1.8 Gravitationswaage

Ziel

Bestimmung der Gravitationskonstanten G nach dem Endausschlagverfahren mit Hilfe einer Gravitationsdrehwaage.

Stichworte

Gravitationsgesetz, Gravitationskonstante, Drehschwingungen, Torsionswaage, Winkelrichtgröße, Trägheitsmoment, Gravitationspotential, Gravitationsfeldstärke

Zubehör

- Gravitationsdrehwaage:
  - Torsionsband aus Bronze (Querschnitt $0.01\,\mathrm{mm} \times 0.15\,\mathrm{mm}$, Länge $25\,\mathrm{cm}$) mit angehängtem $\perp$-förmigem Teil, an dessen Enden zwei kleine Bleikugeln sitzen (Masse jeweils $m_1 = 15\,\mathrm{g}$, Abstand der Kugelmittelpunkte zur Drehachse $d = 5\,\mathrm{cm}$)
  - drehbarer Halter mit zwei großen Bleikugeln (Masse jeweils $m_2 = 1.5\,\mathrm{kg}$)
  - Spiegel, befestigt an der Hantel, die die kleinen Bleikugeln trägt

  Der Abstand der Mittelpunkte von großer und kleiner Kugel beträgt im Endzustand $b = 5\,\mathrm{cm}$.
- Laser für den Lichtzeiger (HeNe-Laser der Laserklasse 2, Leistung $< 1\,\mathrm{mW}$)
- Maßstab an der Wand gegenüber der Torsionswaage
- $7.5\,\mathrm{m}$-Maßband
- Stoppuhr

SICHERHEITSHINWEIS: Laserstahlung kann die Augen irreparabel schädigen. Daher nicht in den direkten oder reflektierten Laserstrahl blicken!

Grundlagen

Das Gravitationsgesetz

Das NEWTONsche Gravitationsgesetz lautet:

Alle Körper üben aufeinander Gravitationskräfte aus. Zwei kugelförmige Körper der Massen m_1 und m_2, deren Mittelpunkte voneinander den Abstand d haben, ziehen sich mit der Gravitationskraft

$$F_{\mathrm{G}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{1.8.1}$$

gegenseitig an.

Die Gravitationswaage

Meist wird als erste Messung der Gravitationskonstanten eine Arbeit von Cavendish aus dem Jahr 1798 angegeben [Cav98]. Er benutzte dazu eine Gravitationsdrehwaage, die auf Coulomb und Michell zurückgeht und die in fast unveränderter Form auch heute noch zum Einsatz kommt. Der Aufbau ist in Abbildung 1.8.1 dargestellt. Streng genommen bestimmte Cavendish in seiner Veröffentlichung nicht die Gravitationskonstante, sondern das Verhältnis der mittleren Dichte der Erde zur Dichte von Wasser. Er hätte aber daraus leicht die Gravitationskonstante G berechnen können.

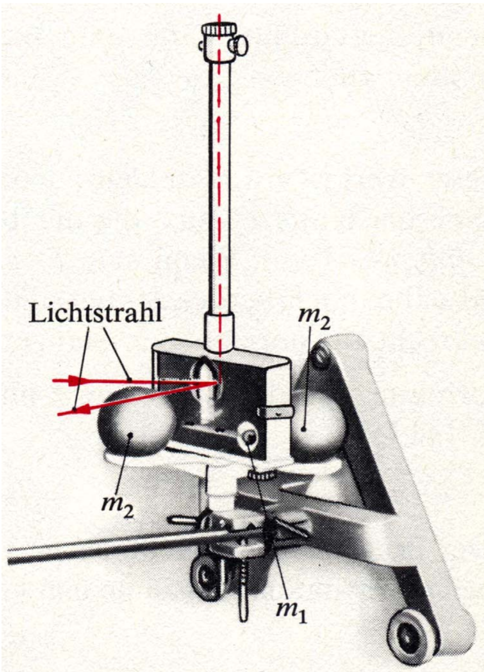

Abbildung 1.8.1: Aufbau einer Gravitationsdrehwaage nach Coulomb, Michell und Cavendish [DB76]. Das Torsionsband ist gestrichelt dargestellt, die zweite kleine Kugel wird von der großen Kugel verdeckt.

Zur Bestimmung der Gravitiationskonstanten betrachtet man entweder den Winkel zwischen den beiden Endstellungen der Torsionswaage für die beiden Positionen der großen

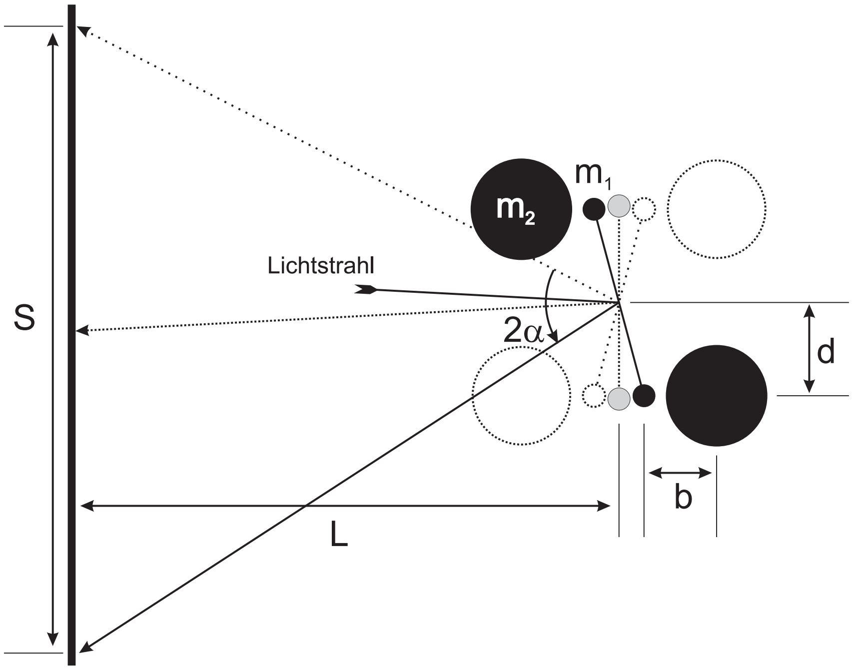

Abbildung 1.8.2: Schematische Draufsicht der Gravitationsdrehwaage mit dem Strahlengang des Lichtzeigers. Es bedeuten b: Abstand zwischen kleiner und großer Kugel in der Endstellung, d: Abstand der kleinen Kugeln von der Drehachse, α: Winkel zwischen den beiden Endlagen des Spiegels, 2α: Winkel zwischen den beiden Endlagen des Lichtzeigers, L: Abstand des Maßstabs an der Wand vom Spiegel der Waage, S: Unterschied in den Positionen des Lichtzeigers an der Wand zwischen den beiden Ruhelagen.

Kugeln, oder man betrachtet die beschleunigte „Fallbewegung" der kleinen Kugeln auf die großen Kugeln zu. In diesem Versuch soll das erste Verfahren gewählt werden.
Man beginnt von einer stabilen Ruhelage des Systems. Nach dem Umlegen der großen Kugeln in die andere Position beginnt die Waage mit langsamen Drehschwingungen. Da das System unvermeidlich etwas gedämpft ist, kommt die Waage nach einigen Schwingungen in der neuen Ruhelage zum Stehen. Aus der Winkeldifferenz der beiden Ruhelagen und der Schwingungsdauer kann die Gravitationskonstante bestimmt werden, wie im Folgenden gezeigt wird.
Der Winkel zwischen den beiden Endlagen der Torsionswaage sei α. Da bei der Reflexion des Lichtzeigers am Spiegel der Waage Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel ist, wird der Lichtstrahl seine Richtung insgesamt um 2α ändern und es gilt (Bezeichnungen siehe Abbildung 1.8.2)

$$\frac{S/2}{L} \approx \tan\alpha \approx \alpha \quad . \tag{1.8.2}$$

(Die erste Näherung besteht darin, dass sowohl der einfallende Lichtstrahl als auch die Wand etwas schräg zur Ruhelage der Hantel liegen, so dass der Tangens nicht exakt gilt.)
Das auf das Messsystem in der Endlage wirkende Drehmoment ist gegeben durch die

jeweilige gravitative Anziehungskraft

$$F_{\mathrm{G}} = G\,\frac{m_1\,m_2}{b^2} \tag{1.8.3}$$

zwischen den Kugeln und den Hebelarm, der bei kleinen Auslenkungen näherungsweise gleich dem Abstand d der kleinen Kugeln von der Drehachse gesetzt werden kann:

$$M = 2 \cdot F_{\mathrm{G}} \cdot d \quad . \tag{1.8.4}$$

Der Faktor 2 rührt daher, dass beide Kugelpaare jeweils das gleiche Drehmoment liefern. Dieses Drehmoment wird gerade durch die Verdrillung des Torsionsbandes um den Winkel $\alpha/2$ kompensiert. Die Waage ist nämlich so justiert, dass sie bei symmetrisch gestellten (oder fehlenden) großen Kugeln ihre Ruhelage in der Mitte hätte.[1] Es gilt also

$$M = 2 \cdot F_{\mathrm{G}} \cdot d = \widetilde{D} \cdot \frac{\alpha}{2} \quad . \tag{1.8.5}$$

Die zunächst noch unbekannte Winkelrichtgröße $\widetilde{D}$ des Torsionsbandes kann aus der Schwingungsdauer T der Torsionswaage bestimmt werden nach

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\Theta}{\widetilde{D}} \tag{1.8.6}$$

$$\Rightarrow \widetilde{D} = \frac{4\pi^2\,\Theta}{T^2} \quad . \tag{1.8.7}$$

Das Trägheitsmoment Θ der Hantel kann dabei in guter Näherung leicht berechnet werden, wenn man die kleinen Kugeln als punktförmig annimmt:

$$\Theta = 2 \cdot m_1 \cdot d^2 \quad . \tag{1.8.8}$$

Setzt man die Gleichungen (1.8.2), (1.8.3), (1.8.7) und (1.8.8) in Gleichung (1.8.5) ein, so erhält man

$$2 \cdot G\,\frac{m_1\,m_2}{b^2} \cdot d = \frac{4\pi^2 \cdot 2\,m_1\,d^2}{T^2} \cdot \frac{S}{4L} \quad . \tag{1.8.9}$$

Auflösen nach der Gravitationskonstanten ergibt schließlich

$$\boxed{G = \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot d \cdot S}{m_2 \cdot T^2 \cdot L} \quad .} \tag{1.8.10}$$

Diese Formel für die Gravitationskonstante enthält nur Größen, die im Experiment gemessen werden können. Die Masse m_1 der kleinen Kugeln fällt bei der Rechnung heraus, braucht also gar nicht bekannt zu sein.

[1] Um Missverständnisse zu vermeiden: α ist der Winkel zwischen den beiden Ruhelagen der Hantelstange, die sich durch die verschiedenen Extrempositionen der großen Kugeln ergeben. 2α ist dann der Winkel zwischen den Lichtstrahlen in diesen beiden Positionen. $\alpha/2$ ist hingegen der Winkel zwischen der Ruhelage der Hantel *ohne* große Kugeln (bzw. mit den großen Kugeln in Mittelstellung, was im Praktikum nicht untersucht wird) und einer Ruhelage *mit* großen Kugeln.

Versuchsdurchführung

Hinweis: Die Gravitationswaage ist recht empfindlich gegen Erschütterungen der Aufhängung. Daher dürfen die großen Kugeln beim Umlegen auf keinen Fall das Glas berühren. Auch darf das Brett, auf dem die Waage steht, nicht „unsanft“ berührt werden (z. B. beim Hochsteigen auf die Leiter). Weiterhin ist Zugluft zu vermeiden (das große Fenster geschlossen halten und auch nicht „zuknallen“ lassen!).
Wenn die Waage doch in Schwingung geraten sollte, dauert es meist ca. eine Stunde, bis sie sich hinreichend beruhigt hat, damit das Experiment durchgeführt werden kann. Der Versuch selbst dauert allerdings nicht sehr lange, es lohnt sich also zu warten, wenn gleich zu Beginn ein „Missgeschick“ passiert.

1. Messen Sie den Abstand L des Spiegels vom Maßstab an der Wand.
2. Laser wird durch Betreuer(in) eingeschaltet.
3. Notieren Sie die Ruhelage des Lichtzeigers auf der Skala an der Wand.
4. Der Betreuer bzw. die Betreuerin schwenkt die großen Bleikugeln zügig aber vorsichtig in die andere Position. Beginnen Sie dann *sofort* mit der Messung!
5. Notieren Sie anfangs alle 15 Sekunden, später nur noch jede halbe oder volle Minute die Position des Lichtzeigers und zeichnen Sie diese noch während der Messung in ein Diagramm ein. Messen Sie über eine Zeitdauer von *mindestens* 45 Minuten, besser eine Stunde lang.

Auswertung

1. Berechnen Sie aus Ihren Messwerten die Gravitationskonstante G nach Gleichung (1.8.10).

Fragen und Aufgaben

1. Wie könnte man die Störung, die dadurch entsteht, dass jeweils eine große Kugel auch mit der von ihr weiter entfernten kleinen Kugel wechselwirkt und dadurch das Ergebnis geringfügig verfälscht, *experimentell* vermeiden oder zumindest verringern?
   für Physiker(innen): Berechnen Sie die Größe dieser Störung.
2. Die Schwingung des Torsionssystems ist deutlich gedämpft. Die Schwingungsdauer T_{ged} ist dadurch etwas länger als für ein ungedämpftes System (siehe z. B. Abschnitt

1.7 zum Versuch „POHLscher Resonator“). Es gilt

$$
\begin{aligned}
T_{\text{ged}} &= T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \qquad (1.8.11)\\
\text{mit} & \\
\Lambda &= \text{logarithmisches Dekrement}\\
&= \text{natürlicher Logarithmus des Verhältnisses zweier}\\
&\quad\ \text{aufeinander folgender Schwingungsamplituden}\\
T_0 &= \text{Schwingungsdauer ohne Dämpfung.}
\end{aligned}
$$

Wie groß ist ungefähr der aus dieser Abweichung resultierende Fehler für die von Ihnen bestimmte Gravitationskonstante G?

3. Nehmen Sie an, die Erde sei eine perfekte Kugel mit homogener Massenverteilung. Berechnen Sie unter diesen Voraussetzungen die Erdmasse aus

$$
\begin{aligned}
\text{Erdradius } R &\approx 6371\,\text{km} \qquad (1.8.12)\\
\text{Gravitationskonstante } G &= 6.673(10) \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \qquad (1.8.13)\\
\text{Erdbeschleunigung } g &\approx 9.81\,\text{m/s}^2 \quad . \qquad (1.8.14)
\end{aligned}
$$

4. **für Physiker(innen):** Das NEWTONsche Gravitationsgesetz geht von kugelförmigen Massen aus. Dieser Punkt soll hier noch etwas näher betrachtet werden. Warum eigentlich darf man sich bei homogener Massenverteilung der Kugeln die Masse jeder Kugel jeweils in ihrem Schwerpunkt (Kugelmittelpunkt) vereinigt denken?
Bitte die folgende Herleitung gründlich(!) nachvollziehen, so dass Sie sie bei Bedarf reproduzieren können:

Kugeln verhalten sich in Bezug auf die Gravitation zumindest im Außenraum genau so wie punktförmige Massen. Man kann nämlich leicht zeigen, dass bei homogener Massenverteilung das äußere Gravitationsfeld (bzw. -potential) einer Hohlkugel den gleichen Wert hat, als wenn die gesamte Masse in ihrem Schwerpunkt (Mittelpunkt) vereinigt wäre.

In Abbildung 1.8.3 gilt der Cosinus-Satz

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta} \quad . \qquad (1.8.15)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\vartheta} &= \frac{aR\sin\vartheta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta}} \qquad (1.8.16)\\
\Rightarrow \mathrm{d}r &= \frac{aR}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \quad . \qquad (1.8.17)
\end{aligned}
$$

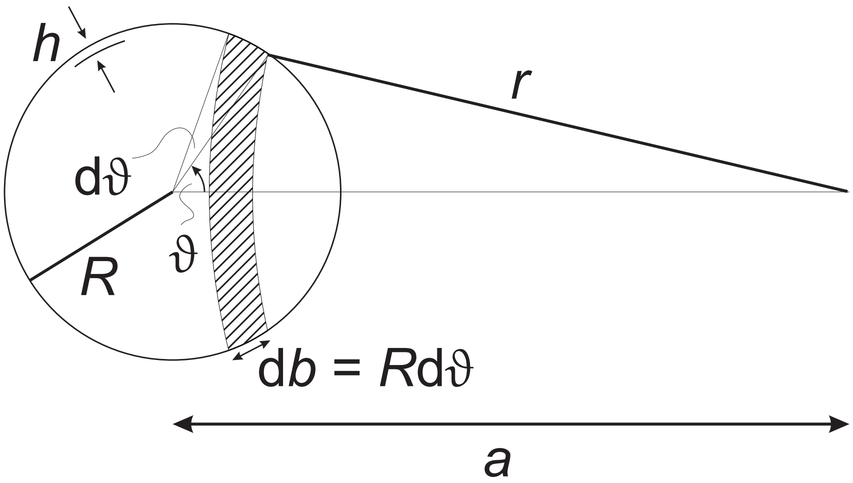

Abbildung 1.8.3: Zur Berechnung des Gravitationspotentials einer (Hohl-)Kugel.

Für eine punktförmige Masse M^* würde gelten:

$$\text{Gravitationskraft:}\quad F_\mathrm{G} = G\,\frac{m\cdot M^*}{r^2} \tag{1.8.18}$$

$$\text{Gravitationsfeldstärke:}\quad \frac{F_\mathrm{G}}{m} = G\,\frac{M^*}{r^2} \tag{1.8.19}$$

$$\text{Gravitationspotential im Abstand } a\text{:}\quad \Phi(a) = -\int\limits_a^\infty G\,\frac{M^*}{r^2}\,\mathrm{d}r = -G\,\frac{M^*}{a} \tag{1.8.20}$$

Wir betrachten nun zunächst nicht die ganze Masse M der Hohlkugel, sondern nur die Masse dm des schraffierten Hohlkugelteils. Mit dem Umfang $2\pi R\cdot\sin\vartheta$, der Breite $R\cdot\mathrm{d}\vartheta$, der Dicke h und der Dichte ϱ ergibt sich diese zu

$$\mathrm{d}m = 2\pi R\sin\vartheta\cdot R\,\mathrm{d}\vartheta\cdot h\cdot\varrho \quad . \tag{1.8.21}$$

Es gilt daher

$$\mathrm{d}\Phi = -G\,\frac{\mathrm{d}m}{r} = -G\,\frac{2\pi R^2 h\,\varrho\sin\vartheta}{r}\,\mathrm{d}\theta \tag{1.8.22}$$

und

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi \tag{1.8.23}$$

$$= -G\cdot 2\pi R^2\,h\,\varrho\int\limits_0^\pi \frac{\sin\vartheta}{r}\,\mathrm{d}\vartheta \tag{1.8.24}$$

Unter Verwendung von Gleichung (1.8.17) und durch anschließende Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{a}\, G \cdot 2\pi\, R\, h\, \varrho \int\limits_{a-R}^{a+R} \mathrm{d}r && (1.8.25)\\
&= -G\, 2\pi\, R\, h\, \varrho / a \cdot (a + R - a + R) && (1.8.26)\\
&= -G\, \underbrace{4\pi\, R^2\, h\, \varrho}_{M} / a && (1.8.27)\\
&= -G\, \frac{M}{a} \quad . && (1.8.28)
\end{aligned}$$

Das Potential hat also für eine Hohlkugel im Außenraum tatsächlich den gleichen Wert wie für eine punktförmige Masse. Eine Vollkugel lässt sich aus Hohlkugeln zusammensetzen, so dass das oben Gesagte auch für Vollkugeln gilt. Für den *Innenraum* der (Hohl- oder Voll-)Kugel (also z. B. im Inneren der Erde) gilt diese Aussage übrigens nicht!

5. **für Physiker(innen):** Wie groß ist der Fehler, der sich aus der Vernachlässigung der Ausdehnung der kleinen Kugeln bei der Berechnung des Trägheitsmomentes der Hantel ergibt? Die Dichte von Blei beträgt $\varrho_{\mathrm{Pb}} = 11.34\,\mathrm{g/cm^3}$.

6. **für Physiker(innen):** In einem Nachfolgeexperiment von Boys aus den Jahren 1891–1895 [Boy95] wurden zumindest die kleinen Bleikugeln durch Goldkugeln ersetzt. Aus welchen Gründen ist dies vorteilhaft?

7. **für Physiker(innen):** Im Wasserstoff-Atom ziehen sich Proton und Elektron gegenseitig sowohl elektrostatisch als auch gravitativ an. Um welchen Faktor ist in diesem Fall die elektrostatische (Coulomb-) Kraft größer als die Gravitationskraft?

Ergänzende Informationen

„Träge“ und „schwere“ Masse

Eigentlich müsste korrekterweise immer zwischen der „trägen“ Masse m_{i} (⟨engl.⟩ *inertial mass*), die sich der Änderung des Bewegungszustandes widersetzt, und der „schweren“ Masse m_{g} (⟨engl.⟩ *gravitational mass*), auf die die Massenanziehung der Erde wirkt, unterschieden werden. Es gibt keinen Beweis dafür, dass die Werte dieser beiden physikalischen Größen exakt gleich sind, und es erscheinen immer wieder Publikationen zu diesem Problem. Eine Reihe berühmter Wissenschaftler hat Experimente durchgeführt, um die Annahme $m_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{g}}$ zu überprüfen, darunter z. B. Newton, Bessel und Eötvös. Wenn eine Abweichung vorhanden ist, dann ist sie jedenfalls sehr gering (die genauesten Experimente bestätigen die Gleichheit heute mit einem relativen Fehler von unter 10^{-11}) und im Rahmen des Anfängerpraktikums daher nicht relevant. Wer sich näher über das Thema informieren möchte, findet relativ aktuelle Texte z. B. in [BP72, ST88, GVJEG99].

Literaturhinweise

Einfache und gut verständliche Darstellung in einem Schulbuch: [DB76].
Sehr hübsche Darstellung selbst gebauter Gravitationswaagen mit Erklärung (englisch): [Wal97].

Literaturverzeichnis

[Boy95] BOYS, CHARLES VERNON: *On the newtonian constant of gravitation.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London / A, 186:1–72, 1895.

[BP72] BRAGINSKIĬ, V. B. and V. I. PANOV: *Verification of the equivalence if inertial and gravitational mass.* JETP Soviet Physics, 61(3):873–1272, 1972.

[Cav98] CAVENDISH, HENRY. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pages 469–526, 1798.

[DB76] DORN, FRIEDRICH und FRANZ BADER: *Physik – Oberstufe, Band M.* Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover, 1976.

[GVJEG99] GUALA-VALVERDE, J. and JR. J. E. GUALA: *Again on inertial mass and gravitational mass.* Physics Essays, 12(4):785–787, 1999.

[ST88] STACEY, FRANK and GARY TUCK: *Is gravity as simple as we thought?* Physics World, 1:29–32, 1988.

[Wal97] WALKER, JOHN: *Bending Spacetime in the Basement*, `http://www.fourmilab.ch/gravitation/foobar/`, 1997.