

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Dipartimento di Fisica

Tesi di Dottorato di ricerca in Fisica

XVI ciclo

**Sviluppo di un apparato
per la misura di G
mediante interferometria atomica**

Candidato: **Marco Fattori**

Relatore:

Prof. Guglielmo Maria Tino

Coordinatore:

Prof. Alessandro Cuccoli

Aprile, 2004

Indice

Introduzione	1
1 Motivi e modalità di una misura di G mediante interferometria atomica.	3
1.1 Perché misurare G	4
1.2 Cenni storici	5
1.3 Perché utilizzare un interferometro atomico	9
1.4 Descrizione introduttiva di un orologio e di un gravimetro atomico	11
1.5 Schema di misura proposto	16
2 Teoria dell'interferometro atomico	19
2.1 Analogie tra luce ed onde di materia: formulazione matriciale dell'ottica gaussiana	19
2.2 ABCD per ottica atomica	23
2.2.1 Metodo del path-integral	23
2.2.2 Metodo delle trasformazioni unitarie	27
2.2.3 Funzioni di Hermite Gauss e loro evoluzione	28
2.3 Separatore per onde di materia: transizioni Raman stimulate .	30
2.4 Interferometro	37
3 Apparato sperimentale	45
3.1 Sistema da vuoto	45

3.1.1	Struttura	45
3.1.2	Finestre	47
3.1.3	Cottura e dispenser	48
3.2	Sistema Laser	49
3.3	Laser di trappola, lancio e di rivelazione	49
3.4	Fasci Raman	55
3.4.1	Allineamento	55
3.4.2	Polarizzazione	55
3.4.3	Controllo della fase dei laser di riferimento	57
3.4.4	Setup	60
3.4.5	Aggancio in fase	62
3.4.6	Rumore di fase	66
3.5	Campi magnetici	68
3.6	Lancio e rivelazione	68
3.7	Conclusioni	71
4	Masse campione	73
4.1	Campo verticale di un cilindro cavo	75
4.2	Accuratezza di un gravimetro	77
4.3	Misura doppio differenziale	79
4.4	La nostra massa sorgente	81
4.4.1	Il problema del gradiente terrestre	81
4.4.2	Come essere insensibili al gradiente terrestre	82
4.4.3	Simulazioni	84
4.4.4	Scelta del materiale	89
4.4.5	Soluzione alternativa	92
4.4.6	Analisi di densità	96
4.4.7	Alcune considerazioni	97
4.4.8	Supporto per le masse sorgenti	99
4.5	Riflessioni	100

5	Misure di caratterizzazione dell'apparato	105
5.1	Trappola Magneto Ottica (MOT)	105
5.2	Caratterizzazione della fontana atomica	107
5.3	Transizioni Raman	112
5.4	Misure interferometriche preliminari	116
	Conclusioni	119
	Bibliografia	121

Introduzione

Il lavoro presentato in questa tesi è stato svolto nell'ambito dell'esperimento MAGIA (Misura Accurata di G mediante Interferometria Atomica) che, come suggerito dall'acronimo, si propone di realizzare una misura della Costante Gravitazionale G utilizzando un interferometro atomico come sensore di forza.

Nel primo capitolo parlerò dell'importanza di conoscere G accuratamente e di quali misure abbiano maggiormente contribuito ad una riduzione della sua incertezza. Il lettore troverà una spiegazione introduttiva dell'interferometro atomico come sensore di forze inerziali e gravitazionali e potrà capire lo schema di misura che proponiamo.

Nel secondo capitolo presenterò invece gli strumenti matematici utili ad una descrizione rigorosa dell'interferometro atomico. Molti conti sono stati omessi, ma mi sono assicurato di non tralasciare ipotesi e passaggi fondamentali. La scelta di scrivere tale capitolo deriva dal solo recente completamento del formalismo, ad opera principalmente del Prof. Bordé dell'Università di Parigi.

Il terzo capitolo risulterà molto tecnico e ha lo scopo di descrivere l'apparato sperimentale interamente progettato ed assemblato nel corso di questo lavoro di tesi. Parlerò del sistema da vuoto, necessario per l'isolamento degli atomi da altri gas, del complesso sistema laser per la cattura e il raffreddamento dei campioni atomici ed infine di due laser a diodo agganciati in fase che avranno la stessa funzione che separatori e specchi hanno nei comuni interferometri ottici.

Una misura di G comporta l'impiego di masse sorgenti ben caratterizzate in forma e densità, in modo che una misura del loro campo gravitazionale

riconda direttamente a G . Molti sforzi sono stati quindi rivolti nella scelta della geometria e dei materiali impiegati, nel tentativo di massimizzare sensibilità e accuratezza. Inoltre simulazioni numeriche delle traiettorie atomiche in presenza del campo delle masse sorgenti sono state necessarie nel determinare il segnale in uscita dall'interferometro. Un quarto capitolo è stato dedicato interamente alla descrizione di questi aspetti.

Chiuderò infine con un capitolo dedicato ai risultati sperimentali fino ad oggi ottenuti.

Ricordo che all'interno della tesi sono state a volte riportate semplici riflessioni su argomenti che richiederebbero invece una più attenta verifica sperimentale: ho comunque ritenuto opportuno raccoglierle, in quanto utile spunto per chi continuerà dopo di me questo lavoro.

Capitolo 1

Motivi e modalità di una misura di G mediante interferometria atomica.

Ad oggi la maggior parte delle costanti fisiche è conosciuta entro poche parti per miliardo, nei casi peggiori al meglio di alcune parti per milione. Una delle poche eccezioni è costituita dalla Costante di Gravitazione Universale G , introdotta per la prima volta da Newton nel 1665 per descrivere la forza di attrazione tra tutti i corpi con massa. Nonostante

$$|F| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

sia senza dubbio la più conosciuta tra tutte le leggi fisiche, il valore attualmente riconosciuto per G dalla comunità scientifica ha un'incertezza di ben 1500 ppm (CODATA 1998 [1]). Anche se le recenti misure fanno presagire un prossimo accordo su di un nuovo valore, un ordine di grandezza più preciso, è sorprendente come nel corso della storia, a partire dalla prima misura di Cavendish nel 1798 ($G = (6.76 \pm 0.45) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$) [2], la riduzione dell'incertezza su G sia circa pari ad un ordine di grandezza per secolo.

I motivi dell'oggettiva difficoltà di tale misura sono molteplici. Prima di tutto la gravità è la più debole tra le forze fondamentali. Si tenga conto che ad esempio la forza elettromagnetica tra due protoni è 10^{40} volte più grande della loro attrazione gravitazionale. Di conseguenza ogni volta che cerchiamo

di misurare la gravità corriamo il rischio che questa venga mascherata da altre forze in gioco.

L'altro motivo è l'impossibilità di schermare l'interazione gravitazionale, da cui la necessità di ricorrere sempre a tecniche differenziali per eliminare le perturbazioni provocate da corpi vicini alla strumentazione di misura.

Inoltre, eccetto che nelle ancora non confermate teorie di unificazione, G rimane isolata dalla struttura teorica della fisica e non può quindi essere determinata a partire da altre quantità. Resta solo la possibilità di ideare esperimenti dove si applica la (1.1), ricorrendo a trasduttori di forza estremamente sensibili, ma allo stesso tempo accurati.

Non devono quindi meravigliare gli scarsi progressi nella conoscenza di G , nonostante più di 300 esperimenti realizzati nel corso della storia. Prima di passare in rassegna alcuni dei più interessanti, desidero però elencare alcune delle motivazioni principali, oltre a quella puramente metrologica, che spingono ad una sua misura più accurata.

1.1 Perché misurare G

Come ben sappiamo la forza di gravità è puramente attrattiva, per cui risulta essere l'interazione dominante tra corpi macroscopici neutri a grande distanza. Ecco che il moto tra i corpi celesti è regolato da equazioni che contengono G . Ma la sua scarsa conoscenza fa sì che piuttosto siano presenti costanti sperimentali ottenute da osservazioni astronomiche, come ad esempio la costante geocentrica gravitazionale [3]

$$GM_{\oplus} = (398600.4415 \pm 0.0008) \text{ km}^3\text{s}^{-2} \quad (1.2)$$

dove M_{\oplus} indica la massa della terra e la costante eliocentrica gravitazionale

$$GM_{\odot} = (1.32712438 \pm 0.00000002) \cdot 10^{11} \text{ km}^3\text{s}^{-2} \quad (1.3)$$

dove M_{\odot} indica la massa del sole. Migliorare la conoscenza di G significa quindi migliorare la conoscenza della massa dei corpi celesti. Non a caso lo scopo principale della misura di Cavendish era proprio dare una stima della massa terrestre.

Non solo il moto dei corpi celesti dipende da G , ma anche la loro evoluzione interna, che vede nella forza di attrazione gravitazionale e nella pressione di radiazione i due contributi principali. Si può ad esempio dimostrare che la luminosità delle stelle dipende da G^7 [4]. Ed ancora, i parametri di elasticità introdotti nei modelli descrittivi della forma del geoide terrestre dipendono da G , ma solo una sua conoscenza più accurata può permettere di convalidare o meno tali teorie [5].

Esistono infine delle motivazioni di carattere fondamentale, legate alle moderne teorie unificanti che vedono comparire G in nuovi fattori di scala e costanti d'accoppiamento. Per non parlare della possibilità di convalidare o meno studi volti a ricavare teoricamente il suo valore [6].

1.2 Cenni storici

In questa sezione intendiamo ripercorrere brevemente le fasi principali nella storia della misura di G , iniziando dalla fig. 1.1, che riporta valori ed incertezze degli esperimenti più importanti terminati prima del 1998.

Le prime misure con un'accuratezza dichiarata intorno a 100 ppm risalgono agli anni '70 e inizi degli anni '80, tutte realizzate mediante un pendolo di torsione, così come aveva fatto Cavendish. Degna di particolare rilievo fu la misura di Sagitov [7], realizzata in Unione Sovietica, forse la più documentata tra tutti gli esperimenti su G , con ben cinquanta pubblicazioni sulla descrizione dell'apparato, la teoria della misura e la caratterizzazione dei risultati. Risultano quindi strani i meccanismi decisionali riguardanti l'assegnazione del valore in occasione del CODATA 1986 che fissò per G il valore ottenuto da Luther e Towler (NIST) [8], aumentando la loro incertezza in modo da far rientrare la misura di Sagitov entro due deviazioni standard. In ogni caso il non completo accordo tra i due risultati non passò inosservato e stimolò la realizzazione di nuovi esperimenti volti a risolvere la discrepanza. Oltre alle misure di Karagioz (Moscow)[9], Fitzgerald (New Zealand)[10] e Bagely (Los Alamos) [11], tutte mediante pendoli o bilance di torsione, vale la pena menzionare altri due esperimenti, entrambi tedeschi. Il primo, realizzato a Wuppertal, sviluppò un Fabry-Perot a microonde i cui specchi

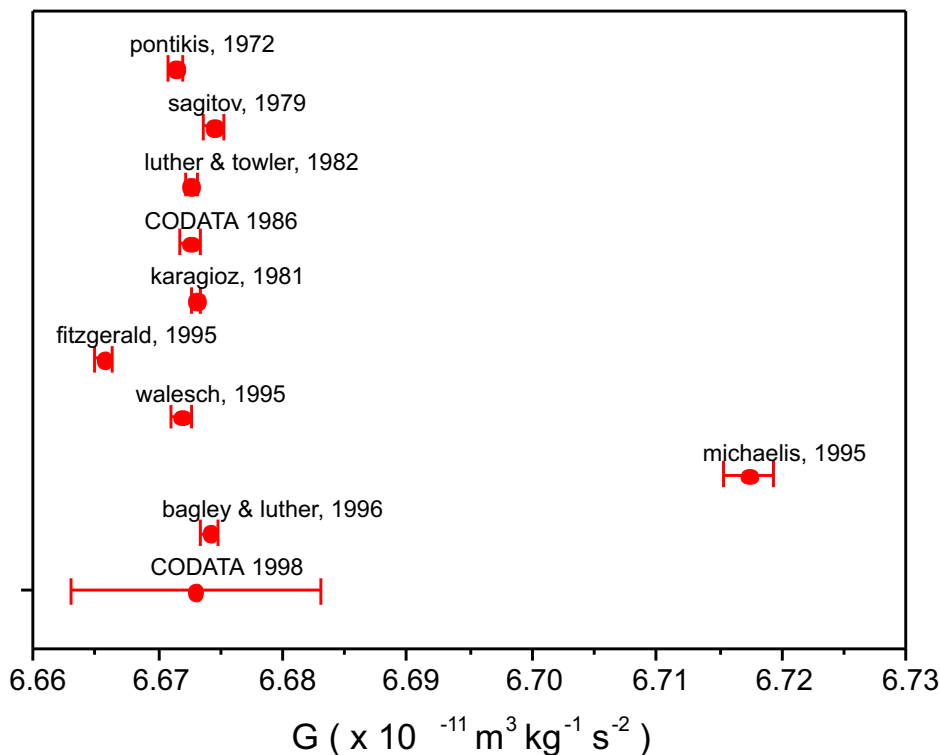


Figura 1.1: Principali misure di G fino al 1998 con incertezza ~ 100 ppm.

erano sospesi mediante fibre e il cui spostamento per effetto di una diversa attrazione di masse sorgenti poste nelle vicinanze, poteva essere rivelato osservando variazioni nella frequenza di risonanza della cavità. Si racconta che l'apparato poteva essere eccitato da qualsiasi terremoto sulla terra con un'intensità superiore al grado 4.7 della scala Richter e che spostamenti degli specchi dell'ordine del pm potevano essere rivelati. Errori sistematici nella misura della distanza tra specchi e masse sorgente limitarono l'accuratezza al livello di ~ 120 ppm [12]. Il secondo, realizzato presso l'Istituto Metrologico Tedesco (PTB)[13], ha presentato invece il risultato più enigmatico nella storia della misura di G . Iniziato nel 1976, ha visto lo sviluppo di un pendolo di torsione, privo della comune fibra di sospensione, in cui il braccio con le masse di prova galleggiava su un cuscino di mercurio e la forza di richiamo veniva realizzata mediante degli elettrodi. Dopo numerosi anni di lavoro, alla ricerca

di possibili fonti di errori sistematici, fu pubblicato un risultato sorprendente, 50 deviazioni standard al di sopra del valore di CODATA. Fu proprio questa misura ad indurre la commissione del CODATA 1998 ad aumentare l'incertezza associata al valore di G , lasciando praticamente inalterato il valor medio. Una precisione di solo 1500 ppm dopo 200 anni dalla prima misura di G . La motivazione principale di questa scelta è da ricondurre al sospetto che i vari esperimenti del passato, realizzati principalmente con pendoli di torsione, avessero potuto presentare effetti sistematici incontrollati, in primo luogo nella caratterizzazione della fibra di sospensione.

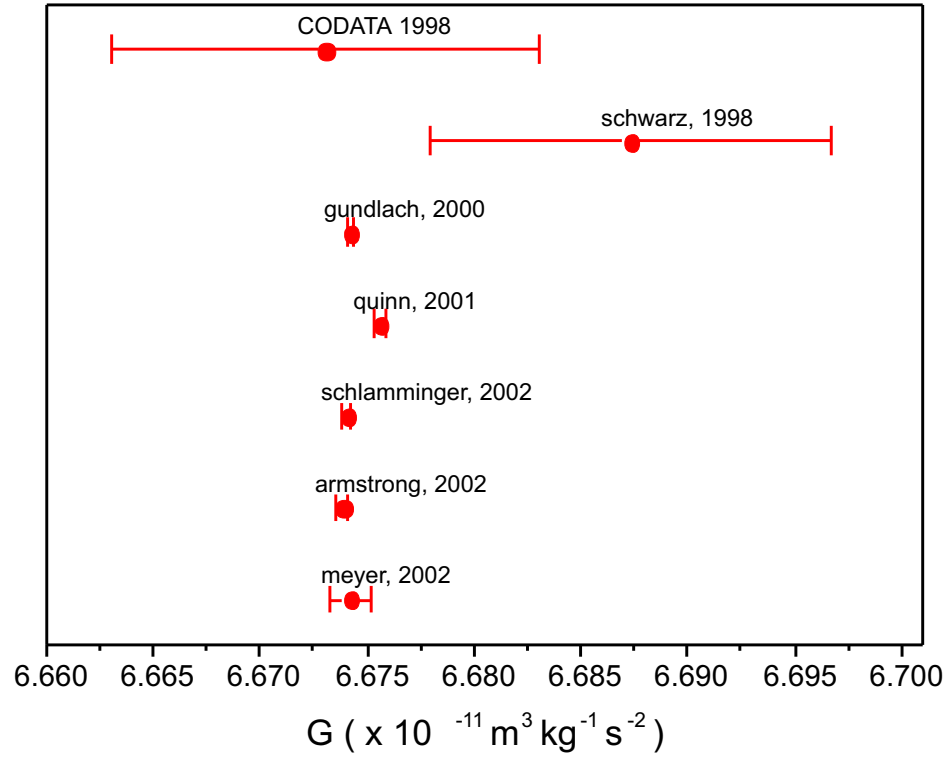


Figura 1.2: Misure di G portate a termine dopo il 1998

Da allora nuovi esperimenti sono stati portati a termine [14], in particolare modo quello di Gundlach (Washington)[15], Quinn (Paris)[16] e Schwarz (Boulder)[17](vedi fig.1.2). I primi due utilizzano una bilancia in cui la torsione della fibra è annullata mediante un sistema di retroazione e in cui il

segnale di correzione è utilizzato per misurare la forza gravitazionale agente sul pendolo. Entrambi gli esperimenti risultano ben progettati, in particolar modo il primo, che ha dato il risultato con la minor incertezza fino ad ora dichiarata, solo 14 ppm. Purtroppo le due misure risultano in disaccordo entro alcune parti in 10^{-4} . La terza misura menzionata ha fatto ricorso ad una tecnica completamente nuova, ossia quella della caduta libera. Sfruttando il principio di funzionamento dei gravimetri commerciali FG-5, si lascia cadere uno degli specchi di un interferometro ottico tipo Michelson e dalle frange d'interferenza si hanno informazioni sul suo moto. Sottraendo l'accelerazione misurata in presenza o meno di grosse masse sorgenti è possibile risalire al solo effetto delle masse e quindi a G . Purtroppo anche questa misura, che ha il vantaggio di utilizzare un metodo alternativo alla bilancia di torsione, non è in grado di fornire un valore con una precisione superiore alle 1500 ppm.

Ed è proprio in questo contesto che nasce la nostra idea di avventurarci nella misura di G , ponendoci come scopo il raggiungimento di un'accuratezza di almeno 100 ppm utilizzando un nuovo metodo di misura.

Prima di procedere ad una sua descrizione introduttiva, desidero ricordare che dopo l'inizio del nostro lavoro sono state pubblicate tre ulteriori misure di G (vedi fig. 1.2), in sostanziale accordo con la misura di Gundlach. Tra queste quella di Schlamminger (Zurigo)[30] sembra aver raggiunto il traguardo di una misura di G con un'accuratezza inferiore a 100 ppm, impiegando una tecnica completamente nuova. Nell'esperimento si ricorre ad un comparatore di massa che misura la differenza in peso tra due campioni posti rispettivamente al di sopra e al di sotto di una massa sorgente. Tale differenza permette di risalire all'attrazione gravitazionale della sola massa sorgente.

Di fronte a tale risultato ci proponiamo di fare altrettanto bene, consci che solo alla luce di una ampia confidenza tra i risultati di esperimenti diversi potremo essere sicuri di una conoscenza accurata di G . È bello parlare con Terry Quinn e sentirsi dire che dopo dieci anni di studi e miglioramenti sul loro apparato, non sanno ancora trovare un motivo al disaccordo che c'è tra la loro misura e quella di Gundlach ed è bello notare che quest'ultima sia perfettamente in accordo con la misura più documentata nella storia di G ,

quella di Sagitov del 1979. Questo perché ci sentiamo partecipi di una delle sfide più avvincenti della fisica sperimentale antica e moderna.

1.3 Perché utilizzare un interferometro atomico

Il sensore di forza che scegliamo è un interferometro atomico, ossia un dispositivo capace di rivelare il campo di forze agente su una nuvola di atomi freddi. Il recente sviluppo di questo tipo di sensori è stato dimostrato estremamente efficace nella misura della gravità terrestre [18, 19], del suo gradiente [20] e di tutte le forze inerziali, comprese quelle derivanti da rotazioni [21]. Questo rende probabile un loro futuro utilizzo nella navigazione inerziale, negli studi di geofisica, nella ricerca di giacimenti minerali e petroliferi e purtroppo anche in campo militare.

Il loro punto di forza sta nel fatto che le proprietà atomiche sono ben note, compresa la loro sensibilità a campi esterni, magnetici ed elettrici. L'atomo stesso può essere utilizzato per misurare quanto questi campi residui nella zona di misura siano grandi e quando un loro schermaggio sia sufficiente alle precisioni richieste. Non a caso questi sensori appartengono alla famiglia degli orologi atomici che hanno mostrato livelli irraggiungibili da altri dispositivi, in termini di stabilità ed accuratezza.

Intraprendere la misura di G con questa nuova tecnica ci offre quindi la possibilità di sviluppare e approfondire le nostre conoscenze in un campo di ricerca ancora giovane e dalle molte prospettive future.

Esiste ad esempio un progetto europeo, chiamato Hyper [22], che si propone di inviare in orbita un satellite munito di tali dispositivi. Non solo saranno impiegati nella navigazione, ma verranno utilizzati per effettuare test di Relatività Generale (studio dell'effetto gravito-magnetico terrestre [23]) e per dare una misura più accurata della costante \hbar/m , fondamentale per una nuova stima della costante di struttura fine. Infatti, in un ambiente privo di gravità, i tempi di propagazione libera dei campioni atomici aumentano notevolmente, con conseguente incremento della sensibilità.

Stimolante è infine la possibilità di ideare nuovi schemi interferometrici che coinvolgano da un lato campi atomici coerenti, spazialmente ben localizzati, come i condensati atomici [24, 25], oppure campioni di atomi, estremamente veloci, dalla ridotta lunghezza di de Broglie e perciò dall'enorme potenziale risolutivo.

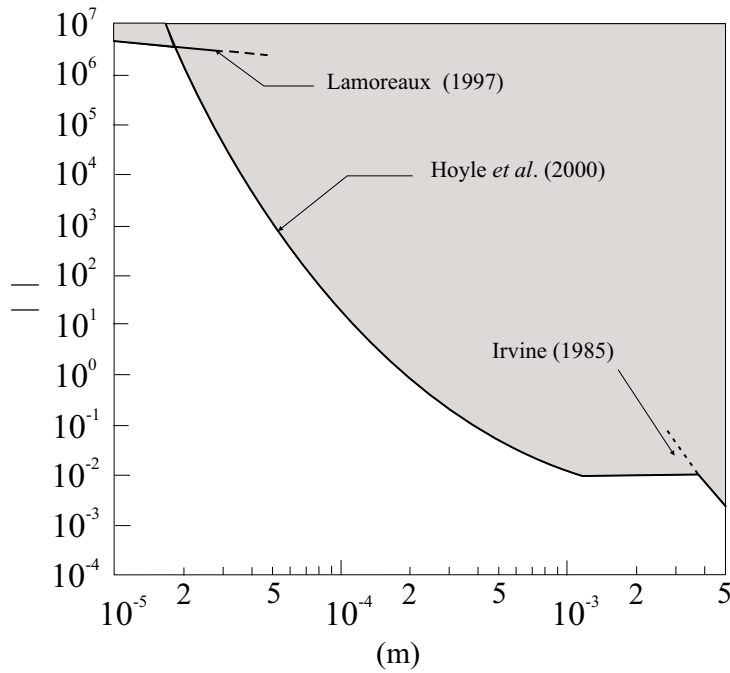


Figura 1.3: Limite inferiore di confidenza al 95 % sulla validità della legge di interazione $1/r^2$. Sono assunti scostamenti del tipo indicato in (1.4).

Desidero infine sottolineare un'ulteriore vantaggio che ci deriva dalla scelta di sviluppare un interferometro atomico. Nel corso della storia, molte misure di G non si sono proposte di dare il valore più accurato, ma hanno piuttosto cercato di verificare la sua costanza spaziale e temporale, al variare dello spin o della temperatura dei corpi interagenti [6]. Esistono ad esempio delle misure definite geologiche che vedono l'impiego di strumentazione a bordo di sottomarini [26] o lungo le pareti di grosse dighe [27] o al di sotto di grossi bacini d'acqua [28], tutte volte a trovare possibili deviazioni dall'an-

damento $1/r^2$ della legge di gravità per grandi distanze. Tali misure hanno permesso di ampliare limiti superiori ed inferiori ai valori α e λ che entrano in un possibile andamento di tipo Yukawa

$$V(r) = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}) \quad (1.4)$$

del potenziale gravitazionale. Di recente lo studio a piccole distanze ha suscitato molto interesse in virtù delle nuove teorie delle stringhe che, nel caso di alcuni particolari modelli, sembrano prevedere variazioni sensibili alla legge $1/r^2$ ($\alpha \sim 10^5$) per distanze inferiori al mm. Le misure fino ad ora realizzate non hanno però rivelato alcun scostamento sensibile (fig. 1.3)[29].

Ecco che gli atomi diventano allora dei probabili candidati per verifiche a distanze sub-millimetriche viste le loro dimensioni e il controllo, in alcuni casi micrometrico, della loro posizione.

1.4 Descrizione introduttiva di un orologio e di un gravimetro atomico

In questa sezione intendiamo dare una breve visione introduttiva di due dispositivi atomici il cui funzionamento è basato sull'interferenza Ramsey: l'orologio e il gravimetro atomico. Per il momento non ci addentreremo in complicati calcoli esatti, ma analizzeremo un atomo a due livelli $|a\rangle$ e $|b\rangle$, limitandoci ad una trattazione classica dei suoi gradi di libertà esterni. Nella Hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + (\mathbf{d}_{ba} + \mathbf{d}_{ab})\mathbf{E} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \quad (1.5)$$

\mathbf{p} ed \mathbf{r} sono quindi le variabili classiche che descrivono il centro di massa atomico, mentre l'interazione con un campo esterno \mathbf{E} è descritta in approssimazione di dipolo elettrico.

L'atomo è un oscillatore in quanto, non appena si trova in una sovrapposizione dei due stati interni, presenta un dipolo elettrico oscillante esattamente alla frequenza di transizione $\omega_b - \omega_a$. Il modo per monitorare tali oscillazioni sembra a prima vista impossibile: in verità è possibile farlo ricorrendo ad un

campo elettrico con frequenza ω prossima a quella di transizione ed utilizzarlo per effettuare variazioni nell'inversione di popolazione dei due livelli. Infatti tali variazioni dipendono dal ritardo di fase tra l'oscillatore atomico e l'oscillatore elettrico. Esattamente come nel caso di un altalena sottoposta ad una spinta: a seconda che questa sia in fase od in controfase con il moto dell'altalena gli effetti saranno opposti, ossia di eccitazione o di frenamento.

Per comprendere meglio gli schemi di funzionamento dei dispositivi sopra menzionati è utile ricorrere alla descrizione nel così detto spazio di Bloch [31]. In questo spazio tridimensionale il campo oscillante è rappresentato da un vettore \vec{E} lungo l'asse \hat{y} con modulo proporzionale alla sua ampiezza, mentre lo stato interno dell'atomo è descritto da un vettore \vec{a} , di modulo unitario, la cui proiezione lungo l'asse \hat{z} indica l'inversione di popolazione $P_b - P_a$ (P_i indica la probabilità di misurare l'atomo in $|i\rangle$, $i=a, b$) e la cui coordinata azimutale ϕ indica il ritardo di fase dell'oscillatore dipolo elettrico rispetto al campo esterno (vedi fig. 1.4). Il punto di applicazione di entrambi i vettori è sempre riportato per comodità nell'origine.

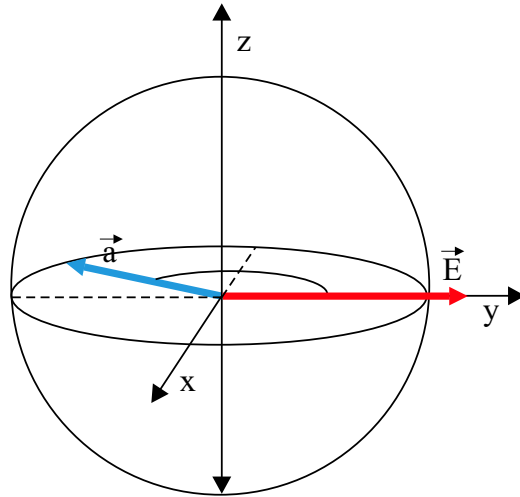


Figura 1.4: Spazio di Bloch. \vec{a} descrive la funzione d'onda interna dell'atomo, \vec{E} il campo elettrico incidente e ϕ il ritardo di fase tra campo e dipolo elettrico atomico.

In un orologio o in un gravimetro atomico si alternano fasi in cui atomi

e campo elettrico interagiscono, a fasi in cui ciò non è permesso. Durante quest'ultime varia il solo angolo ϕ a seguito di una differenza nella frequenze di oscillazione ω ed $\omega_b - \omega_a$, o a seguito di uno spostamento $\mathbf{s}(t)$ dell'atomo ortogonalmente ai fronti d'onda, ossia parallelamente a \mathbf{k} : è infatti la differenza di fase tra l'oscillatore atomico e il campo elettrico nel punto in cui l'atomo si trova che conta. Naturalmente la proiezione di \vec{a} lungo \hat{z} non cambia perché non avviene scambio di energia tra atomo e campo. Quando invece l'interazione è permessa, il vettore \vec{a} inizia a precedere attorno ad \vec{E} dando origine alle cosiddette oscillazioni di Rabi.

Fissato il tempo di interazione, il trasferimento di popolazione dipende fortemente dalla fase ϕ come mostra la fig. 1.5 nel caso di un impulso $\pi/2$, ossia un impulso di durata tale da portare un atomo da $|a\rangle$ in uno stato con $P_b = P_a = 1/2$.

Seguiamo quindi un esperimento in cui due impulsi $\pi/2$ sono separati da un intervallo di non interazione di durata T . Partiamo con un atomo in $|a\rangle$ posto in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Come mostra la fig. 1.6, dopo il primo impulso si crea un dipolo elettrico oscillante con un ritardo di fase $\phi = \pi/2$. Trascorso il tempo T , la fase relativa sarà cambiata a seguito dei due contributi prima menzionati

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}(T) - \int_0^T (\omega(t) - (\omega_b - \omega_a)) dt + \pi/2 \quad (1.6)$$

Tale valore è contenuto nelle quantità P_a e P_b subito dopo il secondo impulso $\pi/2$, secondo le espressioni

$$P_a = \frac{1 - \cos(\phi - \pi/2)}{2} \quad P_b = \frac{1 + \cos(\phi - \pi/2)}{2} \quad (1.7)$$

come è indicato in fig. 1.6 e come può essere ricavato applicando più volte la (2.67) (vedi più avanti in questo capitolo).

In un orologio atomico \mathbf{k} è scelto ortogonale alla traiettoria dell'atomo, per cui il primo termine della (1.6) è trascurabile. Supponendo

$$\omega(t) = (\omega_b - \omega_a) + \delta \quad (1.8)$$

otteniamo

$$\phi = \delta T + \pi/2 \quad (1.9)$$

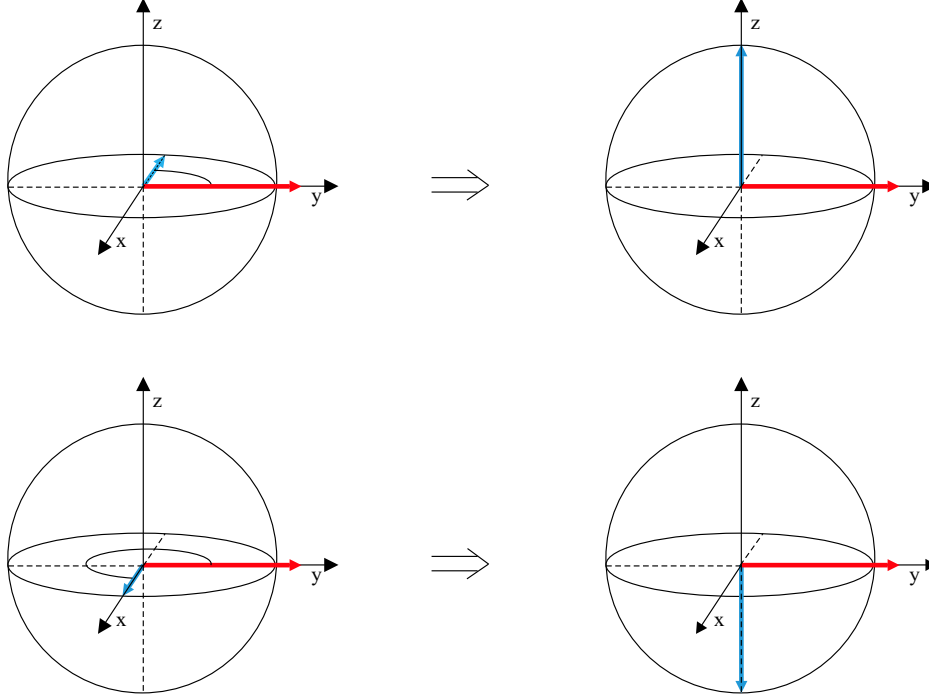


Figura 1.5: Dipendenza del trasferimento di popolazione di un impulso $\pi/2$ dalla fase relativa iniziale campo esterno-dipolo atomico. Nonostante l'inversione di popolazione iniziale sia uguale, per $\phi = \pi/2 \rightarrow P_b = 1$, per $\phi = 3\pi/2 \rightarrow P_b = 0$.

L'osservazione dell'inversione di popolazione finale può essere quindi utilizzata per correggere la frequenza della radiazione e renderla esattamente uguale a quella atomica.

In un gravimetro si suppone invece di conoscere esattamente la frequenza applicata ed in più la sia cambia linearmente nel tempo nel seguente modo

$$\omega(t) = \gamma t + (\omega_b - \omega_a) \quad (1.10)$$

Questa volta \mathbf{k} è scelto parallelo allo spostamento $\mathbf{s}(t)$, per cui ipotizzando la presenza di un campo gravitazionale uniforme e supponendo la velocità iniziale atomica uguale a zero avremo che

$$\phi = \frac{1}{2}(\mathbf{k}g - \gamma)T^2 + \pi/2 \quad (1.11)$$

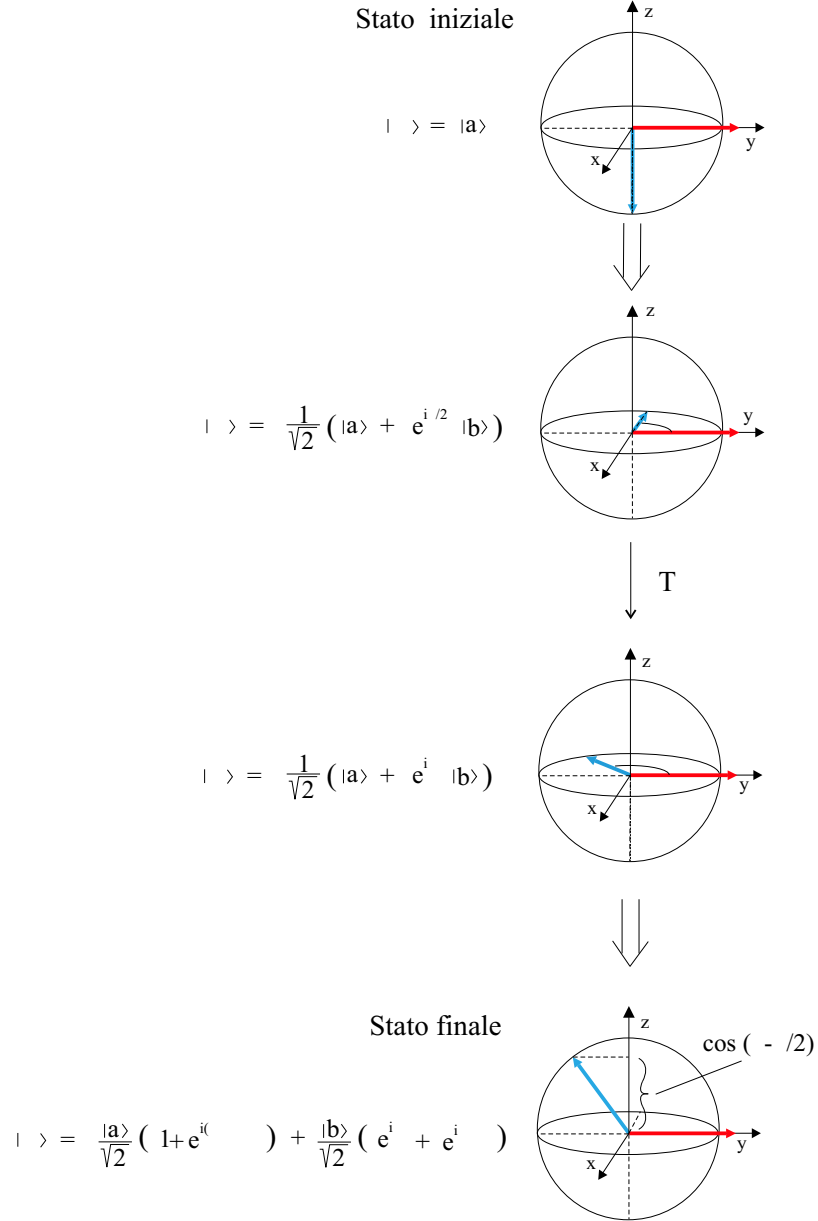


Figura 1.6: Sequenza interferometrica $\pi/2 - \pi/2$. La differenza di fase accumulata tra campo esterno e dipolo atomico nell'intervallo di tempo T può essere determinata misurando l'inversione di popolazione al termine della sequenza interferometrica.

Ecco che nuovamente abbiamo un segnale capace di farci capire se la rampa in frequenza della radiazione applicata è tale da compensare la variazione di ϕ dovuta alla caduta degli atomi. Conoscere γ significa conoscere g .

La descrizione appena data del gravimetro permette di comprendere il principio del suo funzionamento, ma non è completamente corretta. Per prima cosa abbiamo supposto che la velocità iniziale atomica sia nulla: in verità i campioni utilizzati per questo tipo di misure hanno una distribuzione allargata nelle velocità e l'utilizzo dello schema $\pi/2 - \pi/2$ comporterebbe un diverso spazio \mathbf{s} percorso per ogni atomo in virtù di una diversa velocità iniziale $\mathbf{v}(0)$. Per ovviare a questo problema si ricorre ad una tecnica detta *echo* che utilizza una sequenza $\pi/2 - \pi - \pi/2$, capace di cancellare tutti i contributi di fase che crescono linearmente nel tempo, come appunto il termine $\mathbf{v}(0)T$ nell'espressione generalizzata per $\mathbf{s}(T)$ (si ricordi che un impulso π è capace di invertire completamente la popolazione dei due livelli). Come risulterà inoltre più chiaro da una trattazione quantistica dei gradi di libertà esterni, questa sequenza alternativa è necessaria soprattutto per poter leggere l'informazione ϕ contenuta nello stato interno: infatti, dopo l'assorbimento di un fotone, il ket $|b\rangle$ guadagna un momento cinetico \mathbf{k} rispetto ad $|a\rangle$ e le loro funzioni d'onda spaziali si separano. Solo con la sequenza di tre impulsi si riesce ad avere una sovrapposizione spaziale al momento dell'ultimo impulso $\pi/2$ e ad effettuare una misura di gravità.

1.5 Schema di misura proposto

In questa sezione intendiamo descrivere brevemente lo schema di misura di G che proponiamo, rimandando una trattazione più completa al capitolo 4.

Per prima cosa intendiamo utilizzare atomi di ^{87}Rb perché possono essere facilmente intrappolati e raffreddati con tecniche laser ben note. In più le sorgenti laser necessarie sono economiche e facili da reperire. Il Rb è stato inoltre scelto poiché è uno dei pochi elementi che può essere condensato in nuvole diluite e quindi utilizzato in schemi interferometrici alternativi, che richiedano ampie coerenze spaziali [25].

Secondo quanto spiegato nella sezione precedente, misurare la gravità terrestre con un interferometro atomico è molto semplice: si tratta di lasciar cadere una nuvola e poter disporre di un laser verticale la cui evoluzione di fase sia ben controllata e la cui frequenza permetta di modificare opportunamente la popolazione dei due livelli atomici a e b (nel caso del Rb i due livelli iperfini dello stato fondamentale).

I gravimetri atomici fino ad oggi realizzati hanno un'accuratezza massima di $10^{-9}g$ [18, 19], a causa di un non perfetto controllo della fase del laser verticale di riferimento e soprattutto per la sensibilità del dispositivo a campi magnetici non uniformi (che modificano la differenza in frequenza tra i due livelli e quindi l'evoluzione del dipolo elettrico) e ad altri campi inerziali (ad esempio quello derivante dalla rotazione terrestre).

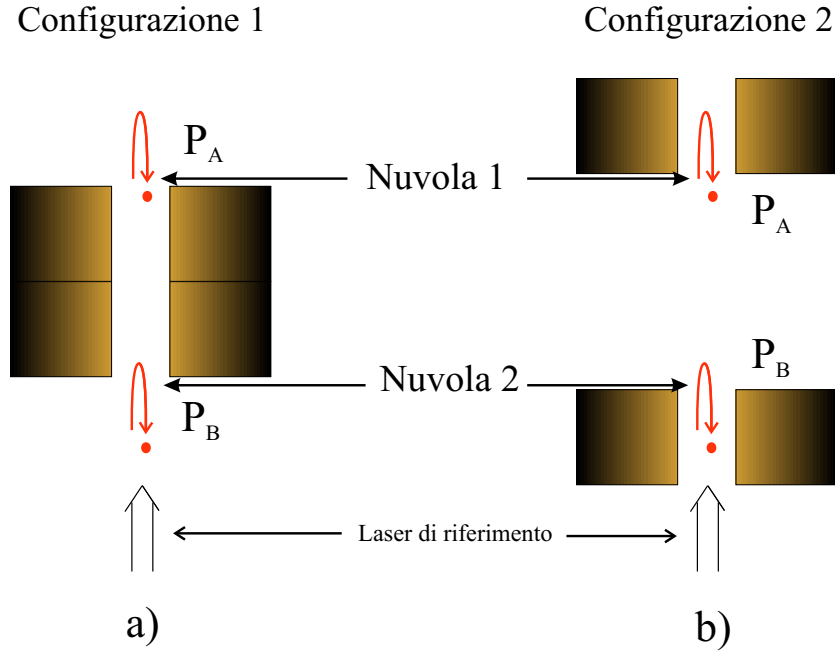


Figura 1.7: Misura di G doppio differenziale.

Il campo gravitazionale massimo ottenibile ad esempio con una massa di 1 tonnellata, di un materiale denso 18 g/cm^3 , risulta essere dell'ordine di $10^{-7}g$. Di conseguenza utilizzando un semplice gravimetro possiamo effettivamente

sperare di rivelare variazioni della gravità locale a causa della presenza della massa sorgente menzionata, ma una misura di G non può essere in questo modo più accurata di 10^{-2} .

L'idea è di effettuare quindi la misura doppio differenziale rappresentata in fig. 1.7. Per prima cosa dobbiamo ricorrere a due nuvole di atomi separate verticalmente e lasciate cadere sotto l'effetto della gravità terrestre, esattamente come in un gradiometro atomico [20]. La massa sorgente, costituita da due parti, deve poi permettere l'allineamento verticale del laser di riferimento, comune ad entrambe le nuvole. Posizionando la massa nella configurazione *a*), effettuando contemporaneamente le misure di gravità con le due nuvole e sottraendo i due segnali possiamo eliminare il contributo comune dell'accelerazione terrestre, ma raddoppiare quello dovuto alle masse sorgenti, visto il segno opposto della loro forza sulle due nuvole. In più eventuali fluttuazioni in fase del laser di riferimento sono comuni e quindi ininfluenti.

Resta però il problema che l'attrazione terrestre nelle due zone è diversa, come diverso può essere l'effetto di altri campi parassiti. Supponendo però la loro costanza temporale possiamo muovere le masse nella configurazione *b*), ripetere la misura differenziale e sottrarre tale risultato a quello ottenuto con la configurazione *a*). In questo modo il segnale finale risulta legato alla sola massa sorgente. Tale sequenza è detta doppio differenziale e riteniamo possa garantire una misura accurata entro 100 ppm. Raffreddare due nuvole ed effettuare una singola misura comporta una stima di G in 10^{-2} in appena un secondo. Per guadagnare i due ordini di grandezza mancanti si prospettano 10000 misure in un tempo di integrazione di alcune ore.

Capitolo 2

Teoria dell'interferometro atomico

2.1 Analogie tra luce ed onde di materia: formulazione matriciale dell'ottica gaussiana

Lo scopo principale delle seguenti sezioni sarà quello di risolvere le equazioni di evoluzione quantistiche per una particella con massa m in un potenziale quadratico. Prima di procedere vale però la pena mostrare come tale problema, sotto certe ipotesi, sia formalmente equivalente a quello della propagazione di un fascio laser in un mezzo rifrangente, noto anche come problema dell'ottica gaussiana. In questa sezione riassumeremo quindi i passaggi matematici principali che portano alla sua formulazione matriciale, nota anche come teoria ABCD. La trattazione riportata è lontana dall'essere completa e perfettamente chiara, ma contribuisce a mostrare importanti analogie tra luce e onde di materia.

Prendiamo in considerazione un campo elettrico con polarizzazione ben definita \mathbf{e} (approssimazione scalare) e con una dipendenza trasversale descritta dalla funzione $U(x, y, z)$

$$Re\mathbf{E} = E\mathbf{e} = \frac{1}{2}\mathbf{e}E_0(z, t)U(x, y, z)e^{i(\omega t - kz + \phi(z, t))} + c.c \quad (2.1)$$

Ricordiamo poi che nell'ipotesi di un mezzo con conducibilità σ il campo \mathbf{E}

soddisfa l'equazione scalare [32]

$$\nabla^2 E - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

dove $\mathbf{P} = P\mathbf{e}$ indica la polarizzazione dielettrica del mezzo. Tenendo conto della sola suscettività lineare $\chi(\omega)$, si può mostrare che per un campo quasi monocromatico [33]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx -\omega^2 \epsilon_0 \chi E + i\epsilon_0 \frac{d}{d\omega} [\omega^2 \chi] \left[\frac{1}{E_0} \frac{\partial E_0}{\partial t} + i \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] E \quad (2.3)$$

per cui, sostituendo nella (2.2), si ottiene un sistema di equazioni per le funzioni E_0 , U e ϕ . Trascurando le loro derivate seconde ed i prodotti tra derivate prime rispetto a z e t , effettuiamo la cosiddetta approssimazione parassiale ed il sistema si semplifica notevolmente [33]

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{K}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} - \chi'' \right) E_0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{K}{2} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 - \chi' \right) \quad (2.5)$$

$$i \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{1}{2k} \nabla_T^2 U + \frac{K}{2} \sum_{n>0} \chi'_n r^n U \quad (2.6)$$

Si noti che la suscettività è stata divisa in una parte reale (rifrazione) ed una immaginaria (assorbimento)

$$\chi = \chi' + i\chi'' \quad (2.7)$$

dove la sola parte rifrangente χ' è stata espansa in funzione della distanza radiale r dall'asse z (ipotesi di simmetria radiale) per poter descrivere mezzi ad effetto lente

$$\chi' = \chi'_0 + \chi'_2 r^2 + \dots \quad (2.8)$$

Inoltre valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & \frac{1}{v_g} &= \frac{1}{v_\phi} \left(1 + \frac{\omega}{2\epsilon_r} \frac{d\chi'}{d\omega} \right), \\ v_\phi &= \frac{kc^2}{\epsilon_r \omega}, & \epsilon_r &= 1 + \chi', & k_0 &= \frac{\omega}{c}, K = \frac{k_0^2}{k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La (2.4) descrive l'ampiezza del campo sotto l'azione di effetti dissipativi come la conducibilità e l'assorbimento del mezzo. La (2.5) mostra invece l'accumulo di fase che il campo subisce nel suo attraversamento del mezzo dielettrico. La (2.6) descrive infine la dipendenza del campo dalla distanza dall'asse z . Vale la pena mostrare fin da adesso la stretta analogia tra questa e l'equazione di Schrödinger per una massa puntiforme M in due dimensioni x e y effettuando la sostituzione $k \rightarrow \frac{M}{\hbar}$, $z \rightarrow t$.

Ma torniamo alla (2.6) e consideriamo il solo termine in r^2 dell'espansione di χ' . Ponendo $k_2 = -K\chi'_2$ abbiamo

$$i\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2k}\nabla_T^2 U - \frac{k_2}{2}r^2 U \quad (2.10)$$

Se cerchiamo una soluzione della forma

$$U_0 = i\frac{w_0}{X}e^{\left[-i\frac{Y}{X}\frac{k_0 r^2}{2}\right]} \quad (2.11)$$

troviamo che X e Y devono soddisfare l'equazione differenziale, scritta in forma matriciale

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} k_0 X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_0/n_0 \\ -n_2/k_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{i\tilde{\sigma} \cdot \mathbf{N}}{2} \begin{pmatrix} k_0 X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dove $n_0 = k/k_0$, $n_2 = k_2/k_0$, $\tilde{\sigma}$ sono le matrici di Pauli e \mathbf{N} indica il vettore $\{-ik_0(1 - n_0 n_2/k_0^2)/n_0, k_0(1 + n_0 n_2/k_0^2)/n_0, 0\}$.

Il formalismo matriciale dell'ottica gaussiana si basa sul fatto che anche nell'ipotesi in cui N ha una dipendenza da z , questa equazione ha come soluzione una matrice M_{fi} tale per cui, conoscendo i valori X_i e Y_i ad una certa coordinata z_i , è possibile ricavare i valori X_f , Y_f in z_f nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} k_0 X_f \\ Y_f \end{pmatrix} = M_{fi} \begin{pmatrix} k_0 X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & Bk_0 \\ C/k_0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Per una soluzione generale al problema si veda [33] e [34].

Nel caso semplice di $k_2 = 0$ e di n_0 indipendente da z , ossia mezzo omogeneo ed isotropo, otteniamo il ben noto profilo trasversale di un fascio gaussiano nel modo TEM_{00} . Imponendo che la (2.11) abbia in $z = 0$ un profilo

gaussiano e^{-r^2/w_0^2} otteniamo $X_0 = iw_0$, $Y_0 = 2/k_0w_0$ e

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z/n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iw_0 \\ 2/k_0w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_0(1 - 2iz/kw_0^2) \\ 2/k_0w_0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Sostituendo queste espressioni di X e Y nella (2.11) e supponendo nella (2.1) E_0 costante, otteniamo

$$E = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{-ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{R(z)}\right)} e^{i(\omega t + \phi(z,t))}}{1 - (2iz/kw_0^2)} \quad (2.15)$$

dove

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2} \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

sono le ben note espressioni analitiche delle dimensioni radiali del fascio gaussiano e del suo raggio di curvatura.

Direttamente ottenibile dalla (2.13) è l'analogia formulazione *ABCD* dell'ottica ondulatoria che esprime la legge di trasformazione della curvatura complessa $q = \frac{X}{Y}$

$$q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} \quad (2.18)$$

Un ulteriore modo per esprimere la soluzione (2.15) è introdurre la funzione complessa $L(z) = 1/[1 - (2iz/kw_0^2)]$ di modo che

$$U_0 = L(z)e^{-L(z)r^2/w_0^2} \quad (2.19)$$

In questo modo, ricordando l'analogia tra U_0 e la funzione d'onda in due dimensioni per una particella quantistica di massa M , è possibile ottenere velocemente una soluzione per la propagazione libera di un pacchetto d'onda atomico, mediante la semplice sostituzione $k \rightarrow \frac{M}{\hbar}$, $z \rightarrow t$. Mostriamo adesso il risultato in una dimensione, dopo aver opportunamente normalizzato la funzione d'onda e dove l'incertezza Δq al tempo $t = 0$ sostituisce $w_0/2$.

$$\psi(q, t) = \frac{e^{-\frac{q^2}{4(\Delta q)^2[1 + i\hbar t/2M(\Delta q)^2]}}}{(2\pi)^{1/4}(\Delta q)^{1/2}[1 + i\hbar t/2M(\Delta q)^2]^{1/2}} \quad (2.20)$$

Si noti che tale soluzione soddisfa la condizione di minima incertezza nello spazio delle fasi.

Concludiamo questa sezione facendo notare come risolvere il problema di un atomo in tre dimensioni spaziali + una temporale significa a questo punto recuperare il formalismo ABCD sviluppato per l'ottica gaussiana ed estenderlo al caso atomico per descrivere la sua funzione d'onda in presenza di campi inerziali e gravitazionali.

2.2 ABCD per ottica atomica

Lo scopo di questa sezione è risolvere il problema generale del moto di una particella in presenza di un campo gravito-inerziale. Prendiamo dunque in esame l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2M} \vec{p} \cdot \vec{g}(t) \cdot \vec{p} - \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{L} - M \vec{g}(t) \cdot \vec{r} - \frac{M}{2} \vec{r} \cdot \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{r} + V(\vec{r}, t) \quad (2.21)$$

dove i tensori $\vec{g}(t)$ e $\vec{\gamma}(t)$ descrivono rispettivamente l'effetto di un'onda gravitazionale e un gradiente di forza, mentre $\vec{\Omega}(t)$ e $\vec{g}(t)$ tengono conto di una rotazione del sistema di riferimento scelto, rispetto ad un sistema inerziale e di una forza omogenea spazialmente. Escluso $V(\vec{r}, t)$, ci siamo limitati a considerare solo dipendenze dell'Hamiltoniana quadratiche in \vec{p} e \vec{r} . Si noti che la (2.21) descrive una particella classica o quantistica a seconda che \vec{p} e \vec{r} siano considerate variabili canoniche coniugate oppure i corrispondenti operatori impulso e posizione.

Esistono due modi diversi per affrontare il problema quantistico, ma entrambi presentano notevoli difficoltà di calcolo. Qui di seguito intendiamo spiegare la filosofia di entrambe le procedure, senza scendere in dettaglio nei passaggi matematici. Riporteremo comunque tutti i riferimenti bibliografici utili al lettore interessato.

2.2.1 Metodo del path-integral

Ricordiamo che per ogni sistema quantistico esiste una funzione chiamata propagatore $\mathcal{K}(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t')$, grazie alla quale è possibile ottenere la funzione

d'onda al tempo t conoscendo il suo andamento al tempo t' ed effettuando un semplice integrale

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \int d\mathbf{q}' \mathcal{K}(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') \psi(\mathbf{q}', t') \quad (2.22)$$

Secondo un risultato del metodo del path-integral, nel caso di Lagrangiana o Hamiltoniana quadratica, il propagatore è facilmente ottenibile mediante la formula di Van Vleck's [35], [36]

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} \left| \det \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q'_j} \right| e^{iS/\hbar} \quad (2.23)$$

dove S indica l'azione calcolata lungo il cammino classico che congiunge \mathbf{q} a \mathbf{q}' nell'intervallo di tempo $(t - t')$. Di conseguenza tutto il problema quantistico si traduce nel problema puramente classico di determinare S .

Affrontiamo lo studio dell'Hamiltoniana classica (2.21) nel caso in cui $V(\vec{r}, t)$ sia nullo e per semplicità $\vec{\Omega}$ indipendente dal tempo (da ora in poi $(q, q') = (\mathbf{q}, \mathbf{q}')$). Volendo eliminare il termine di rotazione nella (2.21), esaminiamo la trasformazione di coordinate

$$q_0 = \mathcal{U}^{-1}(t, t') q \quad (2.24)$$

che associa alla coordinata q nel sistema di riferimento \hat{O} , ruotante rispetto ad un riferimento inerziale, la coordinata q_0 nel sistema di riferimento non ruotante \hat{O}_0 . La trasformazione

$$\mathcal{U}(t, t') = e^{-i\vec{J} \cdot \vec{\Omega} \cdot (t - t')} \quad (2.25)$$

è espressa mediante il vettore di matrici $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ dove la matrice j -esima $(J_j)_{ik} = i\epsilon_{ijk}$ con ϵ tensore di Ricci.

Volendo effettuare una trasformazione canonica, occorre sapere come trasformare le variabili canoniche p . La condizione è che lo Jacobiano della trasformazione sia симплетico. Essendo quest'ultimo della forma $e^{B(t-t')}$ è sufficiente che B sia Hamiltoniana ossia che \mathcal{IB} sia simmetrica, con

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e $\mathbf{1}$ matrice unitaria 3D. Ne segue che la trasformazione canonica di rotazione agisce nello stesso modo sia per le p che per le q

$$(q_0, p_0) = \mathcal{U}^{-1}(t, t')(q, p) \quad (2.27)$$

Occorre infine ricordare che la nuova Hamiltoniana H_0 nelle coordinate q_0, p_0 è data da

$$H_0 = H + K \quad (2.28)$$

dove H è la (2.21) espressa mediante le nuove variabili e dove K è tale da soddisfare

$$\frac{\partial \mathcal{U}^{-1}(t, t')_q}{\partial t} = \mathcal{I} \nabla_{q_0} K \quad (2.29)$$

Il termine in $\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$ scompare ed otteniamo

$$H_0 = \frac{1}{2M} \vec{p}_0 \cdot \vec{g}_0(t) \cdot \vec{p}_0 - M \vec{g}_0(t) \cdot \vec{r}_0 - \frac{M}{2} \vec{r}_0 \cdot \vec{\gamma}_0(t) \cdot \vec{r}_0 \quad (2.30)$$

dove

$$(q, \vec{g}) = \mathcal{U}(t, t')(q_0, \vec{g}_0) \quad (2.31)$$

$$(\vec{g}, \vec{\gamma}) = \mathcal{U}(t, t')(\vec{g}_0, \vec{\gamma}_0) \mathcal{U}^{-1}(t, t') \quad (2.32)$$

Determinare l'azione classica S_0 nel sistema di riferimento \hat{O}_0 risulta adesso più facile e in più permette di ottenere S mediante la semplice sostituzione di coordinate (2.24) (ciò si può dimostrare grazie alla (2.27) e alla (2.34)). Per semplicità ometteremo qui di seguito il pedice 0. È opportuno ricordare che l'azione $S(q, q', t)$ è la funzione generatrice della trasformazione canonica di variabili che associa al punto q il punto q' soluzione del moto. Di conseguenza l'Hamiltoniana per queste nuove variabili è nulla. Ne segue l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \nabla_q S, t) = 0 \quad (2.33)$$

Inoltre le variabili canoniche p e p' possono essere ricavate facilmente da

$$\begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_q S \\ -\nabla_{q'} S \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Scriviamo quindi S nel modo più generale possibile, ovviamente al massimo quadratica in q e q' , mediante coefficienti dipendenti dal tempo

$$S(q, t, q', t') = a + \tilde{b}q + \tilde{c}q' + \frac{M}{2} \left[\tilde{q}DB^{-1}q - 2\tilde{q}\widetilde{B^{-1}}q' + \tilde{q}'B^{-1}Aq' \right] \quad (2.35)$$

dove le matrici A, B, D sono state introdotte in modo che

$$\begin{pmatrix} q \\ p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bc/M \\ (b + Dc)/M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ p'/M \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

legge ottenibile dalla (2.34), ponendo

$$\widetilde{B^{-1}} = DB^{-1}A - C \quad (2.37)$$

e dove \sim indica il trasposto. Sostituendo la (2.35) nella (2.33) otteniamo un sistema di equazioni differenziali di primo grado in t per le incognite a, b, c, A, B, C, D introdotte nella (2.35). Definendo n^{-1} , γ e g le matrici corrispondenti ai tensori \vec{g} e $\vec{\gamma}$ e al vettore \vec{g} , tale sistema assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{a} + \frac{1}{2M}\tilde{b}n^{-1}b &= 0 \\ \dot{b} + DB^{-1}n^{-1}b - Mg &= 0 \\ \dot{c} - B^{-1}n^{-1}b &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n^{-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Tralasciamo di riportare la soluzione del sistema [37], ma sottolineiamo come essa venga espressa mediante la funzione ξ che descrive la traiettoria classica del sistema hamiltoniano (2.30) con condizioni iniziali $\xi(0) = 0$ e $\dot{\xi}(0) = 0$. Ad esempio la (2.36) si semplifica notevolmente

$$\begin{pmatrix} q \\ p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ n\dot{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ p'/M \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

e l'azione classica assume l'espressione

$$\begin{aligned} S(q, t, q', t') &= M\tilde{\xi}n(q - \xi) + \int_{t'}^t L(t_1)dt_1 - \int V dt \\ &+ \frac{M}{2} \left[(\tilde{q} - \tilde{\xi})DB^{-1}(q - \xi) - 2(\tilde{q} - \tilde{\xi})\widetilde{B^{-1}}q' + \tilde{q}'B^{-1}Aq' \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

dove $L = M(\tilde{\xi}n\dot{\xi} + \tilde{\xi}\gamma\xi + 2\tilde{g}\xi)/2$.

Ricordo ancora una volta che quest'ultima espressione esprime l'azione rispetto alle coordinate del sistema \hat{O}_0 e che q e q' dovrebbero presentare il pedice 0. Lo stesso vale ovviamente per la (2.40). Facciamo mentalmente tale passaggio ed applichiamo la (2.24). Otteniamo un'espressione per l'azione formalmente uguale alla (2.41), ma con i nuovi vettori espressi dalla (2.31) e con le nuove matrici

$$(A, B, C, D) = \mathcal{U}(t, t')(A_0, B_0, C_0, D_0) \quad (2.42)$$

Usando le nuove matrici A, B, C e D la (2.40) diventa

$$\begin{pmatrix} q \\ p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}(t, t')\xi \\ n\mathcal{U}(t, t')\dot{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ p'/M \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

2.2.2 Metodo delle trasformazioni unitarie

Partiamo dalla versione quantistica della (2.21) supponendo sempre $\vec{\Omega}$ indipendente dal tempo e scriviamo l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.44)$$

Effettuiamo adesso la trasformazione unitaria

$$|\psi(t)\rangle = U_{\Omega} |\psi_0(t)\rangle \quad (2.45)$$

dove

$$U_{\Omega}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{L}(t-t_0)} \quad (2.46)$$

Se adesso sostituiamo la (2.45) nella (2.44) otteniamo l'equazione per $|\psi_0(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_0(t)\rangle = \hat{H}_0 |\psi_0(t)\rangle \quad (2.47)$$

dove \hat{H}_0 è la versione quantistica dell'Hamiltoniana (2.30), ossia senza il termine rotazionale, con in più l'operatore $\hat{V}(r, t)$. A questo punto è possibile introdurre una serie di ulteriori trasformazioni unitarie

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = (U_1 \cdots U_6)^{-1} |\psi_0(t)\rangle \quad (2.48)$$

capaci di semplificare volta per volta tutti i termini dell'Hamiltoniana e di dare un'equazione di Schrödinger per $|\tilde{\psi}(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{V}[\vec{R}(t), t] |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (2.49)$$

dove $\vec{R}(t)$ è l'operatore posizione classica ed è espresso mediante le quantità definite nella sezione precedente

$$\vec{R}(t) = A \cdot \vec{r} + B \cdot \vec{p} / M + \vec{\xi} \quad (2.50)$$

Trascurando per il momento l'operatore \hat{V} troviamo che $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ è costante, per cui

$$|\psi_0(t)\rangle = U_1 \cdots U_6 |\psi_0(t')\rangle \quad (2.51)$$

poiché le trasformazioni unitarie al tempo t' sono uguali all'operatore identità. Se ne deduce che, inserendo una relazione di completezza $\int dq' |q'\rangle \langle q'|$ tra U_6 e $|\psi_0(t')\rangle$ e ricordando la (2.22), si ottiene l'identità

$$\mathcal{K}(q, t, q', t') = \langle q | U_1 \cdots U_6 | q' \rangle \quad (2.52)$$

dove $\mathcal{K}(q, t, q', t')$ è il propagatore nel sistema di riferimento non ruotante. Tutti i calcoli si trovano in [38] dove si mostra che è possibile riottenere un'espressione tipo la (2.23), con S della forma indicata in (2.41).

2.2.3 Funzioni di Hermite Gauss e loro evoluzione

Prendiamo in considerazione la (2.22) e poniamo $\psi(q', t') = \delta(q' - \bar{q})$. Ne segue che $\mathcal{K}(q, t, \bar{q}, t')$ ossia il propagatore è soluzione dell'equazione di Schrödinger per qualsiasi valore di \bar{q} . Riscriviamolo quindi alla luce dei risultati mostrati nei paragrafi precedenti, tenendo conto in particolare della (2.23) e della (2.41).

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, t, \bar{q}, t') = & \left(\frac{M}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} |det B|^{-1/2} e^{\frac{iM}{\hbar} \tilde{\xi} n(q-\xi)} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t L(t_1) dt_1} \\ & e^{\frac{iM}{2\hbar} [(\bar{q}-\tilde{\xi})DB^{-1}(q-\xi) - 2(\bar{q}-\tilde{\xi})\widetilde{B^{-1}\bar{q}} + \bar{q}B^{-1}A\bar{q}]} \end{aligned} \quad (2.53)$$

La prima cosa interessante è che ad un generico tempo t la funzione è caratterizzata da un involuppo di tipo gaussiano, centrata nel punto definito dalla traiettoria classica, ossia ξ . L'ulteriore termine con dipendenza in q è di tipo onda piana, con impulso $M\dot{\xi}$, sempre centrato in ξ . Esiste infine un termine di fase pari all'azione calcolata lungo la traiettoria classica.

Oltre a questa soluzione è possibile ricavarne un set completo, sempre a partire dal propagatore. Infatti se $\mathcal{K}(q, t, \bar{q}, t')$ è soluzione dell'equazione di Schrödinger anche la (i, j, k) -esima derivata parziale rispetto a $(\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z)$ lo sarà. Questa operazione ci fornisce un ulteriore polinomio che moltiplica l'involuppo gaussiano. Le soluzioni ottenute sono dette di Hermite Gauss.

Si può poi mostrare [38] che se al tempo t' prendiamo un pacchetto gaussiano

$$\frac{1}{\sqrt{\det X_0}} e^{\left[\frac{iM}{2\hbar}(\bar{q}-\bar{q}_0)Y_0X_0^{-1}(q-q_0)\right]} e^{[iM\tilde{v}_0(q-q_0)/\hbar]} \quad (2.54)$$

di ordine minimo centrato in q_0 , con una velocità media v_0 e con parametri complessi di larghezza X_0 e Y_0 , per ricavarne l'evoluzione sarà sufficiente sostituire a posizione e velocità iniziali i valori conseguenti all'evoluzione classica ottenibili mediante la (2.40), qui indicati q_f e v_f , riportare i nuovi parametri di larghezza X e Y

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

ed aggiungere un termine di fase $S_{cl}(t, t')/\hbar$, uguale appunto all'azione lungo la traiettoria classica. Otteniamo cioè

$$\frac{1}{\sqrt{\det X}} e^{[iS_{cl}(t, t')]} e^{\left[\frac{iM}{2\hbar}(\bar{q}-\bar{q}_f)YX^{-1}(q-q_f)\right]} e^{[iM\tilde{v}_f(q-q_f)/\hbar]} \quad (2.56)$$

Tutto il problema dell'evoluzione della funzione d'onda atomica in presenza di campi inerziali e gravitazionali quadratici nelle variabili canoniche si riconduce quindi alla conoscenza della traiettoria classica e al calcolo di azione e matrici A, B, C e D .

2.3 Separatore per onde di materia: transizioni Raman stimulate

L'interferometria ottica costituisce lo strumento per eccellenza nel mettere in mostra le proprietà ondulatorie della luce. Ricordiamone brevemente le proprietà principali prendendo ad esempio in esame un interferometro alla Mach-Zender (vedi fig. 2.1).

Figura 2.1: Interferometro ottico Mach Zender: indichiamo con ϕ e ψ i termini di fase accumulati nei due cammini distinti che determinano la potenza totale nelle due uscite.

Per prima cosa il campo incidente E deve poter essere separato (in A) e ricombinato (in D) coerentemente, ossia in modo che ad esempio, all'Uscita 1 dell'interferometro, il campo totale possa essere descritto mediante una sovrapposizione lineare di due contributi derivanti dall'evoluzione lungo i

due cammini $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$

$$\frac{E}{2} (e^{i\phi} + e^{i\psi}) \quad (2.57)$$

Tale separazione permette al campo di accumulare un diverso termine di fase, ϕ e ψ , lungo i due cammini distinti. Inoltre il campo E non è direttamente osservabile, bensì lo è il suo modulo quadro. È infatti l'intensità

$$I = E^2(1 + \cos[\phi - \psi]) \quad (2.58)$$

che può essere rivelata per ricavare $(\phi - \psi)$.

Ricordando che anche per gli atomi vale una condizione simile, ossia che vengono descritti da una funzione d'onda complessa, ma alla fine è il modulo quadro di quest'ultima che viene rivelato, possiamo pensare di sviluppare un interferometro atomico in completa analogia con quelli ottici. L'unica condizione è riuscire a separare il campo atomico in due contributi che evolvono diversamente, per poi successivamente ricombinarsi coerentemente. In questa sezione intendiamo concentrarci su questo aspetto prendendo in esame un separatore ottico che basa il suo principio di funzionamento sulle transizioni Raman a due fotoni [40].

Consideriamo un atomo con due stati metastabili $|a\rangle$ e $|b\rangle$ e numerosi stati eccitati $|i\rangle$. Nel nostro caso utilizziamo atomi di ^{87}Rb di cui $|a\rangle$ e $|b\rangle$ rappresentano i due livelli iperfini dello stato fondamentale $5S_{1/2}$, mentre gli stati $|i\rangle$ i livelli iperfini dello stato $6P_{3/2}$ (vedi fig. 2.2 e fig. 3.3). Indichiamo con Γ_i le larghezze di riga degli stati eccitati. La scelta di stati metastabili per l'interferometro deriva dalla necessità di poter eliminare fenomeni di rilassamento che andrebbero a distruggere la coerenza del nostro sistema.

Consideriamo quindi due campi elettrici incidenti

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1) + \mathbf{E}_2 \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2) \quad (2.59)$$

e scriviamo la Hamiltoniana del sistema in approssimazione di dipolo elettrico

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + \sum_i (\hbar\omega_i |i\rangle\langle i| + (\mathbf{d}_{ia} + \mathbf{d}_{ib})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.60)$$

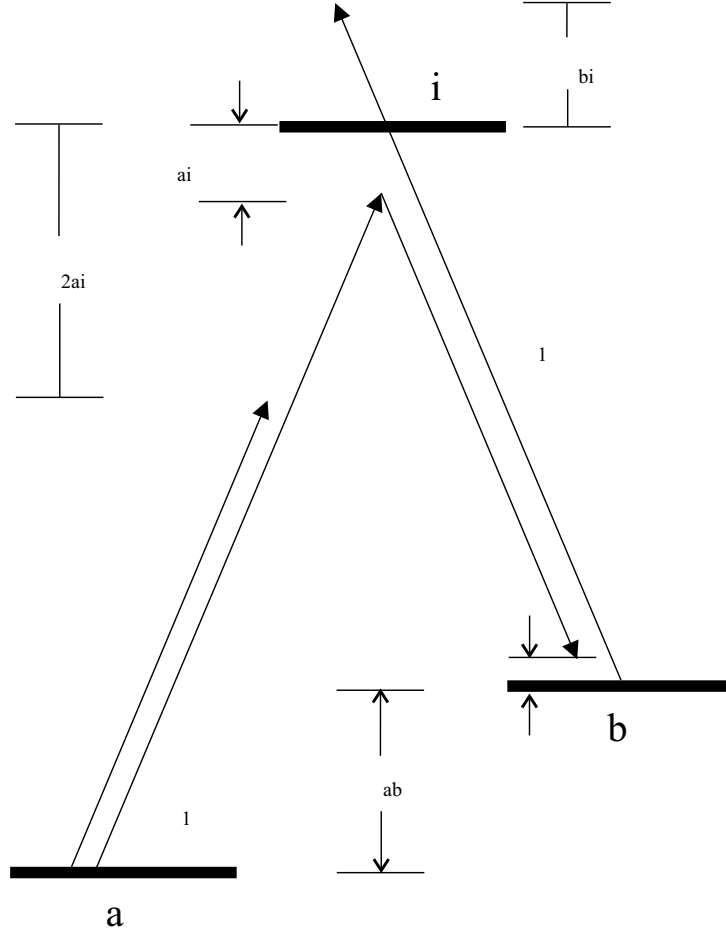


Figura 2.2: Transizione a due fotoni di frequenza ω_1 ed ω_2 per un atomo con due livelli metastabili a e b ed un generico livello i eccitato.

dove $\hbar\omega_\alpha$ è l'energia del livello $|\alpha\rangle$ e \mathbf{d}_{ij} il dipolo elettrico tra lo stato metastabile j e il livello eccitato i . L'evoluzione del sistema può essere ottenuta scrivendo l'equazione di Schrödinger per un generico stato $|\psi\rangle$ espresso mediante la somma delle autofunzioni dell'impulso \mathbf{p}

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=a,b,i} a_{\alpha,\mathbf{p}} e^{(-i(\omega_\alpha + \frac{\mathbf{p}^2}{2m})t)} |\alpha, \mathbf{p}\rangle \quad (2.61)$$

Il sistema di equazioni differenziali al primo ordine per i coefficienti $a_{\alpha,\mathbf{p}}$ è

particolarmente semplice perché si suddivide in sottosistemi indipendenti

$$\begin{aligned}\dot{a}_{a,\mathbf{p}} &= \frac{i}{2} \sum_{k,i} \Omega_{kai}^* e^{i\Delta_{kai}t} e^{-i\phi_k} a_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_k} \\ \dot{a}_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} &= \frac{i}{2} \sum_{k,i} \Omega_{kbi}^* e^{i\Delta_{kbi}t} e^{-i\phi_k} a_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_k}\end{aligned}\quad (2.62)$$

$$\dot{a}_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_k} = \frac{i}{2} \left(\Omega_{kai} e^{-i\Delta_{kai}t} e^{i\phi_k} a_{a,\mathbf{p}} + \Omega_{kbi} e^{-i\Delta_{kbi}t} e^{i\phi_k} a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} \right)$$

dove la terza equazione ne indica tante quanti sono i livelli i e i campi k (in questo caso 2), dove

$$\Omega_{kji} = \frac{\langle j | \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E}_k | i \rangle}{\hbar} \quad (2.63)$$

e dove

$$\Delta_{kji} = \omega_k - (\omega_i - \omega_j) + \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_{ik}^2}{2m} \quad (2.64)$$

con $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_b = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}$ e $\mathbf{p}_{ik} = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_k$. Ricordiamo che le equazioni (2.62) valgono nell'approssimazione di onda rotante e che le quantità (2.64) rispetto al solo livello i sono rappresentate in fig. 2.2.

Nell'ipotesi in cui le frequenze di Rabi Ω siano molto minori dei coefficienti Δ , è possibile trascurare le transizioni ad un fotone fuori risonanza ed effettuare la così detta approssimazione adiabatica, che vede come risultato conclusivo il semplice accoppiamento tra i soli livelli a e b . Per verificarlo conviene prendere in esame le equazioni (2.62), assumere inizialmente $a_{a,\mathbf{p}} = 1$ e $a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} = 0$ ed integrare la terza equazione. Si deduce che il modulo di $a_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_k}$ rimane molto piccolo, dell'ordine di Ω/Δ , ma con il termine di fase oscillante alla frequenza Δ_{kai} . Non vi è quindi trasferimento di popolazione nel livello i , ma se sostituiamo tale espressione nelle altre due equazioni scopriamo che è possibile una cancellazione di tale termine di fase oscillante con quelli qui presenti, con conseguente variazione del modulo di $a_{a,\mathbf{p}}$ e di $a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}}$ ad una frequenza dell'ordine di Ω^2/Δ . Avendo scoperto che tali coefficienti evolvono molto più lentamente degli $a_{i,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_k}$ si può pensare di ripetere le operazioni precedenti per un generico valore dei coefficienti $a_{a,\mathbf{p}}$ e $a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}}$. Si ottiene così il sistema che accoppia i soli stati metastabili

$$\begin{aligned}\dot{a}_{a,\mathbf{p}} &= -i\Omega_a^{AC} a_{a,\mathbf{p}} - ie^{i\delta t} e^{i\phi_{eff}} \Omega_{eff} a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} \\ \dot{a}_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} &= -i\Omega_b^{AC} a_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_{eff}} - ie^{-i\delta t} e^{-i\phi_{eff}} \Omega_{eff}^* a_{a,\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (2.65)$$

dove

$$\Omega_{eff} = \sum_i \frac{\Omega_{1ai}^* \Omega_{2bi}}{4\Delta_{1ai}}, \quad \Omega_j^{AC} = \sum_{k,i} \frac{|\Omega_{kji}|^2}{4\Delta_{kji}}, \quad \phi_{eff} = \phi_1 - \phi_2 \quad (2.66)$$

$$\delta = (\omega_1 - \omega_2) - (\omega_{ab} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_{eff}}{m} + \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}^2}{2m})$$

Ω_j^{AC} prende il nome di AC Stark shift del livello j , Ω_{eff} è la frequenza di Rabi di accoppiamento a-b e δ è il detuning dalla risonanza Raman in assenza degli shift luminosi AC. La soluzione del sistema (2.65) è ben nota [41, 42] ed è data da

$$\begin{aligned} a_{a,\mathbf{p}}(t_o + \tau) &= e^{\frac{i}{2}[\delta - (\Omega_a^{AC} + \Omega_b^{AC})]\tau} \\ &\left\{ \left[\cos \frac{\omega\tau}{2} + i \cos \Theta \sin \frac{\omega\tau}{2} \right] a_{a,\mathbf{p}}(t_o) + \left[i \sin \Theta \sin \frac{\omega\tau}{2} e^{i(\delta t_o + \phi_{eff})} \right] a_{b,\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}}(t_o) \right\} \\ a_{b,\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}}(t_o + \tau) &= e^{\frac{i}{2}[-\delta - (\Omega_a^{AC} + \Omega_b^{AC})]\tau} \\ &\left\{ \left[\cos \frac{\omega\tau}{2} - i \cos \Theta \sin \frac{\omega\tau}{2} \right] a_{b,\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}}(t_o) + \left[i \sin \Theta \sin \frac{\omega\tau}{2} e^{-i(\delta t_o + \phi_{eff})} \right] a_{a,\mathbf{p}}(t_o) \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

dove

$$\begin{aligned} \omega^2 &= [\delta^{AC} - \delta]^2 + \Omega_{eff}^2, \quad \delta^{AC} = \Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC}, \\ \cos \Theta &= \frac{\delta^{AC} - \delta}{\omega}, \quad \sin \Theta = -\frac{\Omega_{eff}}{\omega} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Per avere un'idea dell'effetto dei due campi, prendiamo per semplicità un atomo nell'autostato di impulso \mathbf{p} , nello stato interno a a $t_o = 0$, trascurando i light-shift e supponendo $\delta = 0$. Avremo quindi

$$a_{b,\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}}(t_o + \tau) = \left[\sin \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) e^{-i(\phi_{eff} - \pi/2)} \right] a_{a,\mathbf{p}}(t_o) \quad (2.69)$$

Il trasferimento completo della popolazione avviene in un tempo $\tau = \pi/\Omega_{eff}$: un impulso di tale durata è infatti detto impulso π . Un impulso $\pi/2$ dura esattamente la metà e garantisce solo metà del trasferimento. Si noti inoltre come, al termine dell'impulso, rimanga impresso nella funzione d'onda un termine di fase $(\phi_{eff} - \pi/2)$ il quale ci mostra come il dipolo elettrico atomico

che si viene a creare a seguito di un'inversione parziale della popolazione risulterà oscillare con un ritardo di fase $\pi/2$ rispetto alla radiazione.

Due osservazioni. La separazione in frequenza tra i due livelli metastabili, nel caso del ^{87}Rb , è di circa 7 GHz, per cui l'utilizzo di un campo a microonde per effettuare le transizioni interferometriche comporterebbe un $|\mathbf{k}|$ di soli 1.4 cm^{-1} . Come mostra l'equazione (2.65), ricorrendo invece alle transizioni Raman, abbiamo che i due campi si comportano esattamente come un solo pseudo campo elettrico con una frequenza efficace $\omega_{eff} = \omega_1 - \omega_2$, ma con un vettore d'onda $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ che può essere ottico nel caso in cui \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 siano ottici e contropropaganti. Secondo quanto detto nel paragrafo introduttivo 1.4, in particolar modo con la (1.11), possiamo quindi aumentare la risoluzione del nostro gravimetro di un fattore 10^5 , in virtù di un $\mathbf{k} \sim 15 \mu\text{m}^{-1}$.

I risultati fino qui ottenuti servono a capire la fisica delle transizioni Raman, ma non possono essere direttamente utilizzati per modellizzare un interferometro atomico che ne faccia uso. Infatti l'ipotesi di onde piane di luce e di materia non è realistica, in quanto trascura la localizzazione di entrambi i campi in regioni limitate spazialmente. Una più adeguata trattazione quantistica del separatore di fasci atomici, in approssimazione non dispersiva, può essere trovata in [39]. Qui di seguito riportiamo i risultati di tale analisi per un separatore temporale ossia un sistema laser che viene acceso per tempi brevi (dell'ordine di poche decine di μs) rispetto alla durata dell'intero esperimento interferometrico (un centinaio di ms).

Prendiamo ad esempio un pacchetto d'onda atomico che al tempo t_0 sia nello stato $|a\rangle$

$$|\psi\rangle = e^{i\frac{\mathbf{p}_a(t_0)[\mathbf{q}-\mathbf{q}_a(t_0)]}{\hbar}} F(\mathbf{q} - \mathbf{q}_a(t_0), X(t_0), Y(t_0)) |a\rangle \quad (2.70)$$

e centrato temporalmente in t_A mandiamo un impulso Raman a risonanza ($\delta = 0$), di durata τ . Al tempo t avremo che la funzione d'onda totale sarà

la somma coerente di due contributi

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle = & M_a e^{iS_a(t,t_0)} e^{i\mathbf{p}_a(t)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_a(t))/\hbar} F(\mathbf{q}-\mathbf{q}_a(t), X(t), Y(t)) |a\rangle + \\
& M_b e^{iS_b(t,t_A)} e^{i\mathbf{p}_b(t)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_b(t))/\hbar} e^{-i(\omega_{eff}t_A - \mathbf{k}_{eff}\mathbf{q}_a(t_A) + \phi_{eff} - \pi/2)} \\
& e^{iS_a(t_A,t_0)} F(\mathbf{q}-\mathbf{q}_b(t), X(t), Y(t)) |b\rangle
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Questo risultato si spiega facilmente osservando che la parte di funzione d'onda in $|a\rangle$ evolve liberamente secondo quanto già mostrato nelle sezioni precedenti, con $\{\mathbf{p}_a(t), \mathbf{q}_a(t)\}$ variabili canoniche classiche date dalla (2.43) con condizioni iniziali $\mathbf{q}_a(t_0), \mathbf{p}_a(t_0)$. Per quanto riguarda la funzione d'onda in $|b\rangle$ vale la stessa cosa, con la sola differenza che inizia ad essere diversa da zero al tempo t_A , istante in cui le variabili canoniche classiche valgono $\mathbf{q}_b(t_A) = \mathbf{q}_a(t_A)$ e $\mathbf{p}_b(t_A) = \mathbf{p}_a(t_A) + \hbar\mathbf{k}_{eff}$. Da un confronto con la (2.69), tenendo conto della (2.61), scopriamo che i termini di fase aggiuntivi dovuti all'interazione con il campo sono nuovamente presenti nella parte di funzione d'onda in $|b\rangle$. Abbiamo in più $\mathbf{k}_{eff}\mathbf{q}_a(t_A)$ derivante dalla dipendenza spaziale $e^{i\mathbf{k}_{eff}\mathbf{q}}$ del potenziale d'interazione e responsabile nella trattazione in rappresentazione p dell'accoppiamento tra onde piane atomiche che differiscono nel valore dell'impulso di una quantità $\hbar\mathbf{k}_{eff}$. Si noti che la spiegazione introduttiva del gravimetro ha fatto uso proprio di questo termine che qui compare anche dopo uno studio quantistico dei gradi di libertà esterni. Le matrici X e Y soddisfano la (2.55), mentre i coefficienti M_a ed M_b dipendono dalla durata dell'impulso τ e dal detuning rispetto alla risonanza ed indicano la popolazione finale dei due livelli.

Per completezza desideriamo riportare una tabella riassuntiva dei termini di fase registrati nella funzione d'onda atomica ogni qual volta i separatori Raman vengono azionati.

stato interno	momento	fattore di fase
$a \rightarrow b$	$p \rightarrow p + \hbar k_{eff}$	$k_{eff} z_i - \omega_{eff} t_i - \phi_{eff} + \pi/2$
$b \rightarrow a$	$p \rightarrow p - \hbar k_{eff}$	$-(k_{eff} z_i - \omega_{eff} t_i - \phi_{eff} - \pi/2)$
$a \rightarrow a$	$p \rightarrow p$	0
$b \rightarrow b$	$p \rightarrow p$	0

Tabella 2.1: Fattori di fase impressi nella funzione d'onda atomica ogni qual volta che i fasci Raman vengono accesi.

2.4 Interferometro

Una volta chiara l'evoluzione dei pacchetti d'onda atomici in un campo quadratico esterno e l'effetto dei separatori di luce in approssimazione non dispersiva, abbiamo tutti gli strumenti per descrivere il nostro interferometro atomico.

Affrontiamo quindi una generica sequenza interferometrica (vedi fig. 2.3), dove al generico istante t_i l'atomo interagisce con un fotone di impulso $k_{\alpha i}$ o $k_{\beta i}$ a seconda del cammino α o β considerato.

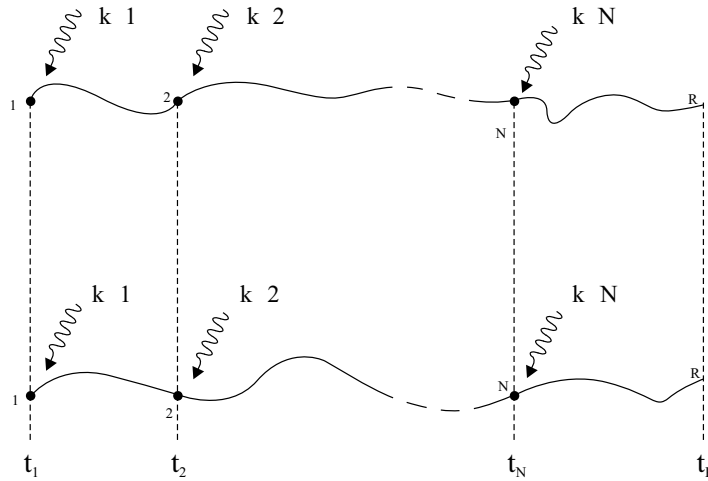


Figura 2.3: Schema generale di un interferometro. Si notino i due cammini α e β e le N interazioni tra atomo e campo esterno k_i .

Si noti che in ogni tratto l'atomo può essere nello stato interno a o b a

seconda dello stato nel tratto precedente e dell'interazione o no con un fotone k_i che lo faccia transire. Dopo l' N -esima interazione, per avere interferenza, occorre che da ogni cammino esca un contributo relativo allo stato a ed uno allo stato b . Analizziamo il primo, per entrambi i cammini, al tempo t_R di rivelazione. Avremo

$$M_\theta e^{i\phi_{C\theta}} e^{i\phi_{S\theta}} e^{ip_{bR\theta}(q-q_{bR\theta})} e^{i\frac{m}{2\hbar}(q-q_{bR\theta})Re(Y_RX_R^{-1})(q-q_{bR\theta})} |a\rangle \quad (2.72)$$

dove M_θ è l'ampiezza di probabilità relativa al cammino θ e dove

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, \beta \quad \phi_{C\theta} &= \sum_{j=1}^N S_\theta(t_{j+1}, t_j)/\hbar \\ \phi_{S\theta} &= \sum_{j=1}^N k_{\theta j} q_{\theta j} - \omega_{\beta j} t_j - \phi_{\theta j} \end{aligned} \quad (2.73)$$

sono i termini di fase che si possono evincere dalla (2.71) e dalla tabella 2.1. Ricordiamo che $\phi_{S\theta}$ dipende dalla fase del campo esterno al tempo t_j nel punto in cui si trova il centro $q_{bj\theta}$ del pacchetto d'onda atomico, in questo esempio per semplicità gaussiano con parametri di larghezza X e Y . Se vogliamo conoscere la probabilità di popolamento P_a del livello a al momento della rivelazione, occorre sommare i contributi relativi ai due cammini (ottenibili dalla (2.72) per $\theta = \alpha$ e β), calcolare il modulo quadro dell'ampiezza totale ed integrare spazialmente in dq . Nell'ipotesi che $M_\alpha = M_\beta$ otteniamo che

$$\begin{aligned} P_a \propto 1 + Re \Big(e^{i\Delta\phi_C} e^{i\Delta\phi_S} \int dq \Big[& e^{ip_{bR\beta}(q-q_{bR\beta})} e^{-ip_{bR\alpha}(q-q_{bR\alpha})} \\ & e^{i\frac{m}{2\hbar}(q-q_{bR\beta})Re(Y_RX_R^{-1})(q-q_{bR\beta})} e^{-i\frac{m}{2\hbar}(q-q_{bR\alpha})Re(Y_RX_R^{-1})(q-q_{bR\alpha})} \Big] \Big) \end{aligned} \quad (2.74)$$

dove $\Delta\phi_C = \phi_{C\beta} - \phi_{C\alpha}$ e $\Delta\phi_S = \phi_{S\beta} - \phi_{S\alpha}$. Nel caso in cui i centri dei due pacchetti d'onda siano separati più della loro estensione, l'integrale è pressoché nullo e non abbiamo interferenza. Al contrario avremo un coefficiente reale $0 < A < 1$ che indica il livello di sovrapposizione ed in più un termine di fase. Si può dimostrare che se i pacchetti atomici derivanti dai due cammini sono uguali, tale termine è dato dai contributi di onda piana $e^{ip_{bR\theta}(q-q_{bR\theta})}$,

valutati nel punto di mezzo $q_{bR\beta} + q_{bR\alpha}/2$. La dimostrazione di questo teorema, detto del punto medio, può essere trovata in [38]. Riassumendo avremo che

$$P_a \propto 1 + A \cos \Delta\phi \quad (2.75)$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & \sum_{j=1}^N [S_\beta(t_{j+1}, t_j) - S_\alpha(t_{j+1}, t_j)] / \hbar + \\ & \sum_{j=1}^N (k_{\beta j} q_{\beta j} - k_{\alpha j} q_{\alpha j}) - (\omega_{\beta j} - \omega_{\alpha j}) t_j - (\phi_{\beta j} - \phi_{\alpha j}) + \\ & - \frac{(p_{bR\beta} + p_{bR\alpha})}{2\hbar} (q_{bR\beta} - q_{bR\alpha}) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Riteniamo utile a questo punto analizzare il semplice caso di un interferometro per la misura di un campo di forze uniforme diretto lungo la verticale \hat{z} , come potrebbe essere considerato in prima approssimazione il campo gravitazionale g . Per questa misura ricorriamo a tre interazioni con la luce del separatore, costituito da due laser verticali capaci di effettuare delle transizioni a due fotoni tra i due livelli in gioco. Possiamo comunque descrivere l'interazione con un solo fotone virtuale con vettore d'onda \mathbf{k}_{eff} , frequenza ω_{eff} e fase ϕ_{eff} secondo quanto detto nella sezione precedente.

L'atomo è inizialmente nello stato a e il primo impulso $\pi/2$ separa in parti uguali la popolazione nei due livelli (vedi fig.2.4). I due pacchetti d'onda creati si separano poi spazialmente perché quello relativo al livello b riceve un momento cinetico $\hbar\mathbf{k}_{eff}$. Dopo un tempo T applichiamo un secondo impulso, detto π e di durata doppia, in modo da invertire la popolazione di entrambi i pacchetti. Questi tenderanno allora a ricongiungersi spazialmente e a sovrapporsi dopo un ulteriore intervallo di tempo T . A questo punto applichiamo un ultimo impulso $\pi/2$ in modo che i coefficienti M_α ed M_β , introdotti nella (2.72), siano effettivamente uguali e pari a $1/\sqrt{2}$. Volendo calcolare la popolazione finale del livello a dobbiamo quindi risolvere la (2.76).

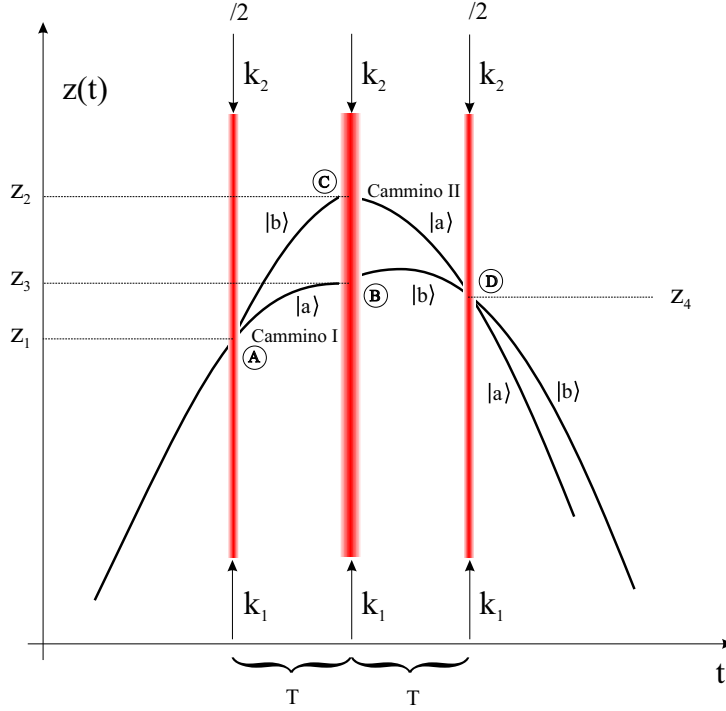


Figura 2.4: Schema interferometrico di un gravimetro: si distinguono l'impulso di separazione $\pi/2$, quello di riflessione π e quello di ricombinazione $\pi/2$, tutti effettuati ricorrendo ad una transizione Raman con fasci laser k_1 e k_2 contropropaganti. Visto il trasferimento di impulso agli atomi abbiamo una separazione spaziale dei cammini come in un interferometro ottico.

Due sole formule

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

$$S_{cl}(z, z_0, T) = \frac{M}{2} \frac{(z - z_0)^2}{T} - \frac{Mg}{2} (z + z_0)T - \frac{Mg^2}{24} T^3 \quad (2.77)$$

sono sufficienti per farlo. Grazie alla prima siamo in grado di ottenere le coordinate z_j (vedi fig. 2.4) classiche da inserire nel secondo e terzo termine della (2.76). Quest'ultimo risulta tra l'altro nullo poiché $z_3 = z_4$ e la uguale velocità dei due pacchetti fa sì che anche al momento della rivelazione tale condizione sia valida. La seconda formula permette poi di mostrare che anche

il primo termine della (2.76) è nullo. Resta quindi solo il secondo. Nell'ipotesi di \mathbf{k}_{eff} , ω_{eff} e ϕ_{eff} costanti ed inserendo in (2.76) i giusti valori dedotti dalla tabella 2.1

$$k_{\beta 1} = -k_{\beta 2} = k_{\alpha 2} = -k_{\alpha 3} = k_{eff}, \quad k_{\alpha 1} = k_{\beta 3} = 0 \quad (2.78)$$

e

$$\omega_{\beta 1} = -\omega_{\beta 2} = \omega_{\alpha 2} = -\omega_{\alpha 3} = \omega_{eff}, \quad \omega_{\alpha 1} = \omega_{\beta 3} = 0 \quad (2.79)$$

abbiamo che $\Delta\phi = k_{eff}gT^2$ [19]. Si osservi come tale differenza di fase possa essere interpretata come lo spazio percorso dagli atomi in unità di lunghezza d'onda della radiazione interferometrica.

Riuscire ad effettuare impulsi π e $\pi/2$ su atomi in caduta libera, comporta la necessità di modificare la frequenza ω_{eff} in modo da garantire nella (2.66) $\delta \approx 0$. Se il campo di forze esterno è pressoché costante, la variazione di \mathbf{p} degli atomi sarà lineare nel tempo per cui occorrerà effettuare una rampa in frequenza

$$\omega_{eff}(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) = \omega_1(0) - \omega_2(0) - \gamma t \quad (2.80)$$

La dipendenza temporale della fase del campo non sarà più semplicemente $\omega_{eff}t$, come è stato supposto nella (2.76), ma diverrà

$$\int_0^{t_j} \omega_{eff}(t) dt = \omega_{eff}(0)t_j + \frac{1}{2}\gamma t_j^2 \quad (2.81)$$

Ne segue che alla fine della sequenza interferometrica per la misura di g , avremo

$$\Delta\phi = (k_{eff}g - \gamma)T^2 \quad (2.82)$$

Si osserva che la rampa in frequenza non causa variazioni rilevanti di \mathbf{k}_{eff} .

Sperimentalmente si cerca di annullare il più possibile il termine in parentesi, assicurandosi che $\Delta\phi$ non vari molto al variare di T e determinando così il valore di $k_{eff}g$ entro 2π . Come mostra la (2.75), la differenza di fase $\Delta\phi$ è legata all'inversione di popolazione finale che può essere misurata effettuando la sequenza interferometrica su una nuvola di N atomi e misurando quanti finiscono in a e quanti in b . Poiché si tratta in pratica di misurare una probabilità con N prove, la risoluzione in fase risulta essere dell'ordine

di π/\sqrt{N} . Tale limite è chiamato quantum projection noise ed è ben noto a chi si occupa di orologi atomici [43]. Tengo infine a precisare che la presenza nella nuvola di atomi di fondo che non contribuiscono al segnale fa sì che il numero N_a finale medio di atomi in a dipenda da un fattore di contrasto K non noto a priori

$$N_a = N \frac{1 + K \cos \phi}{2} \quad (2.83)$$

Con un T elevato per una maggiore risoluzione si eseguono quindi una serie di misure variando la fase del campo di una quantità arbitraria θ subito prima dell'ultimo impulso. Ne segue che $\Delta\phi = (k_{eff}g - \gamma)T^2 + \theta$. Graficando il numero di atomi in a al variare di θ è possibile eseguire un fit e risalire al valore di $(k_{eff}g - \gamma)T^2$ e di K . Conoscendo k_{eff} , γ e T è possibile determinare g .

Nel caso più generale della (2.21) il problema di ricavare $\Delta\phi$ si complica notevolmente, ma solo dal punto di vista del calcolo. Concettualmente si tratta sempre di determinare la traiettoria e l'azione classica per risolvere l'espressione (2.76) in funzione di una generica rotazione $\vec{\Omega}(t)$ o di un gradiente di campo $\vec{\gamma}(t)$. Il conto si semplifica notevolmente se si sfrutta però il cosiddetto teorema dei quattro punti, che lega la differenza delle azioni calcolate su due traiettorie classiche distinte, alle coordinate e agli impulsi dei punti estremali (vedi fig. 2.5).

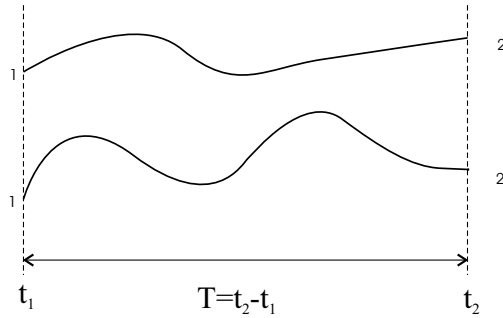


Figura 2.5: Due cammini distinti durante uno stesso intervallo T in presenza dello stesso campo di forza.

Da una semplice dimostrazione [45] si evince che nel caso di masse iden-

tiche per le due traiettorie

$$S_{cl}(t_2, t_1, q_{\alpha 1}, p_{\alpha 1}) - S_{cl}(t_2, t_1, q_{\beta 1}, p_{\beta 1}) = \frac{1}{2}(p_{\alpha 2} + p_{\beta 2})(q_{\alpha 2} - q_{\beta 2}) + \frac{1}{2}(p_{\alpha 1} + p_{\beta 1})(q_{\beta 1} - q_{\alpha 1}) \quad (2.84)$$

Se adesso $p_{\theta j}$ e $q_{\theta j}$ esprimono il momento e l'impulso dell'atomo lungo la traiettoria θ all'istante t_j subito prima di interagire con il campo esterno, allora, facendo uso della (2.84) ed aiutandosi con la figura 2.3, otteniamo che il primo termine della (2.76) diventa

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(p_{\alpha j} + \hbar k_{\alpha j} + p_{\beta j} + \hbar k_{\beta j})(q_{\alpha j} - q_{\beta j}) + \frac{1}{2}(p_{\alpha j+1} + p_{\beta j+1})(q_{\beta j+1} - q_{\alpha j+1}) \quad (2.85)$$

o più semplicemente

$$\frac{1}{2}(p_{\alpha 1} + p_{\beta 1})(q_{\alpha 1} - q_{\beta 1}) + \frac{1}{2}(p_{\alpha R} + p_{\beta R})(q_{\beta R} - q_{\alpha R}) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\hbar k_{\alpha j} + \hbar k_{\beta j})(q_{\alpha j} - q_{\beta j}) \quad (2.86)$$

Se prendiamo adesso la (2.76) scopriamo che il terzo termine si cancella con il secondo della (2.86), mentre il secondo modifica il terzo della (2.86). In un esperimento in cui $q_{\alpha 1} = q_{\beta 1}$ l'espressione finale per $\Delta\phi$ risulta essere semplicemente

$$\Delta\phi = \sum_{j=1}^N (\hbar k_{\beta j} - \hbar k_{\alpha j}) \frac{(q_{\alpha j} + q_{\beta j})}{2} \quad (2.87)$$

Il risultato mostra come le sole posizioni classiche atomiche nel sistema di riferimento del laboratorio al momento degli impulsi siano sufficienti a determinare la differenza di fase accumulata. Tenendo conto della (1.81) e della fig. 2.4 vediamo che

$$\Delta\phi = k_{eff}(z_1 - z_2 - z_3 + \frac{z_4 + z_5}{2}) \quad (2.88)$$

Secondo quanto mostrato dalla (2.43), tale espressione è funzione delle sole matrici A, B, C, D e della funzione ξ . In [44] è possibile trovare una facile

dimostrazione di come queste quantità possano essere calcolate anche nel caso più difficile di presenza di gravità, gradiente di gravità e rotazione.

Qui di seguito ci limitiamo semplicemente a riportare le più semplici espressioni per gli shift di fase nel caso di gravità g più gradiente γ

$$\Delta\phi = k_{eff}gT^2 + k_{eff}\gamma T^2 \cdot \left(q_1 + \frac{7}{12}T^2g + \frac{1}{m} \left(p_1 + \frac{\hbar k_{eff}}{2} \right) \right) \quad (2.89)$$

dove q_1 e p_1 rappresentano rispettivamente posizione ed impulso atomici iniziali, e nel caso della sola rotazione

$$\Delta\phi = 2\Omega T^2 k_{eff} \frac{p_1}{m} \quad (2.90)$$

dove per semplicità si è assunto $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, $\vec{k}_{eff} = k_{eff} \vec{e}_y$ e $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$.

Per avere un'idea della sensibilità di un interferometro atomico $\pi/2 - \pi - \pi/2$, con $T = 150$ ms e $k_{eff} \sim 14 \mu\text{m}^{-1}$, ricordiamo che uno shift di fase di 2π corrisponde ad un'accelerazione di $1.7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ e ad una rotazione di 10^{-5} rad/s per $p_1/m = 1 \text{ m/s}$ (vedi la (2.90)). La risoluzione dello shift di fase dipende poi dal numero di atomi impiegati, secondo quanto detto poco fa sul quantum projection noise.

Capitolo 3

Apparato sperimentale

Il presente capitolo ha lo scopo di descrivere l'apparato sperimentale assemblato nel corso del lavoro di tesi.

La prima sezione è stata dedicata al sistema da vuoto, costruito per poter lavorare con atomi freddi, isolati dai gas termici atmosferici.

Le tre sezioni successive hanno permesso invece di riassumere il lungo lavoro di costruzione delle sorgenti laser necessarie all'intrappolamento, lancio ed interrogazione delle nuvole atomiche. Una maggiore attenzione è stata dedicata ai fasci interferometrici per i quali è stato realizzato un aggancio in fase dal basso rumore residuo e dall'elevata stabilità.

Concluderemo poi con una breve discussione riguardante le tecniche di lancio e rivelazione impiegate.

3.1 Sistema da vuoto

3.1.1 Struttura

Il sistema da vuoto, la cui lavorazione è stata interamente affidata ad una ditta di Parma, la High Vacuum Process, è mostrato in fig. 3.1. Si distinguono fondamentalmente tre parti: una prima cella, in basso, dove gli atomi vengono intrappolati e poi lanciati, una seconda camera centrale, dove realizziamo la selezione in velocità, la polarizzazione del campione atomico e

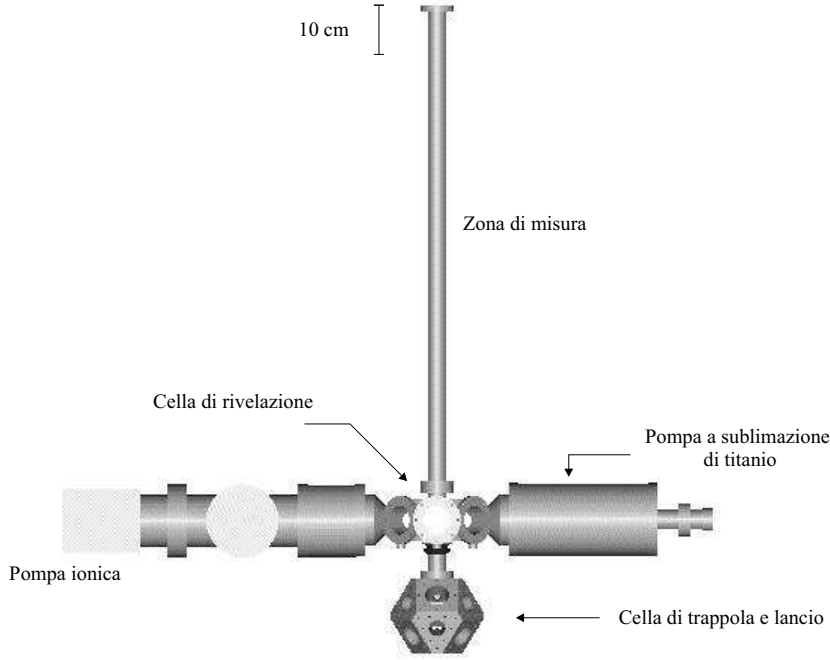


Figura 3.1: Sistema da vuoto

la rivelazione ed infine un tubo dove avviene l'interazione degli atomi con i fasci interferometrici.

La prima cella è stata ottenuta da un cubo in lega di titanio alluminio vanadio TiAl_6V_4 , di lato 15 cm, tagliando gli otto spigoli ortogonalmente alle diagonali principali e scavandolo al suo interno. Dalle 6+8 facce, pressoché equidistanti dal centro del cubo, otteniamo altrettanti accessi del diametro rispettivamente di 50 e 35 mm. I primi vengono utilizzati per i fasci di trappola della MOT, disposti su tre assi ortogonali, ruotati di un angolo $\xi = 54.7^\circ$ ($\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$) rispetto alla verticale, lasciata libera per i fasci Raman. Gli altri accessi sono invece impiegati per il collegamento con la cella superiore, per l'ingresso dei laser interferometrici, per la sorgente di rubidio e per il monitoraggio della MOT.

La camera centrale, completamente in acciaio amagnetico 316-LN, è di forma cilindrica, di diametro interno 17 cm e alta 8 cm. È dotata di due

accessi laterali CF 100 dedicati ad una pompa a sublimazione di titanio e ad una pompa ionica (VARIAN VacIon 75 Plus Star Cell), opportunamente allontanata di ~ 1 m per ridurre l'effetto dei campi magnetici da lei prodotti. Gli altri sei accessi ottici del diametro di 60 cm, oltre ad essere impiegati nella rivelazione, sono stati pensati per un futuro stadio di raffreddamento della nuvola in un reticolo ottico tridimensionale (3D-sideband Raman cooling [46]). Delle due connessioni con le altre parti del sistema, realizzate mediante un o-ring di rame, quella inferiore è munita di un soffietto, utile per ottimizzare la verticalità del lancio.

Il tubo, anch'esso in lega di titanio, è lungo 1 m e ha un diametro interno di 3.5 cm, non troppo piccolo per non limitare le dimensioni dei fasci Raman e non troppo grande per contenere la distanza delle masse sorgenti dagli atomi (vedi capitolo 4).

La scelta di utilizzare una lega di titanio deriva dal fatto che questo materiale è debolmente magnetico e la sua resistività è relativamente alta per un metallo ($\sim 170 \mu\Omega\cdot\text{cm}$). In più è resistente come l'acciaio, ma sensibilmente più leggero. Per la seconda camera abbiamo optato per l'acciaio amagnetico 316-LN in quanto una sua realizzazione in titanio sarebbe risultata molto più costosa.

3.1.2 Finestre

La necessità di avere ampi accessi ottici per un'elevata cattura di atomi nella MOT, ma di limitare comunque le dimensioni della prima cella, ci ha indotto a scartare l'ipotesi di utilizzare finestre flangiate con standard Con Flat e di ricorrere ad un diverso sistema di guarnizione.

Con un filo di piombo di 0.5 mm di diametro, puro al 99.99% (ADVENT), abbiamo creato degli anelli incrociandone semplicemente le estremità. Come mostra la fig.3.2 li abbiamo poi interposti tra le finestre (parallelismo $\lambda/4$), spesse 1 cm, e la superficie esterna della camera, mentre con una flangia abbiamo esercitato un'opportuna pressione (un momento di 3 Nm su ognuna delle 8 viti M6). Rispetto all'indio, il piombo ha una maggiore temperatura di fusione (327° contro 157°) e permette cotture dell'apparato a temperature

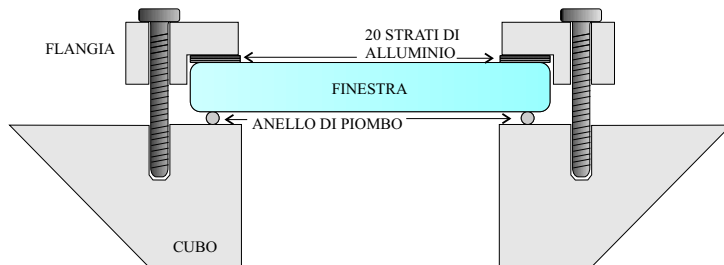


Figura 3.2: Tecnica di guarnizione mediante anelli di piombo.

superiori. Rispetto all'oro è più economico e la sua conducibilità elettrica è dieci volte più grande. Infine il suo utilizzo ci ha permesso l'impiego di flange in lega di titanio, non disponibili nello standard Con Flat. La stessa tecnica di guarnizione è stata poi utilizzata anche nella seconda camera (finestre con parallelismo $\lambda/4$).

L'unica eccezione riguarda le finestre di accesso per i fasci interferometrici (parallelismo $\lambda/20$), per le quali abbiamo ricorso ad una colla da alto vuoto (AREMCO 631). Si tratta di una colla epossidica bicomponente che abbiamo mescolato alla temperatura di 40°C e lasciato che si indurisse, una volta applicata, alla temperatura di 70°C , ossia a circa metà strada tra la temperatura di cottura (150°C) e la temperatura ambiente (20°C). Riteniamo che questa scelta abbia ridotto lo stress delle superfici della finestra, ma che non lo abbia del tutto evitato, dati i diversi coefficienti di espansione termica di vetro BK7, titanio e colla, rispettivamente $7,5 \cdot 10^{-6}$, $9 \cdot 10^{-6}$ e $4,9 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Tutte le finestre sono state trattate con un comune trattamento antiriflesso.

3.1.3 Cottura e dispenser

La cottura del sistema, necessaria alla riduzione dei gas emessi dalle superfici interne del sistema da voto, è durata 5 settimane, riscaldando le parti in acciaio e la pompa ionica fino a 200°C , mentre le parti con le finestre fino a 150°C . La pressione finale è stimata essere $\sim 10^{-10} \text{ mbar}$.

La sorgente di atomi è costituita da quattro filamenti indipendenti (SAES getters 5G0807) saldati su quattro coppie di feed-through mediante una puntatrice. La corrente necessaria per attivare la sublimazione del rubidio va da 4 a 8 A. Dopo circa sei mesi stiamo ancora utilizzando il primo dei quattro.

3.2 Sistema Laser

Le sorgenti laser impiegate hanno due utilizzi principali: uno l'intrappolamento, il lancio e la rivelazione della nuvola atomica, due la realizzazione degli impulsi interferometrici Raman. Le varie frequenze sono indicate schematicamente in fig. 3.3.

3.3 Laser di trappola, lancio e di rivelazione

Il set up di queste sorgenti laser è rappresentato nelle due fig. 3.4 e 3.5.

Tutti i laser a diodo utilizzati sono degli Sharp GH0781JA2C da 100 mW. Un primo di questi (L1), montato in cavità estesa [47], configurazione Littrow, attraversando in doppio passaggio un modulatore acusto ottico (AOM) da 80 MHz, prima di essere inviato su una cella di rubidio per fare spettroscopia di saturazione 1f, viene agganciato 184 MHz sul rosso della transizione $F = 2 - F' = 3$. Lo stesso AOM viene utilizzato per la modulazione di frequenza a 100 kHz. Il rimanente 85% della potenza, corrispondente a circa 30 mW, viene utilizzato per iniettare sia un tapered amplifier (TA) (TOPTICA, SYS TA 100, 780) che un secondo diodo (LD) impiegato nella fase di rivelazione. Circa 1 mW di potenza serve infine a stabilizzare in frequenza il Master Raman, 3.4 GHz sul rosso della transizione $F = 2 - F' = 3$. Il fascio di 500 mW in uscita dal TA viene equamente diviso ed inviato su due AOM in doppio passaggio, per un controllo indipendente delle frequenze e delle potenze, necessario per l'intrappolamento ed il lancio della nuvola di atomi. Un analogo controllo avviene infine anche per LD.

Il laser di ripompaggio (LR) viene ricavato da un terzo diodo agganciato nelle vicinanze della transizione $F = 1 - F' = 2$, là dove si massimizza il numero di atomi nella MOT. La tecnica di spettroscopia utilizzata è basata

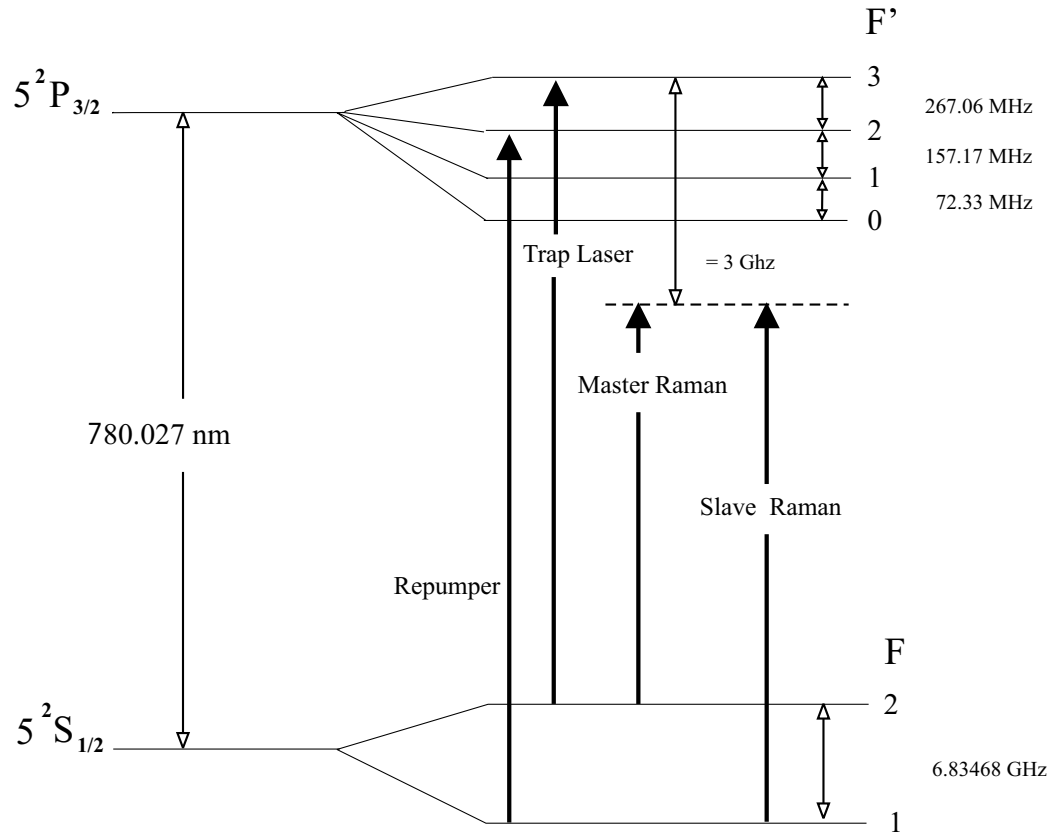


Figura 3.3: Frequenze dei fasci laser impiegati nella cattura (laser di trappola e di ripompaggio), nella rivelazione e nell'interferometro (laser Master e Slave).

sul dicroismo circolare indotto magneticamente [51]. Un AOM in singolo passaggio più uno shutter meccanico vengono utilizzati come interruttori.

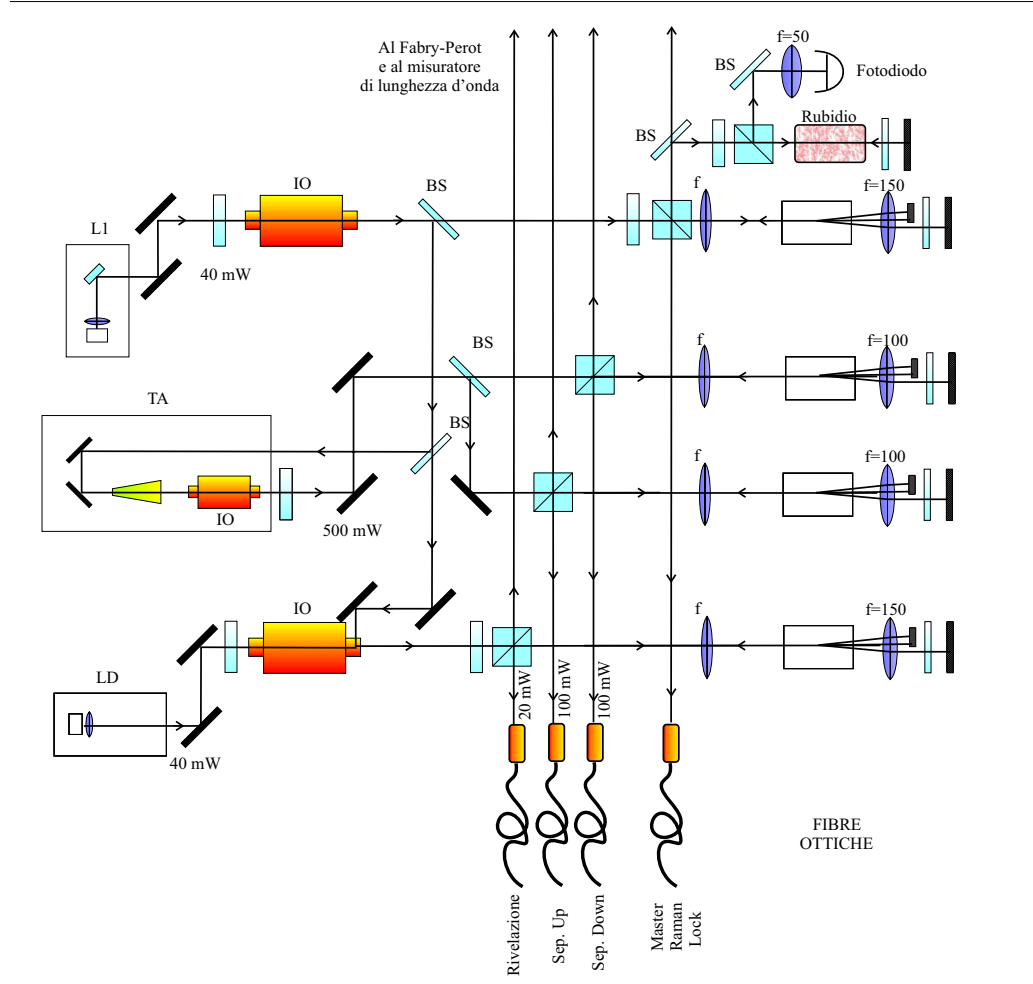


Figura 3.4: Sistema laser per la cattura, il lancio e la rivelazione.

Tutti i fasci fino ad ora menzionati sono stati accoppiati mediante fibre ottiche polarization maintaining (Schäfter+Kirchhoff GmbH, PMC-780-5.0-NA011-3-APC-700-P) con relativi accoppiatori (60FC-4-M12-10) e inviati sul tavolo della camera da vuoto.

In collaborazione con la Schaefer-Kirchhoff di Amburgo è stato poi sviluppato un sistema di separatori per dividere in tre ognuno dei due fasci ottenuti con il TA (vedi fig. 3.6). Il loro funzionamento è molto semplice ed è illustrato in fig. 3.7. Un primo beam-splitter all'1% permette di mo-

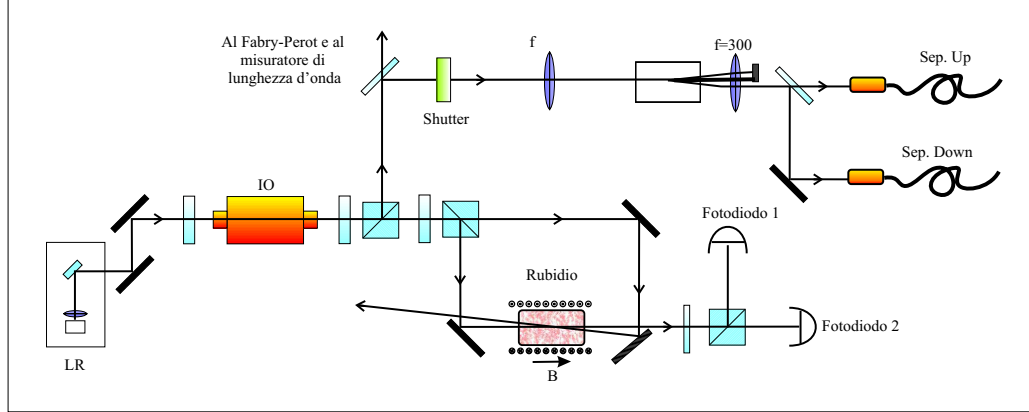


Figura 3.5: Sistema laser per il ripompaggio.

nitorare con un fotodiodo la potenza in entrata. Due coppie di lamina $\lambda/2$ e cubo polarizzatore permettono poi di avere nei canali di uscita 1, 2 e 3 la potenza desiderata. Le lamine possono essere ruotate dall'esterno e sono normalmente disposte per dare la stessa potenza in uscita. Un secondo ingresso permette di sovrapporre al fascio 2 di ogni separatore anche la luce di ripompaggio.

Le 3+3 fibre in uscita sono state fissate direttamente alla cella inferiore mediante dei montaggi di nostra progettazione ed illustrati in fig.3.8. Durante la fase di espansione del fascio la luce polarizzata linearmente viene resa circolare mediante lamine $\lambda/4$ poste a pochi mm dalla fibra. Un doppietto di focale 120 mm permette poi la collimazione con un waist risultante di 1.35 cm di raggio (distanza dall'asse a cui l'intensità è ridotta di un fattore $1/e^2$).

Il montaggio prevede inoltre una fessura per ospitare momentaneamente un fotodiodo di larga area (Hamamatsu S2386-18L, $1.1 \times 1.1 \text{ cm}^2$), utile per monitorare giornalmente il bilanciamento delle potenze in uscita dai separatori. Nei laboratori francesi dell'Observatoire di Parigi, dove grande è l'esperienza sulle fontane atomiche usate per gli orologi al Cs e Rb, si costruiscono montaggi rigidamente fissati alla camera, assicurandosi preventivamente lavorazioni delle parti meccaniche e di supporto delle fibre e delle ottiche al centesimo di mm. Per sicurezza abbiamo invece preferito lasciarci la pos-

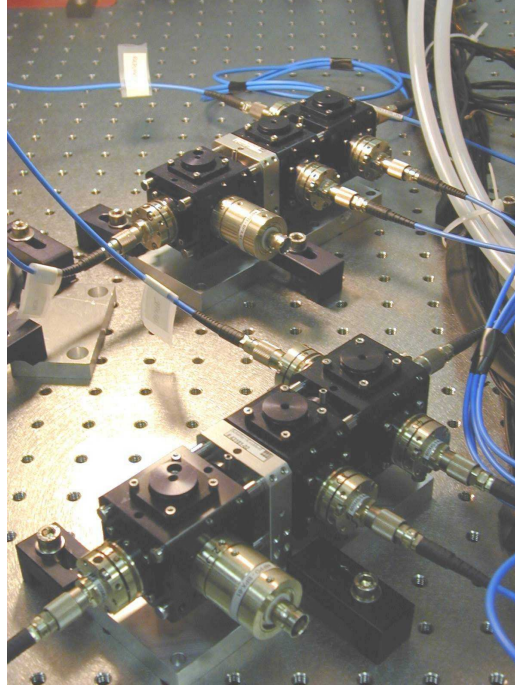
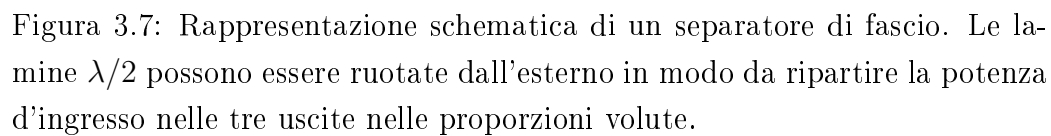


Figura 3.6: Foto dei separatori

sibilità di modificare sia l'inclinazione che la posizione dei fasci di trappola mediante un sistema di 6 viti su ogni montaggio. Da quello che abbiamo osservato nell'ultimo periodo di misure il sistema risulta essere comunque stabile.

Attualmente gli interventi giornalieri sul sistema laser consistono in un'ottimizzazione dell'iniezione del TA e in un ritocco dell'accoppiamento in fibra dei due fasci di trappola. Viceversa i separatori di fasci sembrano essere molto stabili e abbiamo apprezzato variazioni sensibili nella divisione della potenza solo su scale di tempo di alcune settimane. Sfortunatamente la nota dolente del nostro esperimento sono le fluttuazioni in temperatura all'interno della stanza: durante il giorno la temperatura può fluttuare anche di $4/5^{\circ}\text{C}$, per non contare che durante la notte e per parte del fine settimana il sistema di condizionamento viene spento. L'installazione di un nuovo sistema, più efficiente e funzionante 24 ore su 24 è attualmente in progetto.



3.4 Fasci Raman

3.4.1 Allineamento

Come spiegato nel primo capitolo, il vantaggio di utilizzare una transizione Raman per gli impulsi interferometrici consiste nella possibilità di accoppiare gli stati fondamentali metastabili del ^{87}Rb mediante uno pseudo-fotone (vedi la (2.65)) con frequenza radio $\omega_{eff} \approx 2\pi \cdot 7 \text{ GHz}$, ma con vettore d'onda ottico \mathbf{k}_{eff} , nell'ipotesi in cui i due campi espressi dalla (2.59) siano contropropaganti. La soluzione più ovvia è quindi quella di inviare i due fasci laser dentro il tubo, dove gli atomi si muovono in caduta libera, con ω_1 proveniente dal basso e ω_2 dall'alto (vedi fig. 3.9 a)).

Per un motivo che risulterà chiaro tra breve abbiamo invece deciso di sovrapporli, inviarli dal basso e retrorifletterli entrambi su di uno specchio orizzontale come indicato in fig. 3.9 b). Infatti, una volta selezionate le frequenze ω_1 ed ω_2 in modo che i fasci ω_1^d e ω_2^u siano risonanti per un atomo con velocità v_0 (vedi la (2.66)), tutte le altre possibili coppie (ad esempio ω_1^u e ω_2^d) non sono in grado di permettere una transizione a due fotoni. L'unica condizione è che v_0 sia sufficientemente diverso da zero. La frequenza di Rabi durante gli impulsi interferometrici è nel nostro caso circa 5 kHz. Un effetto Doppler di tale entità si ha per una velocità di circa 4 mm/s, di conseguenza la condizione precedente si traduce in $v_0 \gg 4 \text{ mm/s}$. Gli impulsi π e $\pi/2$ non possono quindi essere applicati al vertice della traiettoria parabolica degli atomi, descritta dopo il loro lancio verticale.

3.4.2 Polarizzazione

Durante il loro volo gli atomi devono risentire della sola gravità. Il primo pericolo proviene dalla presenza di gradienti di campo magnetico che possono indurre una forza su stati con momento magnetico diverso da zero. I due livelli ideali a e b per il nostro esperimento diventano quindi $|F = 1, m_F = 0\rangle$ e $|F' = 2, m_{F'} = 0\rangle$, il cui effetto Zeeman al primo ordine è nullo. Per indurre una transizione Raman tra questi due soli stati utilizziamo la stessa polarizzazione lineare per entrambi i fasci e poniamo una lamina $\lambda/4$ prima dello

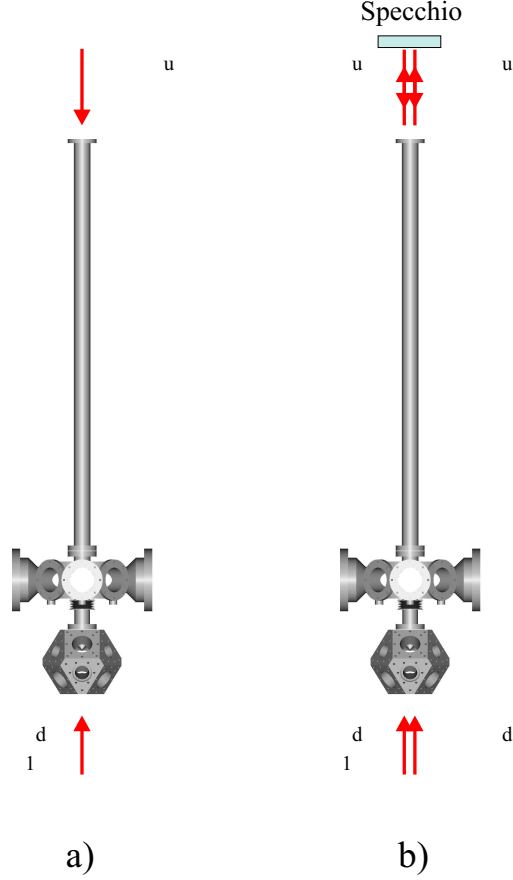


Figura 3.9: Possibili soluzioni per effettuare transizioni Raman con fasci contropropaganti ω_1^d e ω_2^u . a) soluzione ovvia b) soluzione valida per classi di atomi con velocità $v_0 \neq 0$ tale per cui ω_2^d e ω_1^u risultano fuori risonanza.

specchio orizzontale. Ponendo l'attenzione sui soli fasci ω_1^d e ω_2^u , possiamo scomporli ognuno in un contributo σ^+ e in un contributo σ^- ed ottenere le relazioni di fase espresse in Fig 3.10.

Se adesso vogliamo determinare la probabilità di transizione, ad esempio, tra lo stato $|F = 1, m_F = 0\rangle$ e lo stato $|F = 2, m_F = 2\rangle$, dobbiamo sommare tutte le ampiezze relative ai vari livelli intermedi i come mostra appunto la (2.66). Poiché si tratta di assorbire virtualmente un fotone σ^+ con frequenza ω_1 ed emettere un fotone σ^- con frequenza ω_2 , i livelli intermedi possibili so-

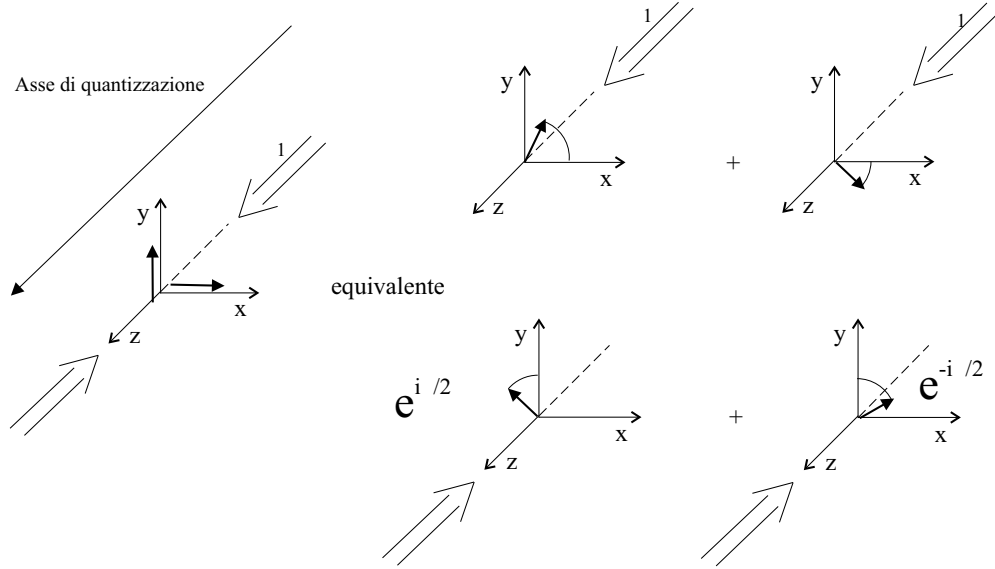


Figura 3.10: Scomposizione nei contributi σ^+ e σ^- dei due Fasci Raman con polarizzazione $\text{lin} \perp \text{lin}$

no $|F' = 2, m'_F = 1\rangle$ ed $|F' = 1, m'_F = 1\rangle$. Calcolando gli elementi di matrice dell'operatore dipolo elettrico dai coefficienti indicati in fig. 3.11, otteniamo che le ampiezze corrispondenti ai due possibili livelli sono proporzionali rispettivamente a $i\sqrt{150}$ e $-i\sqrt{150}$. La somma è ovviamente nulla, per cui nessun atomo risulterà accoppiato allo stato $|F = 2, m_F = 2\rangle$. Estendendo questo conto agli altri stati finali si scopre che la probabilità di transizione è diversa da zero solo per $|F' = 2, m_{F'} = 0\rangle$. Abbiamo quindi una transizione chiusa tra $|F = 1, m_F = 0\rangle$ e $|F' = 2, m_{F'} = 0\rangle$.

3.4.3 Controllo della fase dei laser di riferimento

Come visto nel capitolo precedente, un interferometro atomico per la rivelazione di forze inerziali ha come principio di funzionamento la misura della posizione di un atomo rispetto ad un metro di riferimento costituito dai fronti d'onda di un campo elettromagnetico. Tale campo è responsabile delle transizioni tra i due stati metastabili a e b e la dipendenza spaziale e

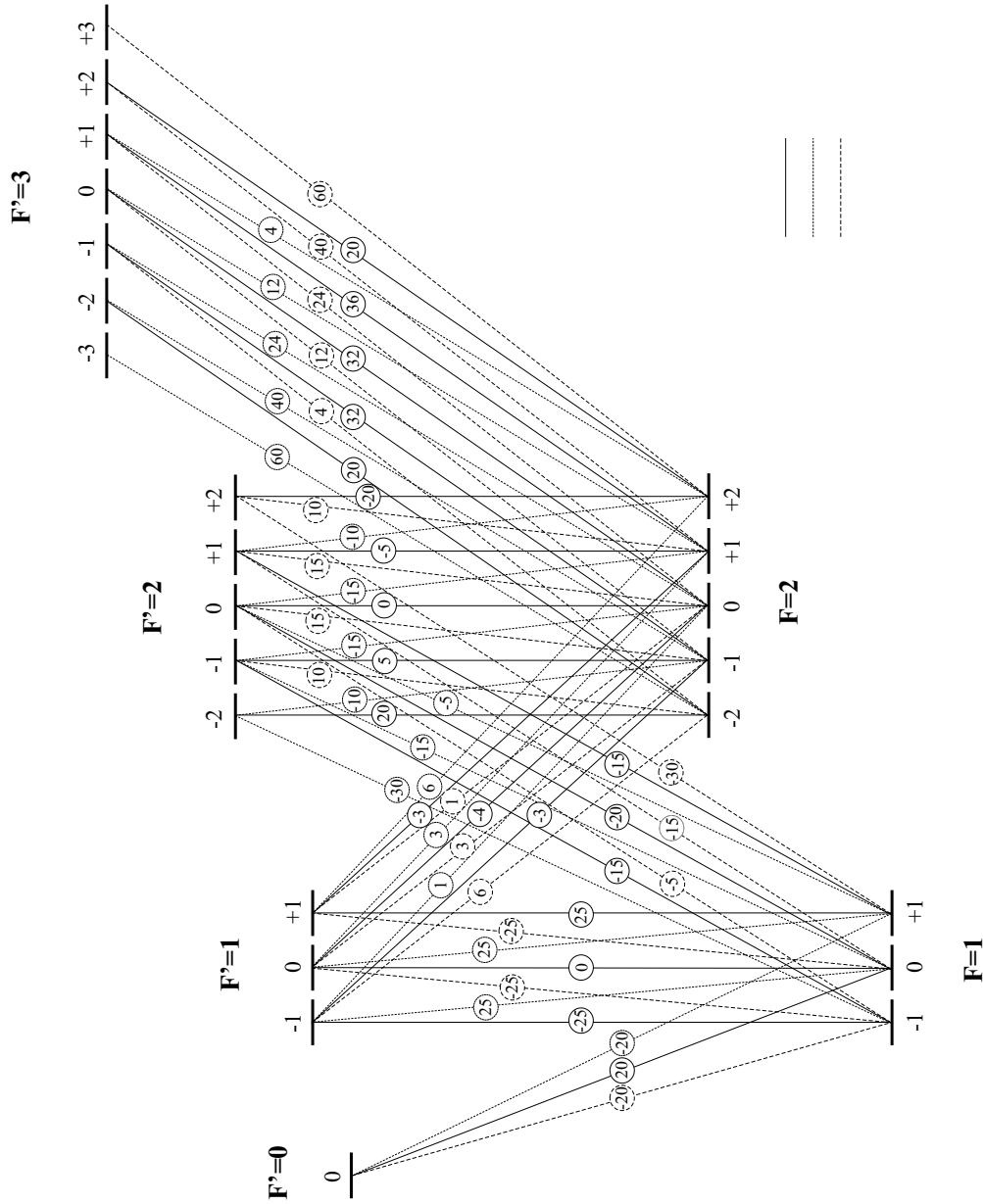


Figura 3.11: Coefficienti di Clebsch Gordan per la $D_{3/2}$. Per ottenere i valori numerici corretti prendere il segno indicato e calcolare la radice quadrata di modulo/60.

temporale della sua fase deve essere ben controllata se vogliamo ottimizzare le prestazioni dell'interferometro. Nei paragrafi precedenti lo abbiamo sempre descritto con un vettore d'onda $k_{\theta j}$, una frequenza $\omega_{\theta j}$ ed un termine di fase addizionale $\phi_{\theta j}$, tutti con una dipendenza temporale ben definita. Per una trattazione più realistica consideriamoli dipendenti dal tempo tenendo conto di una loro variazione casuale. Poiché utilizziamo una transizione Raman, ogni volta che applichiamo un impulso, si tratta di registrare la fase relativa nel punto P_A in cui l'atomo si trova (vedi tabella 2.1, la (2.67) e l'espressione di ϕ_{eff} nella (2.66)).

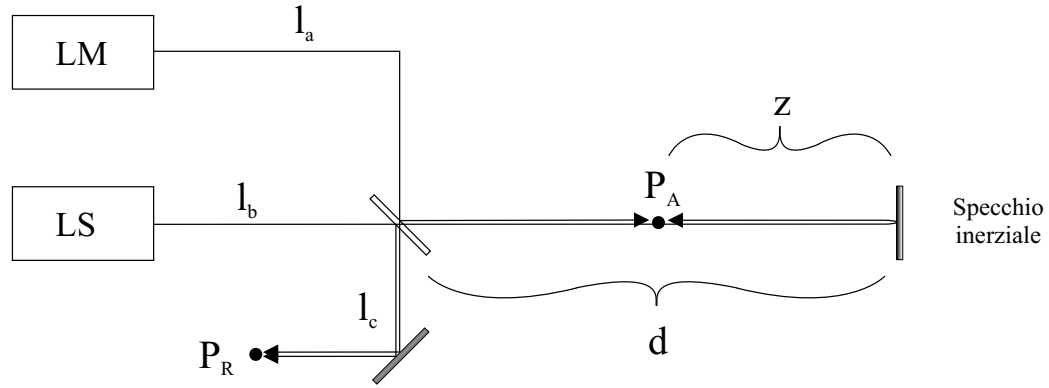


Figura 3.12: Rappresentazione schematica dei fasci Raman: si noti il loro percorso verso il punto di rivelazione P_R e verso il punto di interazione con gli atomi P_A .

Ricorriamo quindi alla fig. 3.12 per indicare schematicamente i cammini dei due fasci verso P_A e verso un punto di rivelazione P_R . In P_A avremo

$$\begin{aligned}\phi_1(t, P_A) &= k_1(l_a + d - z) + \omega_1 t + \phi_1(t) \\ \phi_2(t, P_A) &= k_2(l_b + d + z) + \omega_2 t + \phi_2(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

mentre in P_R

$$\begin{aligned}\phi_1(t, P_R) &= k_1(l_a + l_c) + \omega_1 t + \phi_1(t) \\ \phi_2(t, P_R) &= k_2(l_b + l_c) + \omega_2 t + \phi_2(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Si noti la supposta costanza di k_i visto che per un laser a 780 nm, con una stabilità in frequenza di ~ 100 kHz, il cambiamento della fase a circa ~ 1 m dalla sorgente, a seguito di una variazione del modulo del vettore d'onda è pari ad alcuni mrad e quindi per il momento trascurabile. Se siamo in grado di rivelare la differenza di fase in P_R ed, esercitando ad esempio un controllo veloce sul secondo dei due laser, fare in modo che evolva come quella di un generatore di frequenza a microonde, ossia $(\omega_{gen}t + \phi_{gen})$, otteniamo che

$$\phi_1(t, P_A) - \phi_2(t, P_A) = \omega_{gen}t + \phi_{gen}(t) - (k_1(t) + k_2(t))z \quad (3.3)$$

dove si è trascurato un termine $(k_1 - k_2)d$. Agendo sul generatore possiamo facilmente controllare la frequenza differenza tra i due laser e quindi decidere con quale classe di velocità atomiche essere a risonanza. Inoltre, a patto di avere un generatore con rumore di fase trascurabile, la fase effettiva viene a dipendere dalla posizione di P_A rispetto allo specchio, che diventa a tutti gli effetti l'origine del sistema di riferimento rispetto al quale la traiettoria degli atomi è misurata. Abbiamo quindi visto come in linea di principio un aggancio veloce permetta di creare un riferimento stabile in fase a partire da due laser intrinsecamente rumorosi. Si noti come la vibrazione di qualsiasi specchio, eccetto quello inerziale, sia irrilevante. Utilizzare la configurazione indicata in fig. 3.9 a) significherebbe stabilizzare tutti gli specchi non comuni ai due fasci.

3.4.4 Setup

Una rappresentazione schematica del sistema di laser Raman è riportata in fig. 3.13. Due laser a diodo Sharp da 100 mW assemblati in cavità estesa [47] vengono sovrapposti su di un cubo polarizzatore: circa 1 mW di entrambi i fasci viene inviato nel punto P_R per la rivelazione e il controllo della fase relativa. Il resto della potenza viene poi amplificata fino a 300 mW iniettando un Tapered Amplifier (TOPTICA, SYS TA 100, 780). Per bloccare la luce risonante con la $D_{3/2}$ ($5S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$) emessa in fluorescenza dal TA chip, lasciamo che il fascio attraversi una cella contenente vapori di Rb, munita di finestre ad angolo di Brewster per limitare le perdite per

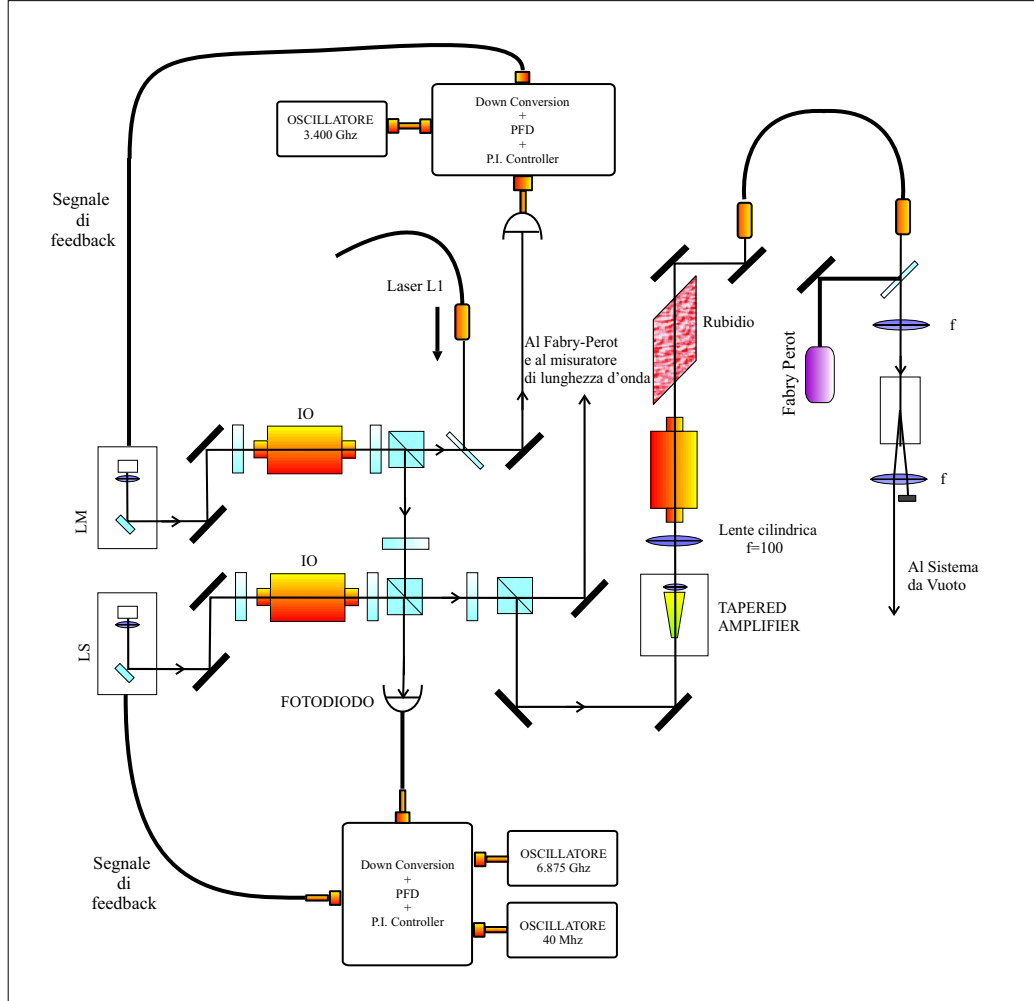


Figura 3.13: Set up per l'aggancio in fase dei laser Raman.

riflessione. Il fascio viene poi accoppiato in una polarization maintaining fiber per ottenere un modo gaussiano. Un Acusto-Optic Modulator (AOM) da 80 MHz viene poi utilizzato per accendere e spegnere velocemente i fasci Raman durante le fasi interferometriche. Ciò causa un peggioramento del modo, ma abbiamo comunque optato per questa soluzione per riservarci la possibilità di compensare, appena prima dell'AOM, shift di fase a bassa frequenza indotti da rumore acustico sulla fibra. Inoltre, data la non linearità del MOPA, per monitorare la potenza relativa dei due fasci, abbiamo ricorso

ad una cavità Fabry-Perot. Infine, i due ultimi specchi utilizzati per inviare i fasci nel sistema da vuoto, sono stati montati su due traslatori in modo da permettere uno spostamento orizzontale dei fasci nel tubo senza modificarne la verticalità.

3.4.5 Aggancio in fase

Lo scopo dell'aggancio in fase è fare in modo che nel punto di rivelazione P_R la differenza di fase tra i due laser evolva come quella di un generatore a microonde di riferimento. Prendiamo le (3.2) ed inglobiamo tutte le fluttuazioni in un solo termine di fase $\tilde{\phi}$ in modo che i due campi elettrici possano essere descritti da

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= E_1 \cos \left[\omega_1 t + \tilde{\phi}_1(t) \right] \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{E}_2 &= E_2 \cos \left[\omega_2 t + \tilde{\phi}_2(t) \right] \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{3.4}$$

dove gli \mathbf{e}_i sono i versori di polarizzazione. Nell'ipotesi in cui siano paralleli, l'intensità totale, data dal modulo quadro della somma dei campi, oscillerà alla frequenza somma $\omega_1 + \omega_2$ e differenza $\omega_1 - \omega_2$. Misurandola con un fotodiodo sufficientemente veloce avremo un segnale elettrico

$$V(t) = V_0 \cos \left[(\omega_1 - \omega_2)t + \tilde{\phi}_1(t) - \tilde{\phi}_2(t) \right]\tag{3.5}$$

che contiene l'informazione sulla differenza di fase tra i due laser. Si tratta adesso di confrontarla con quella di un generatore di riferimento ed applicare un segnale di controllo sul secondo laser per modificare opportunamente $\tilde{\phi}_2(t)$ ed annullare la differenza. Questo può essere ottenuto inviando $V(t)$ e il segnale $\hat{V} \cos[\omega_{gen}t + \phi_{gen}(t)]$ su di un mixer. Se $\omega_{gen} = \omega_1 - \omega_2$ il segnale di uscita sarà proporzionale a

$$\sin \left[\tilde{\phi}_1(t) - \tilde{\phi}_2(t) - \phi_{gen}(t) + \pi/2 \right]\tag{3.6}$$

Se la differenza tra $\tilde{\phi}_1(t) - \tilde{\phi}_2(t)$ e $\phi_{gen}(t) - \pi/2 \ll 1$, il seno può essere approssimato con il suo argomento. Abbiamo quindi un segnale proporzionale alla differenza di fase che vogliamo annullare, da utilizzare in un sistema di

controllo lineare [48]. Le correzioni su $\tilde{\phi}_2$ avvengono agendo sulla corrente del laser e sul piezoelettrico della cavità estesa. Variazioni di $\tilde{\phi}_1$ non sono un problema a patto che $\tilde{\phi}_2$ cambi esattamente nello stesso modo. Per questo il laser 1 è chiamato Master, mentre il laser 2 Slave. Il mixer, usato come rivelatore di fase, è un ottimo strumento in quanto è poco rumoroso ed estremamente veloce (vedi Fig. 3.15) [49, 50]. Tale qualità è fondamentale visto che i laser da noi utilizzati hanno una larghezza di riga di diverse centinaia di kHz e un tempo di diffusione della fase di alcuni μ s: solo grazie a bande di controllo di alcuni MHz è quindi possibile sperare di contenere la differenza di fase entro il radiante. Sfortunatamente il mixer è in grado di dare una risposta lineare in una regione di solo ± 1 rad. Non appena tale differenza di fase è superata l'aggancio viene perso ed occorre un nostro intervento per ristabilirlo. Per guadagnare in stabilità, senza perdere velocità, abbiamo ricorso ad un Phase and Frequency Detector (PFD), da noi progettato e costruito, capace di azionare un rivelatore di fase digitale dal range di cattura di $\pm 2\pi \cdot 128$ rad, non appena la differenza di fase esce al di fuori della regione di funzionamento del mixer. Una volta riportata vicino a zero tale rivelatore viene però disabilitato, mentre l'uscita del mixer va nuovamente a pilotare il circuito di controllo.

La nota di battimento (3.5) alla frequenza di circa 7 GHz è ottenuta inviando $\sim 300\mu$ W di ognuno dei due laser su un fotodiodo New Focus (NEW FOCUS 1002, 60 GHz). Dopo uno stadio di amplificazione (JCA 48-301) da 27 dB, facciamo una down-conversion della nota a 40 MHz, grazie ad un mixer Miteq (Conversion Loss 5.5 dB) e al nostro oscillatore di riferimento, un Anritsu MG3692A da 20 GHz con opzione UltraLowPhaseNoise (per $\nu > 1$ kHz rumore di fase < -100 dBc/Hz). Il motivo di questa conversione deriva dal fatto che il nostro PFD funziona per segnali oscillanti tra 20 e 90 MHz. Inoltre è sempre consigliabile evitare di avere sorgenti a radiofrequenza oscillanti esattamente alla frequenza di separazione iperfine. Prima di inviare il segnale RF al PFD lo amplifichiamo ulteriormente di 25 dB (Minicircuits ZFL-500 LN) e preleviamo un decimo della potenza per monitorare lo stato dell'aggancio su un analizzatore di spettro. L'ulteriore oscillatore locale di riferimento a 40 MHz è costituito da un generatore di funzione (Agilent

33250A, 80 MHz) agganciato in fase all'Anritsu. Il PFD è munito di una serie di controllori PI per ottimizzare i guadagni di anello lungo le tre vie di retroazione: queste agiscono in tensione sul piezoelettrico della cavità estesa

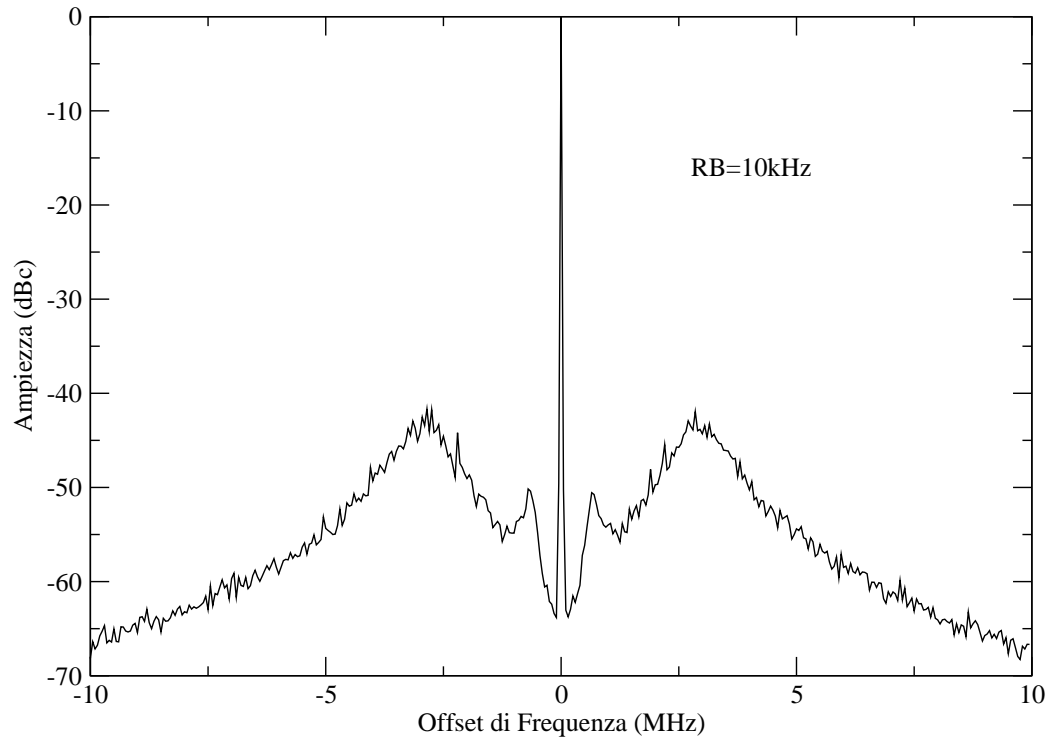


Figura 3.14: Nota di battimento tra i due laser Raman alla frequenza di 40 MHz.

In fig. 3.14 riportiamo una immagine della nota di battimento registrata sullo spectrum analyzer durante l'aggancio. Per avere una stima veloce del rumore residuo di fase ad una certa frequenza ν è sufficiente osservare il livello in dB di soppressione della potenza rispetto alla portante, ad una distanza ν in frequenza da essa, e dividere per la resolution bandwidth utilizzata. Otteniamo così il rumore di fase espresso in dBc/Hz. Ad esempio, a circa 3 MHz dalla portante abbiamo dei picchi di rumore a -40 dB. Vista la resolution

bandwidth di 10 kHz significa che a tale frequenza abbiamo -80 dBc/Hz di rumore di fase, ossia $100 \mu\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Per poter analizzare il rumore di fase a frequenze più basse della resolution bandwidth dell'analizzatore di spettro in supereterodina è necessario far battere la nota e i 40 MHz del secondo oscillatore locale su di un mixer. Scegliendo un opportuno ritardo di fase in modo che la tensione in uscita sia circa nulla, possiamo sfruttare la regione lineare del mixer per avere un segnale in tensione proporzionale proprio al rumore di fase residuo. Mediante un analizzatore di spettro che lavora in FFT possiamo allora controllare anche le basse frequenze. La fig. 3.15 mostra i risultati ottenuti con tale tecnica di misura. Occorre precisare che il nostro sistema di aggancio cerca di uguagliare la differenza di fase ottica alla fase dei generatori, come mostra appunto la (3.6). Per cui il rumore di fase residuo è relativo, non assoluto.

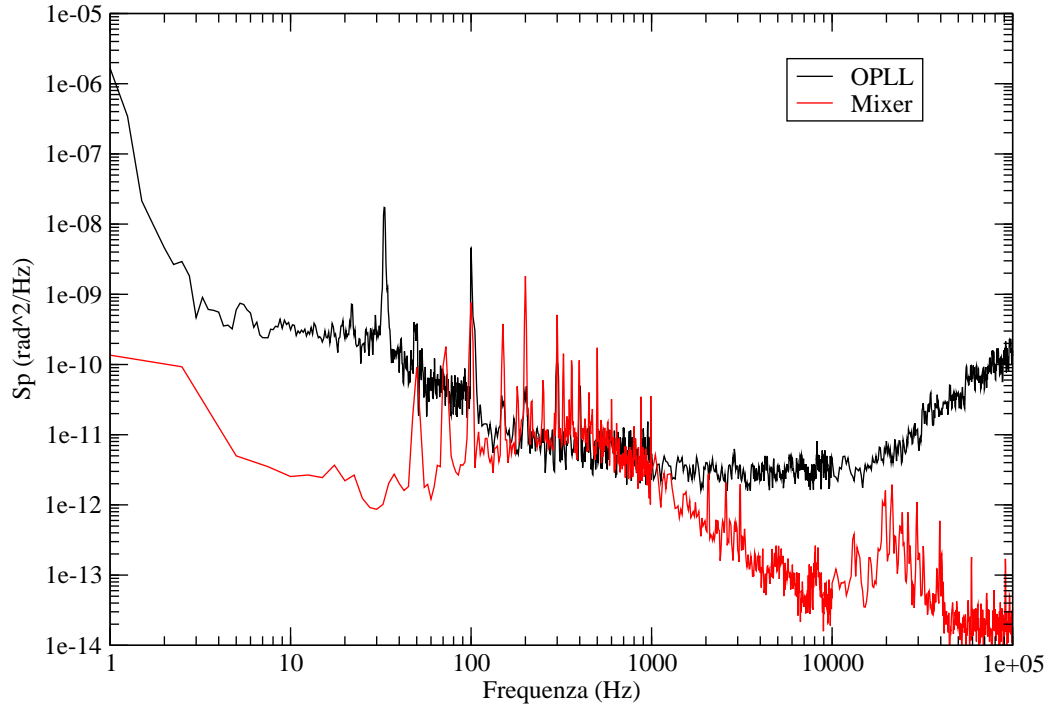


Figura 3.15: Rumore residuo di fase tra i laser Raman.

Concludiamo questo paragrafo ricordando che il Master Raman viene stabilizzato in frequenza 3.4 GHz sul rosso della transizione $F = 2 - F' = 3$. Questo per ridurre la probabilità di assorbimenti ad un fotone. Il valore corrisponde a metà della struttura iperfine per fare in modo che eventuali armoniche superiori in uscita dal TA, per l'amplificazione dei fasci Raman, cadano il più possibile lontano dalla risonanza. L'aggancio in frequenza è realizzato prelevando parte della luce del laser $L1$ e realizzando un altro aggancio in fase, questa volta con un PFD dal solo funzionamento digitale.

3.4.6 Rumore di fase

Come si può ottenere dalla (2.76), nel caso di un esperimento $\pi/2 - \pi - \pi/2$, la differenza di fase accumulata nei due cammini interferometrici presenta un termine

$$\chi = \phi(0) - 2\phi(T) + \phi(2T) \quad (3.7)$$

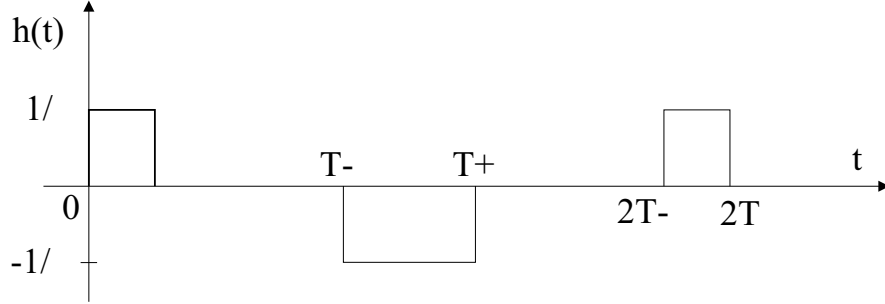
dove $\phi(t)$ è un termine idealmente costante, ma che nella realtà varia a causa di un cattivo aggancio tra i due laser, di un generatore di frequenza non sufficientemente stabile o di una vibrazione dello specchio di riferimento. Qualunque sia la causa supponiamo che la densità spettrale di rumore associata a $\phi(t)$ sia $S_\phi(\nu)$ e supposto che il valor medio della variabile aleatoria χ sia zero, cerchiamo la sua varianza. In verità i tre impulsi interferometrici hanno una durata τ , 2τ e τ , per cui quello che conta è il valor medio di $\phi(t)$ durante tali intervalli di tempo. È quindi più opportuno scegliere come variabile aleatoria

$$\chi_{t_i} = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} \phi(t) dt - \frac{1}{2\tau} \int_{t_i+T-\tau}^{t_i+T+\tau} \phi(t) dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_i+2T-\tau}^{t_i+2T} \phi(t) dt \quad (3.8)$$

Poiché il valor medio è nullo, determinare la varianza di χ_{t_i} significa calcolare il quadrato e mediare sui tempi iniziali t_i , ossia

$$\sigma_\chi^2(\tau, T) = \left\langle \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t') h(t_i - t') dt' \right]^2 \right\rangle_{t_i} \quad (3.9)$$

dove $h(t)$ è rappresentata in fig. 3.16.

Figura 3.16: Funzione $h(t)$.

Ricordando che per una generica variabile aleatoria $v(t)$ a media nulla vale

$$\sigma_v^2 = \langle v^2(t_i) \rangle_{t_i} = \int_0^\infty S_v(\nu) d\nu \quad (3.10)$$

dove la densità spettrale di rumore $S_v(\nu)$ è legata alla trasformata di Fourier $F_v(\nu)$ dalla relazione

$$S_v(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_v(\nu)|^2}{T} \quad (3.11)$$

otteniamo che

$$\sigma_\chi^2(\tau, T) = \int_0^\infty S_\phi(\nu) |H(\nu)|^2 d\nu \quad (3.12)$$

dove $H(\nu)$ è la trasformata di Fourier della funzione $h(t)$. Semplici calcoli mostrano che

$$|H(\nu)|^2 = \frac{16}{\pi^2 \nu^2 \tau^2} \sin^2[\pi \nu \tau] \sin^2[\pi \nu (T - \tau)] \sin^2[\pi \nu T] \quad (3.13)$$

Questa funzione mostra come le frequenze che contano maggiormente siano quelle comprese tra $1/T$ e $1/\tau$. Perturbazioni a frequenze minori di $1/T$ non provocano infatti variazioni di fase sostanziali nel lasso di tempo dell'esperimento, mentre quelle a frequenze maggiori di $1/\tau$ si mediano a zero.

Applicando tale funzione peso al rumore di fase residuo riportato in fig. 3.15 troviamo una varianza di appena ~ 1 mrad, per $T=150$ ms e $\tau = 50$ μ s, corrispondente ad una risoluzione nell'accelerazione di 10^{-9} g.

3.5 Campi magnetici

Per il quadrupolo della MOT abbiamo realizzato due bobine da 50 spire ciascuna, raggio ~ 7 cm, realizzate con filo di rame da 2 mm di diametro. Per poter applicare correnti fino a 30 A, le abbiamo inoltre munite di un raffreddamento ad acqua. Possiamo così ottenere gradienti fino a circa 10 G/cm.

Entrambe le camere da vuoto sono state munite di bobine di compensazione, per poter azzerare il campo nella regione di lancio degli atomi e per creare un campo, il più possibile diretto lungo l'asse di propagazione del fascio di rivelazione polarizzato σ^+ .

Per quanto riguarda il tubo interferometrico abbiamo operato in due diversi modi. Prima di tutto abbiamo realizzato un doppio schermo magnetico di forma cilindrica, con raggio rispettivamente 4.6 cm e 3.7 cm, per ridurre il più possibile l'effetto di campi magnetici variabili nel tempo nella zona di interrogazione del nostro interferometro. Inoltre abbiamo realizzato una bobina lunga 50 cm, con raggio 3 cm e filo $\phi = 0.8$ mm, per avere un campo magnetico costante e il più possibile uniforme lungo l'asse z . In questo modo il campione di atomi polarizzato resta in $M_F = 0$ rispetto all'asse di quantizzazione verticale durante tutta la caduta. Un campo non nullo serve inoltre ad evitare spin flip al passaggio degli atomi da uno zero. Concludo ricordando che in futuro sarà necessario realizzare una bobina lunga almeno quanto il tubo: in quell'occasione sarà opportuno avvolgerla attorno ad un tubo di alluminio interrotto elettricamente.

3.6 Lancio e rivelazione

Nelle fasi di cattura, raffreddamento e lancio degli atomi abbiamo bisogno di cambiare la frequenza e la potenza dei tre fasci laser superiori, indipendentemente da quelli inferiori. Per farlo ricorriamo a due modulatori acusto-ottici da 80 MHz, prima di inviare la luce in fibra (vedi fig. 3.4). La radiofrequenza viene ottenuta mediante una coppia di VCO standard da 100 MHz (POS-100 Minicircuits) ognuno con in serie un attenuatore varia-

bile (TFAS-2 Minicircuits) per il controllo dell'ampiezza. Entrambi i VCO vengono agganciati in 40 armonica a segnali oscillanti alla frequenza di circa 2 MHz, ottenuti da due generatori di funzione (Agilent, 33120A). Mediante l'opzione FSK possiamo saltare tra due valori diversi di frequenza, precedentemente impostati tramite GPIB. Questi vengono utilizzati nella fase di lancio, mentre per la fase di MOT e Melassa, mediante un interruttore, inviamo ad entrambi i loop di aggancio uno stesso segnale proveniente da un terzo VCO diviso 40 volte. In queste due fasi non importa infatti impiegare sorgenti a radiofrequenza con stabilità eccessive in quanto le fluttuazioni sono comuni a tutti i fasci. Per quanto riguarda le ampiezze utilizziamo quattro valori che regolano il livello di attenuazione voluto durante le varie fasi dell'esperimento.

Il sistema di rivelazione utilizza la luce del laser LD (vedi fig. 3.4), iniettato otticamente da L1. Nuovamente è possibile il controllo di frequenza ed ampiezza mediante un AOM da 80 MHz. La luce in uscita dalla fibra ($\phi = 1.2$ mm) viene espansa mediante una lente divergente da 10 mm di focale, collimata grazie ad una lente convergente da 100 mm di focale e 2 pollici di diametro ed inviata orizzontalmente nella camera di rivelazione. La polarizzazione è σ^+ rispetto all'asse di propagazione. Il fascio viene poi retroriflesso su di uno specchio in modo da aumentare il numero di fotoni scatterati dalla nuvola prima del suo riscaldamento. La frequenza del fascio di rivelazione è scelta leggermente detunata sul rosso della transizione $F = 2 - F' = 3$ e l'intensità è circa quella di saturazione ($I_{sat} = 1.6$ mW/cm²). Un campo magnetico lungo lo stesso asse viene applicato in modo da polarizzare gli atomi nello stato $F = 2, M_F = 2$ e ciclare sulla transizione chiusa $|F = 2, M_F = 2\rangle \longrightarrow |F' = 3, M_{F'} = 3\rangle$. Nell'eventualità desideriamo distruggere velocemente una nuvola di atomi ed effettuare un cosiddetto blow-away, abbiamo poi la possibilità di bloccare la retroriflessione del fascio di rivelazione mediante uno shutter. Parte della luce del laser di ripompaggio è inoltre disponibile per ripompare atomi da $F = 1$ ad $F = 2$.

La luce scatterata dagli atomi viene focalizzata su di un rivelatore, mediante una lente da due pollici posta ad una distanza di 13.5 cm dal centro della cella. Il rivelatore è realizzato mediante un fotodiodo larga area (Hama-

matsu S7510) dalla bassa capacità (400 pF) ed un amplificatore operazionale (OPA627) dal basso rumore in corrente ($2\text{fA}/\sqrt{\text{Hz}}$) in configurazione di transimpedenza. La grande resistenza impiegata ($10^8 \Omega$) e un prodotto banda guadagno dell'amplificatore di 16 MHz, danno una velocità di risposta del dispositivo di ~ 4 MHz. La sensibilità risulta essere $7 \cdot 10^{-11} \text{ W}/\sqrt{\text{Hz}}$, visto un rumore di fondo elettronico di $30 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$ ed una risposta di 0.45 A/W .

La temporizzazione dell'esperimento viene controllata mediante software RT linux e comuni schede I/O della National Instruments'. L'incertezza temporale che abbiamo tra i vari comandi è di circa $5 \mu\text{s}$. Per gli impulsi interferometrici, dove una risoluzione inferiore al μs è necessaria, ricorriamo ad un generatore di funzione (Agilent 33120A) sul quale registriamo, come funzione d'onda arbitraria, la sequenza di accensione e spegnimento desiderata. Tale segnale viene poi inviato direttamente all'ingresso di controllo digitale del driver dell'AOM dei fasci Raman.

3.7 Conclusioni

Concludiamo questo capitolo sull'apparato sperimentale riportando tre immagini che ne mostrano la struttura e la disposizione all'interno dell'ampia stanza messaci a disposizione dal Dipartimento di Fisica.

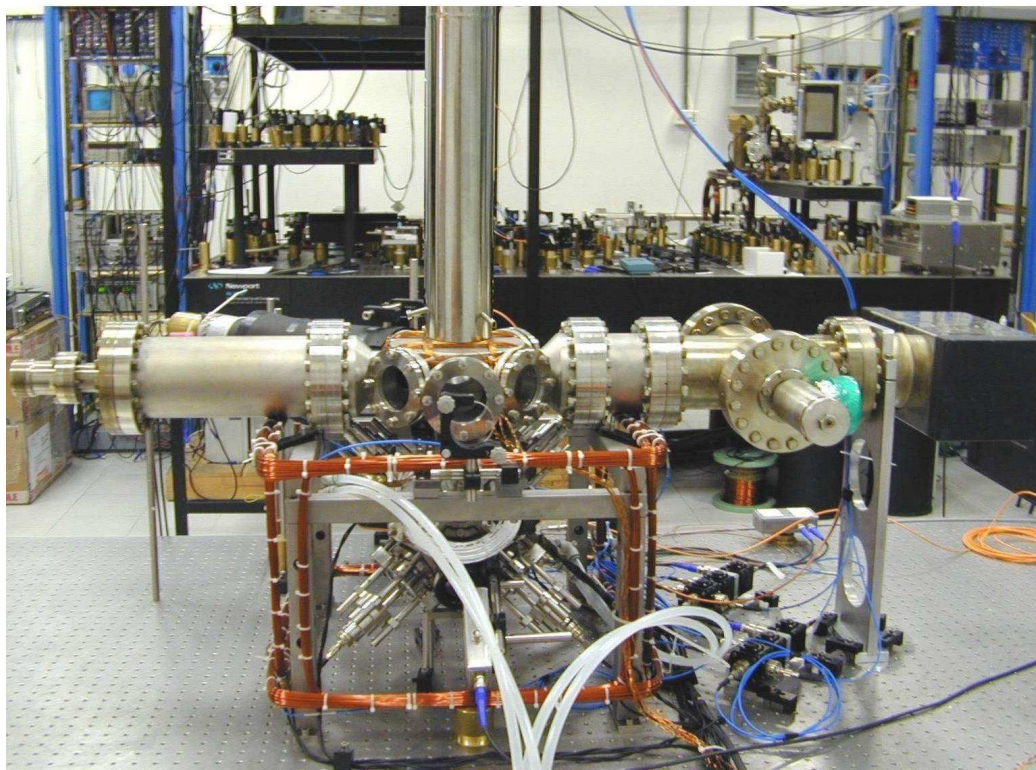


Figura 3.17: Foto dell'apparato: in primo piano il sistema da vuoto, mentre sullo sfondo si vede il banco ottico per le sorgenti laser

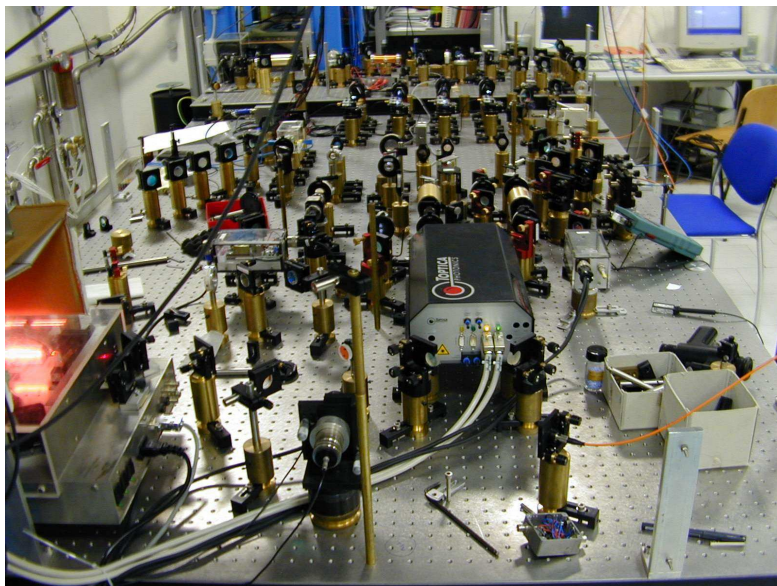


Figura 3.18: Banco ottico per le sorgenti laser di trappola, lancio e rivelazione

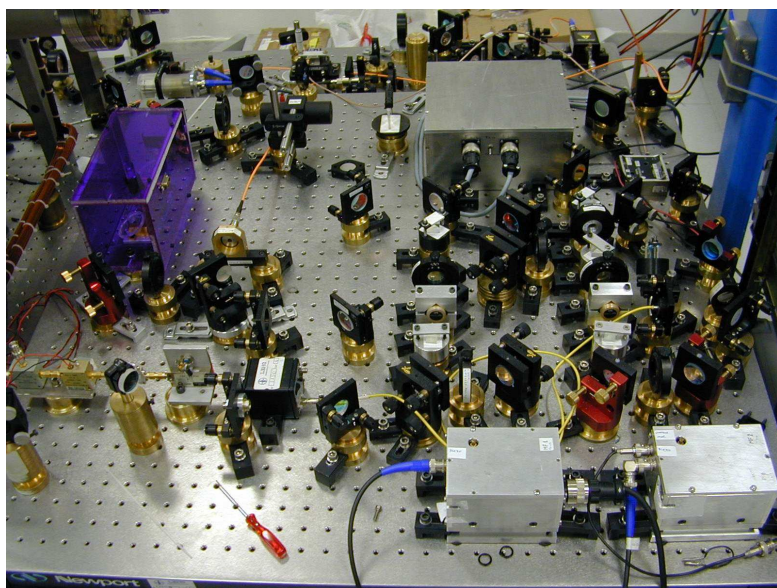


Figura 3.19: Foto del sistema laser per i fasci interferometrici.

Capitolo 4

Masse campione

Come risulta chiaro dalla (2.82), la differenza di fase $\Delta\phi$ rivelata da un gravimetro atomico in presenza di campo uniforme g è data, a meno di contributi legati alla rampa in frequenza dei laser Raman, dallo spazio percorso dagli atomi $\sim gT^2$ in unità di lunghezza d'onda $\lambda_{eff} = 2\pi/k_{eff}$ della radiazione impiegata per effettuare le transizioni. Tale interpretazione risulta valida anche in presenza di un gradiente o di una rotazione del sistema di riferimento, alla luce dei risultati mostrati al termine del capitolo 2, in particolare dalla (2.88).

Misurare G mediante interferometria atomica significa adesso avvicinare alla nostra massa di prova, cioè gli atomi, un campo gravitazionale noto (a meno della costante G), generato da delle masse sorgenti ben caratterizzate in densità e geometria e legare il suo effetto ad uno shift addizionale rilevato dall'interferometro. Non abbiamo quindi più semplici termini quadratici nell'hamiltoniana d'interazione, per cui una soluzione esatta del problema richiede in linea di principio un'analisi numerica dell'equazione di Schrödinger. Fortunatamente, il campo delle masse sorgenti nell'intorno di un atomo, su una regione dell'ordine delle dimensioni del pacchetto atomico (100 nm), può essere ben approssimato con un termine lineare e uno quadratico dipendenti dal tempo, senza commettere sostanziali errori ($<10^{-8}$). Si assume che il pacchetto abbia la larghezza dell'ordine della lunghezza d'onda di de Broglie termica per $\sim 2 \mu\text{K}$ e che sia ad incertezza minima nello spazio delle fasi (vedi la 2.20).

Vista la validità della (2.88) per una generica Hamiltoniana (2.21), dove \vec{g} e $\vec{\gamma}$ non devono essere necessariamente costanti, abbiamo quindi ritenuto corretto continuare ad utilizzarla, studiando la semplice traiettoria classica degli atomi nei due rami dell'interferometro, in presenza adesso del nuovo campo delle masse sorgenti.

Visto che l'esperimento avviene sulla terra, siamo costretti ad effettuare la misura durante una caduta libera degli atomi per effetto della sua attrazione. Rivelare un effetto dovuto alle masse sorgenti significa comunque fare in modo che lo spazio percorso dagli atomi risulti in parte modificato a causa del loro campo di forze. Massimizzare un loro segnale significa fare in modo che la loro forza sia sempre diretta nello stesso verso e che sia in modulo il più grande possibile.

Prima di tutto scegliamo di lavorare lungo l'asse verticale e invece di lasciar cadere gli atomi, preferiamo piuttosto lanciaarli dal basso verso l'alto, in una configurazione di fontana atomica. In questo modo possiamo, a parità di intervallo di tempo T tra gli impulsi interferometrici, ridurre di un fattore quattro la zona percorsa dagli atomi. Per le considerazioni fatte poco fa, possiamo inoltre aumentare la sensibilità del dispositivo al campo della massa sorgente facendo sì che il punto di inversione della traiettoria parabolica vada a trovarsi sul massimo di tale campo: il tempo di permanenza dell'atomo in quel punto risulta notevolmente più grande, così come l'impulso ricevuto.

Come già accennato nella sezione relativa all'apparato da vuoto (3.1) intendiamo lanciare gli atomi all'interno di un tubo verticale, lungo il quale inviamo anche i fasci Raman. Il campo delle masse sorgenti deve quindi agire nella direzione verticale così come il campo terrestre. In più la geometria delle masse deve dunque avere una simmetria assiale. In un primo momento abbiamo creduto opportuno cercare la forma ottimale che massimizzasse il segnale, ma solo in seguito ci siamo resi conto dell'inopportunità della cosa per una serie di buoni motivi. Non risparmiamo nell'acquisto del materiale, perché la forma ottimale deve essere ottenuta a partire da un blocco più grande, dalla geometria piuttosto semplice, cilindrica o a forma di parallelepipedo. Lavorarlo significa diminuirne la massa, con conseguente diminuzione del suo effetto sugli atomi. Poiché la massa elevata non è risultata essere

un problema, vista la possibilità di ricorrere alla collaborazione dei tecnici dei Laboratori Nazionali di Frascati [54] nella progettazione di un supporto sufficientemente stabile, abbiamo quindi optato per una semplice geometria cilindrica. Non a caso risulta la soluzione più frequentemente scelta nelle misure di G data la facilità di lavorazione, l'accuratezza del suo dimensionamento rispetto ad una forma geometrica più complessa e la possibilità di effettuare test non distruttivi della densità interna grazie alla sua simmetria (vedi paragrafo 4.4.5).

4.1 Campo verticale di un cilindro cavo

Prendiamo un cilindro cavo di raggio esterno r_e , raggio interno r_i , altezza l e densità omogenea d . Poniamolo al centro di un sistema di riferimento $\hat{O}\rho\phi z$ come mostrato in fig. 4.1 e chiediamoci quale sia il campo di forze su di una massa puntiforme m situata ad una distanza assiale R e altezza h . L'energia potenziale gravitazionale $U(R, h)$ risulterà essere

$$U(R, h) = -Gdm \int_{r_i}^{r_e} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho dz}{\sqrt{(R - \rho \cos \phi)^2 + (\rho \sin \phi)^2 + (h - z)^2}} \quad (4.1)$$

Dopo aver svolto i quadrati a denominatore, portato a $0 - \pi$ il dominio di integrazione in ϕ moltiplicando per due l'argomento, effettuato la sostituzione $\cos \phi = 2\cos^2[\phi/2] - 1$ ed introdotto la nuova variabile angolare $\psi = \phi - \pi/2$ otteniamo

$$U(R, h) = -Gdm \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\rho d\psi dz 4\rho}{\sqrt{[1 - \frac{4R\rho \sin^2 \psi}{(R+\rho)^2 + (h-z)^2}][(R+\rho)^2 + (h-z)^2]}} \quad (4.2)$$

Ricordando la definizione di integrale ellittico di Legendre del primo tipo

$$F_{\pi/2}(k) \stackrel{def}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (4.3)$$

otteniamo

$$U(R, h) = -Gdm \int_{r_i}^{r_e} d\rho \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz 4\rho}{\sqrt{(R + \rho)^2 + (h - z)^2}} F_{\pi/2}(k) \quad (4.4)$$

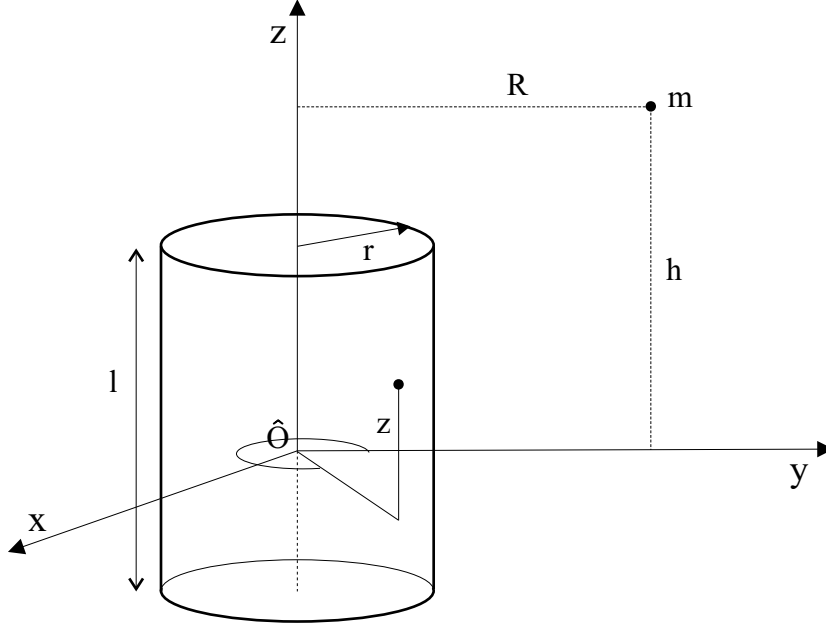


Figura 4.1: Coordinate di integrazione e di posizionamento della massa di prova.

Poiché siamo interessati alla forza, ed in particolare alla forza lungo l'asse verticale z , ossia $F_z = -\partial U / \partial h$, applichiamo la derivata parziale all'espressione (4.4). Portando la derivata dentro l'integrale ed osservando che data la simmetria dell'argomento $\partial / \partial h = -\partial / \partial z$, possiamo eliminare l'integrale in dz valutando l'integrando nei punti di integrazione. Dopo brevi passaggi si dimostra facilmente che

$$a_z = \frac{F_z}{m} = -Gd \int_{r_i}^{r_e} d\rho \quad 2\sqrt{\frac{\rho}{R}} [k_{l/2} F_{\pi/2}(k_{l/2}) - k_{-l/2} F_{\pi/2}(k_{-l/2})] \quad (4.5)$$

dove

$$k_h^2 = \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + (h - z)^2} \quad (4.6)$$

per cui otteniamo un'espressione integrale dell'accelerazione indotta dal cilindro lungo l'asse z a distanza R da esso e ad un'altezza h dall'origine. Questa assume però una forma analitica per $R = 0$. Infatti la (4.6) si annulla e $F_{\pi/2}$ diventa uguale a $\pi/2$. L'integrale nella (4.5) diventa risolubile ed otteniamo così

$$a_z = 2\pi G d \left[\sqrt{\left(z - \frac{l}{2}\right)^2 + r_i^2} - \sqrt{\left(z - \frac{l}{2}\right)^2 + r_e^2} - \sqrt{\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + r_i^2} + \sqrt{\left(z + \frac{l}{2}\right)^2 + r_e^2} \right] \quad (4.7)$$

In fig. 4.2 rappresentiamo tale funzione, nell'ipotesi di un cilindro di massa 1000 kg, densità 18 g/cm³, con $r_i = 5$ cm e con il raggio esterno r_e e l'altezza l ottimizzati per dare il massimo valore dell'accelerazione, ossia $l = 36$ cm e $r_e = 22$ cm.

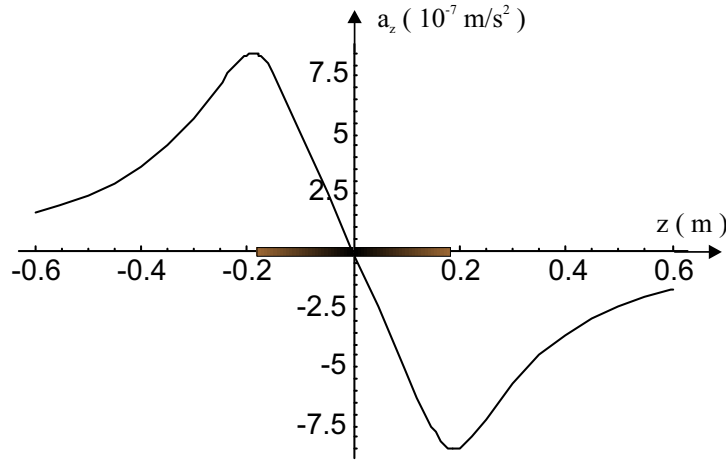


Figura 4.2: Accelerazione lungo l'asse di simmetria indotta da un cilindro di densità = 18 g/cm³, $r_e = 22$ cm, $r_i = 5$ cm ed $l = 36$ cm

È inoltre interessante vedere come cambia l'accelerazione massima al variare della massa del cilindro (vedi fig. 4.3), sempre per una densità di 18 g/cm³ ed $r_i = 5$ cm. L'andamento si discosta velocemente da quello lineare, vista la dipendenza quadratica della forza gravitazionale dalla distanza.

4.2 Accuratezza di un gravimetro

In base ai calcoli del paragrafo precedente prendiamo come ordine di grandezza per l'accelerazione delle masse sorgenti 10^{-6} ms^{-2} ossia $\sim 10^{-7} g$. Essendo questa proporzionale alla costante G , ne segue che una misura della

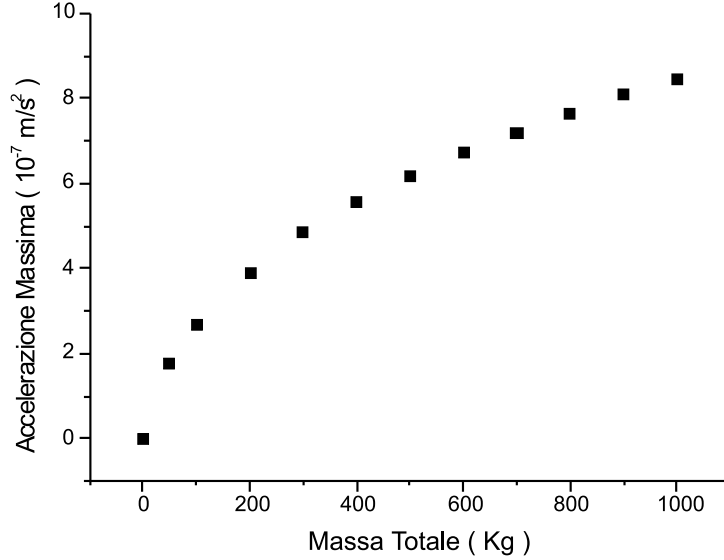


Figura 4.3: Accelerazione massima indotta da un cilindro di densità 18 g/cm^3 al variare della massa.

costante di Gravitazione Universale di Newton entro 10^{-4} comporta misurare in modo accurato campi dell'ordine di $10^{-11} g$.

Purtroppo i gravimetri atomici attuali, come ben documentato in [19] e [52], hanno un'accuratezza di solo $\sim 10^{-9} g$. Vediamo adesso alcune delle cause principali di questo loro limite.

Primo fra tutti è il problema del controllo della fase relativa tra i due laser interferometrici, che dipende dalla qualità del generatore a radiofrequenza impiegato, dalla qualità dell'aggancio e dalla stabilità del riferimento inerziale costituito dallo specchio orizzontale. Le tecnologie attualmente a disposizione permettono di spingersi fino a circa 1 mrad , corrispondente ad una sensibilità di $1 \mu\text{Gal}$ (si ricorda che $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$).

Altro problema fondamentale è la verticalità del lancio: infatti, secondo la (2.90), è possibile stimare che a causa della rotazione terrestre, una velocità orizzontale del campione atomico di appena 10^{-4} m/s , provoca nuovamente un'errore nella misura della gravità di $\sim 10^{-9} g$.

Ricordiamo infine l'impossibilità di azzerare completamente i campi ma-

gnetici ed elettrici all'interno del tubo e di come sia operativamente impossibile riuscire a ricondurre una misura dell'accelerazione locale al contributo delle sole masse sorgenti, vista la variazione del campo terrestre ad un rate di $0.5 \mu\text{Gal}/\text{min}$ per effetto delle maree.

Occorre quindi pensare ad una forma di misura differenziale capace di cancellare tutti questi disturbi incontrollabili.

4.3 Misura doppio differenziale

Lo strumento ideale per risolvere i problemi sovraelencati è senza dubbio il gradiometro atomico [53]. Si tratta di un dispositivo che sfrutta esattamente gli stessi principi di funzionamento del gravimetro, ma che contemporaneamente misura la forza di gravità agente su due nuvole distinte, verticalmente spaziate, mediante lo stesso set di laser interferometrici. La differenza di segnale dipende quindi dal diverso campo di forze nelle due regioni attraversate dagli atomi durante il loro tempo di volo. Se quindi poniamo la massa sorgente tra le due nuvole (vedi fig. 4.4 a)), in modo che quella in P_A riceva un'attrazione verso il basso e quella in P_B verso l'alto, sottraendo i due segnali otteniamo due volte il contributo delle masse ed azzeriamo quello terrestre. In più, un eventuale rumore di fase incontrollato, essendo di modo comune, scompare: una volta assicurata una stabilità entro 2π dei laser Raman, non occorre più ottimizzare né lo specchio inerziale, né l'aggancio in fase e neppure la stabilità del generatore a radiofrequenza. Quindi in generale, tutti gli errori dovuti a forze spazialmente omogenee, vengono in questo modo rimossi.

Resta però un problema: poiché le due nuvole si trovano a quote diverse, risentiranno di una diversa attrazione terrestre. In media è infatti presente sulla superficie del nostro pianeta un gradiente di campo γ pari a $3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. La precedente misura differenziale cancella il grosso del contributo terrestre, ma rivela, per nuvole separate circa 1 m, una differenza di campo di circa $3 \cdot 10^{-7}g$. Per evitare che la misura di G sia sensibile a tale contributo, dobbiamo implementare il nostro schema di misura. L'idea è di dividere la massa sorgente in due parti ed effettuare la misura gradiometrica per due

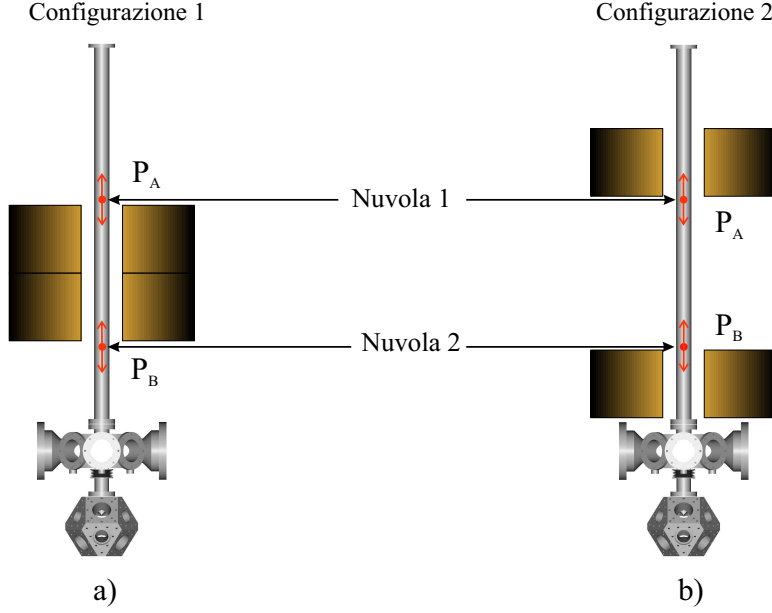


Figura 4.4: Misura doppio differenziale

diverse disposizioni di essa (vedi fig. 4.4 b)). Invertendo ogni volta i segni delle forze e sottraendo nuovamente i segnali, possiamo eliminare l'effetto di γ .

Per esemplificare l'idea di questa misura doppio differenziale schematizziamone le varie fasi nel seguente modo. Consideriamo la fig. 4.4 e supponiamo per semplicità che le due nuvole siano localizzate in P_A e P_B . Siano ϕ_{gA} e $\phi_{gB} = \phi_{gA} + \phi_\gamma$ rispettivamente i contributi del campo terrestre in P_A e P_B . Indichiamo poi con ϕ_{MS} il valore assoluto del contributo delle masse sorgenti su ognuna delle due nuvole, indipendentemente dalla loro disposizione. Cominciamo dalla prima. Avremo che

$$\begin{aligned}
 \phi_A &= \phi_{gA} + \phi_{MS} \\
 \phi_B &= \phi_{gB} - \phi_{MS} = \phi_{gA} + \phi_\gamma - \phi_{MS} \\
 (\phi_B - \phi_A)_1 &= \phi_\gamma - 2\phi_{MS}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

dove ϕ_i è il segnale ottenuto dalla i -esima nuvola. Muoviamo le masse

sorgente in 2 e ricaviamo

$$\begin{aligned}\phi_A &= \phi_{g_A} - \phi_{MS} \\ \phi_B &= \phi_{g_B} + \phi_{MS} = \phi_{g_A} + \phi_\gamma + \phi_{MS} \\ (\phi_B - \phi_A)_2 &= \phi_\gamma + 2\phi_{MS}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Sottraendo le due differenze otteniamo

$$(\phi_B - \phi_A)_2 - (\phi_B - \phi_A)_1 = 4\phi_{MS}\tag{4.10}$$

che dipende solo dalle masse sorgenti e quindi da G . La potenza di questo metodo sta nel fatto che anche eventuali campi di forza non omogenei spazialmente, ma costanti nel tempo, vengono eliminati. Ovviamente niente è veramente costante: l'importante è che lo sia nel periodo di tempo necessario ad effettuare le due misure 1 e 2. Quindi le richieste sulla stabilità a lungo termine del sistema vengono notevolmente allentate. Resta però di fondamentale importanza assicurarsi che passando dalla posizione 1 alla posizione 2, l'unica cosa a cambiare sia esclusivamente la distribuzione di massa. Diventa di fatto critico il livello di magnetizzazione delle masse sorgenti e la nostra capacità di schermarlo, come del resto l'allineamento dei fasci Raman e la direzione di lancio degli atomi.

4.4 La nostra massa sorgente

4.4.1 Il problema del gradiente terrestre

Ogni volta che sulla terra intendiamo effettuare misure accurate di gravità lungo la verticale, dobbiamo scontrarci con un problema costante: quello del gradiente terrestre γ . Infatti, se come nel nostro caso vogliamo apprezzare accelerazioni dell'ordine di $10^{-11} g$, tenendo conto che $\gamma \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, dobbiamo controllare la posizione verticale della massa di prova entro $30 \mu\text{m}$. Se utilizziamo un oggetto macroscopico ed effettuiamo una misura statica, ciò non risulta essere un grosso problema. Viceversa se intendiamo ricorrere a degli atomi occorre fare un po' d'attenzione. Utilizzando una trappola ottica possiamo pensare di ottenere facilmente un controllo della posizione

iniziale della nuvola entro $30 \mu\text{m}$: spegnendola istantaneamente diamo il via alla loro caduta libera e possiamo quindi praticare una misura di gravità con le tecniche interferometriche descritte in questa tesi. La misura doppio differenziale diventa possibile perché siamo sicuri che il contributo del campo terrestre si cancella nella (4.10) entro l'accuratezza richiesta. Siamo però costretti a lavorare con pochi atomi e perdiamo risoluzione non avendo un punto di inversione della traiettoria. Come fare allora ad essere meno sensibili alla posizione degli atomi?

La prima cosa che viene in mente è compensare il gradiente terrestre. Eccetto realizzare l'esperimento sotto la superficie terrestre o viceversa nello spazio dove il gradiente può essere sensibilmente minore, l'unico modo è ricorrere ad un ulteriore campo di forze. Questo deve però essere ben stabile e non presentare fluttuazioni incontrollate. Senza dubbio quello che meglio soddisfa tali condizioni è proprio il campo gravitazionale. Analizziamo qui di seguito la soluzione da noi scelta dimenticando per il momento la misura in caduta libera e supponendo di poter disporre di una sonda statica capace di misurare la forza gravitazionale in un punto.

4.4.2 Come essere insensibili al gradiente terrestre

La nostra soluzione prevede di utilizzare le masse sorgenti per accelerare gli atomi verticalmente e allo stesso tempo compensare il gradiente terrestre. In verità tale soluzione non è molto elegante: lo dimostra il fatto che spiegarla non è affatto semplice. Siamo comunque convinti della validità del metodo.

Ipotizziamo di poter disporre di un cilindro dalla posizione verticale variabile. Sia $Gf(z)$ l'accelerazione da lui generata lungo l'asse verticale quando il suo centro z_M si trova esattamente in $z = 0$ e supponiamo di avere dei valori sperimentali G_0 , g_0 e γ_0 rispettivamente per G , g e γ . Se consideriamo il campo totale, in base alla conoscenza che abbiamo di lui, stimiamo in $\pm z_0 + z_M$ la presenza di due punti stazionari, dove z_0 soddisfa

$$G_0 f'(z_0) = -\gamma_0 \quad (4.11)$$

Sviluppiamo il campo delle masse attorno a questi punti

$$\pm aG + bG(z \mp z_0 - z_M) + cG(z \mp z_0 - z_M)^2 \dots \quad (4.12)$$

dove $a = f(z_0)$, $b = f'(z_0)$ e $c = f''(z_0)/2$. Il campo totale, a meno di termini di ordine superiore, sarà allora

$$g + \gamma z \pm aG + bG(z \mp z_0 - z_M) + cG(z \mp z_0 - z_M)^2 = \\ g \pm aG + (\gamma - \gamma_0 \frac{G}{G_0})z + bG(\mp z_0 - z_M) + cG(z \mp z_0 - z_M)^2 \quad (4.13)$$

dove si è sfruttato la (4.11). Scegliendo un cilindro di densità 18 gcm^{-3} con $r_e = 22 \text{ cm}$, $r_i = 5 \text{ cm}$ e $l = 18 \text{ cm}$, per un totale di 500 kg , abbiamo che $aG \sim 6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$, $bG \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ e $cG \sim 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}\text{s}^2$. Svolgendo un po' di conti scopriamo che conoscendo il gradiente di gravità terrestre e G con un'accuratezza di almeno 10^{-2} , la sonda, posizionata in un intorno di $z_0 - z_M$, rivelerà lo stesso campo entro $10^{-11} g$ anche per spostamenti di 1 mm . La precedente criticità nel posizionamento è stata ridotta notevolmente, ma non sappiamo distinguere tra campo terrestre e campo della massa. Abbiamo comunque

$$g + aG + (\gamma - \gamma_0 \frac{G}{G_0})z + bG(-z_0 - z_M) \quad (4.14)$$

Lasciamo quindi la sonda nello stesso punto, ma muoviamo la massa in $\tilde{z}_M \sim z_M + 2z_0$ in modo da avere nuovamente stazionarietà del campo nello stesso punto. Avremo

$$g - aG + (\gamma - \gamma_0 \frac{G}{G_0})z + bG(+z_0 - \tilde{z}_M) \quad (4.15)$$

La differenza dà

$$2aG + bG(-2z_0 - z_M + \tilde{z}_M) \quad (4.16)$$

Per rendere la nostra misura accurata entro 10^{-4} occorre fare in modo che il secondo termine della (4.16) sia conosciuto sufficientemente bene. Ciò è possibile se il termine in parentesi è noto entro $30 \mu\text{m}$.

In conclusione con questo metodo abbiamo spostato la richiesta di accuratezza nel posizionamento della sonda sull'accuratezza nel posizionamento delle masse. Si noti che il segnale finale è legato ai primi termini di sviluppo di $f(z)$ nel punto distante $|z_0|$ dal centro della massa dove avviene la presunta compensazione del gradiente terrestre. Ad esempio sottostimare γ_0 significa avere a più grande, ma z_0 maggiore, per cui nella 4.16 il valore finale rimane invariato e dipendente solo da G .

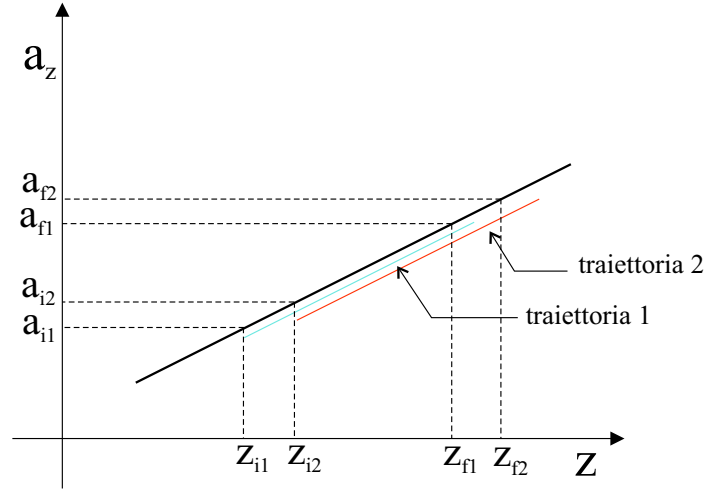
4.4.3 Simulazioni

Aver trovato il modo di creare un punto di stazionarietà del campo non è solo utile nel caso si utilizzi una sonda statica, ma anche qualora si effettui una misura in caduta libera. Infatti come mostra la fig. 4.5, l'effetto netto di un gradiente di campo è diverso per le traiettorie 1 e 2, mentre quello di un campo con massimo locale può risultare uguale qualora le traiettorie ne siano a cavallo.

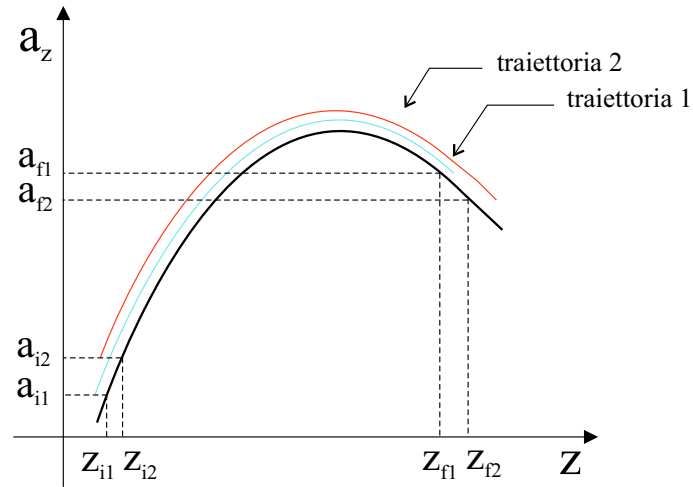
Anche nel nostro caso di lancio parabolico sotto l'effetto dell'attrazione terrestre è quindi possibile aggiustare la traiettoria in modo tale che il segnale interferometrico non sia sensibile alla posizione iniziale degli atomi entro il mm [55].

Si tratta a questo punto solamente di estendere i ragionamenti della sezione precedente al caso della misura doppio differenziale (vedi 4.3), facendo uso in particolar modo del risultato teorico (2.88) per la determinazione di $\Delta\phi$. Per ricavare le cinque coordinate z_i dei vertici dell'interferometro abbiamo integrato numericamente le equazioni classiche del moto ricorrendo all'algoritmo del quarto ordine di Runge-Kutta, aggiungendo o togliendo opportunamente, al momento degli impulsi, il momento cinetico $\hbar k_{eff}$.

Abbiamo supposto un'accelerazione locale $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, un gradiente $\gamma = 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ ed un valore di $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$. In base alla densità del materiale e alla geometria dei cilindri in posizione 1 (vedi fig. 4.6) abbiamo identificato i due punti P_A e P_B di stazionarietà del campo totale e dunque, fissato il tempo T tra gli impulsi, abbiamo ottimizzato velocità e posizioni iniziali atomiche in modo che lo shift di fase $\Delta\phi$ fosse il più possibile insensibile a variazioni delle condizioni iniziali. Il mantenimento di tale proprietà per le stesse traiettorie ha costituito il criterio di scelta della posizione 2 per le masse sorgenti (vedi fig. 4.6), in cui il segno della loro forza sugli atomi è risultato cambiato. Sostituendo i risultati ottenuti nella (4.10) abbiamo potuto ottenere uno shift di fase ϕ_{finale} dovuto alle sole masse sorgenti. Abbiamo poi verificato che lasciando inalterate le traiettorie scelte, il segnale interferometrico cambia, ma rimane insensibile alle condizioni iniziali atomiche anche per un valore di g 10^{-6} volte diverso e per una variazione di γ e G in 10^{-2} . ϕ_{finale} dipende solo da G e la sua dipendenza risulta essere



a)



b)

Figura 4.5: Nel caso a) il campo esercita una forza maggiore sugli atomi che seguono la traiettoria 2 perché $a_{i1} < a_{i2}$ e $a_{f1} < a_{f2}$. Nel caso b) invece $a_{i1} < a_{i2}$, ma $a_{f1} > a_{f2}$, per cui l'effetto netto del campo è lo stesso per le due traiettorie.

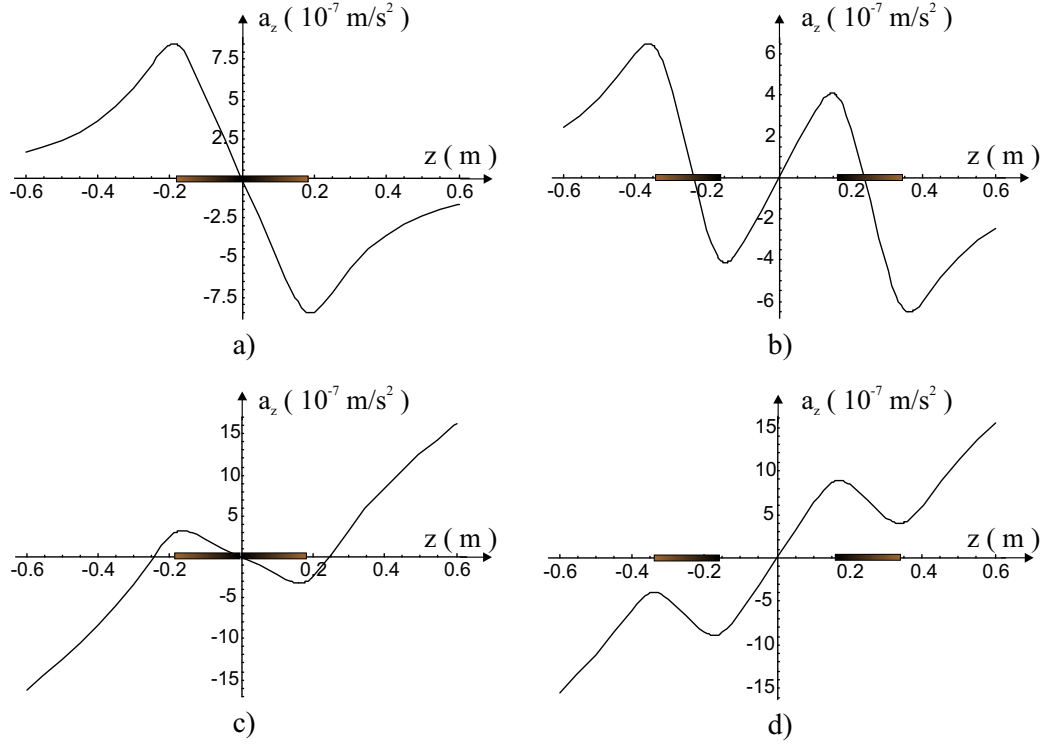


Figura 4.6: I grafici a) e b) descrivono il campo delle sole masse sorgenti per le due diverse disposizioni dei cilindri che le costituiscono. In c) e d) includiamo anche il gradiente terrestre.

lineare. Ritroviamo quindi le stesse condizioni sulla conoscenza anticipata di γ e G già incontrate nel paragrafo 4.4.2.

Per quanto riguarda la scelta della geometria della massa sorgente facciamo adesso le seguenti considerazioni. Il raggio interno non può essere scelto troppo piccolo perché i fasci laser interferometrici devono comunque avere un waist dell'ordine di alcuni cm per garantire una potenza omogenea all'1% entro 1 mm dal centro del tubo. In più occorre dello spazio per l'inserimento dello schermo magnetico e delle bobine per il campo di bias verticale (sez. 3.5). Ovviamente il raggio interno non può essere troppo grande causa l'eccessivo allontanamento della massa sorgente dagli atomi. Come giusto compromesso abbiamo quindi scelto $r_{int} = 5$ cm. Come criterio di ottimiz-

zazione per il raggio esterno r_e e l'altezza dei cilindri al variare della massa impiegata abbiamo semplicemente ricorso al valore ϕ_{finale} (vedi tabella 4.1). Al variare della massa impiegata si trova nuovamente un andamento non lineare come già visto nella Fig 4.3.

Massa totale	altezza sin- golo cilindro (cm)	raggio esterno (cm)	ϕ_{finale} (rad)
1000	18	22	0.8
700	16	20	0.66
500	14	18	0.53
300	12	15	0.39

Tabella 4.1: Geometria ottimale dei cilindri in funzione della massa totale impiegata. In tabella è poi indicato lo shift di fase dovuto alla massa sorgente in una misura differenziale

Occorre inoltre osservare come la sensibilità dell'apparato non scala linearmente con la densità del materiale impiegato, poiché per densità inferiori a $\sim 9 \text{ g/cm}^3$ si riesce appena a compensare il gradiente terrestre e ciò avviene al centro dei cilindri, là dove il loro campo è praticamente nullo. Ecco spiegata la necessità di ricorrere necessariamente a materiali ad alta densità se si vuole adottare lo schema di misura presentato.

Come primo caso studiato in dettaglio abbiamo optato per la massa complessiva di 1000 kg [56]. R_{ext} risulta essere 22 cm, mentre l'altezza di ogni cilindro l 18 cm. Fissato un sistema di riferimento arbitrario abbiamo posto i due cilindri rispettivamente in ± 9 cm, mentre le due nuvole in 6.45 cm e -20 cm, entrambe con velocità iniziale 1.466 m/s. Dopo una prima misura i cilindri sono stati poi spostati in ± 23.56 cm per permetterne una seconda. Abbiamo così ottenuto $\phi_{finale} \sim 0.8$ rad.

Nella tabella 4.2 riportiamo tutte le possibili sorgenti di errore derivanti da un non perfetto controllo delle variabili riguardanti le masse sorgenti, indicandone il loro effetto in termini di errore relativo su G .

	Incertezza prevista	$\Delta G/G$
Distanza iniziale tra le masse sorgenti	$10 \mu\text{m}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Allontanamento tra le masse sorgenti	$5 \mu\text{m}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Verticalità sistema di traslazione e masse	$< 2'$	$< 2 \cdot 10^{-5}$
Dimensioni lineari masse sorgenti	$5 \mu\text{m}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$
Massa	$< 5 \text{ g}$	$< 10^{-5}$

Tabella 4.2: Errori derivanti dall'incertezza sui parametri riguardanti le masse sorgenti

Le incertezze relative ad ogni variabile sono state ottenute supponendo note, di volta in volta, tutte le altre. Svolgendo la sequenza di misura doppio differenziale è stato quindi sufficiente confrontare il valore di ϕ_{finale} rispetto al caso ideale. Si noti come l'incertezza relativa sul volume totale delle masse, pari a tre volte l'incertezza sulle dimensioni lineari, non si ripercuota esattamente sulla stima di G , grazie ad una buona conoscenza della massa. Infatti una sottostima delle dimensioni comporta una sovrastima della densità media con un conseguente parziale bilanciamento delle incertezze. L'errore legato ad un'inclinazione θ rispetto alla verticale delle masse sorgenti e del sistema di traslazione deriva da due fattori: uno dalla semplice riduzione trigonometrica ($1-\cos\theta$) dell'accelerazione lungo la verticale, due dalla variazione della distanza tra asse di simmetria delle masse ed atomi, con conseguente cambiamento dell'accelerazione da loro subita. Si tenga conto che il campo verticale rimane omogeneo entro 10^{-4} su una regione di $\sim 1.5 \text{ mm}$ di raggio.

La tabella 4.3 raccoglie invece i vincoli principali sul controllo di posizione e velocità degli atomi rispetto alle masse, nel caso in cui si voglia che il campo delle masse da loro misurato sia lo stesso entro 10^{-4} . Evitiamo

Controllo posizione verticale atomi	$< 1.5 \text{ mm}$
Controllo velocità verticale atomi	$< 5 \text{ mm/s}$
Controllo posizione radiale atomi	$< 1.5 \text{ mm}$

Tabella 4.3: Vincoli sugli atomi

di riportare stime sull'incertezza nella misura di G , perché questo dipenderà anche dalla conoscenza e stabilità della distribuzione spaziale e nelle velocità della nuvola impiegata.

Tali livelli di accuratezza sono comunque raggiungibili nelle fontane atomiche grazie alla possibilità di selezionare velocità inferiori alla velocità di rinculo di singolo fotone ($\sim 5 \text{ mm/s}$) e posizioni entro il mm con sottili fasci di rivelazione. La difficoltà maggiore sarà riuscire ad avere un numero sufficientemente elevato di atomi con tali caratteristiche, per mantenere una buona sensibilità di misura (vedi sez. 4.5).

Desidero concludere questo paragrafo osservando come l'aver ottimizzato le traiettorie per rendere stazionario il segnale interferometrico al variare delle condizioni iniziali ha fatto sì che, come nel caso di un campo uniforme, i punti finali delle due traiettorie dell'interferometro siano praticamente coincidenti. I due pacchetti al momento del terzo impulso sono dunque sovrapposti e la condizione di loro uguaglianza per l'applicabilità del teorema del punto medio non è più necessaria. Questa osservazione ci permette di continuare ad usare la (2.88), in cui $z_4 \approx z_5$, anche in questo caso di potenziale non quadratico in cui le equazioni per l'evoluzione dei parametri X e Y sono diverse lungo i due rami dell'interferometro.

4.4.4 Scelta del materiale

Nella sezione precedente abbiamo assunto di poter disporre di un materiale ad alta densità, perfettamente omogeneo. Passiamo quindi in rassegna i possibili candidati ad un impiego nel nostro esperimento.

Tra i materiali ad alta densità più comuni troviamo il piombo, il mercurio,

l'oro, il tungsteno, il tantalio, il platino, l'iridio e l'uranio. Abbiamo scartato quest'ultimo per motivi di salute, il platino, l'iridio (inarrivabili) e il tantalio (quattro volte più costoso del sinterizzato di tungsteno, vedi più avanti in questo paragrafo) per motivi di prezzo.

L'oro, anche se molto costoso potrebbe essere acquistato, usato e poi rivenduto al termine dell'esperimento: potrebbe essere visto anche come un buon investimento, ma avremmo bisogno di un enorme finanziamento e il nostro laboratorio dovrebbe essere messo sotto stretta sorveglianza.

Il tungsteno metallico è molto fragile a temperatura ambiente e non è possibile lavorarlo.

Il piombo è molto economico e senza dubbio è il materiale migliore per delle prove preliminari. Purtroppo ha l'inconveniente di essere molto duttile e maneggiandolo si rischia di intaccarne la superficie o modificarne la forma. Una soluzione potrebbe essere di fonderlo e lasciarlo negli stampi nei quali lo coliamo. Non avremmo però la possibilità di misurare accuratamente la geometria della parte in piombo perché interna al contenitore.

Il mercurio, ideale per le sue caratteristiche di omogeneità in quanto metallo liquido opportunamente depurabile fino ai livelli desiderati, presenta l'inconveniente di essere pericoloso per i suoi vapori in caso d'incendio: ci ha scoraggiato quindi la necessità di abbandonare la fisica per dedicarsi, per un bel po' di tempo, a problemi di sicurezza.

Resta infine la categoria dei sinterizzati di tungsteno: negli ultimi anni tali materiali sono stati impiegati in un numero sempre crescente di applicazioni perché ottimi sostituti di piombo ed uranio. Tra le tante applicazioni ricordiamo solamente i piombini da pesca, le teste dei proiettili, le zavorre posteriori per gli aerei di linea, le punte dei saldatori e tante parti meccaniche in particolare i volani degli alberi motore delle auto. Tra le varie ditte consultate abbiamo scelto la PLANSEE, la cui casa madre si trova in Svizzera. Durante una visita allo stabilimento abbiamo potuto analizzare le varie fasi di realizzazione del sinterizzato di nostro interesse, chiamato INERMET 180, ottimo per le sue scarse proprietà magnetiche. È costituito dal 95% di polveri fini di tungsteno ($\sim 10 - 50 \mu\text{m}$), dall'1,5% di polveri di rame e dall'3,5% di polveri di nickel. Dopo essere state opportunamente mescolate, vengono

poste in un contenitore della forma voluta e pressate meccanicamente o idrostaticamente. Il blocco così ottenuto viene posto in un forno e riscaldato a 1500°C . A tali temperature il nickel e il rame fondono e vanno ad occupare gli spazi vuoti tra i grani ancora solidi di tungsteno. Una volta abbassata la temperatura il nickel ed il rame solidificano, andando a costituire da legante per i grani di tungsteno. Il sinterizzato che otteniamo è ben lavorabile come l'acciaio, non si ossida ed in più il suo coefficiente di espansione termico risulta particolarmente basso ($5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$). Ovviamente ha una densità molto alta (18 g/cm^3), variabile da blocco a blocco di $\pm 0.2 \text{ g/cm}^3$, a seconda della concentrazione dei vari elementi nella mistura di partenza.



Figura 4.7: Porosità dei sinterizzati di tungsteno

L'unico inconveniente è legato alla sua omogeneità: durante la transizione di fase liquido-solido del legante nickel rame, si ha una diminuzione del volume di circa il 4%. Poiché le prime parti a raffreddarsi sono quelle esterne avremo una sorta di migrazione del legante dall'interno verso l'esterno, con la conseguente creazione di gradienti di densità e nel caso peggiore di domini porosi, cioè privi completamente del legante (vedi fig. 4.7). È superfluo sottolineare come in tali domini si abbia una riduzione della densità di alcune parti percentuali. E inoltre impossibile prevedere in anticipo dove

tali domini vengano a crearsi, quanti siano e quanto grandi. Purtroppo la PLANSEE non ha mai effettuato test accurati sulla densità e non può fornirci informazioni, neppure sull'entità dei gradienti di densità. Sa solo per esperienza che i blocchi particolarmente grandi come quelli di cui avremmo bisogno, presentano porosità su regioni dell'ordine di alcuni cm.

Tali domini porosi possono essere identificati nella massa campione mediante un test agli ultrasuoni, ma nel caso uno di questi, ad esempio di volume 70 cm^3 (dimensioni indicative suggerite dai tecnici di PLANSEE), venga a trovarsi particolarmente vicino agli atomi (supponiamo 10 cm), il suo effetto diventa dell'ordine di $\sim 10^{-9}g$. Per non compromettere l'accuratezza della misura diventa necessario conoscere la densità in quel punto almeno entro 10^{-2} , visto che l'accelerazione indotta dalle masse è $\sim 10^{-11}g$. Solo una misura distruttiva delle masse sorgenti, dopo la misura di G , potrebbe darci questo tipo di informazione. Concludiamo quindi che in base alle conoscenze che abbiamo, la strada dei cilindri da 500 kg può essere percorsa con sicurezza, solo a patto di preventivare un'analisi distruttiva finale delle masse campione.

4.4.5 Soluzione alternativa

In un esperimento di metrologia, una volta ottimizzata la sensibilità dell'apparato, è necessario dedicarsi alla ricerca dei vari errori sistematici. Essere quindi costretti a distruggere le nostre masse sorgenti per avere una misura accurata di G , significa pubblicare un valore, ma perdere automaticamente la possibilità di effettuare in futuro ulteriori verifiche e, perché no, misure più precise. Soprattutto alla luce del fatto che i rapidi sviluppi nel campo della fisica atomica potrebbero portare a tecniche sempre più potenti nel campo dei sensori inerziali.

Abbiamo quindi analizzato la possibilità di sostituire ognuno dei grandi cilindri con tanti cilindri più piccoli. Per prima cosa sono più omogenei in densità visto che, durante il loro raffreddamento, i gradienti di temperatura al loro interno sono notevolmente minori. Inoltre, per blocchi di sinterizzato sufficientemente piccoli, PLANSEE può utilizzare uno speciale forno dove

questi si muovono all'interno di un gradiente di temperatura, in modo che esista un rifornimento costante di legante per le parti che si raffreddano prima, eccetto che per il lato finale, dove le porosità si trovano concentrate. Tale regione può essere scartata, con conseguente ottenimento di un pezzo maggiormente omogeneo. Infine i cilindretti possono essere caratterizzati mediante test meccanici. Possono ad esempio essere messi in rotazione su dei cuscini d'aria per rivelare asimmetrie cilindriche, oppure distesi su due bilance a coltello per misurare variazioni di densità lungo l'asse verticale [58]. Ma soprattutto permettono di ripetere la misura di G ruotandoli rispetto al loro asse di simmetria, avvicinando od allontanando dagli atomi eventuali disomogeneità. In questo modo possiamo avere anche un criterio sperimentale per valutare quanto critica sia l'omogeneità in densità delle nostre masse sorgenti. Ovviamente una densità dipendente dal raggio può essere rivelata solo distruttivamente.

L'inconveniente dei cilindretti è che per poterli manipolare devono essere leggeri, al massimo 25 kg, ma non troppo, vista la necessità di lavorare con un numero di essi limitato. Su ogni cilindro occorre infatti effettuare una serie di misure di caratterizzazione di dimensione, massa e densità, che costano tempo e denaro. Per avere più segnale occorre aumentare la massa totale e se non vogliamo perdere più di un fattore due in sensibilità occorre mantenerla intorno ai 500 kg. Abbiamo ovviamente il solito vincolo $r_{int} > 5$ cm e se vogliamo ottimizzare il segnale dobbiamo cercare di riprodurre il più possibile la forma cilindrica indicata in tabella 4.1 per il valore della massa totale impiegata.

Una prima soluzione con un numero relativamente alto di cilindri, ma che cerca di preservare la simmetria e le dimensioni ottimali indicate in tabella 4.1, prevede di impiegare per ogni blocco mobile, due serie da nove cilindri, di taglia diversa, come indicate in fig. 4.8. Vista la necessità di sostenere i cilindri con un piano abbiamo considerato una distanza iniziale tra il set superiore e quello inferiore di ~ 2 cm. Abbiamo poi trovato le posizioni iniziali ideali per le due nuvole, ossia $+0.04$ cm e -0.224 cm, per una velocità iniziale di 1.466 m/s ed un tempo T tra gli impulsi di 150 ms. ϕ_{finale} è risultato 0.45 rad, ossia ~ 0.6 volte il segnale ottenibile nel caso ideale di una massa

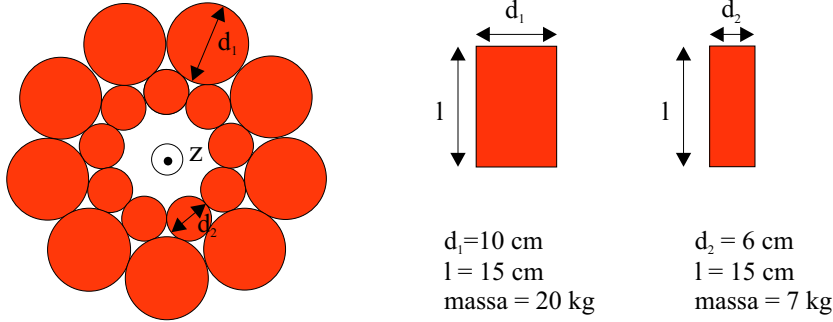


Figura 4.8: Configurazione di cilindri sostitutiva di ognuna delle due masse campione

sorgente di 1000 kg, impiegando 450 kg in tutto. Lo scarso avvicinamento dei punti di partenza (siamo passati da $\sim 31 \text{ cm}$ a $\sim 26 \text{ cm}$) non riduce inoltre di molto i tempi massimi di carica delle nuvole atomiche nella cella inferiore, subito prima della fase di lancio.

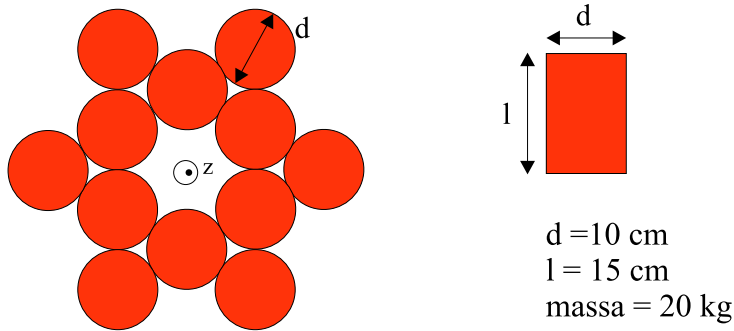


Figura 4.9: Ulteriore soluzione mediante cilindri

L'esigenza di impiegare un numero inferiore di cilindri ci ha poi indotto a studiare la configurazione rappresentata in fig. 4.9. L'omogeneità radiale del campo non viene compromessa, ϕ_{finale} risulta essere $\sim 0.41 \text{ rad}$, mentre la distanza tra le quote iniziali, -22 cm e 3.7 cm rimane praticamente invariata.

Riportiamo quindi nella tabella 4.4 le grandezze fondamentali da controllare per limitare errori sistematici nella misura di G , mediante due set

di masse realizzate con cilindretti. Riteniamo in definitiva che l'impiego di

	Incertezza prevista	$\Delta G/G$
Distanza iniziale tra i due set	$10 \mu\text{m}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Allontanamento tra i due set	$5 \mu\text{m}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Verticalità sistema di traslazione e cilindretti	$< 2'$	$< 2 \cdot 10^{-5}$
Dimensioni lineari cilindretti	$1 \mu\text{m}$	10^{-5}
Posizionamento radiale cilindri	$5 \mu\text{m}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Massa	$< 20 \text{ mg}$	$< 10^{-6}$

Tabella 4.4: Errori derivanti da un non perfetto controllo della geometria, massa e disposizione dei cilindretti

cilindri, nonostante riduca la sensibilità del nostro apparato di un fattore due, permetta di raggiungere l'accuratezza desiderata di 10^{-4} nella misura di G . Si osservi come si riduca l'indeterminazione legata al dimensionamento e alla conoscenza della massa, mentre come il fattore più critico derivi dal posizionamento radiale dei cilindri. Una variazione di $5 \mu\text{m}$ nella posizione radiale di un cilindro provoca una variazione relativa dell'accelerazione da lui provocata lungo l'asse di $\sim 5 \cdot 10^{-5}$. Se però supponiamo che gli errori si sommino quadraticamente abbiamo una riduzione della sistematica pari alla radice del numero di cilindretti impiegati. Possiamo quindi limitare tale effetto a poco più di 10^{-5} .

Sottolineiamo infine come i vincoli sul posizionamento degli atomi, precedentemente espressi nella tabella 4.3, restino praticamente invariati.

4.4.6 Analisi di densità

Prima di procedere all'acquisto dei cilindri, abbiamo ritenuto opportuno effettuare delle simulazioni al calcolatore per capire quanto importante sia l'omogeneità in densità dei cilindri impiegati, nella più probabile delle configurazioni, ossia quella indicata in fig. 4.9.

La prima tipologia di disomogeneità analizzata è stata quella casuale. Abbiamo quindi diviso uno dei cilindri più vicini agli atomi in domini di volume $V = l^3$ e ad ognuno abbiamo assegnato una densità casuale entro l'intervallo $\Delta\rho$, centrato attorno a $\rho_0 = 18 \text{ g/cm}^3$. Abbiamo ripetuto l'operazione per ~ 1000 volte, calcolando ogni volta l'accelerazione totale nel punto di inversione della traiettoria atomica, là dove il suo contributo è massimo, preoccupandoci ogni volta di rinormalizzare il risultato ad un valore costante della massa totale. Abbiamo poi mediato ($\rightarrow a_m$) e determinato la deviazione standard σ . I risultati sono riportati nella tabella 4.5. Si noti che nella prima riga abbiamo indicato il valore dell'accelerazione \bar{a} per un cilindro omogeneo con densità ρ_0 .

Si osservi come l'errore relativo a parità di $\Delta\rho$ si riduca per domini più piccoli. In più è interessante notare come la dipendenza quadratica della forza con la distanza causi un discostamento del valor medio a_m dal valore ideale \bar{a} . Tale discostamento tende tra l'altro a zero per domini sempre più piccoli.

Gli altri tipi di disomogeneità analizzati sono stati il gradiente lineare verticale e quello radiale. I risultati nella tabella 4.6, dove adesso $\Delta\rho$ esprime l'escursione in densità tra i due estremi considerati del cilindro e σ/\bar{a} la variazione relativa dell'accelerazione dal valore \bar{a} .

Come è possibile constatare, le disomogeneità radiali non contano molto. Ciò è molto importante poiché possono essere rivelate solo con un test distruttivo, a differenza di quelle verticali, apprezzabili ponendo il cilindro su due bilance a coltello a distanze variabili.

Abbiamo comunque deciso di acquistare un cilindro INERMET 180, 5 cm di raggio e alto 15 cm ed effettuare un test distruttivo di densità. Sarà analizzato agli ultrasuoni per assicurarsi dell'assenza di zone porose e saranno ottenuti campioni di materiale da punti diversi. La loro densità sarà poi misurata dal personale dell'Istituto Metrologico Italiano Gustavo Colonnetti

Variazioni casuali di densità		$\bar{a} = -4.14981 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$	
$\Delta\rho/\rho$	l	a_m	σ/a_m
10^{-2}	4 cm	-4.14930	$4 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	3.3 cm	-4.14933	$3.4 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	2.8 cm	-4.14950	$2.7 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	2.2 cm	-4.14972	$2.1 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	4 cm	-4.14955	$2 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	3.3 cm	-4.14957	$1.7 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	2.8 cm	-4.14966	$1.3 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	2.2 cm	-4.14965	$1.1 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	1.8 cm	-4.14975	$8 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-3}$	4 cm	-4.14971	$8 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-3}$	3.3 cm	-4.14972	$7 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-3}$	2.8 cm	-4.149748	$5.4 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-3}$	2.2 cm	-4.14979	$4 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4.5: Effetto di variazioni casuali nella densità su domini di volume variabile

con il quale abbiamo avviato una collaborazione per la caratterizzazione delle masse sorgenti [59]. Alla luce delle nostre simulazioni capiremo quindi se il materiale è perfettamente idoneo, oppure se una caratterizzazione della densità dei cilindretti, mediante i test non-distruttivi prima descritti, sarà veramente necessaria.

4.4.7 Alcune considerazioni

Compensare il gradiente terrestre con delle masse fisse di tungsteno che non partecipano alla misura differenziale, permetterebbe di ricorrere a masse sorgenti realizzate con materiali meno densi, ma più omogenei. Purtroppo non esiste un modo banale per compensare il gradiente terrestre in due punti a patto di non porre delle masse nelle strette vicinanze. In questo caso le masse sorgenti risulterebbero più lontane dagli atomi e il loro effetto ulteriormente

Gradiente verticale nella densità	$\bar{a} = -4.14981 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$
$\Delta\rho/\rho$	σ/\bar{a}
10^{-2}	$9 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-5}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
Gradiente radiale nella densità	$\bar{a} = -4.14981 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$
$\Delta\rho/\rho$	σ/\bar{a}
10^{-2}	$1.2 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Tabella 4.6: Effetto di gradienti radiali e verticali nella densità

ridotto. Adottare tale soluzione richiederebbe un'attenta ottimizzazione delle masse di compensazione nel tentativo di minimizzare il loro raggio esterno.

La distanza tra i punti di partenza delle due nuvole può essere variata opportunamente cambiando la distanza iniziale tra i due set di masse. Fortunatamente la sensibilità del sistema non cambia di molto visto che ad esempio l'effetto della massa inferiore sulla nuvola superiore ha sempre lo stesso segno e nella misura differenziale viene a contribuire poco al segnale finale. In questo modo possiamo sperare di aumentare il tempo di carica della seconda nuvola fino a 100 ms, portando la separazione tra i due punti di partenza fino a 40 cm.

Un'altra riflessione da fare riguarda l'eventualità che i cilindri siano sì omogenei, ma ognuno con una densità media diversa dagli altri. Questa può infatti variare da pezzo a pezzo di alcune parti percentuali, a seconda delle diverse concentrazioni delle polveri impiegate. In questo caso il punto di omogeneità radiale del campo verticale viene a spostarsi verso i cilindri più leggeri. Per preservare la simmetria si può comunque agire sulla disposizione dei cilindri tenendo conto della massa e della geometria di ognuno.

4.4.8 Supporto per le masse sorgenti

Il progetto e i disegni del supporto delle masse sorgente sono stati sviluppati in collaborazione con i tecnici dei Laboratori Nazionali di Frascati [54], mentre la realizzazione è stata affidata ad una ditta privata, la R.M.P. di Roma [57].

Il supporto deve permettere la movimentazione indipendente delle due parti che costituiscono la massa sorgente e deve garantire una serie di prestazioni definite dalle nostre simulazioni sulla misura doppio differenziale (vedi sez. 4.3).

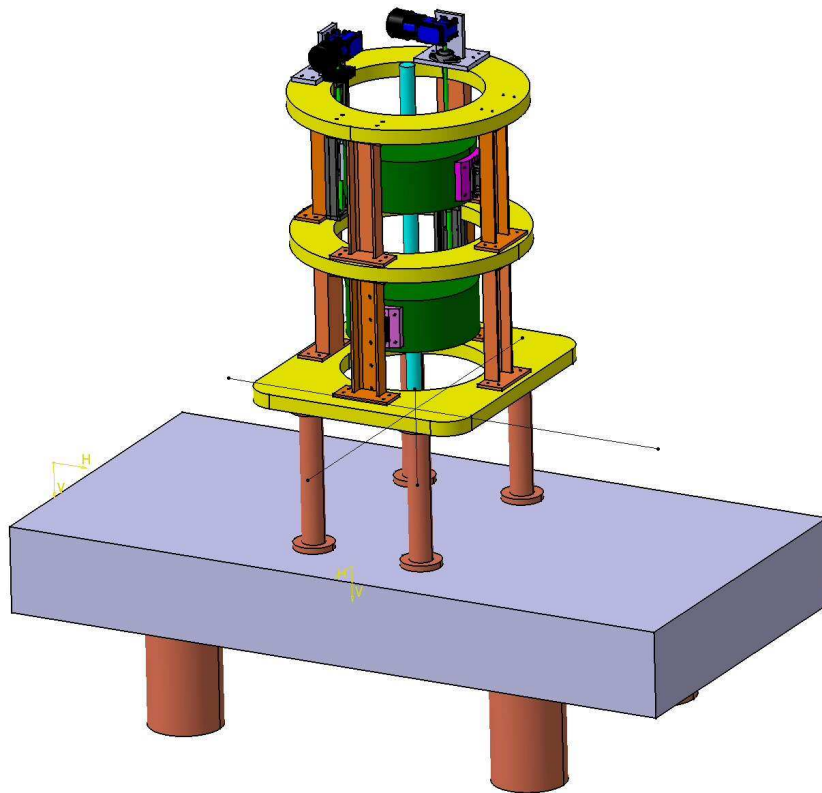


Figura 4.10: Supporto per le masse sorgenti

Come mostra la fig. 4.10, la struttura sarà principalmente costituita da due serie da 4 colonne ciascuna in acciaio 316L e da tre piastre una

rettangolare e due a disco in Avional. La scelta di questo materiale deriva dal fatto che essendo una lega dell'alluminio è amagnetico e quindi ottimo per la nostra applicazione. In più è leggero ed annulla le complicazioni di assemblaggio. Rispetto all'ideale titanio si ha un fattore sei di risparmio nell'acquisto del materiale e si guadagna in facilità di lavorazione. Gli unici inconvenienti sono una minore resistività elettrica ($5 \mu\Omega\text{cm}$ contro i $126 \mu\Omega\text{cm}$ del titanio) e un coefficiente di espansione termico leggermente superiore ($2.3 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$ contro i 10^{-5} C^{-1} del titanio). Entrambi problemi trascurabili vista la nostra intenzione di interrompere elettricamente le due piastre e assemblare tutto il sistema da vuoto in una camera stabilizzata al decimo di grado. La struttura verrà montata direttamente sul banco ottico, in modo da poter garantire la sua verticalità, una volta controllata l'orizzontalità del tavolo.

Il sistema di movimentazione di ogni singola massa sarà realizzato con due slitte a guide prismatiche mosse da una vite a ricircolo di sfere. L'azionamento avverrà tramite due motoriduttori irreversibili, cioè con la possibilità di essere spenti durante la fase di misura, collegati tramite un giunto a gioco "zero" e un limitatore di coppia. Saranno comunque muniti di schermo magnetico. Il controllo della posizione avverrà tramite due encoder lineari da 500 mm con un'accuratezza superiore ai $10 \mu\text{m}$. Sarà inoltre garantita una verticalità di almeno $2'$ di grado.

4.5 Riflessioni

In questa sezione intendiamo descrivere alcuni aspetti della misura doppio differenziale, ponendo l'accento sulle difficoltà principali che incontreremo. Avremo quindi modo di giustificare alcune delle nostre scelte di progettazione e di parlare delle idee che abbiamo riguardo gli sviluppi futuri.

Il primo punto che desideriamo sottolineare è la sensibilità del nostro dispositivo a rotazioni $\vec{\Omega}$. Come mostra la (2.90), ogni volta che i due rami interferometrici racchiudono una superficie \vec{S} non nulla, per cui $\vec{\Omega} \cdot \vec{S} \neq 0$, otteniamo un ulteriore termine di fase. Supponendo che i fasci interferometrici siano perfettamente verticali, ma che il campione atomico abbia una velocità

radiale v_r , valutando l'effetto della rotazione terrestre e tenendo conto che la nostra latitudine è circa 45° , otteniamo

$$\delta\phi \approx \frac{2M}{\sqrt{2}\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{S} = \frac{2M\Omega}{\sqrt{2}\hbar} (2v_{rec}T)(v_rT) \quad (4.17)$$

dove v_{rec} è la velocità di rinculo associata ad un fotone ottico. Se a è il livello di accuratezza nella misura di accelerazione verticale che desideriamo raggiungere occorre controllare la fase entro $k_{eff}aT^2$. Di conseguenza

$$v_r < \frac{a}{\sqrt{2}\Omega} \quad (4.18)$$

Se mettiamo un po' di numeri scopriamo che in un gravimetro che si proponga di misurare $10^{-9}g$, v_r deve essere minore di 10^{-4} m/s. Ovviamente tale condizione riguarda il centro di massa della nuvola. Nella misura accurata di G che ci proponiamo, dobbiamo spingerci altri due ordini di grandezza in basso nel campo di forza da misurare, ma per fortuna abbiamo due punti a nostro vantaggio. Per prima cosa utilizziamo un gradiometro e le due nuvole impiegate vengono lanciate dalla stessa cella con gli stessi fasci laser. Un loro non perfetto allineamento verticale conferisce ad entrambe le nuvole una simile velocità orizzontale, per cui l'effetto della rotazione terrestre si cancella. Purtroppo solo parzialmente perché le due nuvole sono lanciate a quote diverse e di conseguenza entrambe le componenti in velocità, quella verticale e quella orizzontale, sono diverse. Mediante semplici conti si può mostrare come, nella nostra situazione sperimentale, in cui la quota media di lancio è circa 1 m, mentre la distanza tra le nuvole è circa 30 cm, abbiamo una riduzione di un fattore cinque nei vincoli sulla velocità orizzontale. L'altro punto a nostro favore è la realizzazione di una misura doppio differenziale. Anche se siamo sensibili alla rotazione terrestre, tale contributo si cancella se lancio e allineamento dei fasci interferometrici rimangono invariati nel lasso di tempo necessario per effettuare due serie di misure nelle due diverse configurazioni delle masse sorgenti.

La misura doppio differenziale allenta anche le condizioni sulla conoscenza della frequenza e della verticalità dei fasci Raman e sull'orizzontalità dello specchio inerziale. In un'accurata misura di g i vettori d'onda dei laser devono

poter essere conosciuti con un'incertezza relativa che si spinge fino a poche parti in 10^{-9} . Nella nostra misura di G invece la conoscenza che si deve avere deve risultare solo di poco inferiore a 10^{-4} .

Un ulteriore aspetto da valutare è quello della nostra sensibilità ai campi magnetici. Nonostante utilizziamo atomi di Rb nello stato $M_F = 0$, la presenza dell'effetto Zeeman al secondo ordine ($\alpha = 0.58$ mHz/mG²) può essere comunque fonte di errori sistematici. Un campo magnetico uniforme non crea nessun problema visto l'utilizzo di una tecnica interferometrica di photon-echo, mentre un gradiente può provocare una diversa precessione del vettore di Bloch nei due intervalli di tempo T separati dall'impulso interferometrico π . Per esemplificare il concetto trascuriamo la gravità e supponiamo di lanciare un atomo nella direzione del gradiente $\gamma = dB/dx$ con velocità v . Sia B il valore del campo in $z = 0$ e $z = vt$ la traiettoria atomica. Esprimendo l'effetto Zeeman quadratico mediante la semplice relazione

$$\Delta\omega(z) = \alpha(B + \gamma z)^2 \quad (4.19)$$

possiamo ricavare lo shift di fase nei due intervalli di tempo T integrando la (4.19) rispettivamente tra 0 e T e tra T e $2T$. Semplici conti mostrano che la differenza è pari a $2\alpha v B \gamma T^2$. Ad esempio, un gradiente di 1 mG/cm su un fondo di 100 mG provoca su un atomo con velocità 1 m/s uno shift di fase di circa 1 rad. Per ridurre tale effetto è opportuno scegliere una traiettoria parabolica in modo che la fase accumulata tra 0 e T sia uguale a quella accumulata tra T e $2T$. Resta comunque l'effetto di frenamento sui gradi di libertà esterni dell'atomo, quantificabile in una accelerazione $a = -\hbar \nabla_z U / m = 2\alpha B(z) \gamma / m$ che provoca uno shift di fase $k_{eff} a T^2 = 2\alpha v_{rec} B \gamma T^2$, ossia due ordini di grandezza più piccolo rispetto al contributo precedente. Resta comunque necessario ridurre il campo di fondo, migliorare lo schermaggio magnetico ed ottimizzare l'omogeneità del campo generato dalla bobina verticale: in ogni caso anche stavolta la misura doppio differenziale gioca a nostro favore.

Desideriamo concludere la parentesi campi magnetici ricordando come sia vantaggioso utilizzare gli atomi come massa di prova, invece di corpi macroscopici: è possibile infatti utilizzare schemi interferometrici per la misura diretta dei campi magnetici residui. Lo schema $\pi/2 - \pi/2$ utilizzato in un oro-

logio atomico è senza dubbio il più immediato. Abbiamo quindi gli strumenti per monitorare eventuali errori sistematici derivanti da campi magnetici non perfettamente schermati.

L'altra riflessione che intendiamo fare in questo paragrafo riguarda la sensibilità di 10^{-4}G che ci proponiamo di raggiungere. Come visto nella sezione 4.4.5, dopo una misura doppio differenziale abbiamo uno shift di fase pari a ~ 0.4 rad. Tale fase viene misurata mediante quattro misure indipendenti realizzate in circa 2 s. Per limitare i tempi di integrazione ad alcune ore dobbiamo quindi assumere che almeno 10^6 atomi facciano parte delle nuvole utilizzate nell'interferometro. In questo modo possiamo misurare 0.4 rad, in 2 secondi, con un'incertezza di $\sqrt{4 \frac{\pi}{\sqrt{10^6}}}$ rad ossia ~ 0.006 rad. Per arrivare a $4 \cdot 10^{-5}$ rad occorre integrare per 12 ore. Si ricordi comunque che la stabilità del sistema deve essere garantita solo sulle scale di tempo della misura differenziale.

Un'ultima considerazione. Se l'allineamento relativo tra lancio e fasci interferometrici non cambia, l'area racchiusa dall'interferometro rimane costante, per cui l'effetto della rotazione terrestre non cambia. A prima vista, una sola variazione nell'inclinazione del tavolo non sembra quindi critica. In verità ciò può povocare una ricaduta orizzontalmente traslata del campione atomico. L'utilizzo di un sistema di rivelazione non spazialmente omogeneo ci porterebbe quindi a pesare maggiormente atomi con velocità orizzontale diversa e quindi dal diverso shift di fase dovuto alla rotazione terrestre. Occorrerà quindi in futuro una stabilizzazione attiva del tavolo mediante inclinometro e valvole pneumatiche.

Capitolo 5

Misure di caratterizzazione dell'apparato

5.1 Trappola Magneto Ottica (MOT)

Per l'intrappolamento magneto-ottico utilizziamo generalmente un gradiente di quadrupolo pari a 10 Gauss/cm, un'intensità ed un detuning dei laser di trappola dalla risonanza rispettivamente di ~ 20 mW/cm² e -3Γ , dove $\Gamma \sim 2\pi \cdot 6$ MHz, è la larghezza di riga naturale del livello $5^2P_{3/2}$ (vedi fig.3.3).

Tali valori sono stati scelti perché massimizzano il numero N_a di atomi intrappolati. Stime di N_a sono state effettuate misurando la potenza emessa per fluorescenza dalla nuvola, attraverso una delle finestre ($\phi = 35$ mm) della cella di cattura.

Come mostra la Fig. 5.1, al variare della corrente nei dispenser di rubidio possiamo cambiare opportunamente il numero di atomi intrappolati. Questo perché finché non raggiungiamo correnti nei dispenser di almeno 5 A, la pressione di rubidio rimane inferiore o comunque confrontabile con quella di altri gas di fondo. Il rate di cattura nella trappola dipende infatti dalla pressione parziale di rubidio, mentre il rate di perdite dalla pressione totale. Solo quando tali quantità diventano confrontabili il numero di atomi intrappolati diventa infatti costante.

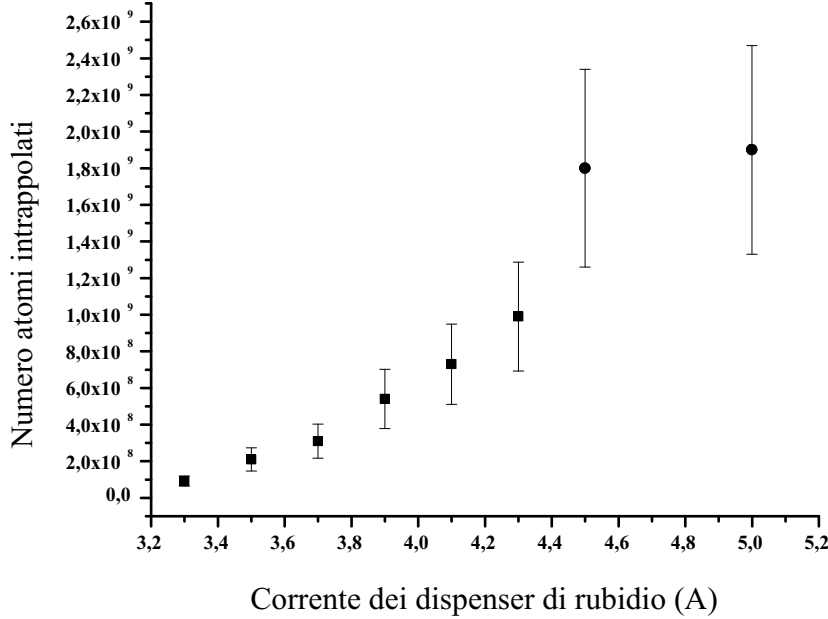


Figura 5.1: Numero di atomi intrappolati nella MOT al variare della corrente nei dispenser di Rb.

Al variare della corrente nei dispenser abbiamo poi misurato il tempo di carica della MOT (vedi Fig. 5.2).

Per limitare il consumo dei dispenser lavoriamo generalmente con 3.7 A.

Queste misure mostrano come i dispenser siano utilizzabili in un gravimetro, ma come siano insufficienti per i nostri propositi di realizzare un gradiometro con due nuvole di 10^9 atomi, caricate e lanciate ad una distanza temporale di al più 100 ms. Tempi di carica molto brevi comportano infatti una pressione di fondo molto alta che rischia di ridurre la vita media dei nostri campioni, nella seconda cella e nel tubo, a poche centinaia di ms.

Si può allora pensare di lanciare una prima nuvola, 1 m in alto, e nel frattempo caricarne un'altra. Dopo circa 1 secondo lanciare la seconda nuvola, ricattare la prima che ormai ha terminato la sua traiettoria parabolica e lanciarla nuovamente. In questo modo i tempi di carica si allungano fino ad un secondo, ma la ricattura avviene per solo 10^8 atomi, supponendo un volume di intrappolamento di circa 10 cm^3 e la temperatura minima, ottenti-

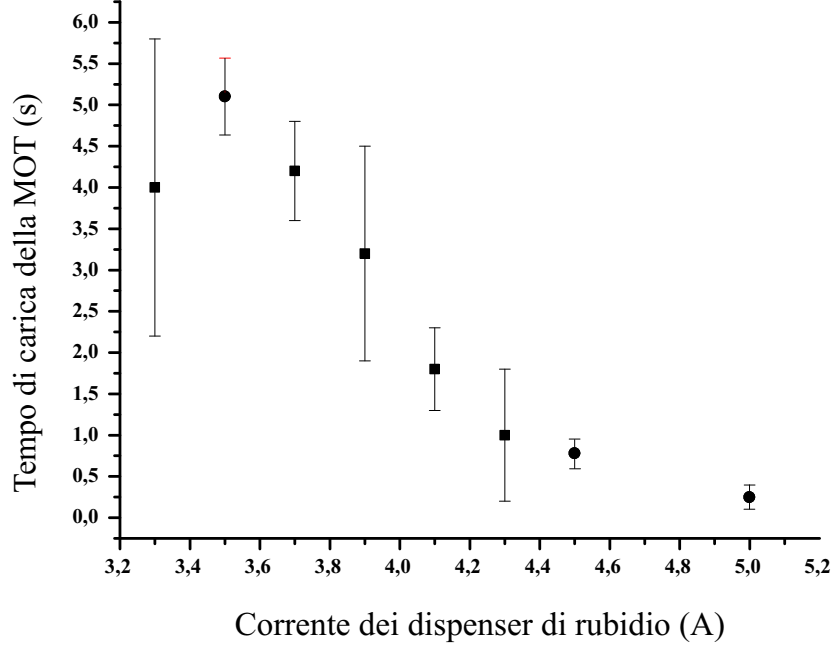


Figura 5.2: Tempi di carica al variare della corrente nei getters

bile in una fontana di Rb, di $2 \mu\text{K}$ [60, 61]. Si prospetta quindi la soluzione di implementare il nostro sistema con una 2D MOT, capace di rifornire la nostra trappola con un flusso di atomi di 10^{10} atomi/s [63].

5.2 Caratterizzazione della fontana atomica

Per ottimizzare il lancio verticale della nuvola atomica abbiamo per prima cosa cercato di annullare il campo magnetico residuo nei pressi della cella, ricorrendo ad una normale sonda ad effetto Hall ed agendo sulle correnti nelle bobine di compensazione ($I_i = I_i^{BNull}$, per $i = x, y, z$). In tali condizioni, l'allineamento dei fasci laser è stato poi ottimizzato, realizzando un intrappolamento puramente ottico. Ricorrendo ad un diverso valore delle correnti nelle bobine di compensazione ($I_i = I_i^{BMot}$), abbiamo poi portato il centro della MOT nello stesso punto di formazione della melassa. Ciò ci ha garantito un'esplosione simmetrica della nuvola al momento dello spegnimento del

quadrupolo e alla contemporanea impostazione dei valori I_i^{BNull} .

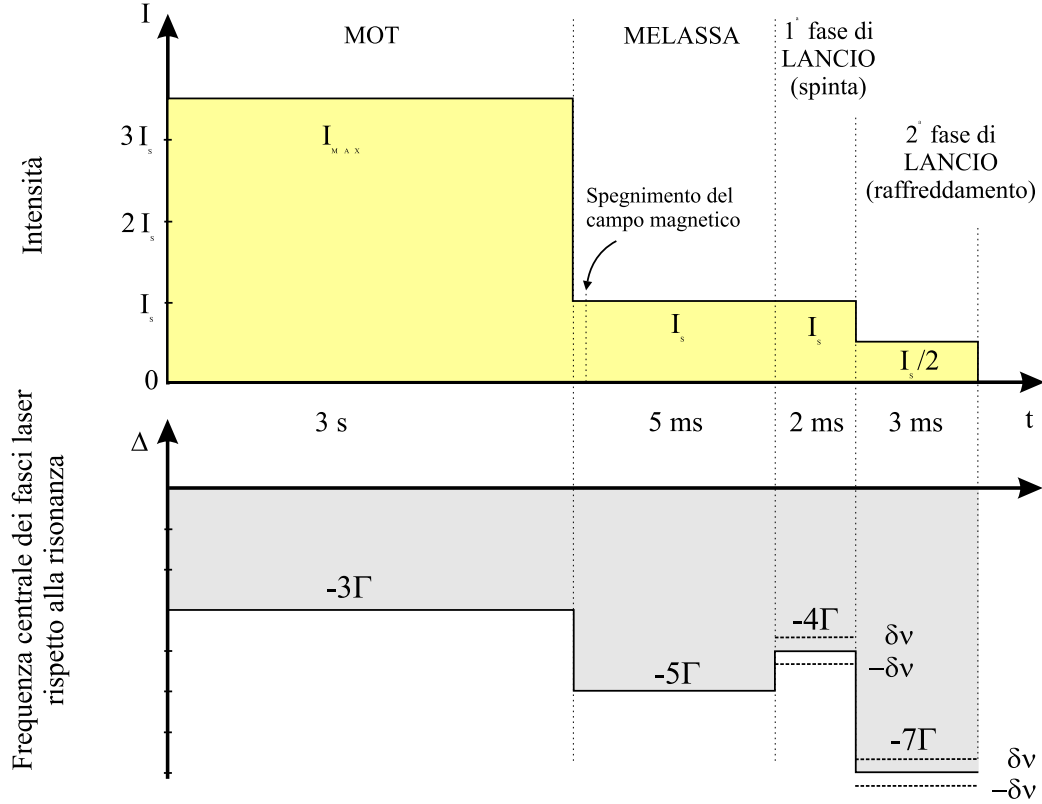


Figura 5.3: Sequenza di lancio: valori di intensità e frequenza per i laser di trappola. Si osservi che l'asse dei tempi non è in scala.

Le fasi fondamentali nel lancio della nuvola sono quattro e sono riassunte nella fig. 5.3. La prima prevede la cattura del maggior numero possibile di atomi con $I_i = I_i^{BMot}$. La seconda prevede invece una fase di melassa senza il campo di quadrupolo, con $I_i = I_i^{BNull}$ e con potenze di saturazione nei laser di trappola. Questa fase ha lo scopo principale di limitare le perdite di atomi, raffreddandoli, in un lasso di tempo di pochi ms, mentre il campo magnetico ed eventuali correnti parassite si annullano. Successivamente ha inizio la fase di lancio della nuvola: per farlo avviciniamo i laser di un Γ alla risonanza aumentando la loro pressione sugli atomi e contemporaneamente aumentiamo e diminuiamo di una quantità $\delta\nu$ rispettivamente la frequenza

dei fasci inferiori e superiori. Realizziamo così una melassa in un sistema di riferimento mobile con velocità v data dalla relazione

$$v = \frac{2\pi \cdot \delta\nu}{k \cos \xi} \quad (5.1)$$

dove k è il vettore d'onda ottico e ξ è l'angolo tra i fasci laser e la verticale, precedentemente introdotto nel paragrafo 3.1.1. L'ultima fase prevede un ulteriore raffreddamento: come è ben noto dalla teoria subdoppler, la temperatura raggiungibile in una melassa è proporzionale all'intensità dei fasci laser ed inversamente proporzionale al detuning dalla risonanza. I valori di $I_{sat}/2$ e -7Γ sono stati scelti sperimentalmente perché capaci di conferire alla nuvola la temperatura minima di $\sim 5 \mu\text{K}$ (vedi fig. 5.4 e 5.5).

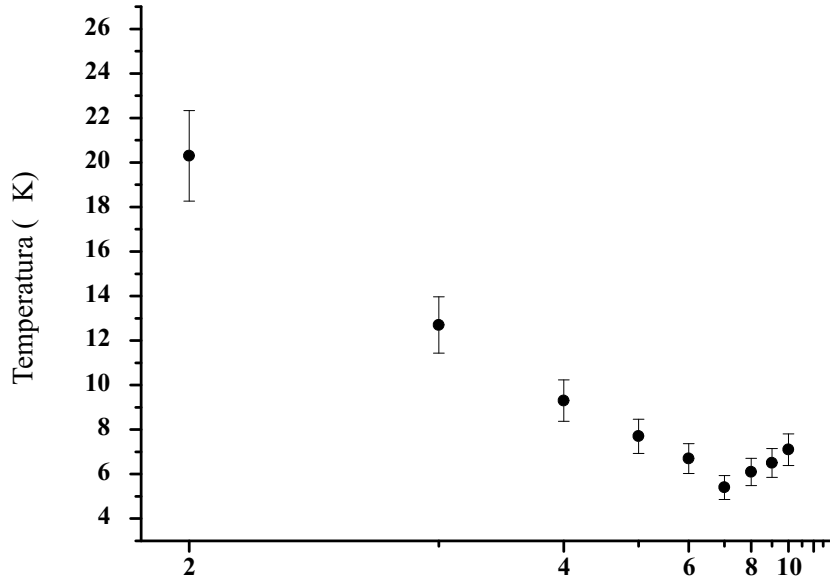


Figura 5.4: Temperatura della nuvola di atomi al variare della frequenza nella melassa finale. Intensità nei fasci pari ad $I_{sat}/2$.

Per le stime della temperatura abbiamo ricorso a misure di tempo di volo, rivelando i successivi passaggi della nuvola attraverso una lama di luce realizzata con il fascio di rivelazione e posta orizzontalmente all'altezza della

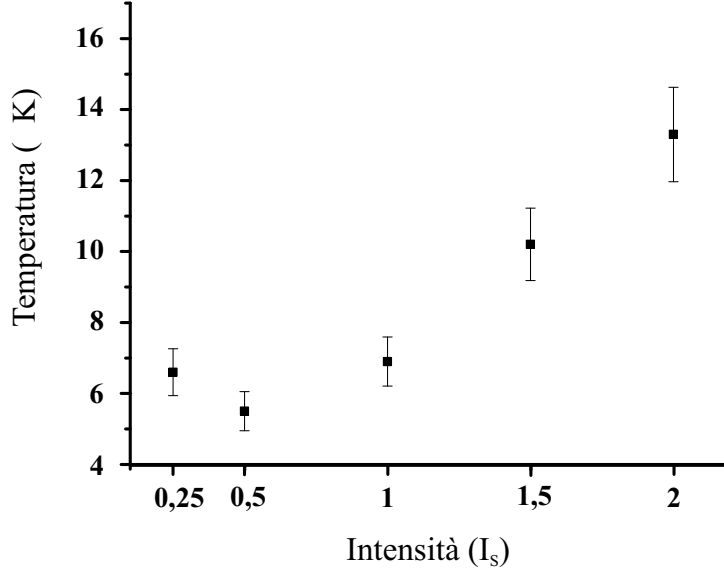


Figura 5.5: Temperatura della nuvola di atomi al variare dell'intensità nei fasci della melassa finale.

seconda camera da vuoto. Dai segnali di fluorescenza del tipo indicato in fig. 5.6 è possibile infatti trarre informazione sull'espansione della nuvola e quindi sulla distribuzione di velocità dei suoi atomi.

Desidero sottolineare la necessità delle due fasi finali di lancio dato il tempo finito a disposizione per portare a termine l'accelerazione della nuvola. Infatti utilizzando solo la seconda avremmo una nuvola fredda, ma questa uscirebbe dalla zona di intersezione dei fasci prima di aver raggiunto la velocità desiderata.

Se adesso ci chiediamo quanti atomi, tra quelli lanciati, soddisfino i requisiti espressi in tabella 4.3, tenendo conto di una dimensione della nuvola in trappola di ~ 3 mm e una distribuzione di Maxwell delle velocità corrispondente a $5 \mu\text{K}$, scopriamo circa $\sim 10^5$ atomi. Considerando inoltre che al termine del lancio gli atomi sono equamente distribuiti nei vari sottolivelli Zeeman del livello iperfine $F = 2$, ma solo gli $M_F = 0$ potranno essere usati nella misura di gravità, tale numero si riduce ulteriormente di un fattore 5.

Raffreddare fino a $2 \mu\text{K}$ aiuterà, ma non ci permetterà comunque di rag-

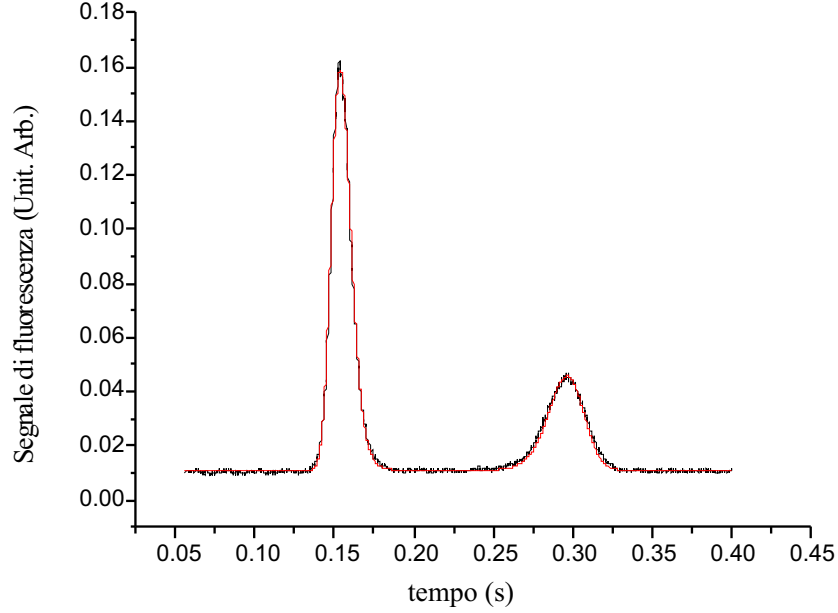


Figura 5.6: Segnale di fluorescenza degli atomi registrato ai due passaggi dalla regione di rivelazione.

giungere l'obiettivo di 10^6 atomi che ci siamo preposti al termine del capitolo 4.

La soluzione a questo problema sembra provenire dal cosiddetto Degenerate 3D Sideband Raman Cooling in un reticolo ottico. Come dimostrato per il Cs [46] e solo di recente anche per il Rb [62], con tale tecnica è possibile raffreddare campioni di atomi fino ad 800 nK e contemporaneamente polarizzarli nello stato $F = 1, M_F = 1$. L'obiettivo di 10^6 può in questo modo essere raggiunto e addirittura superato. Da non trascurare è infatti l'importanza di aumentare la sensibilità del nostro gradiometro per ridurre il più possibile i tempi di integrazione verso una precisione di 100 ppm nella misura di G . In questo modo la caratterizzazione degli errori sistematici risulterà notevolmente più semplice. Si ricorda inoltre che l'utilizzo di un reticolo ottico nella fase di lancio ha l'ulteriore vantaggio di permettere la selezione dei soli atomi veramente al centro delle masse sorgenti, previa un accurato allineamento dei fasci che lo costituiscono.

Le due nuvole, separate verticalmente dopo il lancio di circa 25 cm, attraverseranno il reticolo ottico, posto all'altezza della cella di rivelazione, dove verranno raffreddate, selezionate spazialmente e polarizzate nello stato $F = 1, M_F = 1$. Un impulso a microonda, o un set aggiuntivo di fasci Raman inviati orizzontalmente nella cella di rivelazione, permetteranno poi la popolazione dello stato $F = 2, M_F = 0$. Una volta che le due nuvole si troveranno dentro il tubo, potremo applicare un impulso Raman per selezionare la classe di velocità desiderata entro 5 mm/s, come richiesto in tabella 4.3, portando gli atomi in $F = 1, M_F = 0$. Un blow away verticale (vedi la sezione 3.6) con luce σ^+ rimuoverà gli atomi rimasti in $F = 2$, rendendo così possibile l'inizio dell'esperimento.

Due osservazioni. Meglio se la selezione di velocità avviene con fasci Raman molto detunati dalla $D_{3/2}$, in modo da ridurre l'assorbimento fuori risonanza e il popolamento dello stato $F = 1, M_F = 0$ con atomi indesiderati. Il blow away proposto, con luce σ^+ , funziona particolarmente bene perché gli atomi in $F = 2$, una volta pompatisi in $M_F = 2$, possono solo continuare a riscaldarsi, senza finire in altri stati.

Concludiamo questa sezione illustrando la fig. 5.7, dove abbiamo infine mostrato la possibilità di lanciare la nuvola di atomi fino all'estremità superiore del tubo.

5.3 Transizioni Raman

Per i primi test sulle transizioni a due fotoni abbiamo utilizzato fasci Raman copropaganti, polarizzati σ^+ rispetto alla verticale. In questo caso, come mostra la (2.66), \mathbf{k}_{eff} è pari al vettore d'onda di un fotone con energia $\hbar\omega_{ab}$, poiché stiamo lavorando con i due laser agganciati in fase con frequenza differenza pari alla separazione iperfine dei due stati fondamentali a e b . $\mathbf{k}_{eff} \sim 1.4 \text{ cm}^{-1}$, per cui solo classi di atomi con velocità dell'ordine di 40 m/s risultano detunate dalla risonanza di $\sim 1 \text{ kHz}$. Poiché con potenze di circa 50 mW, la frequenza di Rabi della transizione Raman è proprio di quest'ordine, ne segue che la condizione di risonanza può essere contemporaneamente soddisfatta per tutti gli atomi della nuvola da noi lanciata, che

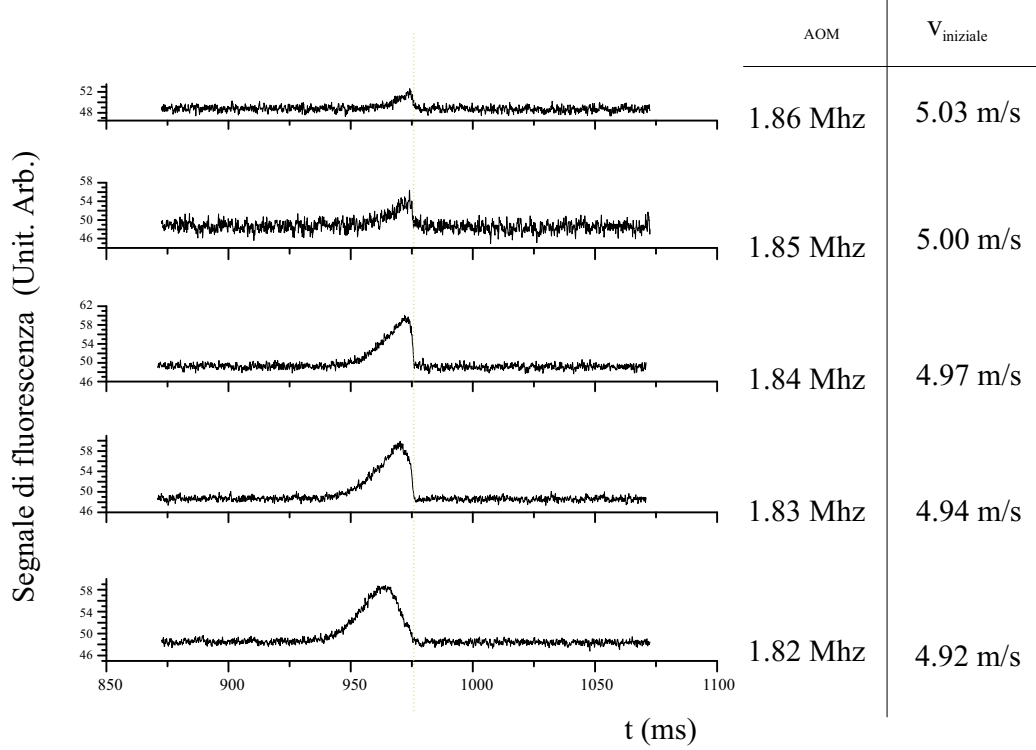


Figura 5.7: Segnale di fluorescenza emesso dalla nuvola di atomi al secondo passaggio dalla zona di rivelazione, al momento della ricaduta. Si noti come al variare della velocità di lancio vari la frazione della nuvola persa in seguito al contatto degli atomi con la finestra superiore del tubo.

ha una dispersione nelle velocità di pochi cm/s. Non a caso tale configurazione dei fasci laser è detta *velocity unselective*. Il suo utilizzo è vantaggioso in studi preliminari, visto il coinvolgimento di tutti gli atomi nelle misure. La scelta della polarizzazione permette di avere una transizione chiusa $|F = 1, M_F = 0\rangle \longrightarrow |F = 2, M_F = 0\rangle$.

Contrariamente, la configurazione con fasci contropropaganti di cui abbiamo parlato nella sezione 3.4.2, è detta *velocity selective*, dato un \mathbf{k}_{eff} 10^5 volte più grande. In questo caso un impulso laser con frequenza di Rabi dell'ordine del kHz seleziona solo atomi con una velocità di pochi mm/s.

Per verificare il funzionamento delle transizioni Raman lanciamo la nuvola

di atomi verticalmente, spegnendo il fascio di ripompaggio 1 ms prima della conclusione della fase di spinta. In questo modo, spingendo via gli atomi rimasti in $F = 2$ mediante un impulso di blow-away al momento del loro primo passaggio dalla cella centrale, ci ritroviamo con un campione di soli atomi in $F = 1$. Una volta entrati nel tubo possiamo accendere i fasci Raman e monitorare il trasferimento di popolazione, rivelando il numero di atomi in $F = 2$ al momento della loro ricaduta e del loro secondo passaggio dalla cella di rivelazione. Un campo magnetico diverso da zero lungo il tubo ha permesso di utilizzare nella misura il solo sottolivello $M_F = 0$. Come mostra la (2.67),

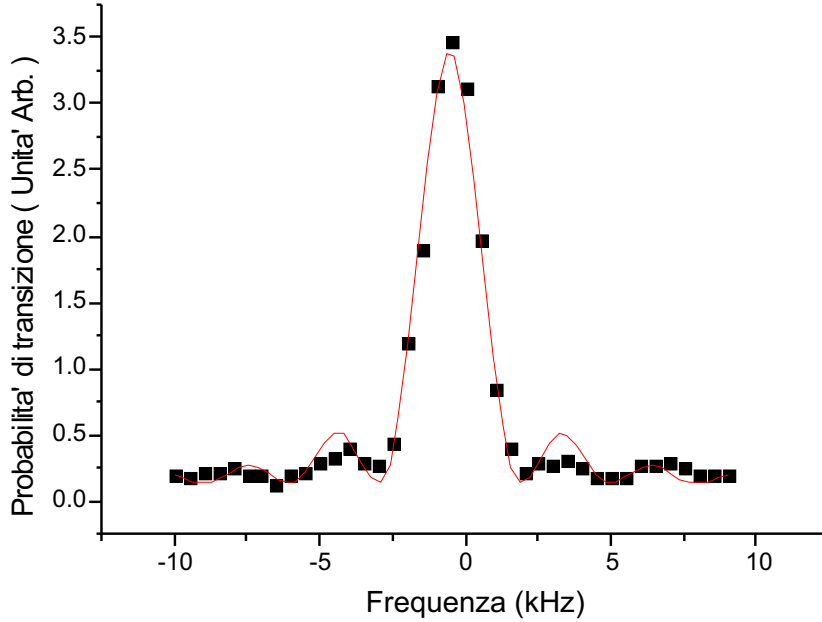


Figura 5.8: Profilo di riga. Applicazione di impulsi temporalmente quadrati.

la probabilità di transizione per un impulso di durata τ , con frequenza di Rabi Ω_{eff} e detuning dalla risonanza δ , vale

$$P(\tau) = \frac{\Omega_{eff}^2}{\Omega_{eff}^2 + \delta^2} \sin^2 \left(\sqrt{\Omega_{eff}^2 + \delta^2} \frac{\tau}{2} \right) \quad (5.2)$$

Ecco quindi spiegati i profili di riga che otteniamo quando variamo il valore di δ attorno alla risonanza (vedi fig. 5.8).

Si noti che il non perfetto accordo dei dati con la (5.2) deriva principalmente dalla gaussianità dei fasci Raman e della distribuzione spaziale della nuvola atomica. La larghezza del profilo dà comunque una buona stima della frequenza di Rabi Ω_{eff} .

Ricordando la (2.66) e la (2.68), scopriamo che il centro dei profili di riga dipende fortemente dal light-shift δ_{AC} . Una serie di misure è stata realizzata proprio per mettere in mostra questo aspetto (vedi fig. 5.10), variando il rapporto delle potenze dei due laser, ma tenendo costante la potenza totale (50 mW). Il rumore che osserviamo su un andamento correttamente lineare deriva dalla nostra incapacità di misurare precisamente la potenza dei due laser su di un semplice Fabry-Perot.

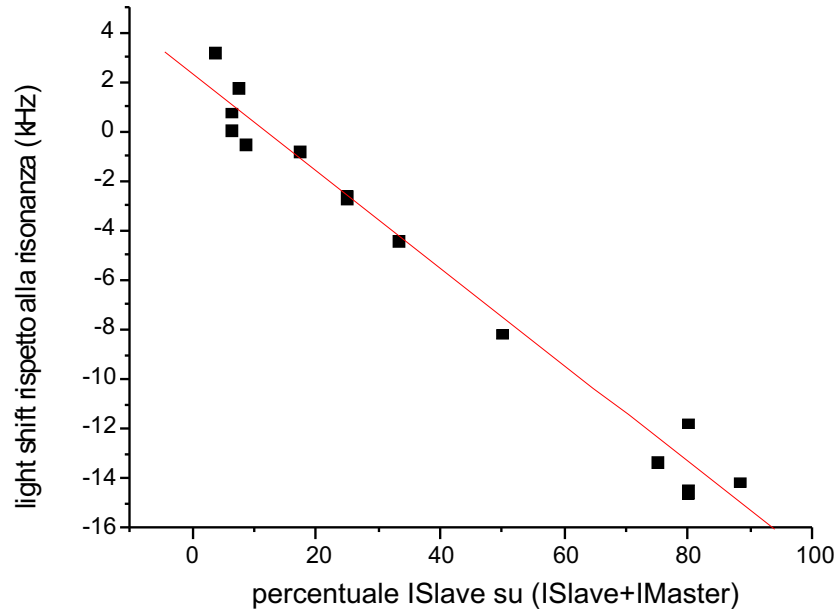


Figura 5.9: AC Stark shift

Una seconda serie di misure ha permesso di verificare la nostra capacità di risolvere le frequenze di risonanza per i sottolivelli Zeeman, $F = 1, M_F = -1$ ed $F = 1, M_F = 1$ al variare del campo magnetico all'interno del tubo. Riuscire a farlo è particolarmente utile in quanto abbiamo così un potente strumento per misurare i campi magnetici residui. Una misura assoluta

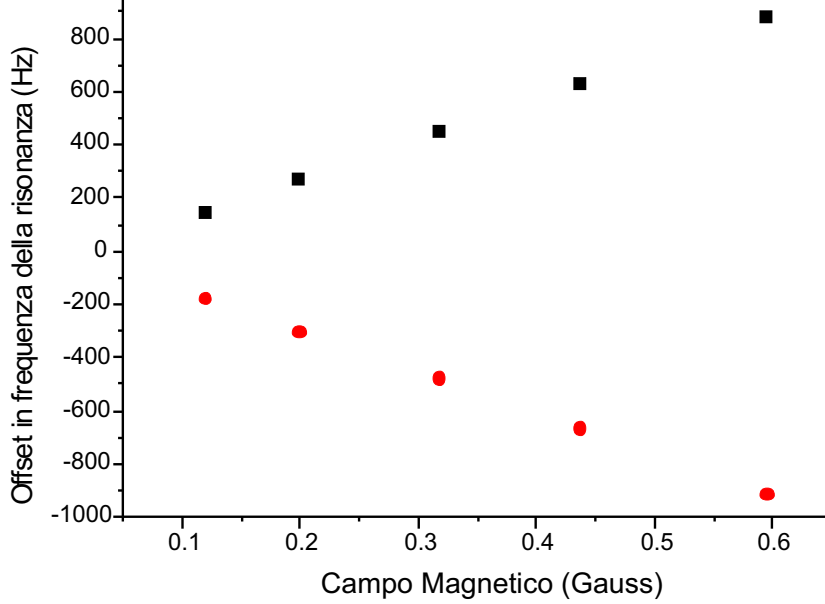


Figura 5.10: Variazioni nella frequenza di risonanza delle transizioni $F = 1, M_F = \pm 1 - F' = 2, M_F = \pm 1$ ($\sim 1.4\text{MHz/Gauss}$).

di campo magnetico richiederebbe un controllo più accurato della potenza relativa tra i due fasci per un effettivo azzeramento dei light shift. Fortunatamente ciò non è necessario poiché solo i gradienti sono causa di errori sistematici nelle misure di gravità. Questi potranno essere stimati supponendo costante il light shift temporalmente e lungo la direzione verticale e cercando la risonanza della transizione al variare della posizione degli atomi lungo il tubo.

5.4 Misure interferometriche preliminari

Una volta individuata la risonanza, abbiamo variato la lunghezza dell'impulso di trasferimento da $F = 1, M_F = 0$ ad $F = 2, M_F = 0$, risolvendo le oscillazioni di Rabi tra i due stati (vedi fig.5.11). Dal grafico abbiamo determinato la durata di un impulso π ed un impulso $\pi/2$. Per una potenza totale di 50 mW equipartita nei due fasci Raman abbiamo trovato $\tau(\pi) = 120 \mu\text{s}$.

La possibilità di apprezzare fino a quattro oscillazioni non solo ci ha fatto ben sperare nella riuscita di una prova preliminare della sequenza interferometrica, ma ci ha permesso di implementare la tecnica di preparazione del campione atomico nello stato $F = 1$. Lasciando adesso acceso il fascio di ripompaggio fino al termine del lancio, abbiamo potuto ottenere una nuvola più fredda in $F = 2$, con in più la possibilità di portare gli atomi in $F = 1, M_F = 0$ mediante un impulso Raman π . Il solo stato $M_F = 0$ è stato utilizzato, vista la presenza di un campo magnetico residuo nella zona sovrastante quella di lancio. Per eliminare gli atomi rimasti in $F = 2$ abbiamo nuovamente applicato un impulso di blow-away al loro primo passaggio dalla cella di rivelazione.

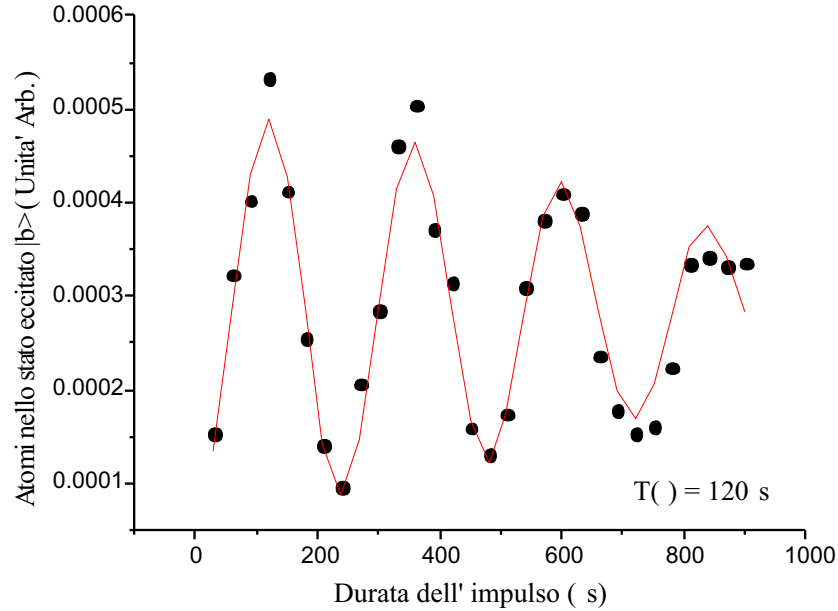


Figura 5.11: Oscillazioni di Rabi

Anche se il vettore d'onda effettivo $\mathbf{k}_{eff} \sim 1.4 \text{ cm}^{-1}$ è di gran lunga inferiore al vettore ottico nel caso di fasci contropropaganti ($\mathbf{k}_{eff} \sim 1.5 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$), il principio di funzionamento dell'interferometro con fasci copropaganti è del tutto analogo. Il termine di fase che misuriamo resta sempre $\Delta\phi = \mathbf{k}_{eff}gT^2$, ma la risoluzione di questo gravimetro sarà semplicemente

10^5 volte più piccola. Si noti come adesso la rampa in frequenza non sia necessaria visto che gli atomi restano comunque a risonanza durante tutta la fase di caduta. Per apprezzare l'interferenza abbiamo variato il tempo di separazione T tra gli impulsi, graficando la popolazione finale (fig. 5.12). Da un fit delle oscillazioni abbiamo ottenuto una stima ridicola della gravità ($10.3 \pm 0.6 \text{ m/s}^2$), ma comunque consistente con il valore vero.

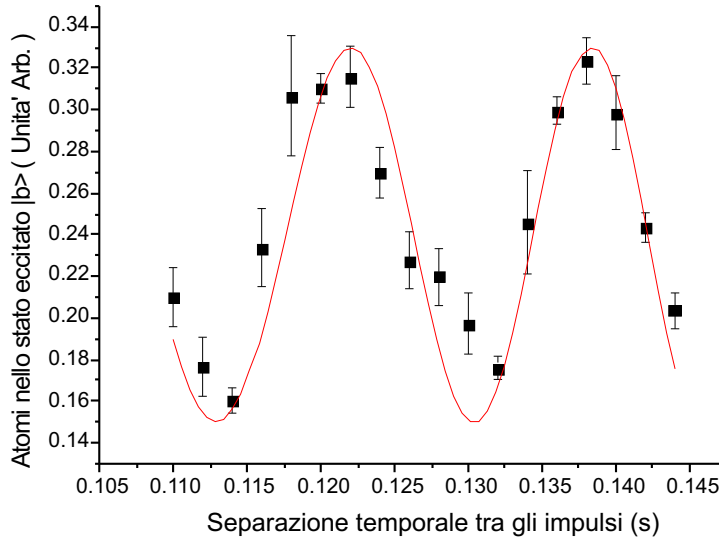


Figura 5.12: Frange di interferenza per fasci Raman copropaganti

Questa misura ha mostrato che abbiamo un controllo della fase relativa tra i due laser Raman superiore a 2π . L'osservazione di frange d'interferenza nel caso di fasci contropropaganti risulta quindi in ugual modo possibile. Prove in questa direzione sono attualmente in corso.

Conclusioni

Con questo lavoro di tesi si è avviato un esperimento che si propone di misurare la Costante di Gravitazione Universale G , mediante tecniche di interferometria atomica.

Prima di tutto è stato necessario studiare a fondo i sensori inerziali atomici, per comprendere la teoria del loro funzionamento e la loro sensibilità ad altri campi esterni. Alla luce di tali conoscenze abbiamo quindi ideato uno schema di misura, capace di eliminare gli errori sistematici indesiderati e di garantire una precisione ed un'accuratezza di 100 ppm. Ciò ha richiesto un lungo lavoro al calcolatore, dove le traiettorie atomiche, in presenza del campo terrestre e delle masse sorgenti, sono state simulate. Dalle stime quantitative ottenute da questo studio abbiamo potuto avviare la progettazione del sistema da vuoto, delle masse sorgenti e del loro supporto mobile.

Le camere da vuoto sono state pensate per garantire i numerosi accessi ottici necessari alle fasi di cattura, raffreddamento, lancio e rivelazione dei campioni atomici. Attenzione è stata posta nella scelta dei materiali, cercando sempre di minimizzare il loro livello di magnetizzazione e la loro conducibilità a correnti parassite. Il sistema laser è stato assemblato su un banco ottico indipendente, mentre la luce è stata inviata alla camera da vuoto mediante una serie di fibre ottiche. Tale scelta, insieme a quella di sviluppare dei separatori in fibra e di fissare i collimatori di uscita direttamente alla cella di intrappolamento degli atomi, sono state dettate dalla ricerca della massima compattezza e stabilità.

La progettazione delle masse sorgenti ha comportato il vaglio di svariate soluzioni in termini di geometria proposta e scelta del materiale. Fondamentale è stata l'interazione con altri laboratori impegnati nella misura di G e

con le ditte produttrici di materiali ad alta densità, per non parlare della collaborazione instaurata con l'Istituto Metrologico Italiano Gustavo Colonnetti di Torino che ci ha permesso di abbassare notevolmente gli errori preventivati nella misura di massa e dimensioni della massa sorgente. In particolare modo la sezione densità dell'Istituto ci ha dato pieno appoggio nello studio dell'omogeneità del materiale che crediamo ideale per i nostri scopi, ossia un sinterizzato di tungsteno dal peso specifico di 18 g/cm^3 , dalla bassa suscettività magnetica e dalle ottime caratteristiche di lavorazione. I risultati delle analisi sono attesi per gli inizi di luglio.

Per quanto riguarda il supporto mobile delle masse sorgenti abbiamo potuto usufruire delle competenze dei tecnici e degli ingegneri dei Laboratori Nazionali di Frascati, che hanno sviluppato progetto e disegno d'insieme. La lavorazione e l'assemblaggio delle parti è stata poi affidata ad una ditta privata che prevede il completamento del lavoro per la prima settimana del mese di giugno.

L'attività di ricerca descritta in questa tesi ha ovviamente compreso una fase puramente sperimentale, durante la quale è stato assemblato il sistema da vuoto, il sistema laser e tutta la strumentazione elettronica necessaria. Solo di recente abbiamo potuto iniziare a lavorare con i campioni di atomi freddi e a caratterizzare l'efficienza di cattura e lancio verticale. Ultimamente è stato messo a punto il funzionamento dei laser interferometrici e una prima misura interferometrica di gravità è stata dimostrata. Questo lavoro di tesi termina quindi in una fase cruciale del progetto MAGIA, perché caratterizzata dai primi risultati sperimentali di un certo interesse e da un primo funzionamento del gravimetro atomico.

Bibliografia

- [1] P. J. Mohr and B. N. Taylor, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **28**, 1713 (1999)
- [2] H. Cavendish, *Phil. Trans. R. Soc. London* **88**, 469-526 (1798)
- [3] J. C. Ries, *Geophys. Res. Lett.* **19**, 529-531 (1992)
- [4] E. Teller, *Phys. Rev.* **73**, 801-802 (1798)
- [5] H. W. S. McQueen, *Phys. Earth and Planat. Inter* **26**, 6-9 (1981)
- [6] G. T. Gillies, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 151-225 (1997)
- [7] L. Stegena, *The Constant of Gravitation: Studies from the Field of the Determination of the Constant of Gravity* (Budapest: Akadémiai Kiadó)
- [8] G. Luther, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 121-123 (1982)
- [9] O. V. Karagioz, *Universal Gravitation and the Theory of Space-Time*, Publishing House of the People's Friendship University, 102-110 (1987)
- [10] M. P. Fitzgerald, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **40**, 408 (1995)
- [11] C. H. Bagley, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3047-3050 (1997)
- [12] H. Walesch, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **44**, 491-493 (1965)
- [13] W. Michaelis, *Metrologia*, **32**, 267-276 (1995/96)
- [14] J. Luo, *Class. Quantum Grav.* **17**, 2351 - 2363 (2000)
- [15] J. H. Gundlach, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2869-2872 (2000)

- [16] T. Quinn, Phys. Rev. Lett., **87**, 111101 (2001)
- [17] J. P. Schwarz, Science, **282**, 2230-2234 (1998)
- [18] M. Kasevich, Applied Physics B, **54**, 321-332 (1992)
- [19] A. Peters, Nature, **400**, 849-852 (1999)
- [20] M. J. Snadden, Phys. Rev. Lett., **81**, 971-974 (1998)
- [21] T. L. Gustavson, Phys. Rev. Lett. **78**, 2046-2049 (1997)
- [22] <http://www.esa.int/export/esaSC/index.html>
- [23] J. Lens & H. Thirring, Physics Z, **19**, 156 (1918)
- [24] M.H. Anderson, Science **269**, 198-201 (1995).
- [25] M. Kasevich, Science, **298**, 1363-1368 (2002)
- [26] M. A. Zumberge, Phys. Rev. Lett., **67**, 3051-3054 (1991)
- [27] A. Conraz, Phys. Rev. Lett., **72**, 1152-1155 (1994)
- [28] P. Baldi, Phys. Rev. D, *textbf*64, 082001-1
- [29] C. D. Hoyle, Phys. Rev. Lett., **86**, 1418 (2001)
- [30] St. Schlamming, Phys. Rev. Lett. **89**, 161102-1 (2002)
- [31] K. Shimoda, *Introduction to Laser Physics*, Springer - Verlag, Berlin (1984)
- [32] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, (1965)
- [33] Ch. J. Bordé, *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Lectures, Session LIII (1990)
- [34] H. Kogelnik, *On the propagation of Gaussian beams of light*, Appl. Opt. **4**, 1562 (1965)

- [35] J. H. Van Vleck, *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **14**, 178-188 (1928)
- [36] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of path integral*, John Wiley publishing
- [37] Ch. J. Bordè, *Corso tenuto all'Università di Hannover, Institute für Quantenoptik*, 4 febbraio 2001
- [38] Ch. J. Bordè, *Atomic clocks and inertial sensors*, Metrologia **39**, 435-63 (2002)
- [39] Ch. J. Bordè, *Quantum Theory of Atom-Wave Beam Splitters and Application to Multidimensional Atomic Gravito-Inertial Sensors*, General Relativity and Gravitation, Vol **36**, No 3, March (2004)
- [40] K. Moler, Phys. Rev. A, **45**, 342 (1991)
- [41] N. F. Ramsey, *Molecular Beams*, Oxford Univ. Press, Oxford (1956)
- [42] D. S. Weiss, Tesi di dottorato, *Stanford University* (1993)
- [43] G. Santarelli, Phys. Rev. Lett., **23**, 4619-4622 (1999)
- [44] C. Antoine, *Quantum theory of atomic clocks and gravito-inertial sensors: an update*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **5**, 199-207 (2003)
- [45] C. Antoine, *Exact phase shift for atom interferometry*, Phys. Lett. A **306** 277-84
- [46] P. Treutlein, Phys. Rev. A **63**, 0151401 (2001)
- [47] L. Ricci *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*, Opt. Commun. **117** 541 (1995)
- [48] G. Marro, *Controlli automatici*, Ed. Zanichelli (1997)

- [49] G. Santarelli, Opt. Commun. **104**, 339 (1994)
- [50] M. Prevedelli, Appl. Phys. B, **60**, 241 (1995)
- [51] T. Petelski, *Doppler-free Spectroscopy using magnetically induced dichroism of atomic vapor: a new scheme for laser frequency locking*, Eur. Phys. J. D **22**, 279 (2003)
- [52] A. Peters, *High precision gravity measurements using atom interferometry*, Tesi di dottorato (1998). Attualmente Junior Professor presso l'Università di Humboldt
- [53] J. M. McGuirk, *Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry*, Phy. Rev. A, **65** 33608 (2002)
- [54] Bruno Dulach, dulach@lnf.infn
- [55] M. Fattori, Phys. Lett. A **318**, 184-191 (2003)
- [56] J. Stuhler, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, 575-581 (2003)
- [57] R.M.P. S.r.l. Meccanica Progettazione Prototipi, Roma.
- [58] Idea suggerita da James Faller. Vedi [17]
- [59] Sezione densità: Anna Peuto. Sezione massa: Walter Bich. Sezione lunghezza: Alessandro Balsamo.
- [60] A. Clairon, *Proceedings of the Fifth Symposium on Frequency Standards and Metrology*, edited by J. Bergquist, World Scientific, Singapore (1996)
- [61] S. Bize, Europhysics Letters **45**, 558-564 (1999)
- [62] <http://www.stanford.edu/group/chugroup/index.html>
- [63] J. Schoser, Phys. Rev. A **66**, 023410 (2002)
- [64] Y. Sortais, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI (2001)