделаем замену $\xi = \lambda r$:

$$U' = \frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dr} = \lambda\frac{dU}{d\xi}$$

$$U'' = \frac{dU'}{dr} = \frac{dU'}{d\xi}\frac{d\xi}{dr} = \lambda\frac{dU'}{d\xi} = \lambda^2\frac{d^2U}{d\xi^2}$$

Подставляя в наше уравнение, получаем

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + U = 0. \tag{138}$$

Получившееся уравнение является частным случаем уравнения Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{139}$$

Решениями последнего уравнения при заданном k называются бесселевыми функциями порядка k (цилиндрическими функциями).

Найдем решение уравнения (139). Очевидно, что оно имеет особую точку при $x = 0$, поэтому его решение будем искать в виде степенного ряда. Для этого преобразуем его к виду:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0 \tag{140}$$

Записываем ряд:

$$y(x) = x^\gamma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_lx^l + ...) \tag{141}$$

Подставляя (141) в (140) и приравнивая коэффициенты при каждой степени x нулю, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0(\gamma^2 - k^2) &= 0, \\ a_1[(\gamma+1)^2 - k^2] &= 0, \\ a_2[(\gamma+2)^2 - k^2] + a_0 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_l[(\gamma+l)^2 - k^2] + a_{l-2} &= 0 \\ \text{где} \quad l &= 2, 3\ldots. \end{aligned} \tag{142}$$

Предполагая, что $a_0 \neq 0$, находим

$$\gamma^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm k$$

Из второго уравнения (142) находим, что $a_1 = 0$. Преобразуем l-е уравнение в системе (142)

$$(\gamma + l + k)(\gamma + l - k)a_l + a_{l-2} = 0 \tag{143}$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу:

$$a_l = -\frac{a_{l-2}}{(\gamma + l + k)(\gamma + l - k)} \tag{144}$$

С учетом найденного $a_1 = 0$ делаем вывод, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Очевидно, что при $\gamma = -k$ решение обращается в бесконечность при $x = 0$. Будем рассматривать случай $\gamma = k$. В результате, для четных коэффициентов получаем

$$a_{2m} = -a_{2m-2}\frac{1}{2^2 m(m+k)} \tag{145}$$

Применяя эту формулу $m-1$ раз, получим

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(k+1)(k+2)(k+3)...(k+m)} \tag{146}$$

Полагая,

$$a_0 = \frac{1}{2^k k!}$$

получаем

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+k} m!(m+k)!} \tag{147}$$

В результате, полученное решение $y(x) \equiv J_k(x)$ называется функцией Бесселя первого рода k-го порядка и имеет вид

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}. \qquad (148)$$

В случае $\gamma = -k$, получаем

$$J_{-k}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(m-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-k}. \qquad (149)$$

Делая замену $m = k + n$, $n = 0, 1, 2...$, получаем

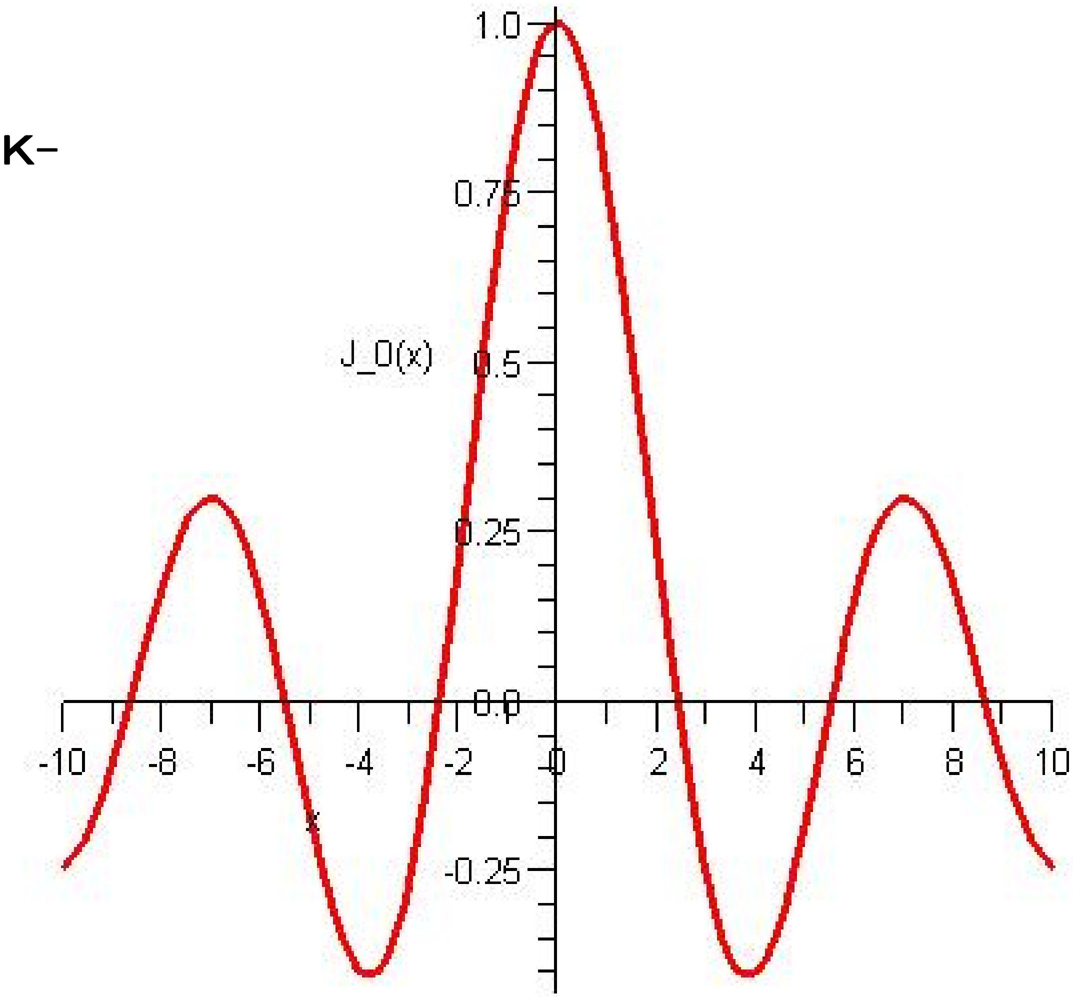
$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{1}{(k+n)!(n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} = (-1)^k J_k(x) \qquad (150)$$

$J_{-k}(x)$ представляет собой другое, линейно независимое от $J_k(x)$, решение, только в случае нецелых k.

В случае же целых k как видно они линейно зависимы. Наиболее часто встречаются в приложениях функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков.

В случае круглой мембраны решением уравнения (137) является функция Бесселя первого рода нулевого порядка

$$U(\xi) = U(\lambda r) = J_0(\lambda r)$$



Из граничного условия $u(R, t) = 0$ получаем $U(R) = 0$, отсюда находим собственные числа задачи

$$J_0(\lambda R) = 0$$

которыми будут являться величины

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, \tag{151}$$

где μ_k – нули функции Бесселя - корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Теперь решаем уравнения для функции T:

$$T_k(t) = a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at \tag{152}$$

и, наконец, получаем собственные функции

$$u_k(r,t) = (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r) \tag{153}$$

Сумма собственных функций

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r)} \tag{154}$$

Коэффициенты a_k и b_k подбираем так, чтобы удовлетворить начальным условиям

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0 \left(\mu_k \frac{r}{R} \right) = f(r)$$

$$u_t(r,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_k}{R}b_kJ_0\left(\mu_k\frac{r}{R}\right)=F(r)$$

В последних равенствах сделаем замену переменных $x=r/R$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0\left(\mu_kx\right)=f(Rx) \tag{155}$$

$$\frac{a}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kb_kJ_0\left(\mu_kx\right)=F(Rx) \tag{156}$$

Для нахождения коэффициентов a_k и b_k надо использовать условие ортогональности функций $J_0(\mu_kx)$:

$$\int\limits_0^1 xJ_0(\mu_kx)J_0(\mu_nx)\,dx=\delta_{kn}\frac{1}{2}J_0'^2(\mu_k). \tag{157}$$

а также соотношение

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{158}$$

С учетом этого находим

$$\boxed{a_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^1 x J_0(\mu_k x) f(Rx)\, dx,}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2R}{a\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^1 x J_0(\mu_k x) F(Rx)\, dx}$$

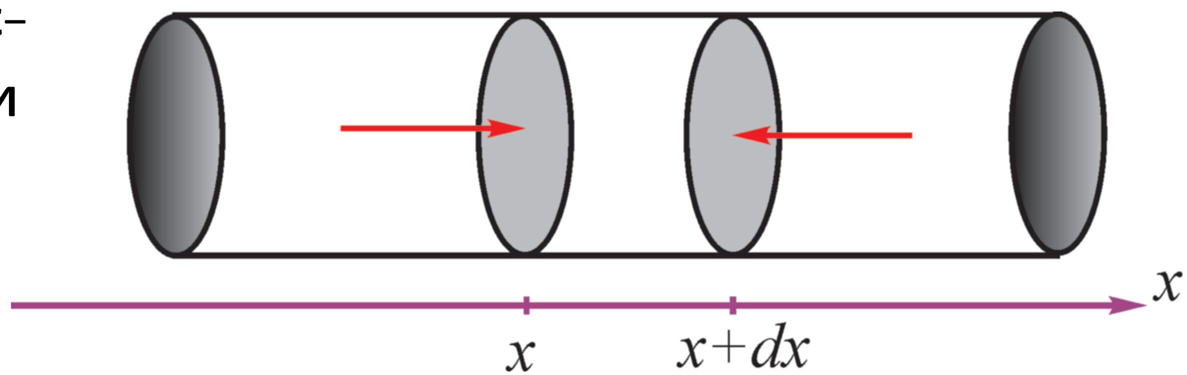
4 Уравнения параболического типа

4.1 Основные задачи

4.1.1 Линейная задача о распространении тепла

Рассмотрим однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована, т.е. через боковую поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой. Если стержень в начальный момент неравномерно нагрет, то вследствие теплопроводности в нем будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Если не будет притока тепла извне, т.е. торцы будут тоже теплоизолированы, то в конечном итоге температура станет одинаковой у всех точек стержня. Если же может происходить теплообмен с окружающей средой через торцы, или тепло будет выделяться в каких-то областях самого стержня, то распределение температуры станет значительной сложнее.

Мы будем рассматривать линейную задачу о распространении тепла, поэтому стержень будем считать настолько тонким, что в каждый момент времени температуры всех точек в одном поперечном сечении будут одинаковы.



Пусть стержень располагается вдоль оси x, тогда $u(x,t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t. Производная

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

будет определять скорость изменения температуры вдоль оси x.

Сформулируем основные физические закономерности, на которые мы будем опираться при выводе уравнения теплопроводности.

Количество тепла Q_1, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$Q = c\rho V\Delta u,$$

где c – удельная теплоемкость тела, ρ – плотность тела, V – объем тела.

Количество тепла Q, протекающего через поперечное сечение стержня за время Δt, пропорционально площади сечения, скорости изменения температуры в направлении, перпендикулярном сечению, и времени Δt:

$$Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности.

Рассмотрим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с координатами x и $x + \Delta x$. Запишем для него уравнение теплового баланса. Количество тепла, проходящее через левое поперечное сечение:

$$Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$$

Для нахождения тепла, проходящего через правое поперечное сечение, заметим, что с точностью до бесконечно малых высших порядков,

$$f(x + \Delta x, t) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

или если положить $f(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Тогда находим

$$Q_2 = -kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t$$

Количество теплоты, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2$$

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t$$

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t$$

С другой стороны,

$$\Delta Q = \mathrm{c}\rho S \Delta x \Delta u = \mathrm{c}\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

Приравнивая выражения для ΔQ, находим

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{159}$$

Введем обозначение

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

получаем уравнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{160}$$

Здесь

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}}$$

– коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим теперь случай наличия тепловых источников. Введем $F(x,t)$ – плотность тепловых источников – количество теплоты, выделяющееся (или поглощающееся) в единицу времени на единице длины. Тогда вместо уравнения (159) получим

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S}F(x,t) \tag{161}$$

Отсюда,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)} \tag{162}$$

где

$$\boxed{g(x,t) = \frac{1}{c\rho S}F(x,t)}$$

4.1.2 Начальные и краевые условия

Начальное условие – задание температуры во всех точках стержня в начальный момент:

$$\boxed{u(x,0) = f(x)}$$

Краевые условия – условия в тех точках стержня, где возможен теплообмен с окружающей средой – на торцевых сечениях стержня. Простейшие краевые условия – концы стержня поддерживаются при постоянной температуре:

$$\boxed{u(0,t) = \tilde{u}_0, \qquad u(l,t) = \tilde{u}_l}$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_l$ – заданные числа.

В более общем случае на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона:
поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды, т.е. равен

$$h(u - \tilde{u})$$

где u – температура конца стержня, $\tilde{u}$ – температура окружающей среды, h – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств стержня и среды и называемый коэффициентом теплообмена, причем $h > 0$, если тепло уходит из стержня в окружающую среду.

Тепловой поток, проходящий через правое торцевое сечение в результате теплопроводности равен

$$-kS\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$$

через левое торцевое сечение

$$kS\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

С учетом закона сохранения энергии получаем для правого торцевого сечения

$$\boxed{-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = h_l[u(l,t) - \tilde{u}_l(t)]} \tag{163}$$

для левого торцевого сечения

$$\boxed{k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h_0[u(0,t) - \tilde{u}_0(t)]} \tag{164}$$

где $\tilde{u}_0(t)$ и $\tilde{u}_l(t)$ – заданные температуры внешней среды.

Таким образом, задача теплопроводности для однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью без тепловых источников сводится к отысканию температуры $u = u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{165}$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x), \tag{166}$$

краевым условиям

$$k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h_0[u(0,t) - \tilde{u}_0(t)], \tag{167}$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = h_l[u(l,t) - \tilde{u}_l(t)]. \tag{168}$$

4.1.3 Пространственная задача теплопроводности

Будем рассматривать неравномерно нагретое тело, температура которого в каждой точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. В любой момент времени t функция u определяет скалярное поле – поле температуры, которое, очевидно, является нестационарным. В фиксированный момент времени t совокупность точек, в которых

$$u(x, y, z, t) = const$$

образует изотермическую поверхность. Форма и расположение изотермических поверхностей будет со временем меняться.

Направление наибольшей скорости изменения температуры u совпадает с направлением градиента функции $u(x, y, z, t)$ при фиксированном значении t:

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

Во всех точках изотермической поверхности градиент направлен по нормали к этой поверхности в сторону увеличения значений u и модуль градиента равен производной по этому направлению

$$|\mathrm{grad}\,\mathbf{u}| = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Величина теплового потока через малый участок $\Delta\sigma$ изотермической поверхности за время Δt равна

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta\sigma\Delta t$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности.

Последняя формула справедлива для любых поверхностей. Производная по любому направлению, заданному единичным вектором нормали к произвольной поверхности n может быть записана как

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{grad\,u} \cdot \mathbf{n}$$

Тогда поток тепла через участок $\Delta\sigma$ любой поверхности за время Δt будет равен

$$\Delta Q = -k(\mathbf{grad\,u} \cdot \mathbf{n})\Delta\sigma\Delta t$$

Если ввести вектор теплового потока

$$\mathbf{A} = -k\,\mathbf{grad\,u}$$

то

$$\Delta Q = A_n \Delta\sigma\Delta t$$

Если рассмотреть поток через замкнутую поверхность, то

$$Q = \Delta t \oint_S A_n d\sigma$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса, получаем

$$\oint\limits_{S} \boldsymbol{A_n d\sigma} = \int_{\boldsymbol{V}} \mathbf{div}\boldsymbol{A dv}$$

где $\boldsymbol{V}$ – часть тела, ограниченная поверхностью $\boldsymbol{S}$.

$$\mathbf{div}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{k}\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{k\Delta u}$$

где

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial x^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial y^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial z^2}}$$

– оператор Лапласа.

Тогда

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Delta t} \oint\limits_{S} \boldsymbol{A_n d\sigma} = \boldsymbol{\Delta t} \int_{\boldsymbol{V}} \mathbf{div}\boldsymbol{A dv} = -\boldsymbol{\Delta t} \int_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{k\Delta u}\,\boldsymbol{dv}$$

и количество тепла $\boldsymbol{Q_1}$, приобретенное выделенной частью тела за счет прохождения теплового потока, равно

$$Q_1 = -Q = \Delta t \int_V k \Delta u \, dv$$

Если в теле имеются тепловые источники, плотность которых $F(x, y, z, t)$, то в выделенной части тела за время Δt выделится тепло

$$Q_2 = \Delta t \int\limits_V F(x, y, z, t) \, dv$$

Таким образом, количество тепла, сообщенное выделенному объему,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

но оно может быть записано как

$$Q_3 = \int\limits_V c\rho dv \Delta u = \int\limits_V c\rho dv \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \Delta t \int\limits_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv$$

В результате

$$\int\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv = \int\limits_V k\Delta u\,dv + \int\limits_V F(x,y,z,t)\,dv \tag{169}$$

или

$$\int\limits_V \left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F(x,y,z,t)\right)\,dv = 0 \tag{170}$$

Следовательно,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F = 0 \tag{171}$$

или

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + \frac{1}{c\rho}F} \tag{172}$$

где

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}}$$

В результате мы получили основное уравнение теплопроводности.

4.1.4 Начальные и краевые условия

Начальное условие – задание распределения температур во всех точках тела в начальный момент времени

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \tag{173}$$

Краевое условие задается на поверхности G, ограничивающей тело. Поток тепла изнутри тела через любую часть поверхности тела G пропорционален перепаду температур на этой части границы:

$$A_n = h(u - \tilde{u}), \tag{174}$$

где $\tilde{u}$ – температура окружающей среды в граничащих с телом точках (G), h – коэффициент теплообмена. С учетом выражения

$$A_n = -k(\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{n}) = -k\frac{\partial u}{\partial n},$$

получаем

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_G = h(u\big|_G - \tilde{u}) \tag{175}$$

В частных случаях краевое условие упрощается. Например, $h = 0$, что соответствует теплоизолированной границе

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_G = 0$$

Другой частный случай $h \to \infty$, т.е. коэффициент внешней теплопроводности очень большой. Получаем

$$u\big|_G = \tilde{u} \tag{176}$$

что означает, что на границе тело имеет температуру внешней среды.

4.1.5 Задачи диффузии

В задачах диффузии находится неизвестная функция – концентрация диффундирующего вещества, обозначаемая

$$c = c(x, y, z, t)$$

Процесс диффузии аналогичен теплопроводности, поэтому уравнение диффузии будет иметь вид

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c} \qquad (177)$$

Здесь D – коэффициент диффузии.

Начальные условия –

$$c(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

мы задаем начальную концентрацию. Краевые усло-

вия
$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_G = 0$$
соответствует тому, что граница G непроницаема для диффундирующего вещества,
$$c\big|_G = 0$$
– концентрация на границе.

4.2 Решение задачи о теплопроводности в бесконечном стержне методом Фурье

Будем рассматривать тонкий длинный теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Уравнение теплопроводности для него имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{178}$$

В случае если стержень очень длинный, то на процессы в средней его части условия на границе не будут сказываться в течение конечного времени. В таких задачах стержень считается бесконечным. В результате мы будем иметь только начальное условие

$$u(x, 0) = f(x) \tag{179}$$

что соответствует задаче Коши.

Сделаем замену переменных
$$\tau = a^2 t$$
тогда
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = a^2\frac{\partial u}{\partial \tau}$$
и наше уравнение принимает вид
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{180}$$
начальное условие
$$u(x, 0) = f(x).$$
Будем искать решение в виде
$$u(x, \tau) = X(x)T(\tau),$$
подставляя его в (180), получаем
$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

или

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{181}$$

Так как левая часть этого уравнение зависит только от τ, а правая – только от x, то мы можем сделать вывод, что равенство возможно только в том случае, если и левая и правая части равны одной и той же константе:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \beta, \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \beta. \tag{182}$$

В результате для $\mathrm{T}(\tau)$ получаем

$$T(\tau) = Ce^{\beta\tau}.$$

Так как температура стержня должна оставаться конечной при $t \to \infty$, то должно быть $\beta < 0$, т.е. мы можем положить

$$\beta = -\lambda^2.$$

и
$$T(\tau) = e^{-\lambda^2\tau}.$$
Уравнение для $X(x)$ принимает вид
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$
и его общее решение
$$X(x) = D\cos\lambda x + E\sin\lambda x.$$
Тогда частное решение уравнения (180) запишется в виде
$$u(x,\tau) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau} \tag{183}$$
В общем случае в (183) $A = A(\lambda)$, $B = B(\lambda)$ и семейство частных решений уравнения (180) имеет вид
$$u_\lambda(x,\tau) = (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}, \quad -\infty < \lambda < \infty \tag{184}$$

Общее решение уравнения (180) записывается как суперпозиция частных

$$u(x,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x,\tau)\,d\lambda$$

или

$$u(x,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}\,d\lambda \quad (185)$$

Неизвестные функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ подбираются так, чтобы удовлетворить начальному условию:

$$u(x,0) = f(x)$$

которое примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, d\lambda = f(x) \tag{186}$$

Равенство (186) представляет собой разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье, которое в общем случае имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\, d\xi \tag{187}$$

или с учетом

$$\cos\lambda(\xi - x) = \cos\lambda\xi\cos\lambda x + \sin\lambda\xi\sin\lambda x \tag{188}$$

получаем

$$\boldsymbol{f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi \right) \cos \lambda x + \right.}$$

$$\boldsymbol{\left. + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda} \quad (189)$$

Сравнивая (186) и (189), находим

$$\boldsymbol{A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi,}$$

$$\boldsymbol{B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi.} \quad (190)$$

Подставляя (190) в (185) получаем

$$\boxed{u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)e^{-\lambda^2\tau}\,d\xi} \tag{191}$$

Т.о. мы получили решение задачи о теплопроводности в бесконечном стержне. Для его физической интерпретации, необходимо провести следующие преобразования. Сначала изменим порядок интегрирования:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda\right\}d\xi \tag{192}$$

Преобразуем внутренний интеграл в (192). Для этого сделаем замену переменной $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}}$, введем обозначение $\boldsymbol{\frac{x-\xi}{\sqrt{\tau}} = \omega}$, и в результате получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos\sigma\omega\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}} I(\omega)$$

Для вычисления

$$I(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos\sigma\omega\, d\sigma$$

найдем его производную

$$I'(\omega) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \sigma \sin\sigma\omega\, d\sigma$$

и выполним интегрирование по частям

$$I'(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \sigma \sin \sigma\omega \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sin \sigma\omega \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma\omega \, d\sigma = -\frac{1}{2}\omega I(\omega)$$

Т.о., для функции $I(\omega)$ получаем дифференциальное уравнение

$$I'(\omega) = -\frac{1}{2}\omega I(\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{I'(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{\omega}{2}$$

Отсюда находим

$$\ln I(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + \ln C$$

$$I(\omega) = Ce^{-\omega^2/4}$$

Т.к.,

$$I(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma = \sqrt{\pi}$$

(интеграл Пуассона), то

$$I(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$$

и возвращаясь к старым переменным находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}}I(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\tau}}$$

Окончательно получаем

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4\tau}}\,d\xi \qquad (193)$$

□ Упражнение. Проверить, что (193) удовлетворяет уравнению (180) и соответствующему начальному условию.

Далее необходимо вернуться к исходной переменной t: $\tau = a^2 t$ и, подставляя в (193), получим

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi} \qquad (194)$$

Можно проверить, что функция

$$\boxed{G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}} \qquad (195)$$

также является решением исходного уравнения и ее называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Физическим тепловым импульсом называется начальное распределение температуры

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0, & |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0, & |x - x_0| > \varepsilon. \end{cases} \tag{196}$$

В этом случае решение задачи будет иметь вид

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi \tag{197}$$

и по теореме о среднем оно может быть записано следующим образом

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon u_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\dfrac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2 t}} \tag{198}$$

Точечный тепловой импульс соответствует $\varepsilon \to 0$.

Количество теплоты, переданное стержню, пропорционально произведению

$$2\varepsilon u_0$$

и при $\varepsilon \to 0$ должно оставаться конечным. Полагая

$$2\varepsilon u_0 = 1$$

получаем, что $u_0 \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Т.о., точечный тепловой импульс может быть записан в виде δ-функции Дирака:

$$f(x) = \delta(x - x_0).$$

Подставляя записанное в таком виде начальное условие в (194), получаем решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\dfrac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}, \tag{199}$$

которое есть фундаментальное решение $G(x, \xi, t)$ при $\xi = x_0$. Т.о., мы можем утверждать, что функция

$$\boxed{G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - t_0)}} e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},} \tag{200}$$

дает температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t = t_0$ в точке ξ возникает точечный тепловой импульс. Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ носит название функции влияния точечного источника для неограниченной области или функции Грина, с ее помощью решение задачи записывается в виде:

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) G(x, \xi, t)\, d\xi \tag{201}$$

4.3 Решение задачи о теплопроводности для конечного отрезка

Рассмотрим задачу о теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t), \qquad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{202}$$

Начальное условие

$$u(x,0) = f(x) \tag{203}$$

и однородные граничные условия

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0. \tag{204}$$

4.3.1 Однородная задача

Рассмотрим сначала однородную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{205}$$

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{206}$$

В результате получаем два обыкновенных ДУ:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{207}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{208}$$

Из граничных условий для u получаем граничные условия для X:

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0.$$

В результате для функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма-Лиувилля):

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{209}$$

Ранее было показано, что собственные значения этой задачи

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tag{210}$$

соответствующие собственным функциям

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{211}$$

Далее находим функцию $T(t)$:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \tag{212}$$

Таким образом, мы нашли частные решения однородной задачи:

$$u_n(x,t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{213}$$

Общее решение нашей задачи запишем как суперпозицию частных

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{214}$$

Из начального условия получаем

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{215}$$

Последнее выражение есть разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0,l)$. Для нахождения C_n домножим уравнение (215) на $\sin\frac{\pi m}{l}x$ и проинтегрируем:

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx \tag{216}$$

С учетом формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

получим для интеграла в правой части

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}l.$$

В результате для коэффициента C_n имеем

$$C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{217}$$

Подставим в решение найденное значение C_n:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{218}$$

Поменяем порядок суммирования и интегрирования

$$u(x,t) = \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} x \right] f(\xi) \, d\xi \tag{219}$$

Введем функцию

$$\boxed{G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} x} \tag{220}$$

— функцию мгновенного точечного источника или функцию температурного влияния мгновенного точечного источника тепла. С ее использованием решение нашей задачи будет иметь вид

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi} \tag{221}$$

Покажем, что функция $G(x,\xi,t)$ представляет собой распределение температуры в стержне в момент времени t, если в начальный момент температура равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется некоторое количество тепла, при том что на краях стержня поддерживается нулевая температура. Для количества тепла, выделившегося в некоторой окрестности точки ξ можно записать

$$c\rho \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = Q \tag{222}$$

где f_ε – температура в этой окрестности, вызванная появлением тепла. Причем f_ε равна нулю всюду, кроме отрезка $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$. Т.е.,

$$f(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(x), & |x-\xi| < \varepsilon, \\ 0, & |x-\xi| > \varepsilon. \end{cases}$$

Решение записывается в виде

$$u_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x,\xi,t) f_\varepsilon(\xi)\,d\xi$$

Далее воспользуемся теоремой о среднем

$$u_\varepsilon(x,t) = G(x,\tilde{\xi},t) \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(\xi)\, d\xi = G(x,\tilde{\xi},t)\frac{Q}{c\rho}$$

где $\tilde{\xi}$ – некоторая средняя точка интервала $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$.

Полагая $Q = c\rho$ и $\varepsilon \to 0$, при этом $\tilde{\xi} \to \xi$ и в результате находим

$$u(x,t) = G(x,\xi,t).$$

Таким образом, мы доказали, что $G(x,\xi,t)$ есть температура в точке x в момент t, вызванная действием мгновенного точечного источника величиной $Q = c\rho$, находящегося при $t = 0$ в точке $x = \xi$.

4.3.2 Неоднородная задача

Перейдем к неоднородному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t) \tag{223}$$

с нулевыми начальным и граничными условиями:

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

Будем искать решение в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля $\sin\dfrac{\pi n}{l}x$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$$

Разлагая $g(x,t)$ в ряд по тем же собственным функциям, будем иметь:

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \,,$$

где

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l g(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi$$

Подставляя все в исходное уравнение, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - g_n(t) \right] = 0$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - g_n(t) = 0$$

или

$$\dot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = g_n(t)$$

Из начальных условий

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

Отсюда

$$u_n(0) = 0$$

У нас получилось неоднородное уравнение вида

$$u' + a_1 u = g(t) \tag{224}$$

с нулевым начальным условием

$$u(0) = 0.$$

Его решение может быть записано в виде

$$u(t) = \int\limits_0^t U(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

что можно проверить простой подстановкой, здесь $U(t)$ – решение однородного уравнения:

$$U' + a_1 U = 0$$

с начальным условием $U(0) = 1$. Действительно, находим

$$u'(t) = \int\limits_0^t U'(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + U(0)g(t) = \int\limits_0^t U'(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + g$$

Далее, подставляем в уравнение (224):

$$\int\limits_0^t U'(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + g(t) + a_1\int\limits_0^t U(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = g(t),$$

$$\int\limits_0^t \big(U'(t-\tau) + a_1 U(t-\tau)\big)\, g(\tau)\,d\tau + g(t) = g(t),$$

$$g(t) = g(t).$$

Представляя $U(t) = e^{\gamma t}$ и подставляя в наше уравнение

$$\dot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = 0$$

получим:

$$\gamma + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 = 0.$$

Отсюда,

$$\gamma = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2$$

и

$$U(t) = e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}.$$

В результате, для $u_n(t)$ получаем

$$u_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} g_n(\tau)\, d\tau \qquad (225)$$

а решение неоднородного уравнения теплопроводности запишется в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} g_n(\tau)\, d\tau\right] \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (226)$$

Подставляя сюда выражение для g_n, получим

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) g(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau} \tag{227}$$

где функция источника определяется

$$\boxed{G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l}\xi \sin\frac{\pi n}{l}x}$$

Для выяснения физического смысла полученного ответа предположим, что функция $c\rho g(\xi,\tau)$, представляющая собой плотность тепловых источников, отлична от нуля только в достаточно малой окрестности точки (ξ_0,τ_0). Тогда общее количество тепла, выделяющееся на отрезке $(0,l)$ за время действия источников, будет равно

$$\boldsymbol{Q = \int\limits_{\tau_0-\varepsilon_1}^{\tau_0+\varepsilon_1} \int\limits_{\xi_0-\varepsilon_2}^{\xi_0+\varepsilon_2} c\rho g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.} \tag{228}$$

По теореме о среднем найдем

$$\boldsymbol{u(x,t) = \int\limits_{\tau_0-\varepsilon_1}^{\tau_0+\varepsilon_1} \int\limits_{\xi_0-\varepsilon_2}^{\xi_0+\varepsilon_2} G(x,\xi,t-\tau) g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =}$$

$$\boldsymbol{= G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau}) \int\limits_{\tau_0-\varepsilon_1}^{\tau_0+\varepsilon_1} \int\limits_{\xi_0-\varepsilon_2}^{\xi_0+\varepsilon_2} g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\frac{Q}{c\rho}} \tag{229}$$

Переходя в последнем уравнении к пределу $\boldsymbol{\varepsilon_1 \to 0}$,

$\varepsilon_2 \to 0$, при этом $\tilde{\tau} \to \tau_0$, $\tilde{\xi} \to \xi_0$, находим

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0). \tag{230}$$

Если положить $Q = c\rho$, то $G(x, \xi_0, t - \tau_0)$ есть функция влияния мгновенного источника тепла, сосредоточенного в момент времени τ_0 в точке ξ_0.

Если тепловые источники действуют в области $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ в течение времени $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, то получаем

$$Q = c\rho g(\xi, \tau)\Delta\xi\Delta\tau$$

и

$$u(x,t) = G(x, \xi, t - \tau) g(\xi, \tau)\Delta\xi\Delta\tau.$$

Если источники распределены непрерывно, то суммируя по всем источникам в области $[0, l]$ за время

$[0, t]$, находим

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) g(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

что совпадает с выражением (227). Т.о., решение (227) могло быть получено исходя из физического смысла функции источника.

Мы нашли решение неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными условиями. В случае, когда начальное условие отлично от нуля, решением будет сумма решения однородного уравнения с заданным начальным условием и решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием.

4.4 Ортогональные криволинейные системы координат

x, y, z – декартовы координаты, q_1, q_2, q_3 – криволинейные координаты. Квадрат элемента длины:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \tag{231}$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{232}$$

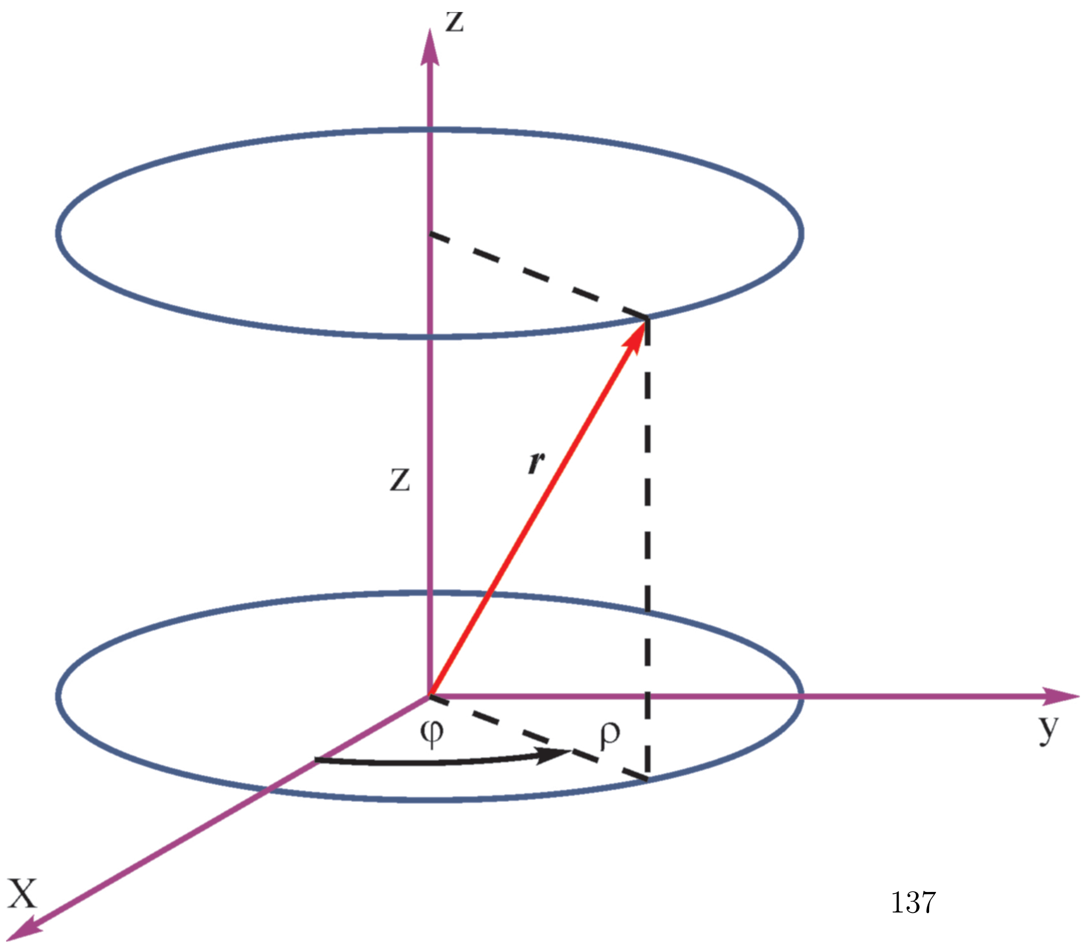
–метрические коэффициенты или коэффициенты Ламэ.

В криволинейных координатах:

$$\nabla = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{a}_j \frac{1}{h_j} \frac{d}{dq_j}, \tag{233}$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right] \quad (234)$$

Цилиндрическая система координат

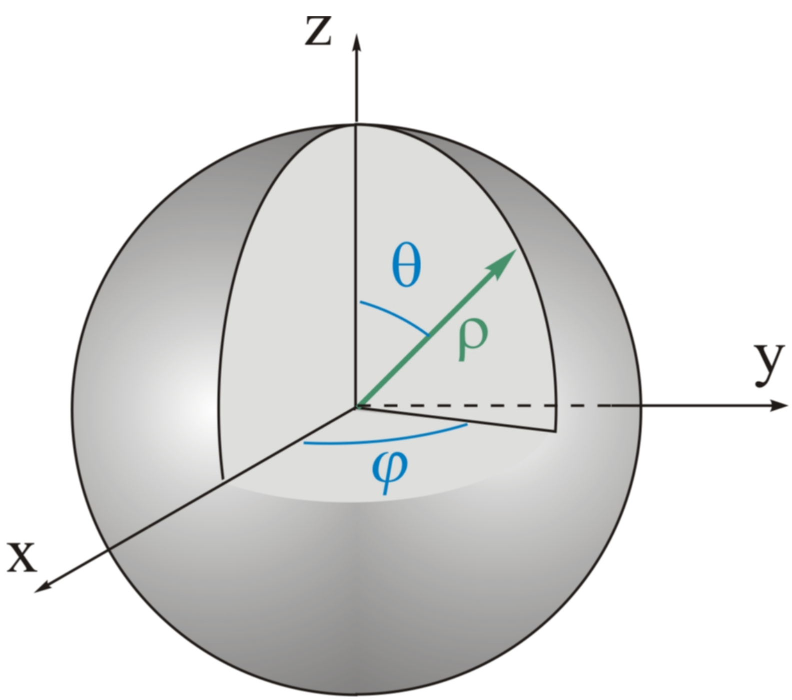


$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$h_1 = 1$$
$$h_2 = \rho$$
$$h_3 = 1$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{a_1}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\rho}} + \mathbf{a_2}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\varphi}} + \mathbf{a_3}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}} \tag{235}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\rho}}\left(\boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\rho}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho^2}}\frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial\varphi^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial z^2}} \tag{236}$$

Сферическая система координат



$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\theta$$

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = \rho$$

$$h_3 = \rho \sin\theta$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{a}_1 \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{a}_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_3 \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{237}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{238}$$

4.5 Распространение тепла в бесконечном цилиндре

Рассмотрим цилиндр радиуса R, боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре. Если в начальный момент времени температура в каждой точке зависит только от ее расстояния r до оси цилиндра, то и в последующие моменты времени температура будет зависеть только от r и t: $u = u(r,t)$. Переходя в пространственном уравнении теплопроводности к цилиндрическим координатам, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{239}$$

Начальное условие

$$u(r,0) = f(r),$$

краевое условие – условие постоянства температуры боковой поверхности цилиндра –

$$u(R,t) = u_0.$$

Рассмотрим случай однородного краевого условия, т.е. $u_0 = 0$. В противоположном случае надо сделать замену

$$u(r,t) \quad \longrightarrow \quad \tilde{u}(r,t) = u(r,t) - u_0,$$

при этом само уравнение не изменится, а начальное и краевое условие примут вид

$$\tilde{u}(r,0) = f(r) - u_0, \quad \tilde{u}(R,t) = 0.$$

Будем решать задачу методом разделения переменных $u(r,t) = U(r)T(t)$, в результате получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{U''(r) + \dfrac{1}{r}U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2 \tag{240}$$

Далее находим

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t} \tag{241}$$

а для функции $U(r)$ получаем уравнение

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda^2 U(r) = 0 \tag{242}$$

решением которого является функция Бесселя нулевого порядка

$$U(r) = J_0(\lambda r)$$

Из краевого условия находим

$$J_0(\lambda r) = 0$$

Т.е., собственные числа задачи выражаются через нули функции Бесселя μ_k ($J(\mu_k) = 0$):

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}$$

Каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция

$$u_k(r,t) = e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r) \tag{243}$$

в результате решение исходной задачи принимает вид

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r)} \tag{244}$$

С учетом начального условия получаем

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) = f(r)$$

Сделаем замену переменной $x = \dfrac{r}{R}$, в результате получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k x) = f(Rx)$$

Последнее соотношение аналогично (155). Находим аналогичным образом коэффициенты C_n:

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^1 x J_0(\mu_k x) f(Rx)\, dx,$$

5 Уравнения эллиптического типа

К уравнениям эллиптического типа обычно приводит рассмотрение стационарных процессов различной физической природы: колебания, теплопроводность, диффузия и т.д. Чаще всего встречается уравнение Лапласа:

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta u = 0}} \tag{245}$$

Функции, непрерывные в некоторой области вместе со своими производными до второго порядка включительно, и удовлетворяющие в этой области уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Оператор Лапласа в декартовых координатах имеет вид:

$$\boldsymbol{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \tag{246}$$

в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (247)$$

в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad (248)$$

5.1 Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. Стационарное тепловое поле

В нестационарном случае температура удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u$$

В стационарном случае, когда распределение температуры не меняется с течением времени $u = u(x, y, z)$, приходим к уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

В случае наличия тепловых источников получаем уравнение Пуассона

$$\boxed{\Delta u = -g}$$

2. Электрическое поле неподвижных зарядов.

Напряженность электрического поля удовлетворяет уравнению, выражающему теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

где $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность зарядов. Напряженность поля связана со скалярным потенциалом

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$$

В результате получаем

$$\mathrm{div}(-\mathrm{grad}\varphi) = -\Delta\varphi = 4\pi\rho,$$

или

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

т.е. получили уравнение Пуассона. В случае отсутствия объемных зарядов приходим к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

5.2 Частные решения уравнения Лапласа

Рассмотрим решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одной переменной r. В сферическом случае $u = u(r)$ уравнение Лапласа будет иметь вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

Интегрирую последнее уравнение получаем

$$\boldsymbol{u = \frac{A}{r} + B}$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – произвольные постоянные. Если положить $\boldsymbol{A} = 1$ и $\boldsymbol{B} = 0$ получаем фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве

$$\boxed{\boldsymbol{u = \frac{1}{r}}} \tag{249}$$

В цилиндрическом случае $\boldsymbol{u = u(r)}$ уравнение Лапласа будет иметь вид

$$\boldsymbol{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0}$$

Интегрируя его, получаем

$$\boldsymbol{u = A\ln r + B}$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – произвольные постоянные. Если положить $\boldsymbol{A} = -1$ и $\boldsymbol{B} = 0$ получаем фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости

$$\boxed{\boldsymbol{u = \ln \frac{1}{r}}} \tag{250}$$

5.3 Общие свойства гармонических функций

Интегральная теорема Остроградского-Гаусса имеет вид

$$\iiint\limits_{T} \mathrm{div}\mathbf{A}\, d\boldsymbol{\tau} = \iint\limits_{S} \mathbf{A} d\boldsymbol{\sigma} \tag{251}$$

где T – некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S, $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S,

$$\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

$$\mathrm{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Если положить

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z},$$

где $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ – функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $T + S$, и имеющие непрерывные вторые производные внутри T, то из (251) получаем первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{T} u\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma - \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{252}$$

где $\dfrac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{n}\,\mathrm{grad} v$ – производная по направлению внешней нормали. Формулу Грина можно переписать с учетом

$$\mathrm{grad} u\,\mathrm{grad} v = \nabla u \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$

в результате получаем

$$\iiint\limits_{T} u\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma - \int\limits_{T} \nabla u \nabla v\,d\tau. \tag{253}$$

Меняя местами u и v, получаем

$$\iiint\limits_{T} v\Delta u d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma - \iiint\limits_{T} \nabla v \nabla u\,d\tau. \tag{254}$$

Для того, чтобы получить вторую формулу Грина, вычтем из (253) формулу (254):

$$\iiint\limits_{T} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right)\,d\sigma. \tag{255}$$

Рассмотрим несколько основных свойств гармонических функций.

1. Если v - функция, гармоническая в области T,

ограниченной поверхностью S, то

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0, \tag{256}$$

где S_1 – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T. Т.к. v – гармоническая, то $\Delta v = 0$. Полагая, кроме того, в первой формуле Грина $u = 1$ получаем (256).

2. Теорема среднего значения. Если функция $u(x, y, z) = u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 – произвольная точка, лежащая внутри области T, то

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S(a)} u\, d\sigma \tag{257}$$

где $S(a)$ – сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T.

3. Принцип максимального значения. Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T+S$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности S.

Следствие: если функции u и v непрерывны в области $T+S$, гармоничны в T и

$$u \leqslant v \quad \text{на} \quad S,$$

то и

$$u \leqslant v \quad \text{всюду внутри} \quad T.$$

5.4 Краевые задачи для уравнения Лапласа

1. Внутренняя задача Дирихле или первая внутренняя краевая задача формулируется следующим образом.

Требуется найти функцию u, которая:
a) определена и непрерывна в замкнутой области $T+S$,
b) удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$,
c) принимает на границе S заданные значения f.

Единственность решения первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа доказывается следующим образом. Предположим, что существуют две различные функции u_1 и u_2, являющиеся решениями задачи. Очевидно, что функция $u = u_1 - u_2$ также будет гармонической в T, но при этом

$$u\big|_S = 0$$

Т.к. функция u должна принимать максимальное и минимальное значение на S, то получаем, что $u \equiv 0$.

2. Внешняя краевая задача Дирихле или первая

внешняя краевая задача формулируется следующим образом.
Требуется найти функцию u, которая:
a) $\Delta u = 0$ в неограниченной области T,
b) непрерывна всюду, включая поверхность S,
c) принимает на границе S заданные значения f,
d) $u(M)$ равномерно стремится к 0 на бесконечности, т.е. $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Единственность решения внешней задачи Дирихле доказывается аналогично внутренней.

3. Внутренняя задача Неймана или вторая внутренняя краевая задача формулируется следующим образом:
Требуется найти функцию u, которая:
a) определена и непрерывна в замкнутой области $T + S$,

b) удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$,
c) удовлетворяет на границе S условию:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f.$$

Решение внутренней задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной. Для доказательства предположим, что у нас есть две функции u_1 и u_2, являющиеся решениями нашей краевой задачи. Рассмотрим функцию

$$u = u_1 - u_2,$$

для нее получаем

$$\Delta u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0.$$

Полагая в первой формуле Грина $u = v$ и с учетом двух последних соотношений, получаем

$$\iiint\limits_T \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right) d\tau = 0$$

Отсюда в силу непрерывности функции и ее первых производных находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

отсюда $u = const$.

4. Внешняя задача Неймана или вторая внешняя краевая задача формулируется следующим образом: Требуется найти функцию u, которая:
a) $\Delta u = 0$ в неограниченной области T, b) непрерывна всюду, включая поверхность S,

c)удовлетворяет на границе S условию:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f.$$

d) $u(M)$ равномерно стремится к 0 на бесконечности, т.е. $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Единственность решения внешней задачи Неймана доказывается аналогично внутренней.

5.5 Решение уравнения Лапласа методом разделения переменных

Рассмотрим краевую задачу для круга, которая формулируется следующим образом:
найти функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = 0$$

внутри круга, и граничному условию

$$u = f$$

на границе круга, где f – заданная функция. Такая задача носит название внутренней задачи Дирихле на плоскости. Будем рассматривать также внешнюю задачу.

В полярных координатах наше уравнение будет иметь вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (258)$$

Будем искать решение в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi}$$

В результате получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{259}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0, \tag{260}$$

Решение первого уравнения имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

Из однозначности функции $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$ получаем условие периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Отсюда получаем, что

$$\sqrt{\lambda} = n,$$

где n – целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi$$

Уравнение на функцию R примет вид

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$$

Будем искать его решение в виде

$$R = Cr^{\alpha}$$

Подставляя, получаем

$$\alpha^2 - n^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \pm n$$

и в результате

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$$

В случае внутренней задачи мы должны положить $D = 0$, а в случае внешней $C = 0$.

Т. о., мы нашли частные решения нашей задачи

$$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad r \leqslant a \qquad (261)$$

и

$$u_n(r,\varphi) = \frac{1}{r^n}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad r \geqslant a \qquad (262)$$

Сумма частных решений

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{внутренняя задач} \tag{263}$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{внешняя задача} \tag{264}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов воспользуемся граничными условиями

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f \tag{265}$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{266}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi.$$

Сравнивая (265) и (265), получим для внутренней задачи

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$$

и решение нашей задачи для круга принимает вид

$$\boldsymbol{u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).} \qquad (267)$$

Для внешней задачи

$$\boldsymbol{A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = \beta_n a^n}$$

и решение нашей задачи для круга принимает вид

$$\boldsymbol{u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).} \qquad (268)$$