А. Н. Вишняков, Максимально-робастный регулятор низкого порядка для дискретных систем управления неопределенным объектом, *Автомат. и телемех.*, 2000, выпуск 11, 156–167

Автоматика и телемеханика, № 11, 2000

Адаптивные и робастные системы

УДК 62-501.72

© 2000 г. **А. Н. ВИШНЯКОВ, канд. техн. наук**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МАКСИМАЛЬНО-РОБАСТНЫЙ РЕГУЛЯТОР НИЗКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОБЪЕКТОМ

Работа посвящена задаче синтеза регуляторов низкого фиксированного порядка для линейных объектов с постоянными коэффициентами, параметры которых принадлежат заданному выпуклому множеству. Робастный регулятор гарантирует, что для любого объекта из семейства коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы не покинут заданной области, а искомый максимально-робастный регулятор обеспечит это свойство для наиболее широкого семейства объектов. Требования к характеристическому полиному определяются специальными ограничениями, позволяя рассматривать в качестве частных случаев интервальные и сверхустойчивые полиномы. Приведенные примеры иллюстрируют особенности анализа и синтеза робастных систем управления.

1. Введение

Уже в течение многих лет в работах, связанных с построением систем управления, оптимальность и робастность выделяются, как наиболее важные показатели качества регулятора. Существующие подходы, такие как H_∞ и H_2 [1] или методы интервальной и круговой арифметики [2], позволяют эффективно синтезировать регуляторы для различных классов неопределенности объекта. Тем не менее остается фактом подавляющее преобладание ПИД структуры среди всех реально применяемых регуляторов. Одна из причин этому состоит в том, что порядок регулятора определяется в процессе синтеза, а практическая необходимость обычно ограничивает нас при выборе этого порядка. Именно практическая важность порождает постоянный серьезный интерес к проблематике регуляторов фиксированного порядка [3]–[6].

В данной работе предлагается процедура синтеза робастных регуляторов заданного порядка для дискретных линейных объектов с постоянными коэффициентами. При этом желаемый характеристический полином не фиксируется, а ограничивается принадлежностью к специальному семейству. Семейство целевых характеристических полиномов представлено в удобной параметрической форме, позволяющей включить классы интервальных и сверхустойчивых полиномов как частные случаи ограничений на параметры. Для описания неопределенности объекта так же используется параметрический подход. Отметим, что для непрерывных систем управления и интервальных ограничений подобная задача синтеза рассмотрена в работе Келла и Бхатачарии [7], где показано, что допустимое семейство регуляторов заданного порядка образует выпуклое множество. Настоящая работа развивает эти идеи, используя меру или масштаб неопределенности объекта [8]. Чем больше масштаб неопределенности, тем больше множество допустимых объектов, но тем уже семейство подходящих регуляторов. Поиск предельного непустого множества подходящих регуляторов, которое за исключением специальных случаев включает единственный максимально-робастный регулятор, и составляет главную цель данной статьи. Дополнительно рассмотрена задача робастного анализа, отвечающая на вопрос насколько может быть велик масштаб неопределенности, чтобы для всех допустимых объектов система управления с фиксированным регулятором имела характеристический полином из целевого множества.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретный объект с передаточной функцией $W(q)$

$$W(q) = \frac{qP(q)}{Q(q)}, \quad Q(0) = 1, \quad P(0) \neq 0, \tag{1}$$

здесь q — оператор задержки, а $P(q)$ и $Q(q)$ – полиномы оператора задержки [9]. Допустимое семейство объектов определяется набором неизвестных параметров α_i, $i = \overline{1, n_\alpha}$ так, что

$$P(q) = P_0(q) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i P_i(q), \quad Q(q) = Q_0(q) + q \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i Q_i(q), \tag{2}$$

где $P_i(q)$ и $Q_i(q)$ $(i = \overline{0, n_\alpha})$ – заданные полиномы, а вектор неопределенных параметров α ограничен по одной из двух норм:

$$\ell_1 : \sum_{i=1}^{n_\alpha} |\alpha_i| \leqslant \gamma_1; \quad \ell_\infty : |\alpha_i| \leqslant \gamma_\infty, \quad i = \overline{1, n_\alpha}. \tag{3}$$

Параметр γ определяет *масштаб неопределенности* или размер области допустимых параметров, а тип нормы – ее форму. При ограничениях в ℓ_1 такая область имеет вид многомерного октаэдра, а при ℓ_∞ параметр неопределенности α принадлежит n_α-мерному кубу.

Зададимся регулятором $T(q)$ и $R(q)$, тогда замкнутая система управления будет описываться следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} &Q(q)y(k) = qP(q)u(k) + f(k), \\ &R(q)u(k) = r(k) - T(q)y(k), \end{aligned} \tag{4}$$

здесь k – дискретное время, а $y(k)$, $u(k)$, $f(k)$ и $r(k)$ – выход системы, управляющее, возмущающее и задающее воздействия соответственно. Цель данной работы состоит в изучении собственных динамических свойств системы, которые зависят только от расположения полюсов характеристического полинома, поэтому для простоты изложения рассмотрение природы возмущений и задающих воздействий и их влияния на систему опускается. Исключая управление $u(k)$ из системы (4) и группируя члены содержащие $y(k)$, получим выражение для характеристического полинома

$$G(q) = Q(q)R(q) + qP(q)T(q), \quad G(0) = 1. \tag{5}$$

Как при изменении параметров регулятора, так и при изменении параметров объекта характеристический полином меняется. Определим *целевое множество* желаемых характеристических полиномов в виде следующего параметрического представления

$$G^*(q) = G_0^*(q) + q \sum_{i=1}^{n_\beta} \beta_i G_i^*(q), \quad n_\beta = \deg\, G^*(q) = \deg\, G(q), \tag{6}$$

где $G_0^*(q)$ – центр целевого множества, а вектор β – параметр множества, ограниченный (подобно α) либо по "октаэдрической", либо по "кубической" нормам

$$(7) \qquad \ell_1 : \sum_{i=1}^{n_\beta} |\beta_i| < 1; \quad \ell_\infty : |\beta_i| < 1, \quad i = \overline{1, n_\beta}.$$

Полиномы $G_i^*(q)$ – произвольные заданные, с единственным ограничением на полный ранг матрицы, столбцы которой составлены из их коэффициентов.

Подчеркнем, что целевое множество (6), (7) в качестве частных случаев описывает два важных семейства полиномов. Действительно, положим $G_i^*(q) = v_i q^i$, где $v_i \neq 0$ – весовые коэффициенты, тогда при ограничениях в ℓ_∞ целевое множество представляет собой интервальный полином. Во втором случае, если положить $v_i = 1$, то в рамках ограничений по ℓ_1 норме семейство (6) описывает сверхустойчивые полиномы [10]. Сверхустойчивым называется полином $G(q) = 1 + d_1 q + \cdots + d_m g^m$, коэффициенты которого удовлетворяют неравенству $\sum_{i=1}^{m} |d_i| < 1$. Отметим, что системы управления со сверхустойчивым характеристическим полиномом обладают свойством равномерной ограниченности выхода.

Возвращаясь к данной работе, сформулируем две главных задачи. Первая – это задача робастного анализа, которая состоит в определении максимального масштаба неопределенности, при котором для всех объектов из семейства (2) при фиксированном регуляторе $T^0(q)$ и $R^0(q)$, характеристический полином (5) принадлежит семейству (6). Естественно, что для различных норм (3) и (7) максимальные значения этого масштаба различны. Нетривиальное решение этой задачи предполагает, что номинальный характеристический полином ($\alpha_i = 0$) принадлежит целевому множеству.

Вторая задача – задача робастного синтеза заключается в поиске максимально-робастного регулятора $T^*(q)$ и $R^*(q)$, гарантирующего, что для любого другого регулятора той же степени, максимально допустимый масштаб неопределенности будет меньше оптимального значения. Отметим, что такая постановка задачи не навязывает конкретный номинальный характеристический полином, проблема выбора которого, например, при рассмотрении задач модального управления обычно умалчивается.

3. Робастный анализ

Перепишем уравнение (4) с учетом структуры неопределенности объекта (2)

$$(8) \qquad G(q) = G_0(q) + q \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i G_i(q),$$

где

$$G_0(q) = Q_0(q) R^0(q) + q P_0(q) T^0(q),$$
$$G_i(q) = Q_i(q) R^0(q) + P_i(q) T^0(q).$$

Индекс "0" в обозначениях $T^0(q)$ и $R^0(q)$ подчеркивает, что регулятор фиксированный. Обозначим через d вектор, составленный из коэффициентов $d_i, i = \overline{1, n_\beta}$ полинома $G(q)$. Тогда равенство (8) можно переписать в матричном виде

$$(9) \qquad d = g_0 + G\alpha, \quad d \in R^{n_\beta}, \quad \alpha \in R^{n_\alpha},$$

где g_0 – вектор соответствующих коэффициентов полинома $G_0(q)$, а G – матрица размерности $(n_\beta \times n_\alpha)$, столбцы которой составлены из коэффициентов полиномов

$G_i(q)$. Аналогичное матричное представление легко выписать и для уравнения (6), обозначив через g_0^* – вектор соответствующих коэффициентов полинома $G_0^*(q)$, а через G^* – матрицу размерности $(n_\beta \times n_\beta)$, столбцы которой составлены из коэффициентов полиномов $G_i^*(q)$

$$(10) \qquad d^* = g_0^* + G^*\beta, \quad d^* \in R^{n_\beta}, \quad \beta \in R^{n_\beta}.$$

Для того, чтобы выполнить требование принадлежности характеристического полинома целевому множеству, приравняем выражения (9) и (10). Так как матрица G^* по условию задачи квадратная и невырожденная, то всякому вектору α соответствует вектор β как линейное отображение из R^{n_α} в R^{n_β}

$$(11) \qquad \beta = {G^*}^{-1}(g_0 - g_0^*) + {G^*}^{-1}G\alpha = h_0 + H\alpha.$$

В зависимости от типа ограничений на α (3), задача робастного анализа состоит в поиске максимального n_α-мерного "октаэдра" или "куба", линейный образ которого целиком покрывается n_β-мерным многогранником (7). В общем случае такая задача решается перебором по граням этого многогранника. Будем выбирать грани парами с противоположной, при этом объем перебора будет $2^{n_\beta - 1}$ для случая ℓ_1 нормы и n_β для ℓ_∞ нормы.

Рассмотрим подробнее вариант, при котором α и β ограничены по ℓ_∞ норме. В этом случае перебор осуществляется по граням n_β-мерного куба. Обозначим через s вектор-строку перебора все компоненты которого равны нулю за исключением одного равного единице. Именно эта ненулевая компонента будет отвечать за выбор той или иной пары граней многомерного куба так, что если $s^{(1)} = s$ выбирает какую-либо грань, то $s^{(2)} = -s$ выбирает противоположную. При этом обязаны выполняться следующие неравенства

$$s^{(1)}h_0 + s^{(1)}H\alpha < 1, \quad s^{(2)}h_0 + s^{(2)}H\alpha < 1,$$

что с учетом (3) эквивалентно следующему двустороннему неравенству

$$-1 < sh_0 + \gamma sH\alpha < 1, \quad |\alpha_i| \leqslant 1, i = \overline{1, n_\alpha}.$$

В зависимости от знака числа sh_0 ограничивать будет либо правое либо левое неравенство. Наибольшее γ при котором неравенство все еще будет выполняться соответствует наихудшему выбору α, т.е.

$$(12) \qquad \gamma = \min_\alpha \frac{1 - |sh_0|}{|sH\alpha|}.$$

Так как допустимое множество параметров α – выпуклый многогранник, а $|sH\alpha|$ – выпуклая по α функция, то минимальное значение γ будет достигаться на одной из его вершин. Отсюда непосредственно следует уравнение для искомого максимального масштаба неопределенности γ_∞^∞, как минимальное γ по всей совокупности перебора

$$(13) \qquad \gamma_\infty^\infty = \min_{1 \leqslant i \leqslant n_\beta} \frac{1 - |h_{0,i}|}{\sum\limits_{j=1}^{n_\alpha} |h_{ij}|},$$

здесь $h_{0,i}$ – i-я компонента вектора h_0, а h_{ij} – элемент матрицы H, расположенный в i-й строке и j-м столбце. Аналогичные рассуждения для случая ограничений вектора α по норме ℓ_1 приводят к похожему выражению для другого масштаба неопределенности

$$(14) \qquad \gamma_1^\infty = \min_{1\leqslant i\leqslant n_\beta} \frac{1-|h_{0,i}|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n_\alpha} |h_{ij}|}.$$

Отметим, что нижний индекс у γ соответствует норме ограничений вектора α, а верхний индекс – норме ограничений вектора β.

В оставшихся двух вариантах вектор β ограничен по ℓ_1 норме, и перебор следует осуществлять по граням n_β-мерного "октаэдра". Компоненты вектора-строки перебора s в этом случае равны либо 1, либо -1, за исключением одной произвольной всегда равной 1. Как и ранее, искомые значения величин γ_1^1 и γ_∞^1 находятся как минимальные значения γ (12) по всей совокупности перебора $2^{n_\beta-1}$

$$(15) \qquad \gamma_1^1 = \min_s \frac{1-|sh_0|}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n_\alpha} |sh_j|}, \quad \gamma_\infty^1 = \min_s \frac{1-|sh_0|}{\sum\limits_{j=1}^{n_\alpha} |sh_j|},$$

где h_j – j-й столбец матрицы H.

При условии $n_\alpha < n_\beta$ для вычисления значений γ_1^1 и γ_1^∞ более эффективным может оказаться перебор не по граням покрывающего n_β-мерного "октаэдра", а по вершинам вписанного многогранника. Объем перебора при этом будет n_α для α, ограниченного в ℓ_1, и $2^{n_\alpha-1}$ при ограничениях по ℓ_∞ норме, но на каждом шаге необходимо решать одномерную оптимизационную задачу вида

$$\gamma \longrightarrow \max, \quad \|t_0 \pm t_1\gamma\|_1 \leqslant 1,$$

где γ – скаляр, t_0 и t_1 – технические вектора размерности n_β, а $\|\ldots\|_1$ – ℓ_1 норма вектора.

Для случая когда номинальный и центральный целевой характеристические полиномы совпадают ($d = d^*$), легко выписать упрощенные выражения для масштабов неопределенности

$$(16) \qquad (\gamma_\infty^\infty)^{-1} = \max_{1\leqslant j\leqslant n_\alpha} \sum_{i=1}^{n_\beta} |h_{ij}|, \quad \left(\gamma_\infty^1\right)^{-1} = \max_{1\leqslant i\leqslant n_\beta} \max_{1\leqslant j\leqslant n_\alpha} |h_{ij}|,$$
$$\left(\gamma_1^1\right)^{-1} = \max_{1\leqslant i\leqslant n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} |h_{ij}|,$$

которые фактически соответствуют различным определениям норм для матриц [11]. Видно, что величина γ_∞^∞ определяется столбцом, а γ_1^1 – строкой матрицы H, имеющими максимальную ℓ_1 норму, величина же γ_∞^1 обратно пропорциональна максимальному по модулю элементу матрицы H. С вычислительной точки зрения для получения значений этих величин достаточно однократного просмотра элементов матрицы H.

4. Робастный синтез

Зафиксируем степени полиномов $R(q)$ и $T(q)$, обозначив их ℓ_R и ℓ_T соответственно. Сформируем вектор параметров регулятора $\theta \in R^\ell$, $\ell = 1 + \ell_R + \ell_T$, состоящий из коэффициентов $R(q)$ и $T(q)$, исключая свободный коэффициент полинома $R(q)$ всегда равный 1. После этого характеристический полином замкнутой системы управления с учетом структуры неопределенности объекта перепишется в следующем виде

$$G(q) = G_{0,0}(q) + q\sum_{j=1}^{\ell}\theta_j G_{0,j}(q) + q\sum_{i=1}^{n_\alpha}\alpha_i\left(G_{i,0}(q) + \sum_{j=1}^{\ell}\theta_j G_{i,j}(q)\right), \tag{17}$$

при этом

$$\begin{aligned}
&G_{0,0}(q) = Q_0(q),\\
&G_{0,j}(q) = q^{j-1}Q_0(q), \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell_R,\\
&G_{0,j}(q) = q^{j-\ell_R-1}P_0(q), \quad \ell_R < j \leqslant \ell,
\end{aligned}$$

а для $i = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned}
&G_{i,j}(q) = q^{j}Q_i(q), \quad 0 \leqslant j \leqslant \ell_R\\
&G_{i,j}(q) = q^{j-\ell_R-1}P_i(q), \quad \ell_R < j \leqslant \ell.
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем пункте обозначим через d вектор, составленный из коэффициентов $d_i, i = \overline{1,n_\beta}$ полинома $G(q)$ (17). Тогда это уравнение можно переписать в матричном виде

$$d = g_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\theta_j g_j + \left(G_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\theta_j G_j\right)\alpha, \quad d \in R^{n_\beta}, \quad \alpha \in R^{n_\alpha}, \tag{18}$$

где g_j – векторы из соответствующих коэффициентов полиномов $G_{0,j}(q)$, а G_j – матрицы размерности $(n_\beta \times n_\alpha)$, столбцы которых составлены из коэффициентов полиномов $G_{i,j}(q)$. Для выполнения условия попадания характеристического полинома в целевое множество приравняем d из (18) и d^* из (10), в результате получим следующую зависимость

$$\beta = h_0(\theta) + H(\theta)\alpha, \quad \beta \in R^{n_\beta}, \quad \alpha \in R^{n_\alpha}. \tag{19}$$

В отличие от уравнения (11) компоненты вектора h_0 и матрицы H линейно зависят от вектора параметров регулятора θ

$$\begin{aligned}
&h_0(\theta) = G^{*-1}\left(g_0 - g_0^* + \sum_{j=1}^{\ell}\theta_j g_j\right),\\
&H(\theta) = G^{*-1}\left(G_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\theta_j G_j\right).
\end{aligned}$$

Уравнение (19), дополненное ограничениями (3) и (7), определяет собой неявную зависимость масштаба неопределенности γ от вектора параметров θ. Легко видеть, что эта функция *квазивыпуклая*, т.е. при фиксированном γ множество Θ подходящих θ выпуклое. Действительно, для любого фиксированного α уравнение (19) есть линейное отображение. Так как множество допустимых β выпукло (7), то и его прообраз $\Theta(\alpha)$ будет выпуклым. Отсюда следует выпуклость Θ, являющегося пересечением множеств $\Theta(\alpha)$.

При увеличении γ области допустимых параметров регулятора $\Theta(\gamma)$ образуют последовательность вложенных выпуклых множеств. Назовем предельным γ^* такую величину, при которой множество $\Theta^* = \Theta(\gamma^*)$ в последний раз непустое. Именно это единственное предельное множество и определяет параметры искомого максимально-робастного регулятора, а величина γ^* – максимально-возможный масштаб неопределенности. За исключением специальных случаев, $0 < \gamma^* < \infty$ и предельное множество Θ^* – единственная точка. Отметим один важный невырожденный специальный случай, имеющий отдельное прикладное значение. Этот случай соответствует ситуации, когда даже при $\gamma = 0$ (для номинального объекта) не существует никакого регулятора заданного порядка, который бы обеспечивал попадание в целевое множество. Если данная ситуация реализуется, то следует расширить структуру регулятора, либо изменить требования к динамическим свойствам проектируемой системы управления.

При фиксированном значении γ, учитывая свойство выпуклости множеств (3) и (7), легко выписать систему неравенств, накладывающих ограничения на выбор θ. Для этого введем вектор-столбец перебора $s_\alpha \in R^{n_\alpha}$ по всем вершинам множества (3) и вектор-строку перебора $s_\beta \in R^{n_\beta}$ по всем граням множества (7), тогда необходимо потребовать, чтобы для всей совокупности перебора выполнялись неравенства

$$(20) \qquad s_\beta h_0(\theta) s_\alpha + \gamma s_\beta H(\theta) s_\alpha < 1.$$

Так как зависимости $h_0(\theta)$ и $H(\theta)$ линейные, то неравенства (20) переписываются в матричном виде

$$(21) \qquad B\theta < b, \quad b \in R^M,$$

где B – матрица размерности $(M \times \ell)$, а число M зависит от типа ограничений на α и β. Пусть нижний индекс соответствует выбору нормы для α, а верхний для β, тогда

$$(22) \qquad M_1^1 = 2n_\alpha \cdot 2^{n_\beta}, \quad M_1^\infty = 2n_\alpha \cdot 2n_\beta, \quad M_\infty^1 = 2^{n_\alpha + n_\beta}, \quad M_\infty^\infty = 2^{n_\alpha} \cdot 2n_\beta.$$

Для проверки совместности системы линейных неравенств (21) (задача линейного программирования) применим метод внутренней точки [12], который в случае совместности системы явно указывает подходящее θ. Положим найденное значение θ в качестве параметров регулятора $R^0(q)$ и $T^0(q)$. Решая задачу робастного анализа, описанную в предыдущем пункте, получим очередное значение "пробного" масштаба неопределенности γ, которое будем использовать для составления новой системы неравенств (21). В процессе таких итераций величина γ будет стремиться к оптимальному значению γ^*, а регулятор $R^0(q)$, $T^0(q)$ – к максимально-робастному $R^*(q)$ и $T^*(q)$.

5. Обсуждение

Для реализуемости замкнутой системы управления необходимо обеспечить ее устойчивость, что накладывает ограничения на выбор целевого множества характеристических полиномов (6), (7). Для проверки устойчивости семейства удобно использовать метод Поляка–Цыпкина [13], основанный на анализе модифицированного годографа Михайлова. Если запас робастной устойчивости для заданного семейства больше единицы, то все семейство гарантированно устойчиво, в противном случае целевое множество характеристических полиномов следует уменьшить.

Тест на совместность системы неравенств (21) при фиксированном значении γ представляет собой удобный инструмент для проверки существования подходящего регулятора в рамках заданного порядка. Более того, осуществляя последовательные проверки совместности системы неравенств при заданном масштабе неопределенности, шаг за шагом наращивая степень полиномов регулятора, нетрудно вычислить минимальный робастный регулятор. Степень такого регулятора может быть меньше степени оптимального минимального регулятора, получаемого как решение диофантового уравнения для номинального объекта

$$Q_0(q)R(q) + qP_0(q)T(q) = G_0(q). \tag{23}$$

Здесь $G_0(q)$ – номинальный характеристический полином, принадлежащий целевому семейству. Если степень $G_0(q)$ не превосходит суммы степеней полиномов $Q_0(q)$ и $P_0(q)$, то минимальный регулятор $R^0(q)$ и $T^0(q)$ имеет степени $\deg P^0$ и $\deg Q^0 - -1$ соответственно [14]. Существует целое семейство регуляторов, удовлетворяющих уравнению (23)

$$R(q) = R^0(q) - qP_0(q)A(q), \quad T(q) = T^0(q) + Q_0(q)A(q), \tag{24}$$

где $A(q)$ – произвольный полином-параметр.

Следует обратить внимание на то, что в ряде практических задач необходимо обеспечить заданный характеристический полином для номинальной системы. Очевидно, что максимально робастный регулятор теперь следует искать в рамках семейства (24). Для этого положим в качестве компонент вектора $\theta \in R^\ell$ коэффициенты полинома-параметра $A(q)$, $\ell = \deg A + 1$, тогда характеристический полином замкнутой системы перепишется в виде

$$G(q) = G_0 + q\sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i \left(G_{i,0}(q) + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j G_{i,j}(q) \right), \tag{25}$$

где через $G_i(q)$ и $G_{i,j}(q)$ обозначены следующие полиномы

$$\begin{aligned}
&G_0(q) = Q_0(q)R^0(q) + qP_0(q)T^0(q)\\
&G_{i,0}(q) = Q_i(q)R^0(q) + P_i(q)T^0(q), \quad i = \overline{1, n_\alpha}\\
&G_{i,j}(q) = q^j \left(P_i(q)Q_0(q) - qQ_i(q)P_0(q)\right), \quad i = \overline{1, n_\alpha}, \quad j = \overline{1, \ell}.
\end{aligned}$$

Оптимальное θ^*, определяющее максимально-робастный регулятор, получается по схеме, рассмотренной в предыдущем пункте.

Выделим специальный случай, возникающий при параметризации регулятора вида (24), а именно случай равенства номинального и центрального целевого характеристических полиномов $G^0(q) = G^*(q)$. При этом зависимость (19) упрощается

$$\beta = H(\theta)\alpha, \quad H(\theta) = G^{*\,-1} \left(G_0 + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j G_j \right), \tag{26}$$

где $G_j, j = \overline{0, \ell}$ – матрицы, столбцы которых составлены из коэффициентов полиномов $G_{i,j}(q)$. Система неравенств (21) теперь может быть переписана в виде двухсторонних ограничений

$$-1 < b + B\theta < 1, \quad b \in R^M, \tag{27}$$

причем размерность матрицы B по сравнению с (21) падает в четыре раза так, что

$$M_1^1 = n_\alpha \cdot 2^{n_\beta - 1}, \quad M_1^\infty = n_\alpha \cdot n_\beta, \quad M_\infty^1 = 2^{n_\alpha + n_\beta - 2}, \quad M_\infty^\infty = 2^{n_\alpha - 1} \cdot n_\beta. \tag{28}$$

Ту или иную параметризацию регулятора следует выбирать исходя из особенностей применения. Для систем, где объект действительно неопределен или его параметры существенно дрейфуют в рамках области неопределенности (3), логично применять подход, изложенный в предыдущей главе. В другой ситуации, когда объект не подвержен изменениям в режиме нормальной работы, удобно использовать подход, основанный на параметризации (22). В этом случае гарантируется желаемое заданное поведение замкнутой системы, а при аварийном отклонении объекта от номинала система максимально долго сохраняет допустимые параметры. К преимуществам параметризации регулятора (22) следует отнести и то, что независимо от вида ограничений подходящий регулятор всегда существует.

Отметим еще один аспект рассматриваемой проблемы, который явно демонстрирует грубость синтезируемых систем управления по параметрам регулятора. Действительно, ограничимся величиной масштаба неопределенности меньше оптимального значения $\gamma < \gamma^*$. В этом случае система неравенств (21) или (27) будет определять выпуклую область параметров регуляторов, каждый из которых для всех допустимых объектов гарантирует целевой характеристический полином (6). Следовательно, при небольших изменениях параметров регулятора свойства замкнутой системы управления существенно не изменятся. Более того, наличие области допустимых регуляторов позволяет реализовать его, например, при дискретном представлении коэффициентов или произвести дополнительную оптимизацию по какому-либо новому критерию.

6. Примеры

Рассмотрим объект с номинальной передаточной функцией

$$W(q) = \frac{0{,}8q + 0{,}5q^2}{1 - 1{,}2q + 0{,}1q^2}.$$

Неопределенность в объекте опишем допусками на его коэффициенты так, что

$$P_1(q) = 0{,}1, \quad P_2(q) = 0{,}2q, \quad P_3(q) = P_4(q) = 0{,}0,$$
$$Q_1(q) = Q_2(q) = 0{,}0, \quad Q_3(q) = 0{,}2, \quad Q_4(q) = 0{,}1q.$$

Желаемое целевое множество характеристических полиномов совпадает с множеством сверхустойчивых полиномов, для этого следует положить в (6) $G_i^*(q) = q^i$ и выбрать ограничение β по ℓ_1 норме (7)

$$G^*(q) = 1 + q\sum_{i=1}^{n_\beta}\beta_i q^i, \quad \sum_{i=1}^{n_\beta}|\beta_i| < 1.$$

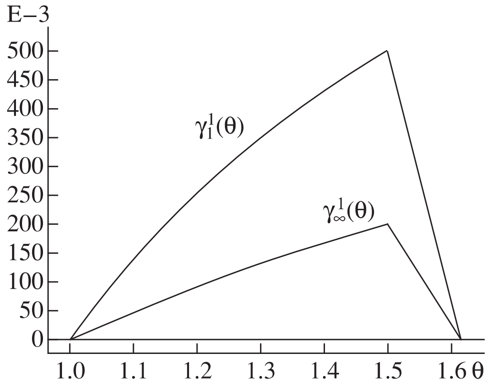
Зададимся простейшим семейством регуляторов $R(q) = 1$ и $T(q) = \theta$, где θ – скалярный параметр. С физической точки зрения этот параметр определяет коэффициент усиления в петле обратной связи. Согласно (17)–(19) зависимость β от α в матричном виде запишется в следующем виде

$$\beta = \begin{pmatrix} 0{,}8\,\theta - 1{,}2 \\ 0{,}5\,\theta + 0{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1\,\theta & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0{,}2\,\theta & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}\alpha.$$

Первый вопрос состоит в том, найдется ли хотя бы один регулятор из семейства простейших регуляторов, придающий замкнутой системе свойства сверхустойчивости? Оказывается такие регуляторы существуют, и допустимый диапазон для параметра θ легко находится из системы неравенств (20)–(21) при “пробном” $\gamma = 0$

$$1{,}000 < \theta < 1{,}615.$$

Зависимости максимального допустимого масштаба неопределенности от конкретного выбора θ показана на рисунке. Верхний график соответствует ограничениям



Зависимость максимального масштаба неопределенности от коэффициента усиления в обратной связи

на α по ℓ_1 норме, а нижний – по ℓ_∞. Максимальные значения масштабов неопределенности соответствуют максимально-робастному регулятору так, что

$$\gamma_1^1 = 0{,}5, \quad \gamma_\infty^1 = 0{,}2, \quad T^*(q) = \theta^* = 1{,}5.$$

Для более высоких порядков регулятора максимальные значения масштабов неопределенности γ_1^1 и γ_∞^1 показаны в табл. 1, 2 соответственно. Видно, что самый большой прирост допустимого масштаба неопределенности может быть получен уже при первом увеличении порядка полинома $R(q)$. Увеличение степени полинома $T(q)$ так же приводит к росту значения γ, но в меньшей степени. Поэтому на практике можно ограничится степенями полиномов $R(q)$ и $T(q)$ равными 1 и 0 соответственно, так как дальнейшее увеличение степени регулятора не приводит к существенному увеличению допустимого масштаба неопределенности. Для случая ограничений по ℓ_1 норме параметры максимально-робастного регулятора и соответствующего номинального характеристического полинома следующие

Таблица 1

Зависимость величины γ_1^1 от порядка регулятора

	$\deg R = 0$	$\deg R = 1$	$\deg R = 2$
$\deg T = 0$	0,500	3,647	3,716
$\deg T = 1$	0,949	3,765	3,765
$\deg T = 2$	1,088	3,765	3,765

Таблица 2

Зависимость величины γ_∞^1 от порядка регулятора

	$\deg R = 0$	$\deg R = 1$	$\deg R = 2$
$\deg T = 0$	0,200	1,474	1,476
$\deg T = 1$	0,465	1,511	1,526
$\deg T = 2$	0,558	1,511	1,531

$$R^*(q) = 1 + 0{,}326162q, \quad T^*(q) = 0{,}896333,$$
$$G_0(q) = 1 - 0{,}157q + 0{,}157q^2 + 0{,}033q^3.$$

В случае ограничений вектора α по ℓ_∞ норме параметры тех же полиномов другие

$$R^*(q) = 1 + 0{,}385656q, \quad T^*(q) = 0{,}875820,$$
$$G_0(q) = 1 - 0{,}114q + 0{,}075q^2 + 0{,}039q^3.$$

Отметим, что характеристический полином полученных максимально-робастных систем управления не совпадает с центральным целевым $G^*(q) = 1$.

Предположим другую ситуацию, когда требования к системе управления навязывают конкретный номинальный характеристический полином. В этом случае следует воспользоваться специальной параметризацией регулятора (24), которая в нашем примере для номинального характеристического полинома равного $G_0(q) = 1$, переписывается в виде

$$R(q) = 1 + 0{,}428q - q(0{,}8 + 0{,}5q)A(q),$$
$$T(q) = 0{,}965 - 0{,}086q + (1 - 1{,}2q + 0{,}1q^2)A(q),$$

где $A(q)$ – произвольный полином параметра. Для скалярного $A(q) = \theta, \theta \in R$ максимальные значения допустимых параметров неопределенности будут

$$\gamma_1^1 = 3{,}611(A^*(q) = 0{,}145321), \quad \gamma_\infty^1 = 1{,}493(A^*(q) = 0{,}062665),$$

степень полиномов регулятора при этом равняется 2. Сравнение полученных значений γ с данными из табл. 1 и табл. 2 показывает, что близкие или даже большие значения этих величин могут быть обеспечены при меньших порядках регулятора. Очевидно, что цена этому – отсутствие ограничений на характеристический полином номинальной системы управления.

7. Заключение

В работе изучаются дискретные системы управления с регуляторами низкого порядка, проблема синтеза которых, несмотря на долгое время существования, остается открытой и в настоящее время. В первую очередь это связано с тем, что современные методы, как правило, навязывают порядок регулятора, что вызывает проблемы при его реализации на практике вследствие аппаратно-фиксированной структуры.

Рассматриваемые алгоритмы снимают эту проблему и позволяют синтезировать регуляторы произвольного желаемого порядка. При этом существенно учитывается информация о неопределенности объекта и структуре целевого множества характеристических полиномов. В зависимости от требований к замкнутой системе управления предлагаемый подход единым образом охватывает задачи синтеза как с ограничениями на номинальный характеристический полином, так и без ограничений. С вычислительной точки зрения процедура эквивалентна линейному программированию. Отметим, что для изучения свойств уже существующего регулятора предлагается удобный инструмент робастного анализа, позволяющий оценить как границы на допустимые отклонения объекта от номинала, так и степень грубости системы по параметрам регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Publishing Co. 1996.

2. *Polyak B.T., Vishnyakov A.N.* Multiplying disks: robust stability of a cascade connection // Eur. J. Control. 1996. No. 2. P. 101–111.
3. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation with guaranteed cost bounds // Math. Control, Signals Systems. 1990. V. 3. P. 139–136.
4. *Åström K., Hägglund T.* PID controllers: Theory, design, and tunning. Recearch Triangle Park, NC: Int. Society Measurement and Control. 1995.
5. *Tesi A., Torrini A., Vicino A.* Low order suboptimal robust controller design for systems with structured Uncertainty // Proc. second IFAC symposion robust control design. Budapesht. Hungary, 1997.
6. *Polyak B.T., Halpern M.E.* Robust Stability and Design of Linear Discrete-Time SISO Systems Under ℓ_1 Uncertainties // IEEE Trans. Automat Control. V. 44. No. 11. 1999.
7. *Kell L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust stability and performance with fixed order controllers // Automatica. 1999. V. 35. P. 1717–1724.
8. *Вишняков А.Н.* Синтез максимально-робастной системы управления дискретным объектом с непараметрической неопределенностью // АиТ. 1999. № 3. С. 71–77.
9. *Цыпкин Я.З., Вишняков А.Н.* Синтез модальных дискретных систем управления // АиТ. 1993. № 7. С. 86–94.
10. *Polyak B.T., Halpern M.E.* Optimal design for discrete-time linear systems via new performance index // Proc. 38-th CDC. Phoenix. AZ. 1999. P. 894–899.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1998. С. 385–387.
12. *Дикин И.И.* Определение допустимых и оптимальных решений методом внутренних точек. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998.
13. *Tsypkin Ya.Z., Polyak B.T.* Frequency domain criteria for robust of a family of linear difference equation // J. Diff. Equations and Applications. 1995. V. 1. No. 2. P. 137–149.
14. *Волгин Л.Н.* Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.: Наука, 1986.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А. П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 6.03.2000