МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика-1"

А.В. Иванов, А.П. Иванова

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 1

Методические указания к лабораторным работам по курсу "Математическое моделирование"

Москва - 2005

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика-1"

А.В. Иванов, А.П. Иванова

Утверждено

редакционно-издательским

советом университета

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 1

Методические указания к лабораторным работам по курсу "Математическое моделирование"

Для студентов специальности УВМ

Москва - 2005

УДК 519.248
И 20

Иванов А.В., Иванова А.П. Моделирование случайных величин, систем массового обслуживания и случайных процессов. Часть 1.: Методические указания к лабораторным работам. – М.: МИИТ, 2005. – 28 с.

Методические указания содержат описание и варианты заданий к лабораторным работам № 1 и № 2 по курсу "Математическое моделирование". Лабораторные работы посвящены моделированию дискретных и непрерывных случайных величин методом обратной функции. В методических указаниях приведены основные определения и формулы, знание которых необходимо для выполнения лабораторных работ.

Подписано в печать — Тираж 150
Усл. печ. л. – 1,75 — Формат 60x84/16
Изд. № 254–05 — Заказ

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

Содержание

1 Моделирование дискретных случайных величин методом обратной функции

1.1 Основные понятия и определения

Определение 1. Под ***случайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Возможные значения дискретной величины можно перечислить, в то время как возможные значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют некоторый промежуток (конечный или бесконечный). Все возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое мы будем называть ***множеством возможных значений*** случайной величины [1].

Определение 2. ***Законом распределения*** случайной величины называется любое правило (таблица, функция), устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Под ***событием*** понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Наиболее распространенными событиями являются следующие:

- случайная величина X принимает значение x;
- случайная величина X попадает в интервал (a, b);
- случайная величина X меньше значения x.

Напомним некоторые вспомогательные понятия.

Определение 3. Говорят, что несколько событий в данном опыте образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта обязательно появляется одно из них.

Определение 4. События называются ***несовместными***, если они не могут появиться одновременно в данном опыте.

При моделировании случайных величин естественным является вопрос о ***базисе*** (т.е. совокупности случайных величин с заданными характеристиками) для получения случайной величины на любом наперед заданном множестве возможных значений и при любом наперед заданном законе распределения.

В качестве такого ***базиса*** можно взять равномерно распределенную случайную величину в интервале $(0, 1)$.

При моделировании случайных величин на ПЭВМ невозможно воспроизвести опыт с истинно случайным исходом. Поэтому вместо случайных величин используются ***псевдослучайные величины***. Псевдослучайными величинами называются такие числа, которые по своим свойствам ***близки*** к случайным величинам, но могут быть получены посредством определенного вычислительного алгоритма.

В современных языках программирования базисом для моделирования случайных величин является псевдослучайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$. Такая величина моделируется специальными функциями, имеющими похожие наименования: Randomize(), RAND(), RANDOM() и т.д. Вызов таких функций в цикле вычислительного алгоритма позволяет получить последовательность псевдослучайных чисел. Обычно первое обращение осуществляется со специальным аргументом для генерирования первого псевдослучайного числа в последовательности на основе показаний системного таймера (в языке программирования *Turbo Pascal*® первое псевдослучайное число получается при вызове функции Randomize()). Этим обеспечивается получение разных псевдослучайных последовательностей при каждом запуске программы. Остальные члены последовательности генерируются по заложенному в функцию алгоритму, обеспечивающему равномерный закон распределения. Не рекомендуется для получения одной последовательности псевдослучайных чисел вызывать указанные функции со специальным аргументом более одного раза. Действительно, при таком вызове генерируется число, в большей степени приближенное к случайному. Но при этом нарушается работа алгоритма, обеспечивающего равномерное распределение.

1.2 Получение выборок дискретных случайных величин

В первой работе будем рассматривать дискретную случайную величину X, которая может принимать значения x_1, $x_2, \ldots, x_n$. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т.е. произойдет одно из полной группы несовместных событий. Обозначим вероятности этих событий:

$$P(X = x_1) = p_1, \quad \ldots, \quad P(X = x_n) = p_n.$$

Так как события несовместны и образуют полную группу, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Пусть случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$	p_n

(1)

Для количественной характеристики закона распределения удобно использовать вероятность события $X < x$, где x – некоторая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от x. Эту зависимость задает ***функция распределения случайной величины*** X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Напомним свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x)$ неубывает, т.е. при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $F(x_2) \geq F(x_1)$.
2. $F(-\infty) = 0$.
3. $F(+\infty) = 1$.

Зная закон распределения (1) дискретной случайной величины, можно построить функцию распределения этой величины по следующему правилу:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Функция распределения дискретной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков равна единице (см. рис. 1).

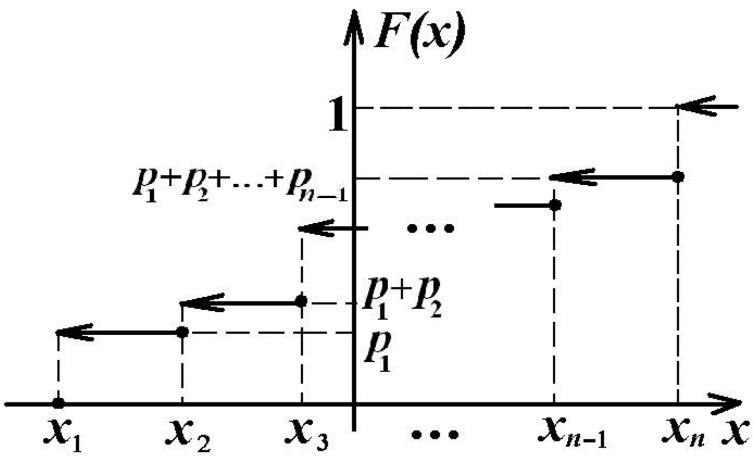

Рис. 1

Опишем метод моделирования дискретной случайной величины X, заданной своим законом распределения (1) – ***метод обратной функции***.

Рассмотрим отрезок $[0,1]$ и разобьем его на частичные отрезки Δ_1, Δ_2, …, Δ_n. Пусть эти отрезки имеют длины соответственно p_1, p_2, …, p_n. Так как $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, то эти отрезки в совокупности покроют отрезок $[0,1]$ полностью (см. рис. 2).

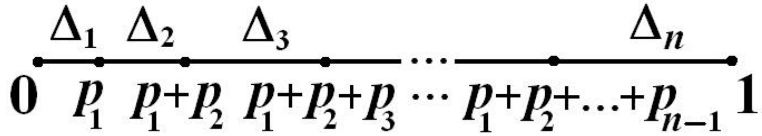

Рис. 2

Замечание. На рис. 1 отрезок $[0,1]$ расположен на оси ординат $0y$. Отсюда происходит название метода: по заданному закону распределения мы строим функцию распределения, а потом моделируем на ПЭВМ базисную случайную величину – ординату. По полученной ординате вычисляем абсциссу $x=F^{-1}(y)$.

Тогда значение случайной величины X равно x_k, если $r\in\Delta_k$, где r – псевдослучайное число на интервале $(0,1)$.

Правило определения интервала Δ_k, в который попадает псевдослучайное число r:

$$r\in\begin{cases}\Delta_1 & r\le p_1,\\ \Delta_k & p_1+p_2+\cdots+\\ & +p_{k-1}\le r\le p_1+p_2+\cdots+p_k,\\ & (k\ge 2)\end{cases}$$

1.3 Вычисление статистических оценок математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин

Пусть X – исходная дискретная случайная величина со следующим законом распределения:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…	p_n

По определению, ее математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

$$M=\sum_{k=1}^{n}p_k x_k, \tag{2}$$

$$D=\sum_{k=1}^{n}p_k(x_k-M)^2, \tag{3}$$

т.е. дисперсия – это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины (***центрированной случайной величиной*** называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания: $X^*=X-$

M). Заметим, что математическое ожидание $M(X^*) = 0$. Для формулы (3) можно получить более простое представление:

$$D = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - M)^2 =$$

$$= p_1 x_1^2 - 2p_1 x_1 M + p_1 M^2 + p_2 x_2^2 - 2p_2 x_2 M +$$
$$+ p_2 M^2 + \ldots + p_n x_n^2 - 2p_n x_n M + p_n M^2 =$$
$$= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 +$$
$$+ \ldots + p_n x_n) M + (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) M^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - 2M * M + M^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - M^2. \qquad (4)$$

Напомним одно важное свойство дисперсии случайной величины, вытекающее непосредственно из определения:

$$D \geq 0.$$

Обычно имеются лишь данные выборки измерения значений случайной величины. По этим значениям необходимо получить, по-возможности наиболее точно, приблизительные значения (***оценки***) параметров (например, математического ожидания и дисперсии) случайной величины. Ясно, что чем больше выборка, тем более точную оценку мы получим. Однако, при получении таких оценок могут возникать систематические ошибки (т.е. ошибки, получаемые при использовании неправильных формул для вычисления оценок).

Пример. Пусть X – дискретная случайная величина со следующим законом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Вычислим математическое ожидание и дисперсию по формулам (2) и (4) соответственно: $M = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 = 3$, $D = 0.2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 3^2 = 2$.

Если для данной случайной величины неизвестен закон распределения, а имеется только выборка измерения значений, получим оценки для M и D. Пусть разыграно 20 независимых значений x_1, x_2,... x_{20} случайной величины X.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рез.	3	5	1	1	4	4	3	5	4	1

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рез.	3	1	1	2	2	3	4	4	5	4

Так как неизвестен закон распределения случайной величины X, то наиболее правдоподобным будет предположение, что она принимает с равной вероятностью $\frac{1}{20}$ значения, представленные в выборке. Вычислим величину

$$m(1) = \frac{\sum_{k=1}^{20} x_k}{20} = 2.85. \qquad (5)$$

Очевидно, эта величина находится вблизи точного значения математического ожидания.

Если разыграно N независимых значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ случайной величины X, назовем ***оценкой математи-***

ческого ожидания величину

$$m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k}{N}. \tag{6}$$

По аналогии с (5) можно вычислить величину

$$g(1) = \sum_{k=1}^{20} p_k x_k^2 - m^2 = 2.13.$$

Однако, у такого выражения есть особенность, *не позволяющая* рассматривать его в качестве ***оценки дисперсии***.

Разыграем еще 20 независимых значений x_1, x_2, …, x_{20} случайной величины X.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рез.	5	4	4	2	1	4	5	3	3	5

N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рез.	3	3	5	5	3	4	2	2	2	3

Для этой серии по аналогии получим $m(2) = 3.40$; $g(2) = 1.44$.

Так как серии испытаний независимы, то оценки $m(1)$, $m(2)$, …, относящиеся к разным сериям испытаний, можно рассматривать как выборку значений случайной величины X_M. Оценка называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Можно доказать, что $M(X_M) = M$. Поэтому формула (6) представляет несмещенную оценку математического ожидания.

Если $g(1)$, $g(2)$, … – выборка значений случайной величины X_G, то можно доказать, что $M(X_G) = \frac{19}{20}D$, т.е. $g = \frac{\sum_{k=1}^{20} x_k^2}{20} - m^2$ является **смещенной оценкой** для D.

В общем виде, если есть N испытаний

X	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...	x_N

,

то $g = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}{N} - m^2$ является **смещенной оценкой** для D.

Дело в том, что m – не математическое ожидание (неизвестное), а лишь его оценка.

Вместе с тем доказано, что математическое ожидание ***смещенной*** оценки дисперсии (как последовательности, полученной на основе разных серий опытов одинаковой длины N) равно: $M(g) = \frac{N-1}{N}D$, а значит, ***несмещенная оценка дисперсии*** равна: $d = \frac{N}{N-1}g$.

Таким образом, несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии при выборке в N значений находятся по формулам:

$$m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k}{N}, \tag{7}$$

$$g = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2}{N-1} - \frac{N}{N-1}m^2. \tag{8}$$

Лабораторная работа № 1.

Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Нужно:

1. Смоделировать на ПЭВМ N значений случайной величины методом обратной функции.
2. Вывести q первых значений ($q < N$).
3. Найти точные значения математического ожидания и дисперсии величины X.
4. Вычислить оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X, сравнить их с соответствующими точными значениями, сделать выводы.

Примечание. В формуле (8) при вычислении оценки дисперсии используется значение *полностью* вычисленной оценки математического ожидания m (т.е. в качестве оценки математического ожидания m используется величина, вычисленная по всем N реализациям случайной величины X). Поэтому ошибкой было бы вычисление оценок математического ожидания и дисперсии в одном цикле.

Варианты задания к лабораторной работе № 1:

Вариант 1

$N = 100, \quad q = 14$

X	4	-7	6
p	0.4	0.1	0.5

Вариант 2

$N = 90, \quad q = 9$

X	-4	1	0	2
p	0.1	0.1	0.5	0.3

Вариант 3

$N = 100, \quad q = 12$

X	-3	-7	0
p	0.1	0.2	0.7

Вариант 4

$N = 110, \quad q = 15$

X	-40	14	-33	2
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 5

$N = 80, \quad q = 10$

X	31	-17	12
p	0.1	0.8	0.1

Вариант 6

$N = 100, \quad q = 15$

X	14	16	3	-12
p	0.6	0.2	0.1	0.1

Вариант 7

$N = 90, \quad q = 12$

X	1	-1	2
p	0.2	0.4	0.4

Вариант 8

$N = 110, \quad q = 16$

X	4	23	-1	-2
p	0.7	0.1	0.1	0.1

Вариант 9

$N = 100, \quad q = 12$

X	-2	-7	0
p	0.4	0.2	0.4

Вариант 10

$N = 90, \quad q = 10$

X	5	10	15	-2
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 11

$N = 80, \quad q = 12$

X	3	-3	1
p	0.4	0.4	0.2

Вариант 12

$N = 140, \quad q = 16$

X	1	2	3	-50
p	0.3	0.3	0.3	0.1

Вариант 13

$N = 100, \quad q = 15$

X	-1	-2	25
p	0.1	0.8	0.1

Вариант 14

$N = 90, \quad q = 10$

X	23	1	6	5
p	0.5	0.2	0.1	0.2

Вариант 15

$N = 90, \quad q = 14$

X	1	2	13
p	0.1	0.1	0.8

Вариант 16

$N = 110, \quad q = 14$

X	12	-6	4	-8
p	0.3	0.2	0.3	0.2

Вариант 17

$N = 100, \quad q = 14$

X	-22	22	2
p	0.4	0.5	0.1

Вариант 18

$N = 100, \quad q = 10$

X	41	34	-3	-2
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 19

$N = 110, \quad q = 16$

X	-11	-1	1
p	0.3	0.6	0.1

Вариант 20

$N = 100, \quad q = 12$

X	-2	-16	13	0
p	0.4	0.2	0.1	0.3

Вариант 21

$N = 120, \quad q = 18$

X	1	-7	2
p	0.1	0.7	0.2

Вариант 22

$N = 100, \quad q = 14$

X	4	1	3	-2
p	0.1	0.7	0.1	0.1

Вариант 23

$N = 100, \quad q = 18$

X	-4	-1	29
p	0.1	0.5	0.4

Вариант 24

$N = 120, \quad q = 18$

X	-70	6	3	-20
p	0.5	0.2	0.1	0.2

Вариант 25

$N = 100, \quad q = 12$

X	-31	-8	9
p	0.5	0.4	0.1

Вариант 26

$N = 120, \quad q = 15$

X	19	18	13	-12
p	0.6	0.2	0.1	0.1

Вариант 27

$N = 90, \quad q = 10$

X	1	-17	20
p	0.2	0.4	0.4

Вариант 28

$N = 120, \quad q = 16$

X	-14	28	-13	2
p	0.7	0.1	0.1	0.1

Вариант 29

$N = 110, \quad q = 16$

X	-29	-27	40
p	0.4	0.3	0.4

Вариант 30

$N = 90, \quad q = 12$

X	-5	-10	-15	12
p	0.1	0.1	0.1	0.7

Вариант 31

$N = 90, \quad q = 12$

X	33	-43	15
p	0.4	0.4	0.2

Вариант 32

$N = 130, \quad q = 18$

X	1	-2	3	-5
p	0.3	0.3	0.3	0.1

Вариант 33

$N = 90, \quad q = 12$

X	-11	24	25
p	0.1	0.6	0.3

Вариант 34

$N = 90, \quad q = 10$

X	-22	21	-6	-9
p	0.5	0.2	0.1	0.2

Вариант 35

$N = 110, \quad q = 14$

X	-1	-2	-3
p	0.1	0.3	0.6

Вариант 36

$N = 130, \quad q = 14$

X	35	-16	34	-8
p	0.3	0.2	0.3	0.2

Вариант 37

$N = 100, \quad q = 16$

X	-8	28	20
p	0.4	0.5	0.1

Вариант 38

$N = 140, \quad q = 18$

X	31	34	-13	-27
p	0.5	0.3	0.1	0.1

Вариант 39

$N = 110, \quad q = 15$

X	-11	-21	31
p	0.3	0.6	0.1

Вариант 40

$N = 100, \quad q = 14$

X	0	-1	13	10
p	0.4	0.2	0.1	0.3

2 Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции

2.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, заданную на конечном интервале (a, b). Пусть ее функция распределения имеет вид $F(x) = P(X < x)$ и обладает свойствами 1 – 3, которые были перечислены в п. 1.2. Отличие от случая дискретной случайной величины заключается лишь в том, что для непрерывной случайной величины функция $F(x)$ непрерывна, см. рис. 3.

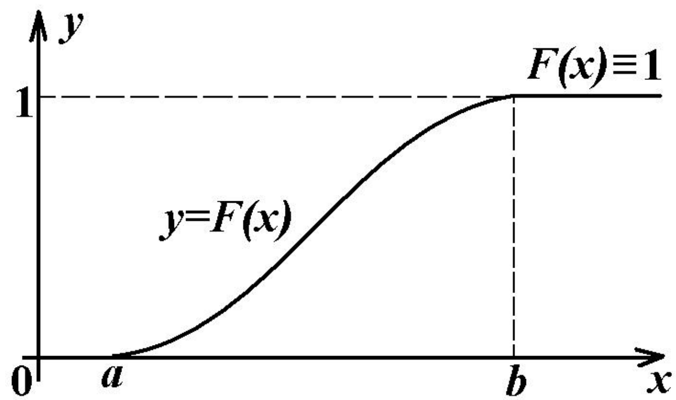

Рис. 3

В случае непрерывных случайных величин их вероятностные характеристики задаются ***плотностью распределения.***

Определение 5. ***Плотностью распределения*** случайной величины X называется такая функция $f(x)$, что

$$f(x) = F'(x),$$

где $F(x)$ – функция распределения величины X.

Напомним свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения – неотрицательная функция:
$$f(x) \geq 0.$$

2. Интеграл от плотности распределения, взятый в пределах от $-\infty$ до ∞, равен единице:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Если X – случайная величина, заданная на интервале (a, b), то

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{если } x \in (a, b), \\ f(x) = 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Пример графика функции $y = f(x)$ представлен на рис. 4:

По заданной плотности распределения $f(x)$ величины X можно найти ее функцию распределения $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \int_{a}^{x} f(t)dt, & \text{при } a < x < b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

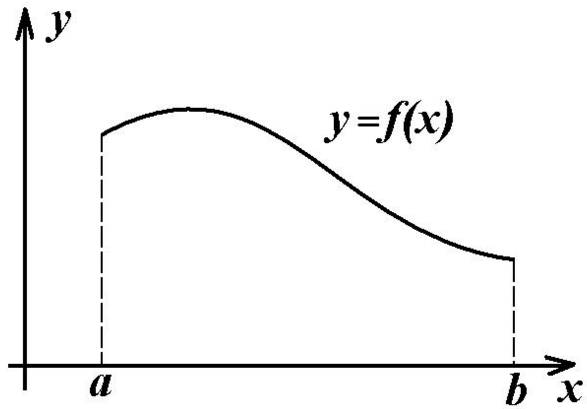

Рис. 4

По свойству плотности распределения $f(x) > 0$ для всех x из интервала (a, b), следовательно, функция $y = F(x)$ строго возрастает на этом интервале (см. рис. 3). Поэтому функция $F(x)$ имеет на интервале (a, b) однозначную обратную функцию $x = G(y)$ с областью значений $y \in (0, 1)$ и областью определения $x \in (a, b)$. Функция $x = G(y)$ также, как и функция $y = F(x)$, является возрастающей (см. рис. 5).

Эта функция также имеет на интервале ее определения $(0, 1)$ однозначную обратную функцию. Очевидно, что эта обратная функция имеет вид: $y = F(x)$.

Пусть R – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$. Поставим ей в соответствие случайную величину ξ, определяемую следующим образом. Если r_i – реализация случайной величины R, то $\xi = G(r_i)$.

Если случайная величина ξ заключена в интервале

$$c < \xi < d, \tag{9}$$

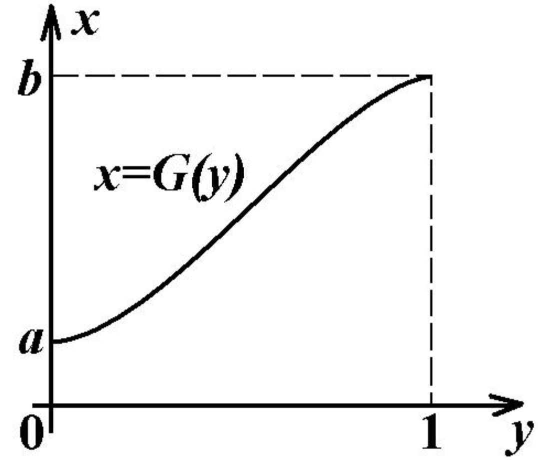

Рис. 5

то случайная величина R заключена в интервале

$$F(c) < R < F(d). \tag{10}$$

Верно также и обратное утверждение (так как, если $\xi = G(r_i)$, то $r_i = F(\xi)$, и из монотонности $F(x)$ следует, что $F(c) < F(\xi) < F(d)$).

Неравенства (9) и (10) равносильны, а значит и равновероятны:

$$P(c < \xi < d) = P(F(c) < R < F(d)). \tag{11}$$

Так как величина R распределена равномерно в интервале $(0, 1)$, то вероятность попадания R в интервал $(y_1, y_2) \subset (0, 1)$ равна $y_2 - y_1$. В частности,

$$P(F(c) < R < F(d)) = F(d) - F(c).$$

Следовательно, равенство (11) можно записать в виде:

$$P(c < \xi < d) = F(d) - F(c).$$

Из последнего равенства следует, что вероятность попадания величины ξ в интервал (c, d) равна приращению функции $F(x)$ на этом интервале. В частности,

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = 1.$$

Таким образом, $F(x)$ можно рассматривать как функцию распределения случайной величины ξ. Иными словами, случайная величина ξ совпадает со случайной величиной X, а числа x_i, определяемые формулой

$$x_i = G(r_i),$$

есть возможные значения величины с заданной функцией распределения $F(x)$.

2.2 Получение выборок непрерывных случайных величин

Пусть X – непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x)$.

С помощью функции типа RANDOM получим выборку N независимых значений $r_1, r_2, \ldots, r_N$ равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$ случайной величины R.

Для каждого случайного числа r_i находим соответствующее значение x_i по формуле

$$x_i = G(r_i),$$

здесь $G(r_i)$ – функция, обратная к функции распределения, т.е. $G(r_i) = F^{-1}(r_i)$.

2.3 Вычисление статистических оценок математического ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин

Пусть X – непрерывная случайная величина, заданная на интервале (a, b), с известной плотностью распределения $f(x)$. Ее математическое ожидание и дисперсия равны соответственно [1]:

$$M = \int_a^b x f(x) dx,$$

$$D = \int_a^b (x - M)^2 f(x) dx. \qquad (12)$$

Как указано выше, дисперсия – это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины. Для формулы (12) можно получить следующее более простое представление:

$$D = \int_a^b (x - M)^2 f(x) dx =$$

$$= \int_a^b (x^2 - 2Mx + M^2) f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx -$$

$$-2M \int_a^b x f(x) dx + M^2 \int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx -$$

$$-2M*M+M^2*1=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx - M^2.$$

Оценки параметров (математического ожидания и дисперсии) для непрерывной случайной величины находятся по тем же формулам, по которым находятся несмещенные оценки для дискретной случайной величины ((7) и (8) соответственно).

Лабораторная работа № 2.

Задана плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X, заданной на интервале (a,b). Нужно:

1. Смоделировать на ПЭВМ N значений случайной величины методом обратной функции.
2. Вывести q первых значений ($q < N$).
3. Найти точные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины X.
4. Вычислить оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X и сравнить их с точными значениями, сделать выводы.

Варианты задания к лабораторной работе № 2:

1.	$f(x) = 4x^3$	$(0,1)$	$N = 90$	$q = 15$
2.	$f(x) = \dfrac{e^x}{e-1}$	$(0,1)$	$N = 80$	$q = 12$
3.	$f(x) = \dfrac{1}{x\ln 2}$	$(1,2)$	$N = 80$	$q = 15$
4.	$f(x) = \sin x$	$(0,\dfrac{\pi}{2})$	$N = 90$	$q = 10$
5.	$f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$	$(0,1)$	$N = 100$	$q = 12$
6.	$f(x) = -\cos x$	$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$	$N = 90$	$q = 15$
7.	$f(x) = \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$	$(0,1)$	$N = 110$	$q = 10$
8.	$f(x) = 2x^{-2}$	$(1,2)$	$N = 80$	$q = 14$
9.	$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{12}$	$(0,8)$	$N = 90$	$q = 12$
10.	$f(x) = \cos x$	$(\dfrac{\pi}{2},0)$	$N = 100$	$q = 14$
11.	$f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$	$(1,e)$	$N = 110$	$q = 15$
12.	$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(1,4)$	$N = 90$	$q = 10$
13.	$f(x) = 0.1x$	$(4,6)$	$N = 80$	$q = 12$
14.	$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(0,\dfrac{\pi}{4})$	$N = 120$	$q = 16$
15.	$f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$(0,1)$	$N = 100$	$q = 12$

16. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{-2\ln x}}$ $(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, 1)$ $N = 90$ $q = 14$

17. $f(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $(0, 1)$ $N = 80$ $q = 10$

18. $f(x) = \dfrac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ $N = 90$ $q = 14$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos^2 x}$ $(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3})$ $N = 80$ $q = 12$

20. $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^2}$ (e, e^2) $N = 110$ $q = 16$

21. $f(x) = \dfrac{e^x}{4}$ $(\ln 2, \ln 6)$ $N = 120$ $q = 15$

22. $f(x) = x$ $(\sqrt{2}, 2)$ $N = 90$ $q = 12$

23. $f(x) = 2\sin 2x$ $(0, \dfrac{\pi}{4})$ $N = 100$ $q = 15$

24. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^3 - 1}$ $(0, 3)$ $N = 90$ $q = 14$

25. $f(x) = 5x^4$ $(0, 1)$ $N = 80$ $q = 12$

26. $f(x) = \dfrac{2}{9}(x+1)$ $(-1, 2)$ $N = 90$ $q = 15$

27. $f(x) = 3\sin 3x$ $(0, \dfrac{\pi}{6})$ $N = 80$ $q = 16$

28. $f(x) = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$ $(1, e)$ $N = 100$ $q = 12$

29. $f(x) = \cos x$ $(-\dfrac{\pi}{2}, 0)$ $N = 90$ $q = 12$

30. $f(x) = \dfrac{3}{\pi(1+x^2)}$ $(0\sqrt{3},)$ $N = 110$ $q = 14$

31. $f(x) = \dfrac{3}{14}\sqrt{x}$ $(1, 4)$ $N = 90$ $q = 14$

32. $f(x) = \ln x$ $(1, e)$ $N = 80$ $q = 16$

33. $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x}$ $(1, e^2)$ $N = 90$ $q = 15$

34. $f(x) = 1.1x^{-2}$ $(1, 11)$ $N = 100$ $q = 12$

35. $f(x) = \dfrac{4}{45}\sqrt[3]{x}$ $(1, 8)$ $N = 100$ $q = 15$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln 5 - \ln 2)}$ $(2, 5)$ $N = 80$ $q = 12$

37. $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^2 + 1}$ $(1, e^2)$ $N = 110$ $q = 16$

38. $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$ $(0, \dfrac{\pi}{8})$ $N = 90$ $q = 12$

39. $f(x) = \dfrac{3}{4}(x^2 + 1)$ $(0, 1)$ $N = 100$ $q = 14$

40. $f(x) = \dfrac{3}{16}\sqrt{x}$ $(0, 4)$ $N = 80$ $q = 12$

Список литературы

[1] *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов.- 2-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2000. - 480 с.

[2] *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для втузов. – 9-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2003. - 479 с.

[3] *Михайлов Г.А.* Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. - Новосибирск: Наука, 1974.

[4] *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1975.