Die Gravitationskonstante G
10-fold improvement in precision

Sebastian Schmidt

Max-Planck-Institut für Physik, München

H1-Studenten-Seminar, 17.Juni 2002

Newton

- Gravitation wurde als erste der vier Fundamentalkräfte beschrieben
- 1687 Newton: "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" (Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaft)
- Physik der Bewegungsabläufe auf der Erde und die Physik der Planetenbewegung ist ein und dieselbe
- Die Gravitation wirkt
  gemäß der Menge der festen Materie welche sie (die Sonne und die Planeten) enthalten, und seine Wirkung sich bis in ungeheuere Entfernungen ausbreitet, wobei diese immer wie das Quadrat der Entfernungen abnimmt.
  (Principia, Buch III, Aussage XLII)
- Damals nur Proportionalität wichtig, da für Planetenbewegung genauer Faktor nicht relevant (nur Produkte von G mit Sonnen- oder Planetenmassen)
- Einführung von Gravitationskonstante G erst weit im 18. Jahrhundert (Laplace: *Mécanique Céleste* und Poisson: *Traité de Mécanique*)

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

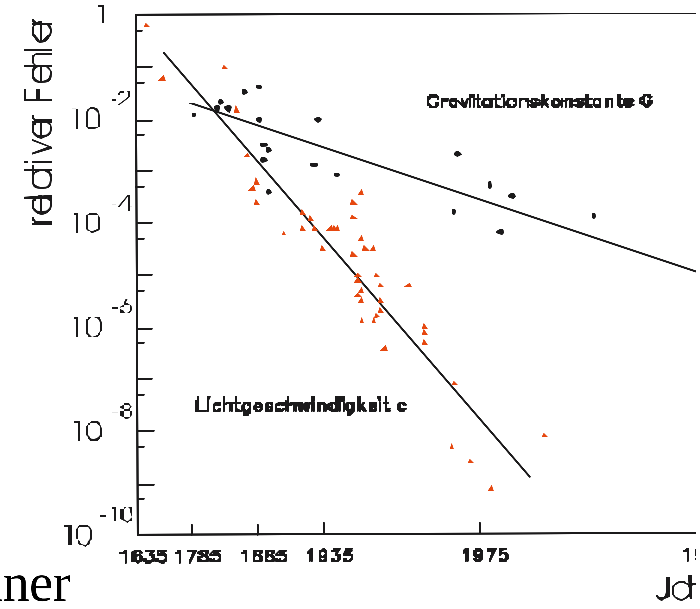
Einstein

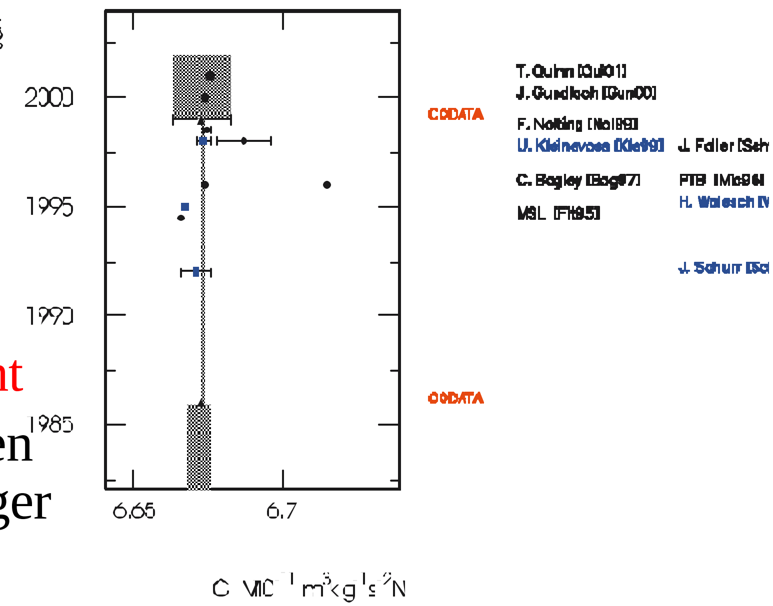
- Allgemeine Relativitätstheorie
- Materieverteilung bestimmt Raum-Zeit-Krümmung
- minimale Korrekturen in der terrestrischen Physik und im Planetensystem
- Zahlenwert von G unverändert
- Einstein`sche Feldgleichungen:

$$k = \frac{8pG}{c^4}$$

Probleme bei der Messung von G

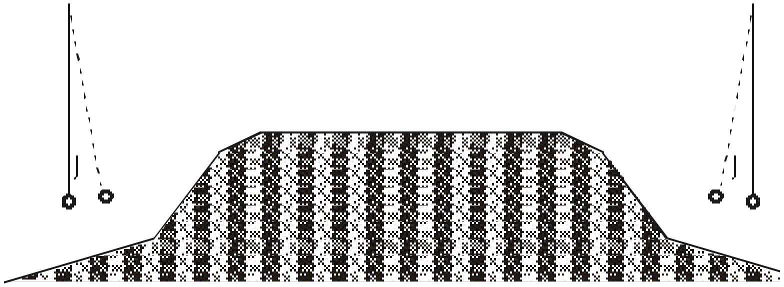
- Schwächste der vier Kräfte
- Läßt sich nicht abschirmen
- Bestimmung einer sehr kleinen Kraft in einer verrauschten Umgebung
- Geringe Verbesserung der Fehler im Laufe der Zeit, verglichen z.B. mit der Lichtgeschwindigkeit
- Kürzlich wurde sogar der Fehler des Literaturwertes für G nach oben korrigiert
- Theoretischer Vergleichswert existiert nicht
- Superstring-Theorien: grobe Abschätzungen für G, theoretische Genauigkeit weit geringer als die experimentelle





Large Scale Experimente

- Bestimmung der Abweichung der Richtung der Fallbeschleunigung von der Radialrichtung an zwei Seiten eines Berges, dessen Geometrie und Dichte bekannt ist
- 1774, Schehallien (Berg in Schottland)



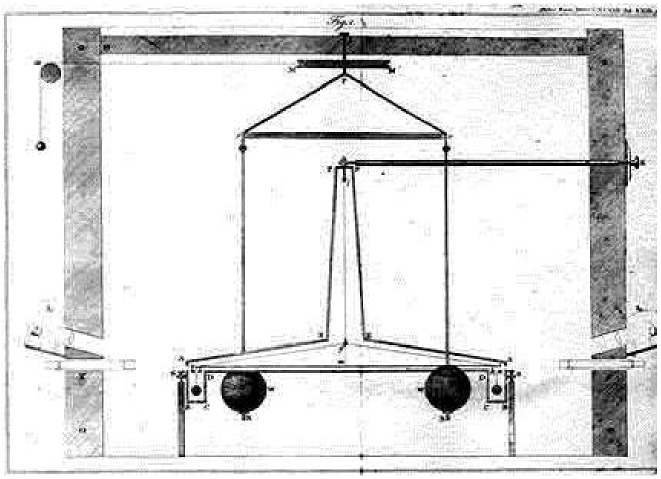
$$G = 7.8 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

- Probleme: begrenztes Wissen über die Massenverteilung des Berges
- Messungen in verschiedenen Tiefen des Pazifiks (1991), in einer Mine in Australien (1984): Masse der Kugelschalen wird ins Verhältnis zur Masse der gesamten Erde gesetzt

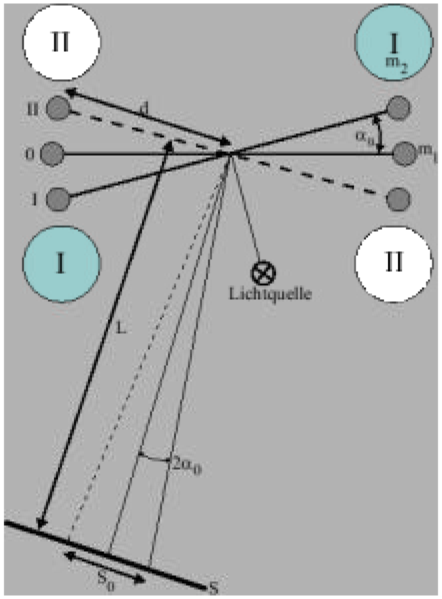
$$G = (6.712 \pm 0.0037) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

Cavendish

- Henry Cavendish (1789)
- statische Methode: Pendel wird durch Attraktoren ausgelenkt, aus der Auslenkung wird Gravitationskraft bestimmt



$$G = (6.75 \pm 0.05) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$



Henry Cavendish (1731-1810)

Torsionswaagen

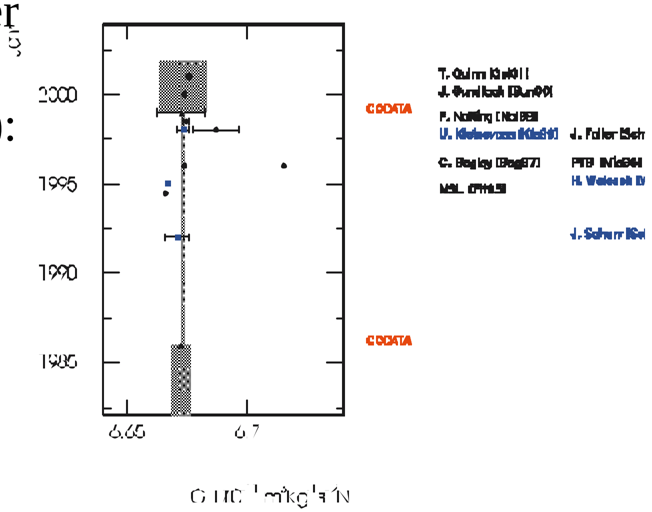
- Quarz als Torsionsdraht (Boys, 1895)
- Pendel im Vakuum (Braun 1897)
- Statt der Auslenkung der Waage wird die Frequenz der Schwingung gemessen (dynamische Methode)
- Literaturwert CODATA ab 1973 (Messung von 1942):

$$G = (6.6720 \pm 0.0041) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \quad (600\ \mathrm{ppm})$$

- Literaturwert CODATA ab 1986 (Messung von 1982, Luther und Towler, Torsionswaage):

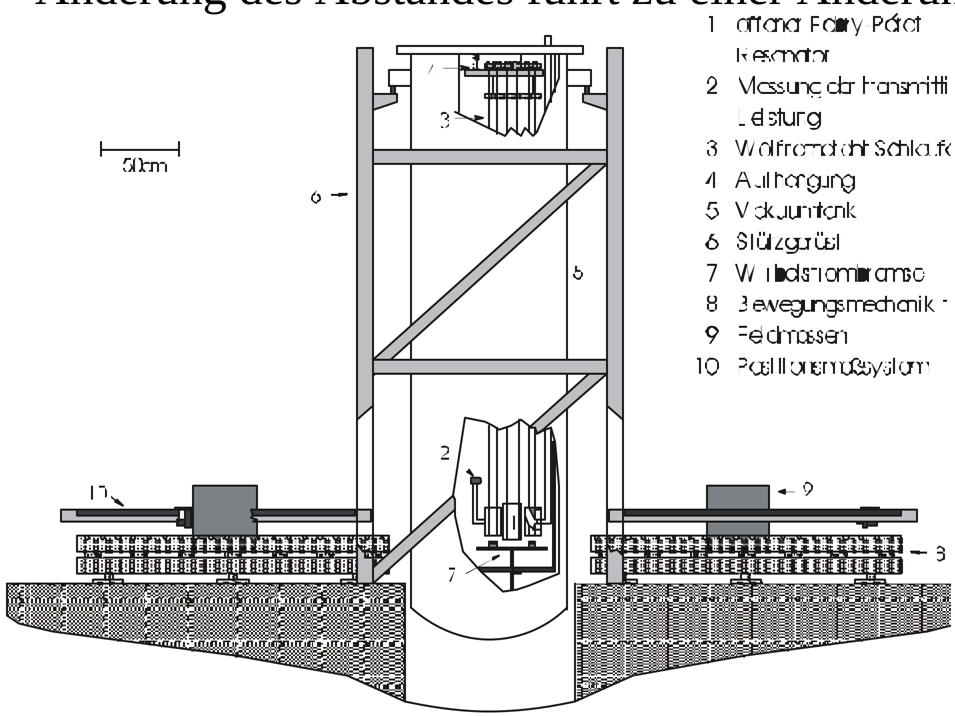
$$G = (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \quad (120\ \mathrm{ppm})$$

- Problem: Unabhängigkeit der Torsionskonstanten von der Frequenz der Verdrillung nicht erfüllt (Kuroda, 1995)



Fabry-Perot-Gravimeter

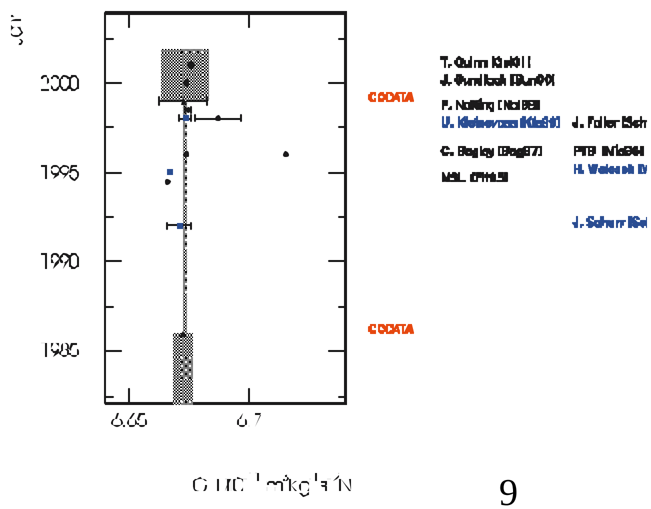
- z.B. Uni Wuppertal
- Modulation der Ruhelage zweier Pendel durch gravitative Kräfte zweier äußeren Feldmassen
- Fabry-Perot-Mikrowellen-Resonator zwischen den beiden Pendeln
- Änderung des Abstandes führt zu einer Änderung der Resonanzfrequenz



Entwicklung 1986-

- 1993, Cornaz (Uni Zürich): Zwei Testmassen (1 kg), über/unterhalb des Wasserspiegels in einem Stausee, Gewichtsunterschied zwischen Testmassen bei variablem Wasserstand (verträglich, 810 ppm)
- 1995, Technische Bundesanstalt Braunschweig: Testmasse schwimmt auf Hg, größere Testmassen (0.6% höher, 83 ppm)
- 1995, Measurement Standard Laboratory, Neuseeland: Abweichung in entgegengesetzter Richtung, 1998 Korrektur
- Experimente mit Balkenwaagen (ungenauer)
- Fabry-Perot-Pendel (noch ungenauer)
- Literaturwert CODATA seit 1998 (1500 ppm):

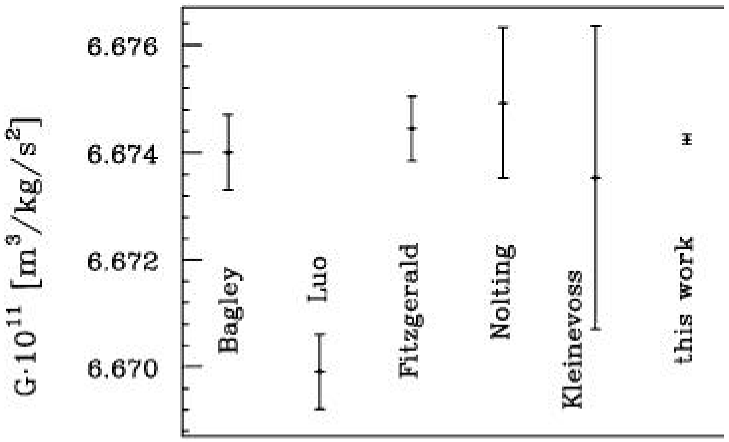
$$G = (6.673 \pm 0.010) \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

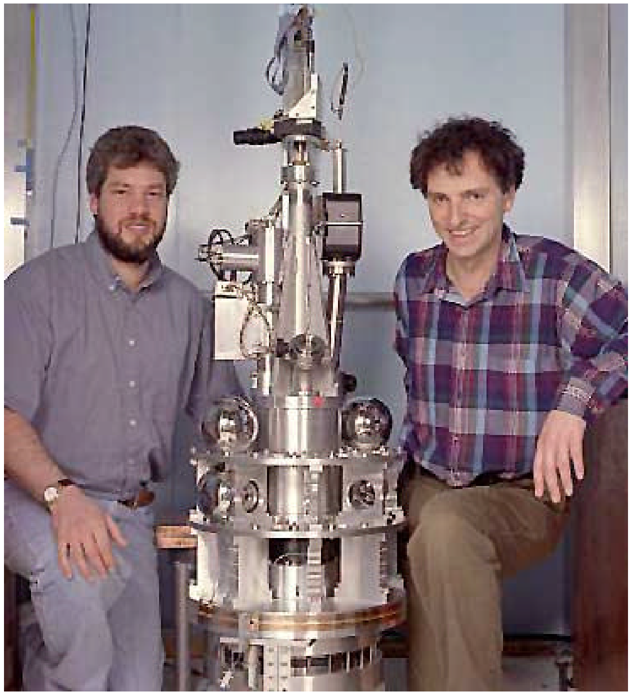


neues Präzisionsexperiment

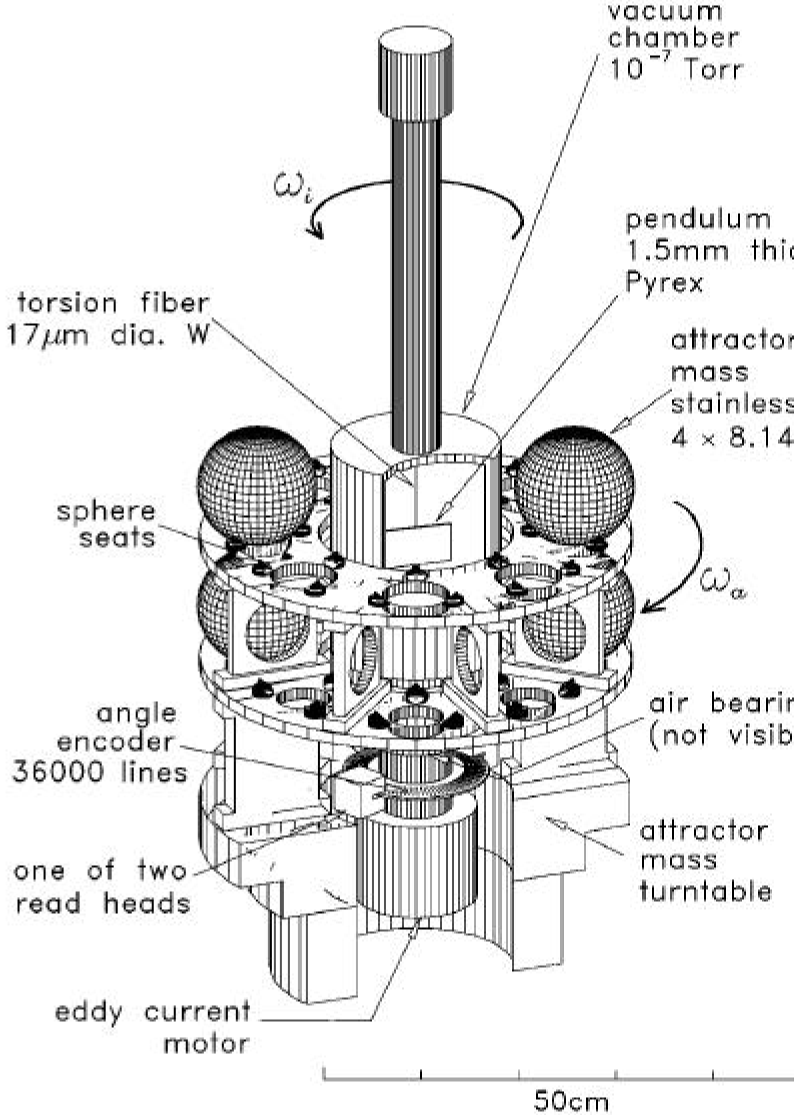
- Gundlach und Merkowitz, University of Washington, Seattle (2000), 14 ppm

$$G = \left(6.674215 \pm 0.000092\right) \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$



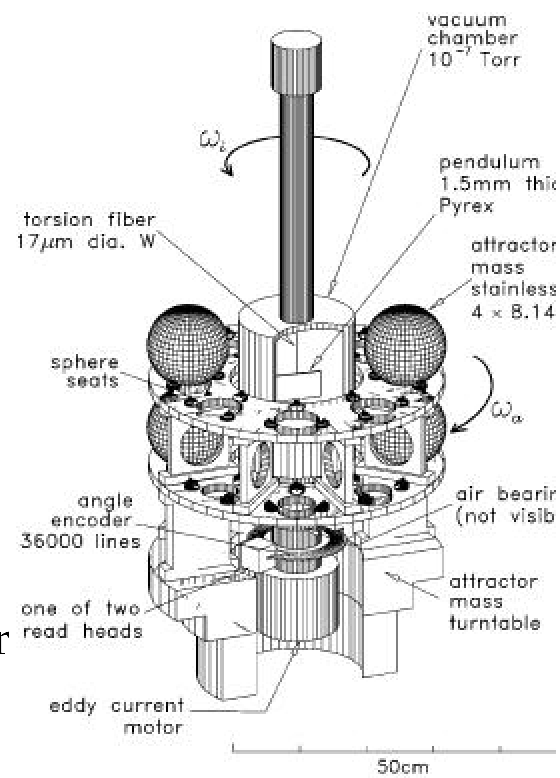


Bilder


vacuum chamber 10^{-7} Torr
ω_i
pendulum 1.5mm thic
Pyrex
torsion fiber 17μm dia. W
attractor mass stainless
4 × 8.14
sphere seats
ω_a
angle encoder 36000 lines
air bearir (not visib
attractor mass turntable
one of two read heads
eddy current motor
50cm

Aufbau des Experiments

- Hantel durch Rechteckblech ersetzt
- Torsionswaage auf Drehteller montiert, rotiert am Anfang mit ω_i, z.B. 2 rad/h
- Feedback-Mechanismus: Winkelbeschleunigung des Pendels wird gemessen, Drehgeschwindigkeit ω_i des Drehtellers wird angepaßt, Torsionsfaser wird niemals aus ihrem Gleichgewicht gedreht
- Deshalb ist es nicht nötig, die Torsionskonstante *k* zu kennen. Inelastische Eigenschaften der Torsionsfaser beeinflussen die Messung nicht.
- Um Beschleunigungen zu eliminieren, die von anderen Objekten im Labor verursacht werden, werden die Attraktoren auf einem zusätzlichen Drehteller platziert, der mit $\omega_a(t)=\omega_d-\omega_i(t)$ rotiert.
- $w_d = \dot{f}$ bleibt konstant



Multipolentwicklung

$$a(f) = \sum_{l,m} a_{l,m} = -\frac{4pG}{I} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=+l} m q_{lm} Q_{lm} e^{imf}$$

- α = gravitative Winkelbeschleunigung eines Drehpendels im Feld eines Attraktors
- q_{lm} = spährisches Multipol-Momente des Pendels
- Q_{lm} = Multipol-Felder des Attraktors
- ϕ = azimutaler Winkel zwischen Pendel und Attraktor
- I = Trägheitsmoment des Pendels
- Rückstelldrehmoment wird vernachlässigt
- Drehmomente für l>2 sollen vernachlässigbar sein, damit α von $q_{22}Q_{22}$ dominiert wird

$$a(f) = a_{2,2} = -\frac{16p}{5} G \frac{q_{2,2}}{I} Q_{2,2} \sin 2f$$

ideales Pendel

- ideales Pendel (komplett in einer Ebene):

$$\frac{q_{2,2}}{I} = \frac{\int r(\vec{r}_p) Y_{22}(\Theta_p, f_p) r_p^2 d^3 r_p^3}{\int r(\vec{r}_p) \sin^2 \Theta_p r_p^2 d^3 r_p^3} \rightarrow \sqrt{\frac{15}{32p}}$$

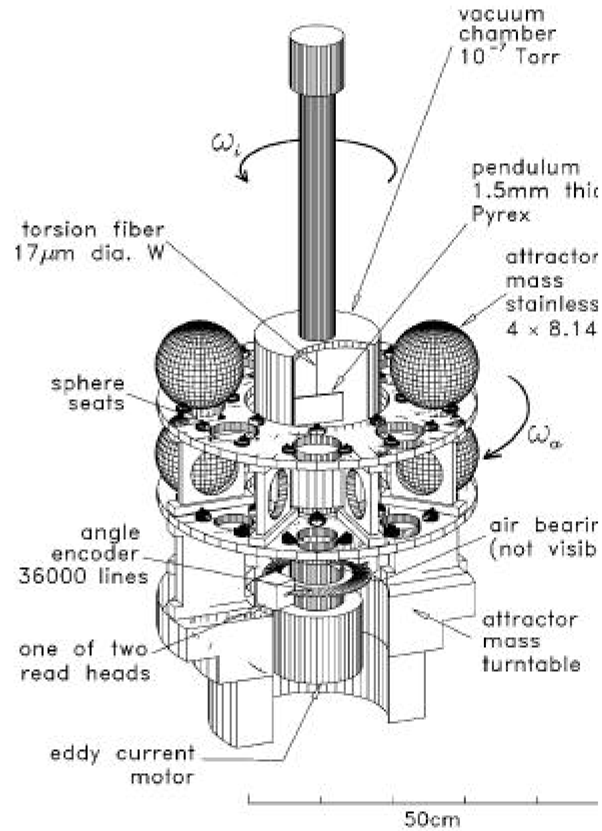
- $r(\vec{r}_p)$ = Pendeldichte

$$a(f) = a_{2,2} = -\sqrt{\frac{24p}{5}} G Q_{2,2} \sin 2f$$

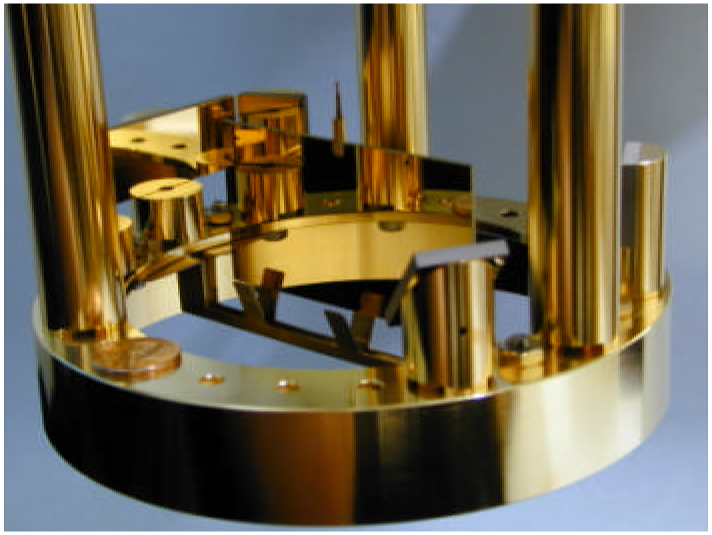
- Damit kann eine Messung durchgeführt werden, ohne dass die Pendelmasse, -ausmaße oder –dichte bekannt ist. Bisher dominante Fehler!

höhere Momente

- Höhere Drehmomente sind natürlicherweise mit $(R_P/R_A)^{l-2}$ unterdrückt (R_P, R_A typische Radien von Pendel und Attraktor)
- q_{l2}, Q_{l2} =0 (l ungerade), wegen Symmetrie bezüglich der horizontalen Mittelebene
- q_{42}= 0, für rechteckiges Pendel (Breite w, Höhe h, Dicke t) mit $10h^2=3(w^2+t^2)$
- Q_{42} = 0, für Attraktor aus Kugelpaaren (Masse M, vertikaler Abstand z) mit radialem Abstand zur Pendelachse von $\rho=3/2^{-0.5}z$
- Q_{lm} (m ungerade oder m=4) = 0, für Attraktor aus zwei Kugelpaaren auf jeder Seite des Pendels getrennt durch ϕ=45°



Mathematik des Designs



- reales Pendel:

$$\frac{q_{22}}{I} = \frac{w^2 - t^2}{w^2 + t^2}\sqrt{\frac{15}{32p}}$$

- w=76mm, h=41.6mm, t=1.506mm
- Korrektorfaktor endliche Dicke: 1.0007857
- Attraktor:

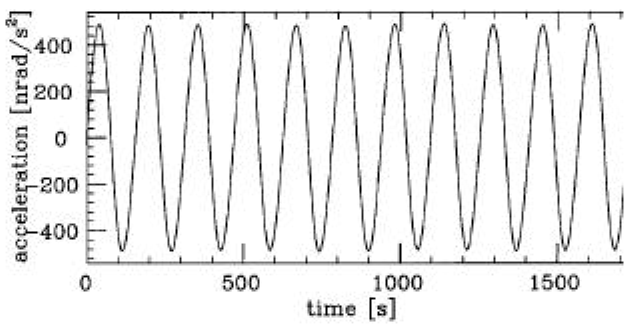
$$Q_{22} = \sqrt{\frac{10}{7p}}\frac{108}{49}\frac{M}{r^3}$$

- Korrekturfaktoren α_{62}, α_{82}: 0.9998767 und 0.9999951

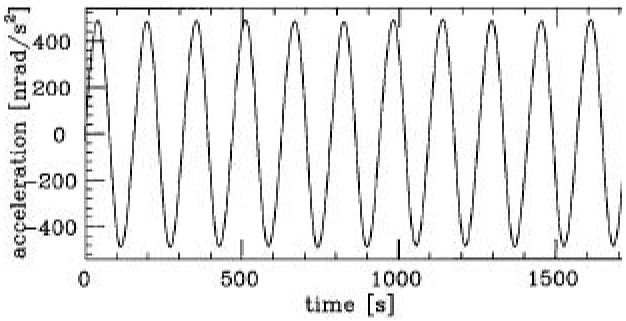
$$\frac{a_{6,2}}{a_{2,2}} = \frac{99}{7683200}\frac{213\left(w^4 + t^4\right) + 626w^2t^2}{r^4}$$

Datennahme

- Position des Drehtellers wird von DSPs an einem Hochauflösungswinkelencoder mit 2,5kHz gemessen und über 1s gemittelt
- Korrektur für diese Mittelung: 1.0000667
- Die Beschleunigung wird zweimaliges numerisches Differenzieren bestimmt (Δt=10s), Tests für andere Werte ergeben das gleiche Ergebnis
- Korrektur für numerische Ableitung: 1.0134544



Auswertung



- 6 Datenruns, jeder ca. drei Tage lang
- Daten werden in je 20 Sinusschwingungen aufgeteilt
- G wird bestimmt, indem $\alpha(\phi)$ mit einer harmonischen Reihe in ϕ gefittet wird und dann der Koeffizient von sin (2ϕ) extrahiert wird,um Winkelbeschleunigungen $\alpha_{l,m}$ zu selektieren, wobei $m=2$ ist.
- Im Fit eingeschlossen: Raumuntergrund, harmonische des Raumuntergrunds, Offset und Lineare Verschiebung
- Kombination mehrerer Messungen mit verschiedenen Positionen der Attraktoren: Einfluß des Drehtellers wird herausgemittelt
- Messung mit zwei verschiedenen Sätzen von Kugeln

Fehlerdiskussion: Geometrie

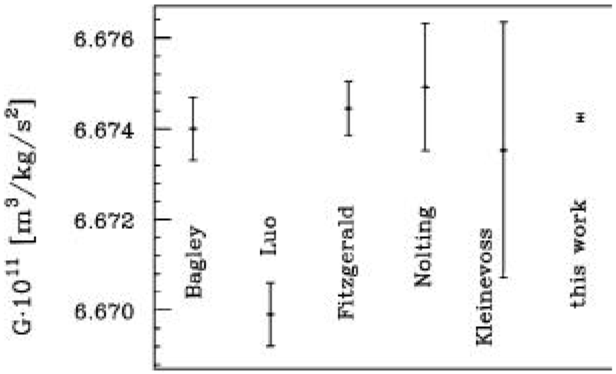
- Pendelbreite (20 µm, 0.4 ppm)
- Pendeldicke und Flachheit (40 µm, 4.0 ppm)
- Attraktoren: diagonale Abstände (1.0 µm, 7.1 ppm), gemessen mit speziellem Kugel-Maßstab
- Kalibration des Kugel-Maßstabes (0.2 µm, 1.4 ppm)
- Attraktoren: horizontale Abstände (1.0 µm, 5.2 ppm), gemessen mit speziellem “Eichblock”
- Kugeldurchmesser (1.5 µm, 2.6 ppm)
- Temperaturunsicherheit (100 mK, 6.9 ppm), temperaturstabilisierter Raum, Expansion der Attraktoren wird berücksichtigt
- Masse (3.0 mg, 0.4 ppm)
- Luftfeuchtigkeit (0.5 ppm)

Fehlerdiskussion: Sonstiges

- verschiedene Rotationsfrequenzen: kein Einfluß
- Magnetfeld: normalerweise 100 mG, Tests bis 5G beim Pendel und 100G bei den Kugeln (0.6 ppm)
- Temperaturgradient während der Rotation: Tests mit 5W Heizung (0.4 ppm)
- statistischer Fehler von den Fits an die Sinusfunktionen (5.8 ppm)
- 4 Kugeln oder 8 Kugeln (um 45° getrennt): kein Einfluß
- kleiner Drillwinkel bleibt (0.35 ppm)
- gesamter Fehler($\Delta G/G$): 13.7 ppm

Ergebnisse

- neuer, bisher genauester Wert für G, und damit auch für die Erd- und die Sonnenmasse



$$G = (6.674215 \pm 0.000092) \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

$$M_{Erde} = (5.972245 \pm 0.000082) \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$M_{Sonne} = (1.988435 \pm 0.000027) \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Zusammenfassung

- Präzise Messung der Gravitationskonstante G ist kompliziert: schwache Kraft, nicht abschirmbar, verrauschte Umgebung
- Resultat dieser Situation: kürzlich Erhöhung des Fehlers des Literaturwertes
- Neue Messung, die viele der bisherigen Fehlerquellen vermeidet: *Measurement of Newton`s Constant Using a Torsion Balance with Angular Accelaration Feedback* (Gundlach and Merkowitz, University of Washington, Seattle)

$$G = \left(6.674215 \pm 0.000092\right) \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$

- Wert muß von anderen Experimenten bestätigt werden, möglichst auch mit anderen Methoden