А. М. Кербелев, Круговой критерий робастной устойчивости и неустойчивости нестационарных нелинейных систем, *Автомат. и телемех.*, 1993, выпуск 12, 111–115

УДК 519.718

© 1994 г. А.М. КЕРБЕЛЕВ
(Институт проблем управления РАН, Москва)

КРУГОВОЙ КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются непрерывные системы управления, подверженные внешним и внутренним, быть может и стохастическим с финитной плотностью распределения, возмущениям. Получены круговые критерии робастной устойчивости и неустойчивости, формулировка которых не зависит от числа неустойчивых полюсов передаточной функции разомкнутой системы.

1. Введение

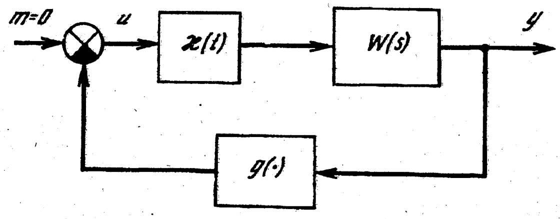
В классической задаче абсолютной устойчивости нелинейных систем управления [1] линейная часть предполагается точно известной, а нелинейная характеристика считается заключенной в некотором секторе. Критерии абсолютной устойчивости, в том числе и круговые [2], гарантируют устойчивость целого семейства систем с неопределенной нелинейной частью. Поэтому теория робастной устойчивости нелинейных систем является естественным обобщением классической теории абсолютной устойчивости на тот случай, когда линейная часть также содержит неопределенность. Широко распространен подход, в котором неопределенность задается в непараметрической форме, как максимальное допустимое отклонение частотной характеристики реальной системы от номинальной [3, 4]. В данной работе используется именно такое описание неопределенности. Круговой критерий робастной устойчивости предложен в [4] для непрерывных и в [5] для дискретных систем. В предлагаемой работе помимо неопределенности в линейной и нелинейной составляющих системы предполагается наличие "шума" в управлении. Плотность распределения шума предполагается финитной, что позволяет свести стохастическую систему к нестационарной на основе работы [6]. Предлагаемые критерии робастной устойчивости в отличие от известных [4] используют не годограф Найквиста, а модифицированный годограф Михайлова (для дискретных систем модифицированный годограф Михайлова используется в [5]), и их формулировка не зависит от числа неустойчивых полюсов разомкнутой линейной части.

В результате формулируется задача и приводится круговой критерий абсолютной устойчивости нестационарных систем. Затем в рассмотрение вводится неопределенность линейной части и устанавливается критерий робастной устойчивости нелинейных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную непрерывную систему, определяемую в пространстве состояний уравнениями

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}u\varkappa(t),\\
&u = g(y),\\
&y = \mathbf{c}'\mathbf{x},
\end{aligned}
$$



где $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор состояния системы, A – матрица размера $n \times n$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ – n-векторы, штрих обозначает операцию транспонирования, y и u – скалярные величины, g – нелинейная характеристика, удовлетворяющая условию

(2) $$0 < \underline{K_1} \leqslant \frac{g(y)}{y} \leqslant \overline{K_1},$$

а $\varkappa(t)$ – ограниченная функция времени, удовлетворяющая условию

(3) $$0 < \underline{K}_2 \leqslant \varkappa(t) \leqslant \overline{K}_2.$$

Блок-схема для данной системы может быть представлена в виде рисунка, где $W(s) = \mathbf{c}'(sI - A)^{-1}\mathbf{b}$ – передаточная функция системы.

Отметим, что функция $\varkappa(t)$ может иметь как детерминированную, так и стохастическую природу. При этом в первом случае система может быть интерпретирована как система с нестационарным нелинейным элементом, а во втором – как стохастическая система с финитной плотностью распределения помехи.

Возможность рассмотрения стохастической системы с финитной плотностью как детерминированной обоснована в работе [6], где доказано фактически, что если система (1) устойчива при детерминированной $\varkappa(t)$, то она будет устойчива и для ограниченного стационарного случайного процесса $\varkappa(t,\omega)$, где аргумент ω означает зависимость от реализации.

В статье предлагается простой частотный критерий абсолютной устойчивости такой системы.

При наличии непараметрической неопределенности линейной части системы возникает задача робастной устойчивости. Соответствующий критерий также приводится в статье.

3. Критерий абсолютной устойчивости

Уравнение (1) системы может быть эквивалентным образом преобразовано к уравнению

(1') $$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}v; \quad y = \mathbf{c}'\mathbf{x},$$

где $v = v(y,t) = g(y)\ \varkappa(t)$ – случайным образом возмущенная характеристика нелинейного элемента, которая, как указывалось выше, благодаря условию финитности может рассматриваться как нестационарная нелинейная характеристика, удовлетворяющая в силу (2) и (3) условию

(4) $$0 \leqslant \underline{K} \leqslant \frac{v(y)}{y} \leqslant \overline{K},$$

где $\underline{K} = \underline{K}_1\underline{K}_2$; $\overline{K} = \overline{K}_1\overline{K}_2$.

Как известно [2, 7], для абсолютной устойчивости (неустойчивости) системы достаточно выполнения двух условий: 1) число оборотов годографа $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ в положительном направлении вокруг любой точки, лежащей на отрезке $\left[-\frac{1}{\underline{K}}; -\frac{1}{\overline{K}}\right]$, равно (меньше) числу неустойчивых полюсов передаточной функции разомкнутой линейной части $W(s)$, 2) $\quad \mathrm{Re}\frac{1+\overline{K}W(j\omega)}{1+\underline{K}W(j\omega)} > 0$.

Условие 1) означает, что любая линейная система с коэффициентом усиления, удовлетворяющим условию (4), устойчива (неустойчива).

Условие 2) в графической интерпретации означает, что частотная характеристика разомкнутой системы не пересекает окружность с центром на действительной оси, проходящую через точки $-\frac{1}{\underline{K}}$ и $-\frac{1}{\overline{K}}$. Отметим, что условие 1) выполняется для любой точки, если оно выполняется хотя бы для какой-то одной точки из отрезка $\left[-\frac{1}{\underline{K}}; -\frac{1}{\overline{K}}\right]$ и, в частности, для середины отрезка $d = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\underline{K}} + \frac{1}{\overline{K}}\right)$.

Условие 2) может быть представлено в виде

$$(5) \qquad |d + W(j\omega)| > R,$$

где $(d, 0)$ – центр, а $R = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\underline{K}} - \frac{1}{\overline{K}}\right|$ – радиус окружности, которую не должна пересекать частотная характеристика.

Пусть передаточная функция $W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$. Тогда условие (5) примет вид

$$(5') \qquad \frac{|N(j\omega) + dD(j\omega)|}{|D(j\omega)|} > R.$$

Отметим, что в числителе (5') стоит модуль характеристического годографа Михайлова замкнутой линейной системы с коэффициентом усиления d^{-1} : $G(j\omega) = N(j\omega) + dD(j\omega)$.

Согласно критерию Михайлова эта система устойчива тогда и только тогда, когда годограф Михайлова при изменении ω от 0 до ∞ последовательно обходит в положительном направлении столько квадрантов, какова степень характеристического полинома. Это свойство выполняется и для модифицированного годографа $\widetilde{G}(j\omega) = \frac{N(j\omega)+dD(j\omega)}{H(\omega)}$, где $H(\omega) \geqslant \varepsilon > 0$ – положительная функция, и, в частности, при $H(\omega) = |D(j\omega)|$ (как обычно, предполагается, что разомкнутая система не имеет полюсов на мнимой оси).

Сформулируем критерий абсолютной устойчивости и неустойчивости, исходя из изложенных соображений.

Следующее условие является эквивалентным условию 1) классической формулировки: 1') модифицированный годограф Михайлова

$$(6) \qquad \widetilde{G}(j\omega) = \frac{N(j\omega) + dD(j\omega)}{|D(j\omega)|}$$

при изменении ω от 0 до ∞ обходит в положительном направлении столько квадрантов, какова степень характеристического полинома (меньшее число квадрантов). Условие (5') эквивалентно условию 2). Суммируя сказанное, сформулируем критерий следующим образом.

Если модифицированный годограф (6) не пересекает круг радиуса R с центром в начале координат и при изменении ω от 0 до ∞ обходит в положительном направлении столько квадрантов, какова степень характеристического полинома, то система (1) при условиях (2), (3) абсолютно устойчива и неустойчива, если годограф обходит меньшее число квадрантов.

4. Критерий робастной устойчивости

Предположим теперь, что передаточная функция линейной части точно неизвестна, но ее частотная характеристика близка к номинальной:

$$(7)\qquad |W^0(j\omega) - W(j\omega)| \leqslant \beta(\omega), \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty.$$

Робастная устойчивость означает, что любая из систем, удовлетворяющих условию (7), абсолютно устойчива, т.е. что выполнено (5): $|d + W(j\omega)| > R$. Достаточным условием для (5), очевидно, будет

$$(8)\qquad |d + W^0(j\omega)| > R + \beta(\omega).$$

Частотное условие (8) в совокупности с условием 1) гарантирует устойчивость любой системы семейства.

Введем модифицированную частотную характеристику [4]:

$$\widetilde{W}(j\omega) = \frac{d + W^0(j\omega)}{R + \beta(\omega)} - d$$

и перепишем условие (8) в виде

$$(9)\qquad |\widetilde{W}(j\omega) + d| > 1.$$

С учетом того, что число и направление охватов центра круга d годографами $W^0(j\omega)$ и $\widetilde{W}(j\omega)$ одинаково, критерий робастной устойчивости может быть сформулирован следующим образом.

Рассматриваемая система робастно устойчива (неустойчива), если: 1) число оборотов годографа $\widetilde{W}(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ в положительном направлении вокруг точки d равно (меньше) числу неустойчивых полюсов передаточной функции разомкнутой линейной части $W^0(s)$, 2) выполнено условие (9), т.е. модифицированный годограф не пересекает круг с центром $d + j0$ и радиусом 1.

Полагая $W^0(s) = \frac{N^0(s)}{D^0(s)}$, запишем (9) в виде

$$(9')\qquad \left|\frac{N^0(j\omega) + dD^0(j\omega)}{(R + \beta(\omega))D^0(j\omega)}\right| > 1.$$

Модифицированный годограф Михайлова в этом случае имеет вид $\widetilde{G}(j\omega) = \frac{N^0(j\omega)+dD^0(j\omega)}{(R+\beta(\omega))|D^0(j\omega)|}$, а критерий формулируется следующим образом. Если модифицированный годограф Михайлова не пересекает круг с центром в начале координат и радиусом 1 и обходит в положительном направлении столько квадрантов, какова степень характеристического полинома, то система робастно устойчива и неустойчива, если годограф обходит меньшее число квадрантов.

5. Об устойчивости процессов

В заключение отметим, что приведенные критерии могут быть применены не только для решения вопроса от устойчивости состояния равновесия, но и когда речь идет об устойчивости процессов. Введем в уравнения системы ограниченное возмущающее воздействие $f(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}u\varkappa(t) + \mathbf{f}(t); \quad u = g(y); \quad y = \mathbf{c}'\mathbf{x},$$

а вместо требования (2) принадлежности нелинейной характеристики сектору $[\underline{K}_1, \overline{K}_1]$ предположим, что (см. [8]) $\underline{K}_1 \leqslant g'_y \leqslant \overline{K}_1$.

При этих условиях приведенные выше критерии гарантируют устойчивость в смысле ограниченности координат системы при ограниченных $\varkappa(t)$ и $f(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.
2. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М.: Наука, 1975. С. 98–110.
3. *Vidiasagar, Kimura.* Robust controllers of linear multivariable systems // Automatica. 1986. V. 22. P. 85–94.
4. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 7. С. 25–31.
5. *Цыпкин Я.З.* Круговые критерии робастной устойчивости нелинейных дискретных систем // Докл. Академии наук. 1992. Т. 322. № 4. С. 656–661.
6. *Браверман Э.М., Пятницкий Е.С.* Прохождение случайного сигнала через абсолютно устойчивые системы // АиТ. 1971. № 2. С. 36–41.
7. *Brocket, Lee.* Frequence-Domain Instability Criteria for Time-Varying and Nonlinear Systems //Proc. IEEE. 1967. V. 55. № 5. P. 604–618.
8. *Наумов Б.Н., Цыпкин Я.З.* Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления // АиТ. 1964. № 6. С. 852–867.

Поступила в редакцию 17.11.92

УДК 519.718

© 1994 г. **О.Н. КИСЕЛЕВ, канд. техн. наук,**
Б.Т. ПОЛЯК[1], **д-р техн. наук**
(Институт проблем управления РАН, Москва)

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПОЧКИ ПРОСТЫХ ЗВЕНЬЕВ

Рассматривается проблема устойчивости замкнутой системы, содержащей цепочку простых звеньев с интервальной неопределенностью для постоянных времени каждого звена. В этом случае неопределенные параметры входят в характеристическое уравнение нелинейно и задача не охватывается существующими критериями робастной устойчивости линейных семейств. Предлагается общее необходимое и достаточное условие робастной устойчивости. Оно конкретизируется для ряда частных случаев; особенно простой вид оно приобретает для неперекрывающихся интервалов неопределенности. Приводится также удобное достаточное условие робастной устойчивости.

1. Введение

Теория робастной устойчивости (т.е. устойчивости не полностью определенных систем) в настоящее время привлекает большое внимание специалистов по теории управления. Одно из основных направлений исследований, связанное с параметрической неопределенностью линейных систем, ведет свое начало от основополагающей

[1] Автор получил финансовую поддержку исследования от фонда Мейергофа во время своего визита в Вейцмановский институт, Израиль.