- 牛顿运动定律和质心运动定理
- 质点和质点系动量的时间变化率
- 惯性系中牛顿定律的应用
- 变力作用下质点动力学基本问题
- 质点和质点系的冲量、动量定理
- 动量守恒定律

牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，除非作用在其上的力迫使它改变这种状态。

- **惯性**---质点不受力时保持静止或匀速直线运动状态的性质，其大小用**质量**量度。经典力学中，质量与物体的运动状态和参照系的选择无关。
- **力**---使质点改变运动状态的原因。第一定律描述了力处于平衡时物体的运动规律。
- 定性地给出了力与运动状态变化的关系。
- 提出了用于选择一类特殊参考系的标准。

惯性系---在惯性系中观察，一个不受力或处于受力平衡状态的物体，将保持其静止或匀速直线运动的状态不变。相对于惯性系做匀速直线运动的任何其它参考系也一定是惯性系。客观上，没有最好的惯性系，只有更好的惯性系。

广义相对论---局域惯性	常用的惯性系（近似）

- 地球参考系，自转加速度 $a \sim 3.4\mathrm{cm/s^2}$
- 地心参考系，公转加速度 $a \sim 0.6\mathrm{cm/s^2}$
- 太阳参考系，绕银河系加速度 $a \sim 2\times10^{-8}\mathrm{cm/s^2}$

质点处于静止或匀速直线运动状态时：$\sum \vec{F}_i = 0$

牛顿第二定律：某时刻物体运动的量的变化率与施加在该物体上的力成正比，并且发生在该力的方向上。

$$\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

某时刻质点动量对时间的变化率正比于该时刻作用在质点上所有力的合力。

物体的质量不随时间变化时

$$\sum \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \qquad (v \ll c)$$

- 以下情况下，质量不能当常量
  - 物体在运动中质量有所增减，如火箭、雨滴问题。
  - 高速（$v > 10^6 \mathrm{m/s}$）运动中，质量与运动速度相关，如相对论效应问题。

牛顿第二定律： $\sum \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$ $(v \ll c)$

直角坐标系下

$$\sum F_{ix} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\sum F_{iy} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\sum F_{iz} = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

自然坐标下

$$\sum F_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\sum F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

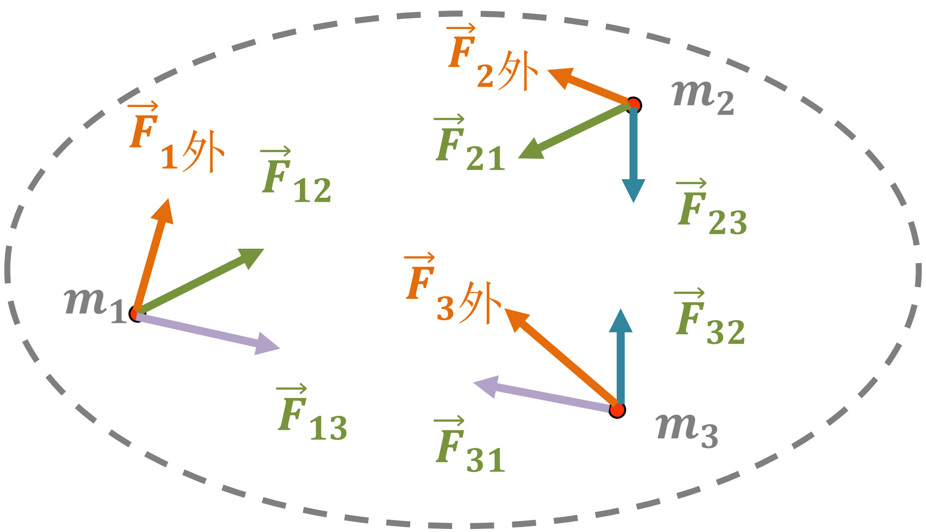
- $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ $\vec{F}$ 是合力
- 牛顿第二定律适用于惯性系、研究宏观低速物体。
  - ✓ 力与参考系无关
  - ✓ 质量与运动无关
- 任一力学规律在所有惯性系中形式相同。

牛顿第三定律：每一个作用力，总有一个等值的反作用与之对应；或者说，两个相互作用的物体，彼此对对方的作用总是大小相等，方向相反，作用在一条直线上。

- 相互作用力属同类，同时存在，同时消失。
- 相互作用力作用于两个不同的物体，不能互相抵消。
- 系统的内力成对出现，并且内力之和为0。

内力---质点系内质点间的相互作用力。质点系内质点间的内力总是成对出现，因此必有

$$\vec{F}_{内} = \sum_i \vec{F}_{i内} \equiv 0$$



- 牛顿第三定律适用于接触力；
- 对于非接触的两个物体间的相互作用力，由于其相互作用以有限速度传播，存在延迟效应。

动力学问题： 力⇌运动

牛顿运动定律的应用	
微分问题	已知运动状态，求质点受到的合力$\vec{F}$。
积分问题	已知质点受到的合力$\vec{F}$，求运动状态。

解题步骤

- 确定研究对象；
- 分析物体的运动状态；(不同物体运动间的关系)
- 分析力，一个不多，一个不少；
- 选定坐标系按牛顿定律列方程；
- 解方程。先字母，后代数，结果有单位；
- 分析讨论所得结果，判断结果是否正确。

已知一物体的质量为m, 运动方程为

$$\vec{r} = A\cos\omega t\,\vec{i} + B\sin\omega t\,\vec{j}$$

求物体受到的力。

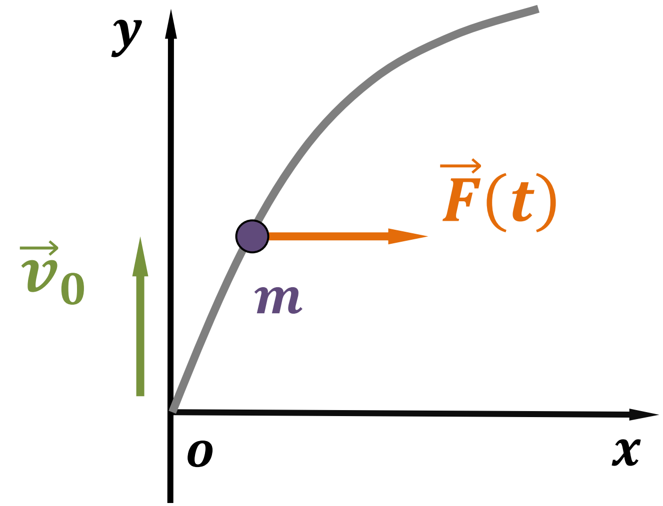
解： $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$= -A\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - B\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$= -\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\omega^2 m\vec{r}$$

设一高速运动的带电粒子沿竖直方向以v_0向上运动，从时刻$t=0$开始粒子受到 $F=F_0t$ 水平力的作用， F_0为常量，粒子质量为m。求粒子的运动轨迹。



解：水平方向有 $F_x=F_0t=ma_x$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t\frac{F_0t}{m}\mathrm{d}t$$

得 $v_x=\dfrac{F_0t^2}{2m}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{F_0t^2}{2m}\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{F_0t^2}{2m}\mathrm{d}t \Rightarrow x=\frac{F_0}{6m}t^3$$

竖直方向有 $F_y=ma_y=0$， $y=v_0t$

运动轨迹为 $x=\dfrac{F_0}{6m{v_0}^3}y^3$

设一物体在离地面上空高度等于地球半径处由静止落下。求它到达地面时的速度（不计空气阻力和地球的自转）。

解：以地心为坐标原点，物体受万有引力 $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0$

在地面附近有 $G\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow GM = gR^2$

可得 $-g\frac{R^2 m}{r^2} = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\frac{R^2}{r^2}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -g\frac{R^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = -gR^2\int_{2R}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \quad v^2 = \frac{2gR^2}{r} - gR$$

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r} - gR} \xrightarrow{r=R} v = \sqrt{gR}$$

质量为m_1、m_2，相距为r的两质点间的万有引力大小为

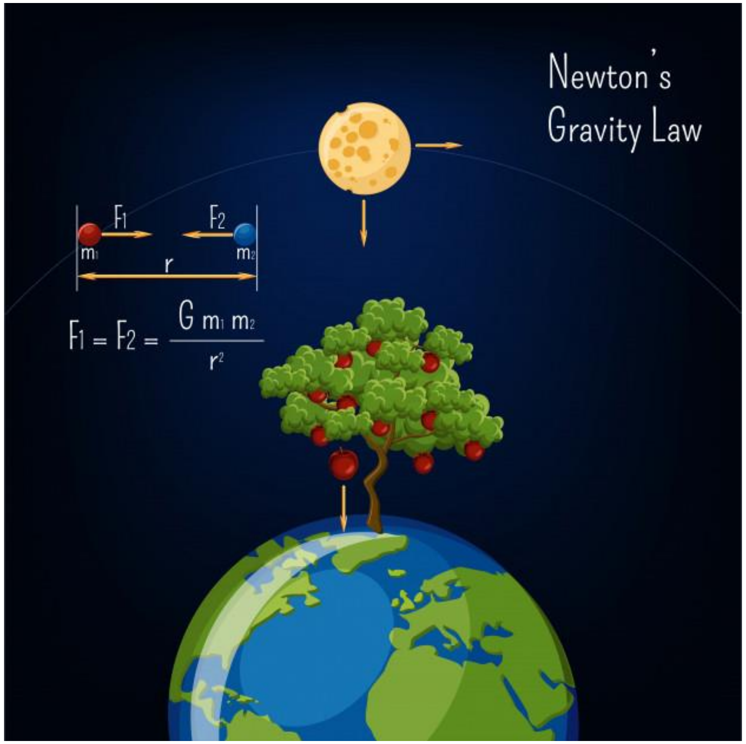
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

用矢量表示为

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{12}$$

万有引力恒量

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

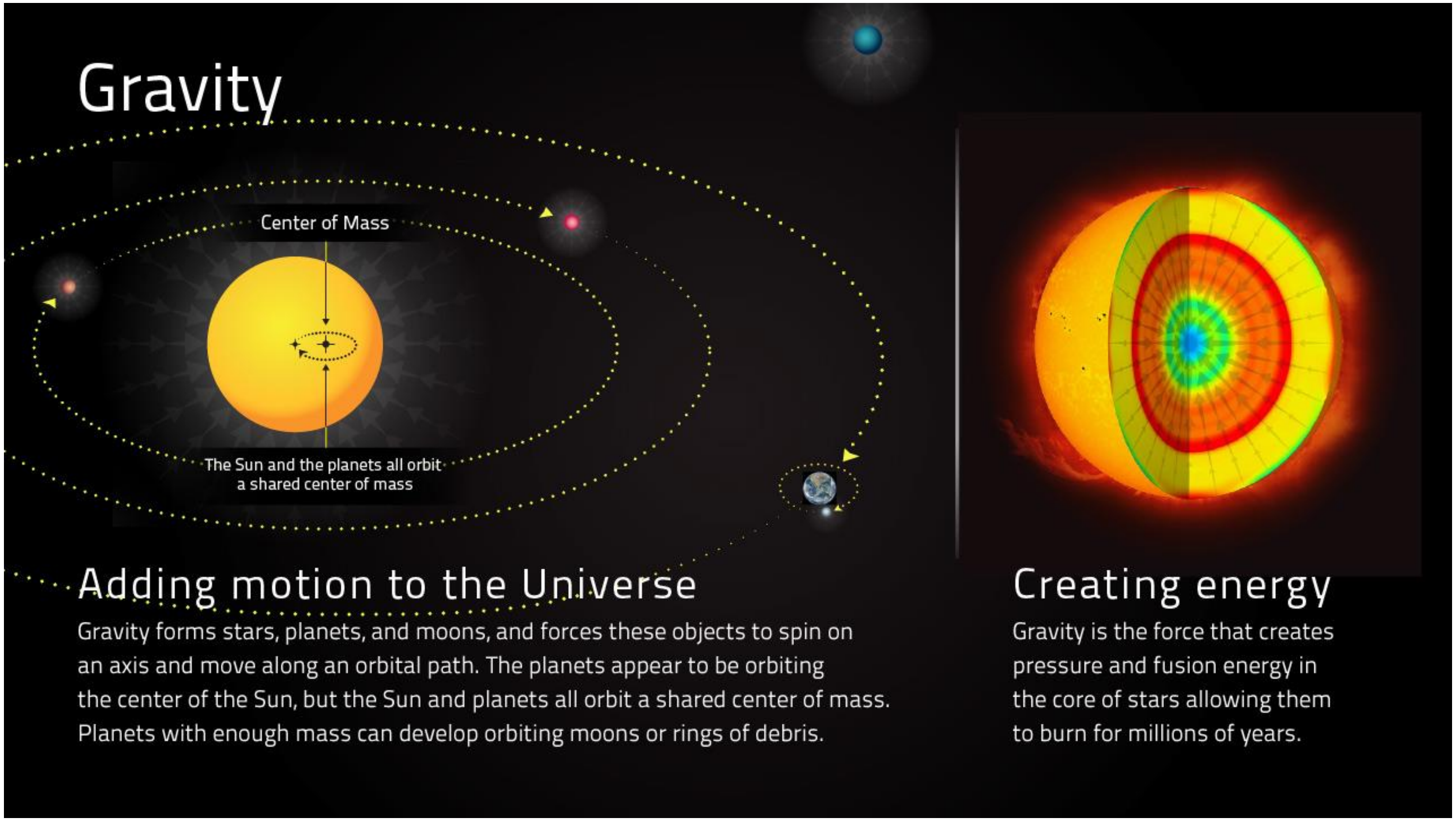


- 依据万有引力定律定义的质量叫**引力质量**，常见的用天平称量物体的质量，实际上就是测引力质量；依据牛顿第二定律定义的质量叫**惯性质量**。
  物体平动惯性大小的量度---**惯性质量**
  物体所受引力大小的量度---**引力质量**
- 惯性质量与引力质量成正比，适当的选择单位可使两者相等。

$$m_{惯性} = m_{引力} = m$$ ---**弱等效原理**

实验验证: 牛顿用单摆，厄阜用扭秤，迪克等的改进实验。

等效原理是广义相对论的出发点之一。


Gravity
Center of Mass
The Sun and the planets all orbit a shared center of mass
Adding motion to the Universe
Gravity forms stars, planets, and moons, and forces these objects to spin on an axis and move along an orbital path. The planets appear to be orbiting the center of the Sun, but the Sun and planets all orbit a shared center of mass. Planets with enough mass can develop orbiting moons or rings of debris.
Creating energy
Gravity is the force that creates pressure and fusion energy in the core of stars allowing them to burn for millions of years.

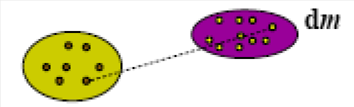
◆ 重力是地球对其表面附近物体万有引力的分力

设地球半经为R，质量为M，物体质量为m，考虑地球自转后物体重力为

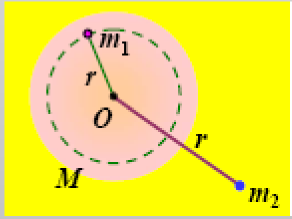
$$P = G\frac{Mm}{R^2}(1-0.0035\cos^2\phi)$$

ϕ为物体所处的地理纬度角

- ◆ 万有引力定律只直接适用于两质点间的相互作用
- ◆ 不直接适用于两个有限大的物体



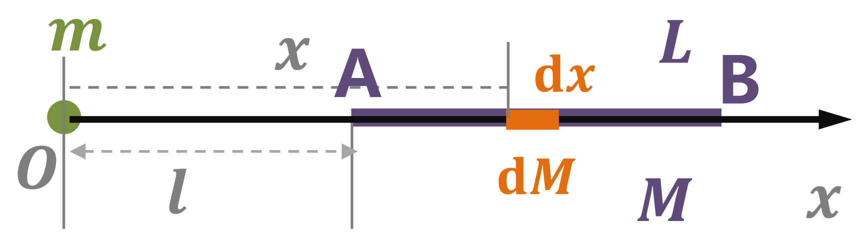
- ◆ 可直接应用公式计算的特例
  - □ 两个均匀球体间的万有引力可用此公式计算
  - □ 质量均匀分布的**球壳**对质点的引力
    - ✓ 质点在球壳内，所受引力为零
    - ✓ 质点在球壳外，引力可直接用此公式计算
  - □ 质量均匀分布的**球体**对质点的引力



    - ✓ 质点位于球外，可直接使用公式
    - ✓ 质点m位于球内距球心r处

      可直接用公式，但是M为半径r以内的质量$M_{内}$，与外面的质量无关

一水平放置的均匀细棒AB长为L，质量为M。如图所示，在其延长线上距A端l处有一个质量为m的质点P，求细棒与质点P间引力的大小。



解：$\cancel{|F| = GmM/l^2}$

设细棒的线密度为λ，因质量均匀分布，故

$$\lambda = \frac{dM}{dx} = \frac{M}{L}$$

质点与质量元间的万有引力大小为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\mathrm{d}M}{x^2} = G\frac{mM\mathrm{d}x}{Lx^2}$$

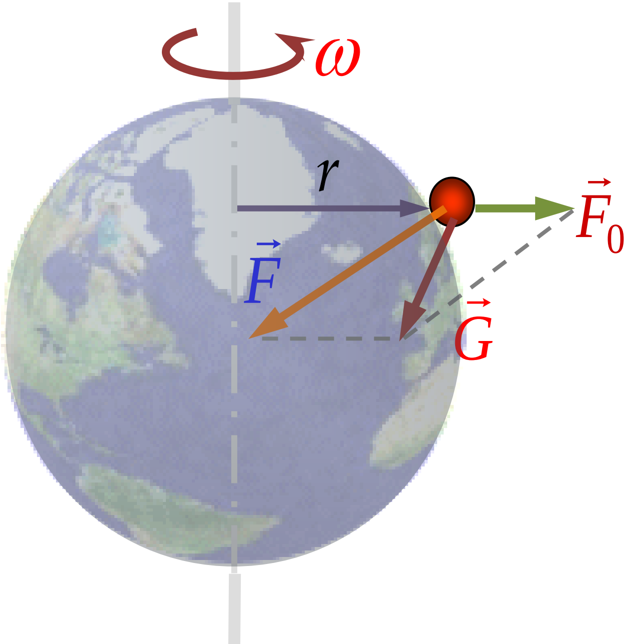
杆与质点间的万有引力大小为

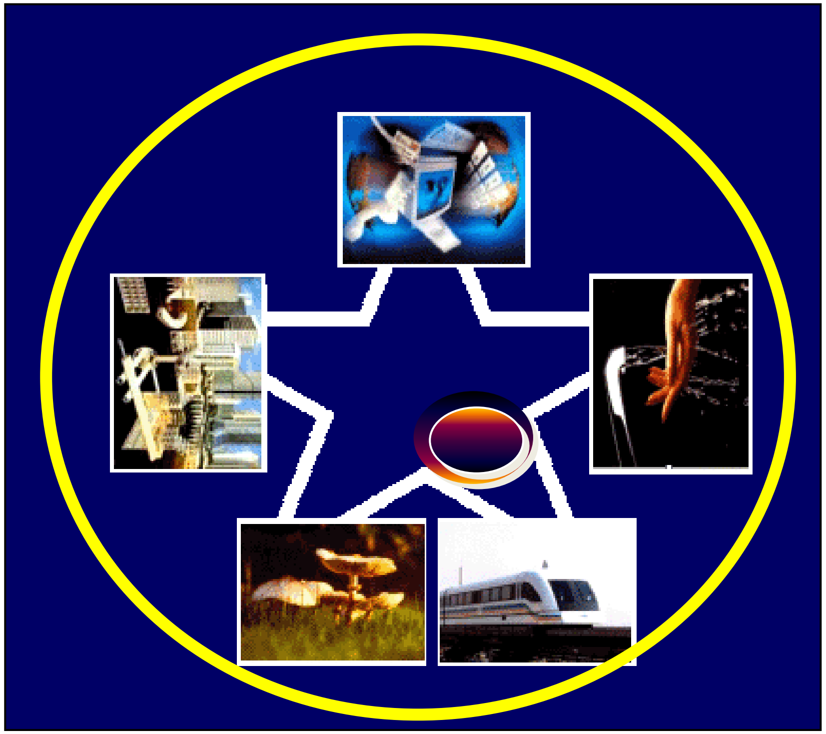
$$F = \int_l^{l+L}\mathrm{d}F = \int_l^{l+L} G\frac{mM}{Lx^2}\mathrm{d}x = G\frac{mM}{L}\int_l^{l+L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$= G\frac{mM}{l(l+L)}$$

◆ 当$l>>L$时，$G\frac{mM}{l(l+L)} \to G\frac{mM}{l^2}$，与平方反比定律一致。

人造重力：21世纪，人类在空间站中长期生活，为了克服失重带来的不利影响，将空间站设计成一个大转轮，绕轴自转，其上各点都有一个指向转动轴的向心加速度。以空间站为参考系，与它一起旋转的物体都受到一个背离转动轴的**惯性力**。



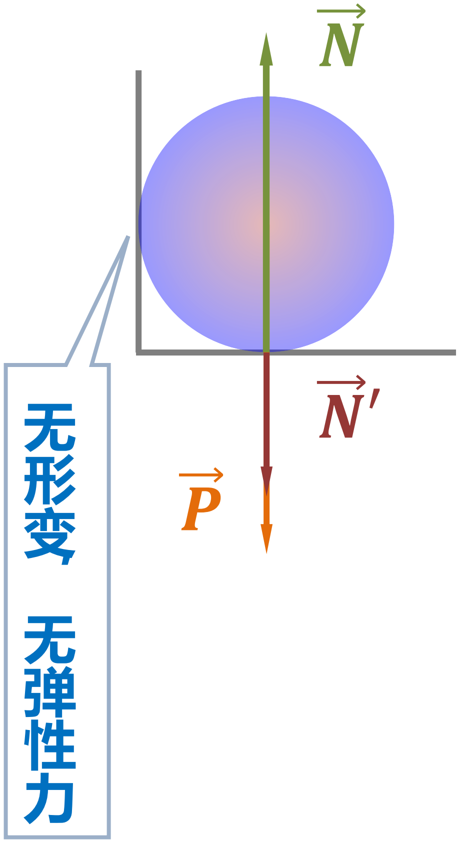


由于地球的自转，地球表面的物体将受到一个如图所示的**惯性离心力**(inertial centrifugal force)，物体的重力即是引力与惯性离心力的合力。

弹性力

当两宏观物体有接触且发生微小形变时，形变的物体对与它接触的物体会产生力的作用，这种力叫**弹性力**。

- 在形变不超过一定限度内，弹簧的弹性力遵从**胡克定律** $\vec{F}=-kx\,\vec{i}$
- 绳子在受到拉伸时，其内部也同样出现弹性张力。
- 一般情况下，绳子上各处的张力大小是不相等的，但在**绳子的质量可以忽略不计时，绳子上各处的张力相等**。



摩擦力

□ 静摩擦力

当两相互接触的物体彼此之间保持相对静止，且沿接触面有相对运动趋势时，在接触面之间会产生一对阻止上述运动趋势的力，称为静摩擦力。

静摩擦力的大小随引起相对运动趋势的外力而变化。最大静摩擦力为 $f_{\max} = \mu_s N$

(μ_s为最大静摩擦系数，N为正压力，方向：垂直于接触面)

□ 滑动摩擦力

两物体相互接触，并有相对滑动时，在两物体接触处出现的相互作用的摩擦力，称为滑动摩擦力。

$f = \mu_k N$ (μ_k为滑动摩擦系数)

◆ 一般来说：$\mu_s > \mu_k$

摩擦力

材料	μ_s	μ_k
钢 - 钢	0.7	0.6
黄铜 - 钢	0.5	0.4
铜 - 铸铁	1.1	0.3
玻璃 - 玻璃	0.9	0.4
橡胶 - 水泥路面（干）	1.0	0.8
橡胶 - 水泥路面（湿）	0.3	0.25
涂蜡的滑雪板和雪面（0℃）	0.1	0.05

流体阻力

当物体穿过液体或气体运动时，会受到**流体阻力**

方向：该阻力与运动物体速度方向相反。

大小：与物体在流体中的运动速度相关，速度越大，阻力越大
与物体的横截面积、物体的形状以及流体的性质有关。

- 当物体速度不太大时，流体为层流，阻力主要由流体的粘滞性产生。这时流体阻力与物体速率成正比。

$$f = bv$$

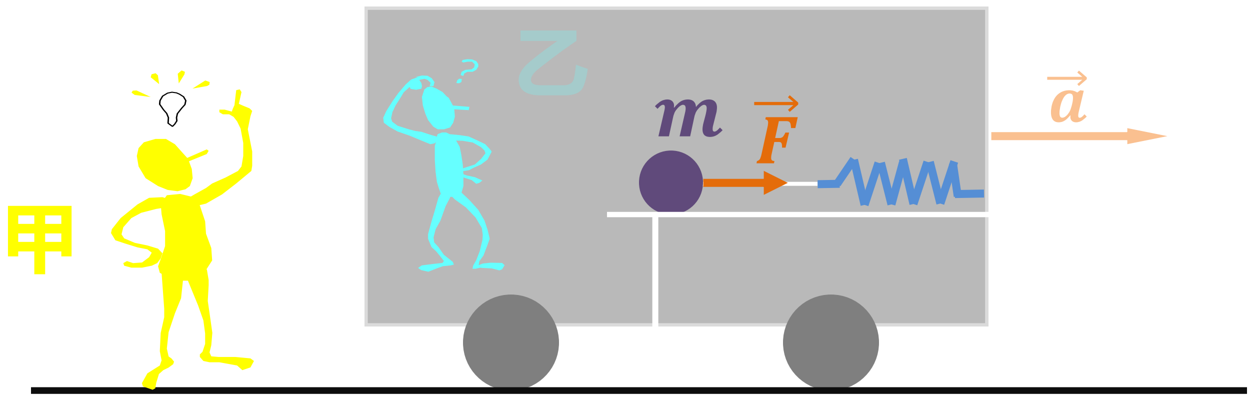
- 当物体穿过流体的速率超过某限度时（低于声速），流体出现旋涡，这时流体阻力与物体速率的平方成正比。

$$f = cv^2$$

- 当物体与流体的相对速度提高到接近空气中的声速时，这时流体阻力将迅速增大。

$$f \propto v^3$$

惯性系



- 地面参考系中的观察者甲：

  有力$\vec{F}$和加速度$\vec{a}$，即$\vec{F}=m\vec{a}$ ---牛顿定律适用

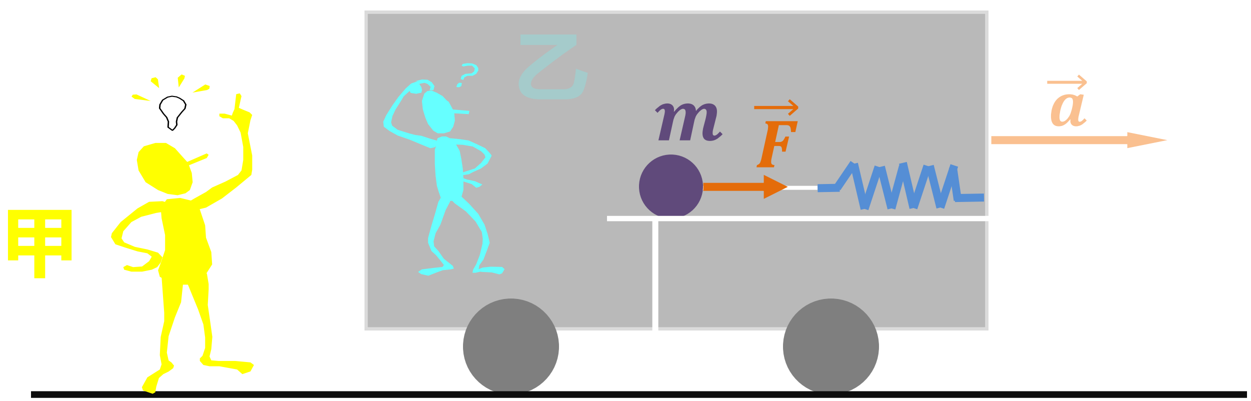
- 运动车厢参考系中的观察者乙：

  有力$\vec{F}$和无加速度$\vec{a}$，即$m\vec{a}=0$，$\vec{F}\neq 0$ ---牛顿定律不适用

结论：牛顿第二定律不能同时适用于上述两种参考系。

惯性系：牛顿运动定律适用的参照系。

惯性系



- 严格的惯性系是关于参照系的一种理想模型。大多数情况下，通常取地面参照系为**惯性参照系**。
- 相对于一惯性系作匀速直线运动的参照系都是**惯性系**。
- **牛顿运动定律**适用于宏观物体的低速运动。
- 物体的**高速运动**遵循相对论力学的规律；**微观粒子**的运动遵循量子力学的规律。
- 牛顿力学是一般技术科学的理论基础和解决实际工程问题的重要依据和工具。

惯性力

设s'系(非惯性系)相对s系(惯性系)平动，加速度为$\vec{a}_0$。
质点m在s系和s'系的加速度分别为$\vec{a}$和$\vec{a}'$

由伽俐略变换有 $\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0$

在s系： $\vec{F}=m\vec{a}$

在s'系： $\vec{F}-m\vec{a}_0=m\vec{a}'$

$$\vec{F}=m(\vec{a}'+\vec{a}_0)$$

$$\vec{F}=m\vec{a}'+m\vec{a}_0$$

引入虚拟力或惯性力 $\vec{F}_0=-m\vec{a}_0$

则 $\vec{F}+\vec{F}_0=m\vec{a}'$

非惯性系中，牛顿第二定律形式上成立

惯性力大小ma_0 方向：$-\vec{a}_0$

- 非惯性系中，牛顿运动定律失效。若在非惯性系研究问题，需寻找适用的定律。
- 惯性力是虚拟力，没有施力物体，也没有反作用力。
- 惯性力的概念可推广到非平动的非惯性系。

非惯性系中的力学定律	惯性系中的力学定律
$\vec{F}_{合} = \vec{F}_{真} + \vec{F}_{惯} = \vec{F}_{真} + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}'$ $\vec{a}_0$为非惯性系相对于惯性系的加速度。 $\vec{a}'$ 为质点相对于非惯性系的加速度。	$\vec{F}_{合} = m\vec{a}$ $\vec{a}$ 为质点相对于惯性系的加速度。

质量分别为m_1和m_2的两物体用轻细绳相连接后，悬挂在一个固定在电梯内的定滑轮的两边。滑轮和绳的质量以及所有摩擦均不计。当电梯以$a_0 = g/2$的加速度下降时。求m_1和m_2的加速度和绳中的张力。

解：取电梯为参考系

对m_1有 $m_1 g - T - m_1 a_0 = m_1 a'$

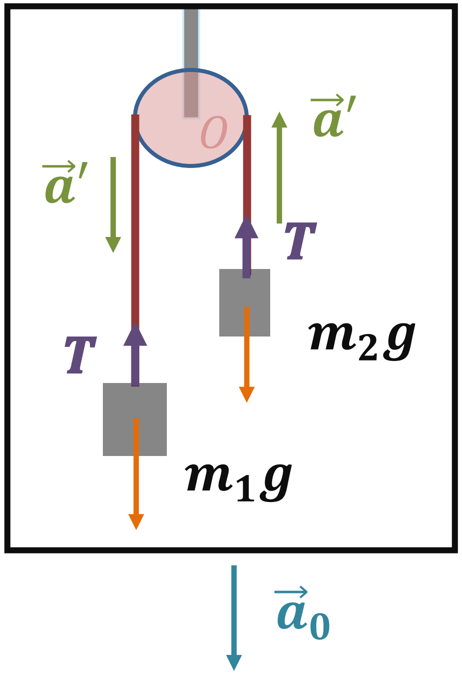
对m_2有 $m_2 g - T - m_2 a_0 = -m_2 a'$

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0)$$

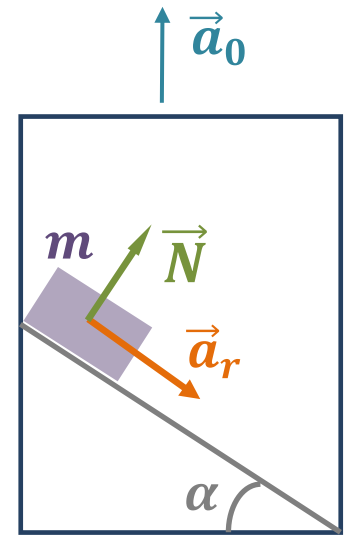
绳中的张力 $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0)$

m_1的加速度 $a_1 = a' + a_0$

m_2的加速度 $a_2 = -a' + a_0$



一光滑斜面固定在升降机的底板上，如图所示，当升降机以匀加速度a_0上升时，质量为m的物体从斜面顶端开始下滑。求物体对斜面的压力和物体相对斜面的加速度。



解：方法（一）取地面为参考系

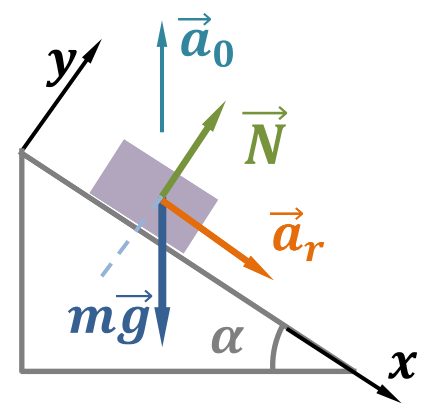
设物体的加速度为$\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_0$$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_0)$$

x方向 $\quad mg\sin\alpha = m(a_r - a_0\sin\alpha)$

y方向 $\quad N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha$



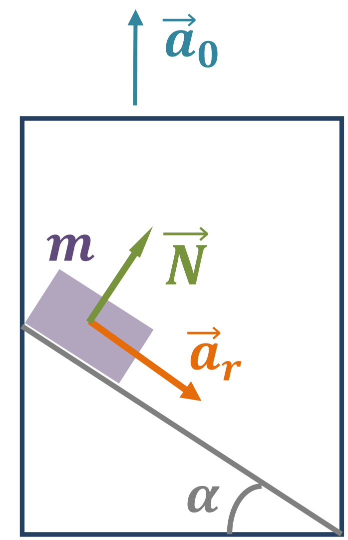
物体对斜面的压力

$$N = m(g + a_0)\cos\alpha$$

物体相对斜面的加速度

$$a_r = (g + a_0)\sin\alpha$$

一光滑斜面固定在升降机的底板上，如图所示，当升降机以匀加速度a_0上升时，质量为m的物体从斜面顶端开始下滑。求物体对斜面的压力和物体相对斜面的加速度。



解：方法（二）取升降机为参考系

惯性力 $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_r$$

x方向　$N\sin\alpha = ma_r\cos\alpha$

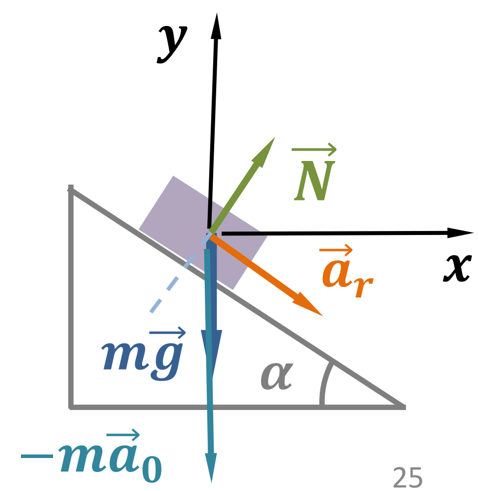
y方向　$N\cos\alpha - mg - ma_0 = -ma_r\cos\alpha$

物体对斜面的压力

$$N = m(g + a_0)\cos\alpha$$

物体相对斜面的加速度

$$a_r = (g + a_0)\sin\alpha$$



牛顿运动定律及其应用		
第一定律	第二定律	第三定律
惯性定律	$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 直角系 自然坐标系 相对运动 微积分的应用	$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$
定义了惯性参照系	适用于惯性参照系	

非惯性系中的推广	加速平动参照系	惯性力
	匀角速转动参照系	惯性离心力 科里奥利力

注意区分：向心力，离心力，惯性离心力

$\vec{F}_{惯} = \vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$

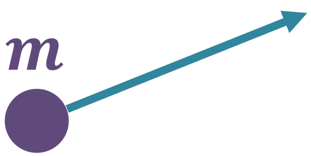
作用：引入惯性力后，在非惯性系中，牛顿第二定律形式上成立。

性质：不是真实的力，无施力物体，无反作用力。

注意：惯性力有真实效果，可以测量。

动量---量度质点机械运动的强度

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



动量的SI单位 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$

动量的量纲： $\mathrm{MLT^{-1}}$

质点系内各质点动量的矢量和

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{m_0 \sum_i m_i\vec{v}_i}{m_0} = m_0\vec{v}_c$$

- 质点系的动量与将质点系的全部质量集中于质心处的一个质点的动量相同

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$(v << c)$$

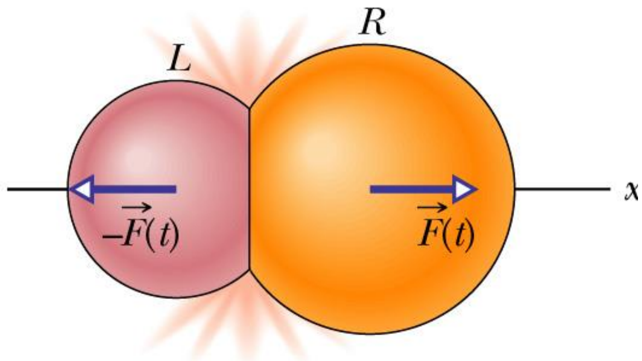
质点动量的时间变化率是质点所受的合力

□ 碰撞

宏观尺度 (轿车, 汽车, 球...)

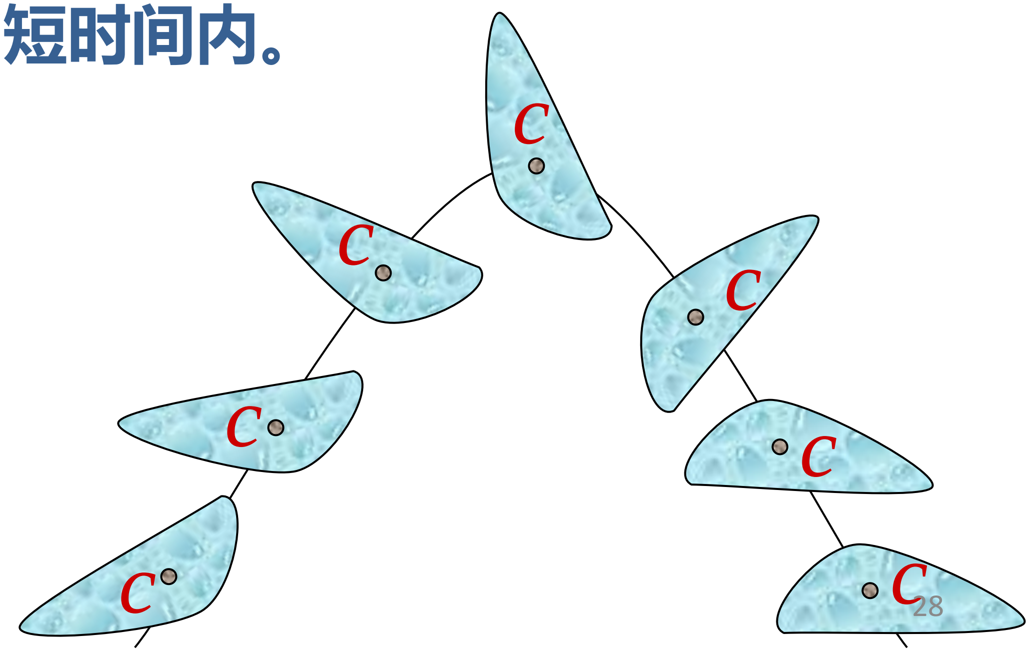
宇观尺度 (流星与地球, 星系...)

微观尺度（原子，分子，...）

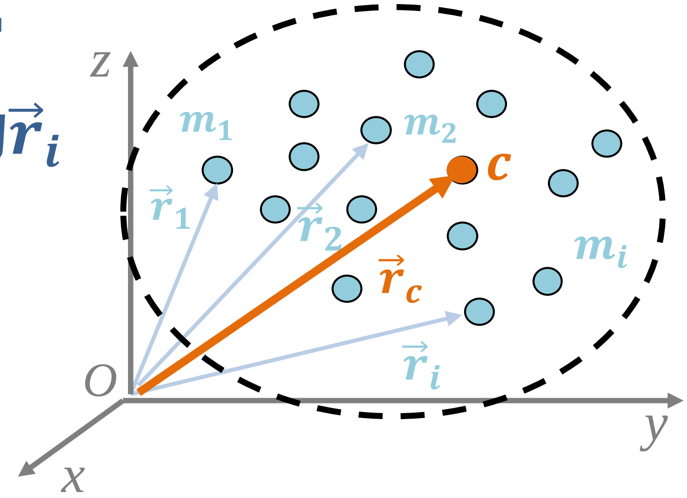


□ 冲力

冲力的作用时间与观察系统状态的时间相比很短，即冲力只存在碰撞体相撞的短时间内。



质心：与质点系统质量分布有关的一个代表点。它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。



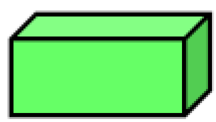
质点系中第i个质点的质量为m_i，位矢为$\vec{r}_i$

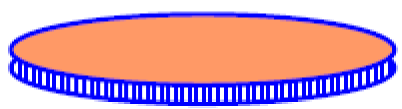
质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

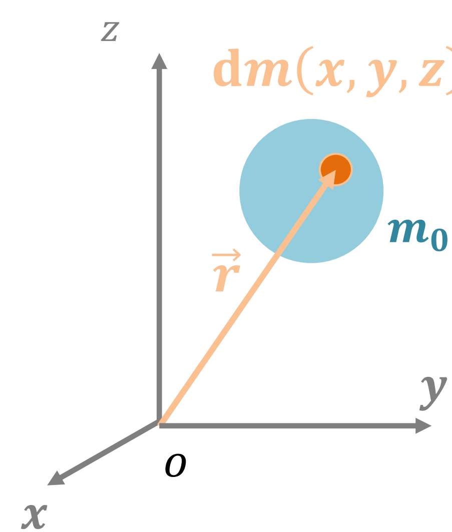
质量连续密度均匀分布物体 $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}\, d\, m}{m_0}$

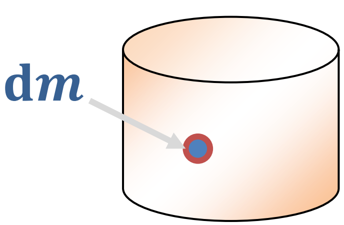
质点构成的系统，总质量为 $m_0 = \sum_i m_i$

$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \rho \mathrm{d}V \\ \sigma \mathrm{d}S \\ \lambda \mathrm{d}l \end{cases}$$









$m = \int \mathrm{d}m$

质心：与质点系统质量分布有关的一个代表点。它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

质点系中第i个质点的质量为m_i，位矢为$\vec{r}_i$
质点构成的系统，总质量为 $m_0 = \sum_i m_i$

质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{m_0} \\ y_c = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{m_0} \\ z_c = \dfrac{\sum_i m_i z_i}{m_0} \end{cases}$$

质量连续密度均匀分布物体 $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m_0}$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int x\,\mathrm{d}m}{m_0} \\ y_c = \dfrac{\int y\,\mathrm{d}m}{m_0} \\ z_c = \dfrac{\int z\,\mathrm{d}m}{m_0} \end{cases}$$

质心的速度 $\vec{v}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}$

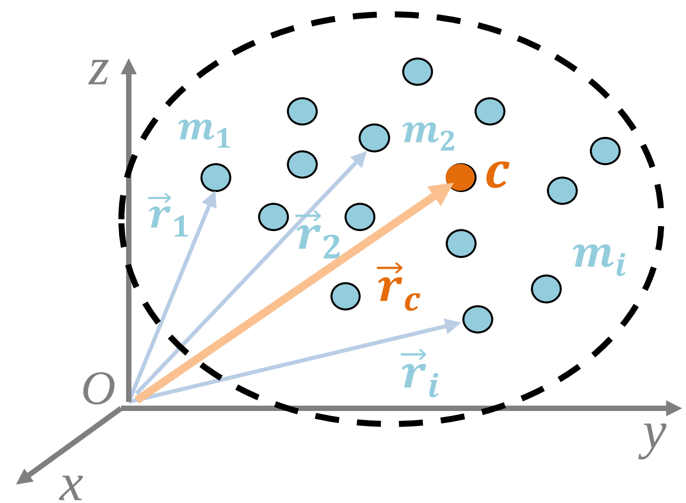
质心的加速度 $\vec{a}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}$

- 质心和重心是两个不同的概念，质心是与物体质量分布有关的一个特殊点，而重心是一个物体各部分所受重力的合力作用点。
- 质心位置不一定在物体上。
- 质心位置不一定在物体几何中心。

质心运动定理

$$\vec{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}(m_0\vec{v}_c)}{\mathrm{d}t} = m_0\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = m_0\vec{a}_C$$

质点系中第i个质点的质量为m_i，位矢为$\vec{r}_i$
质点构成的系统，总质量为 $m_0 = \sum_i m_i$



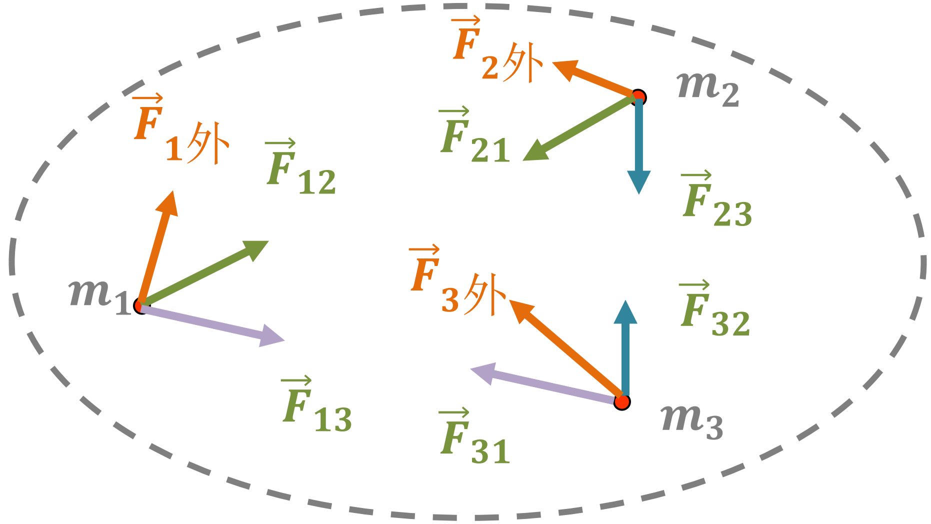
质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

质心的速度 $\vec{v}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}$

质心的加速度 $\vec{a}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}$

- 质心的运动只与系统所受的合外力相关，与内力无关。
- 质心的加速度与质点系所受合外力的矢量和成正比，与质点系的总质量成反比。
- 质点系的总动量等于质点系的总质量与质心速度之积。

$$\vec{F}_{外}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i外}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$



在所选定的参考系中，N个质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_N$，动量分别为$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_N$的质点组成一个质点系。由质点动量定理，每个质点所受的合力分别为:

$$\vec{F}_1=\vec{F}_{1外}+\vec{F}_{1内}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}_2=\vec{F}_{2外}+\vec{F}_{2内}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{F}_N=\vec{F}_{N外}+\vec{F}_{N内}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t}$$

将以上各式相加，得:

- **内力**---质点系内质点间的相互作用力。质点系内质点间的内力总是成对出现，因此必有

$$\vec{F}_{内}=\sum_{i}\vec{F}_{i内}\equiv 0$$

$$\vec{F}_{1外}+\vec{F}_{2外}+\cdots+\vec{F}_{N外}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\cdots+\vec{p}_N)$$

- **外力**---质点系外的物体对系内任一质点的作用力 $\vec{F}_{外}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i外}$

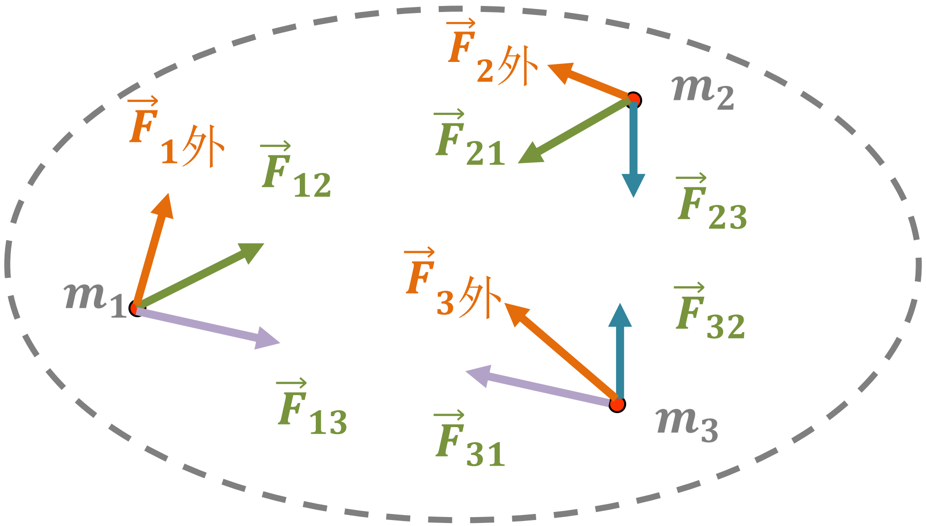
$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}=\vec{F}_{外}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i外}$$

$(v << c)$

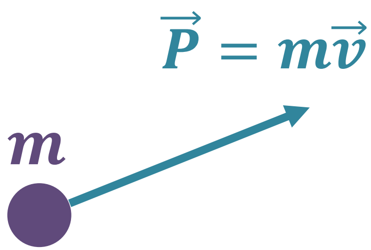
质点系总动量的时间变化率是质点所受外力的矢量和

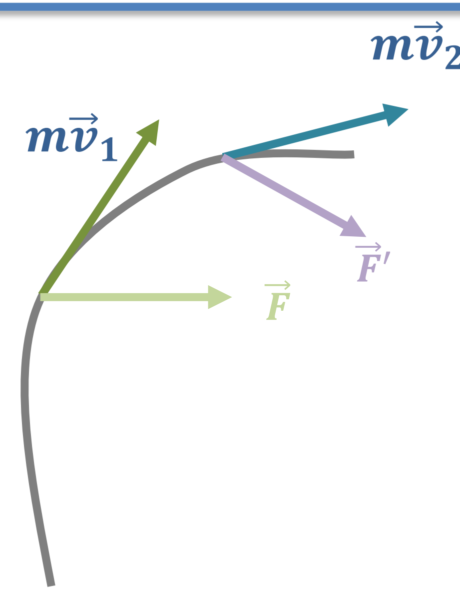
- **内力**--- $\vec{F}_{内}=\sum_i \vec{F}_{i内}\equiv 0$
- **外力**--- $\vec{F}_{外}=\sum_i \vec{F}_{i外}$

◆ **同一力对某一系统为外力，而对另一系统则可能为内力**



质点动量定理： 质点动量的增量等于合力对质点作用的冲量

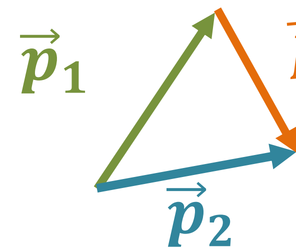




牛顿运动定律 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{外}$

动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

冲量 $\vec{I}$ 力对时间的积累效果



- 物理意义：质点动量的变化依赖于作用力的时间累积过程

  合力对质点作用的冲量 $\longrightarrow$ 质点动量矢量的变化

- 矢量性：冲量的方向与动量的增量方向相同

微分形式

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\Longrightarrow \vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$$

$\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$ --- 合力的元冲量

$\mathrm{d}\vec{p}$ --- 动量的元增量

积分形式

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}$$

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$ --- 合力的冲量

$\Delta\vec{p}$ --- 动量的增量

直角坐标系分量式

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\,\mathrm{d}t=\Delta p_x$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\,\mathrm{d}t=\Delta p_y$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\,\mathrm{d}t=\Delta p_z$$

$$\vec{I}=I_x\vec{i}+I_y\vec{j}+I_y\vec{k}$$

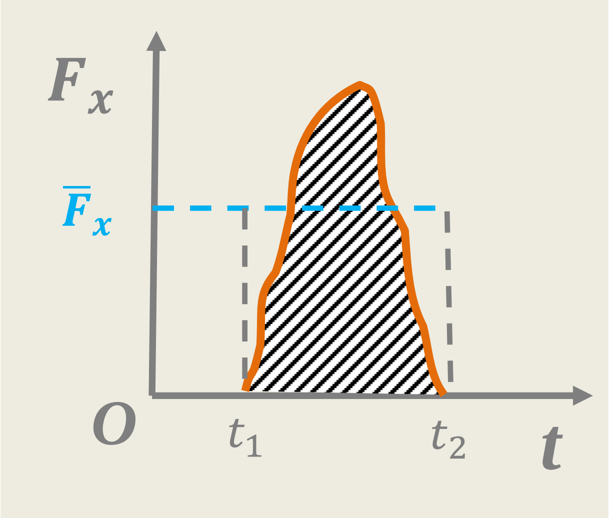
- 质点所受合力的冲量等于质点动量的增量。
- 冲量是力对时间的累积效应，其效果在于改变物体的动量。
- 从矢量的几何关系求解，可写成分量式求解。
- 适用于惯性系；若在非惯性系中合外力包括惯性力。

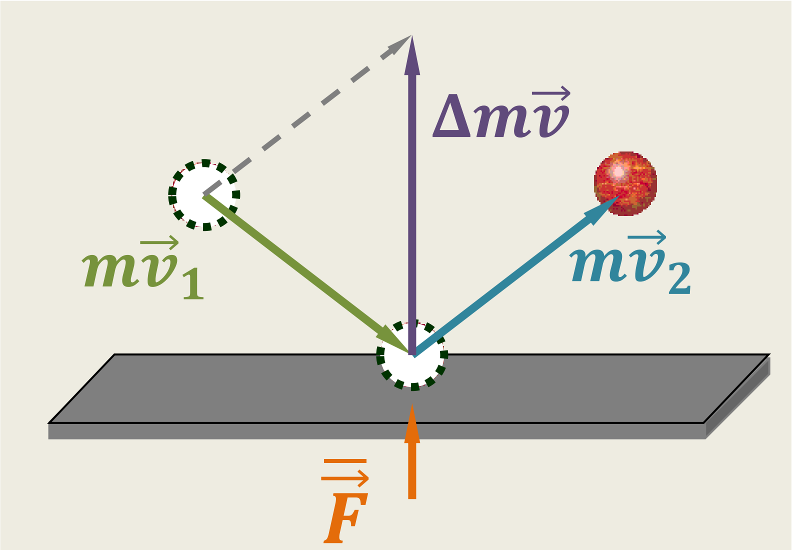
冲量和平均冲力：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}\Delta t$

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\overline{F}_x\Delta t$$

$$I_y=\overline{F}_y\Delta t$$

$$I_z=\overline{F}_z\Delta t$$





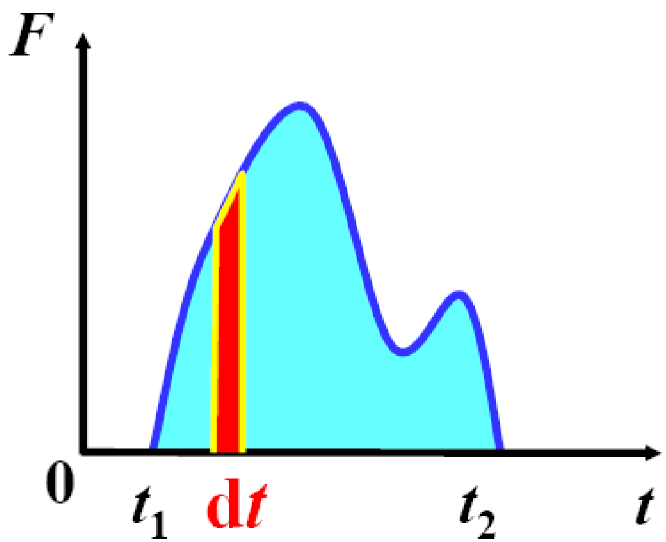
◆ **动量定理常应用于碰撞问题**

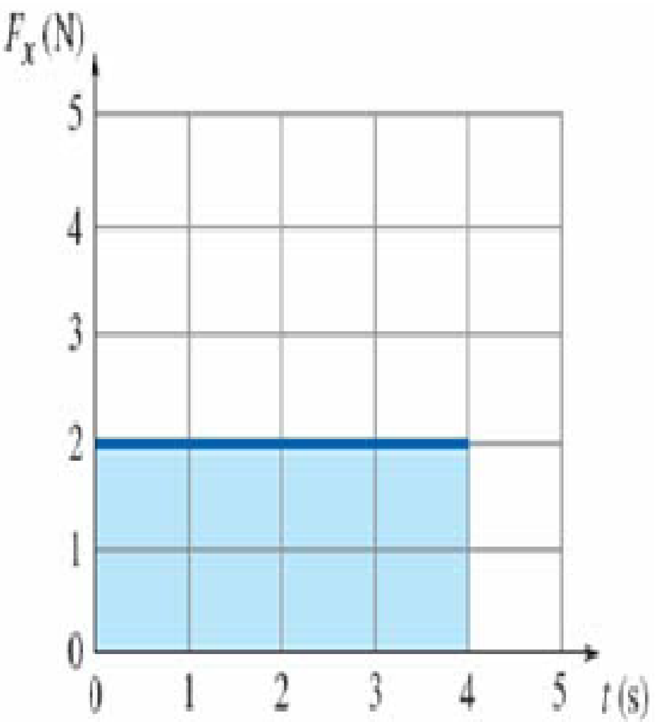
$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

在$\Delta\vec{p}$一定时，Δt越小，则$\overline{\vec{F}}$越大。

例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大。

冲量的任何分量等于在它自己方向上的动量分量的增量。





在力的整个作用时间内，平均力的冲量等于变力的冲量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \overline{F}\,(t_2 - t_1)$$

一篮球质量0.58kg，从2.0m高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触时间仅0.019s。求篮球对地面的平均冲力。

解：篮球到达地面的速率

$$v = \sqrt{2gh}$$

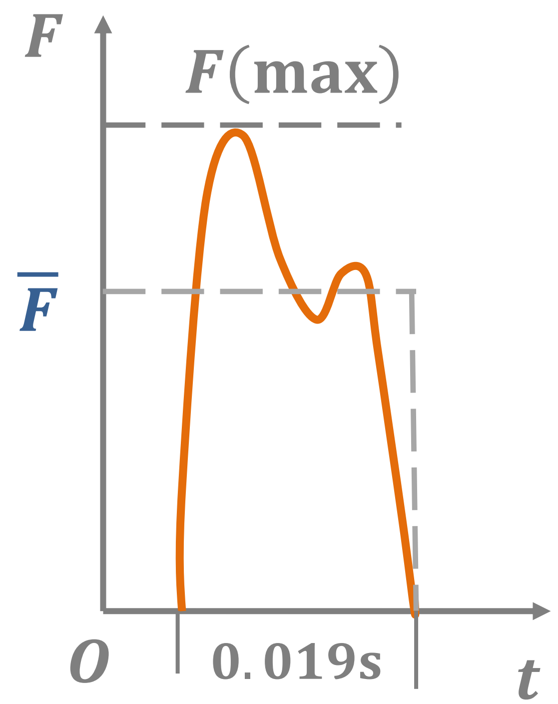
$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 2} = 6.3\ \mathrm{m/s}$$

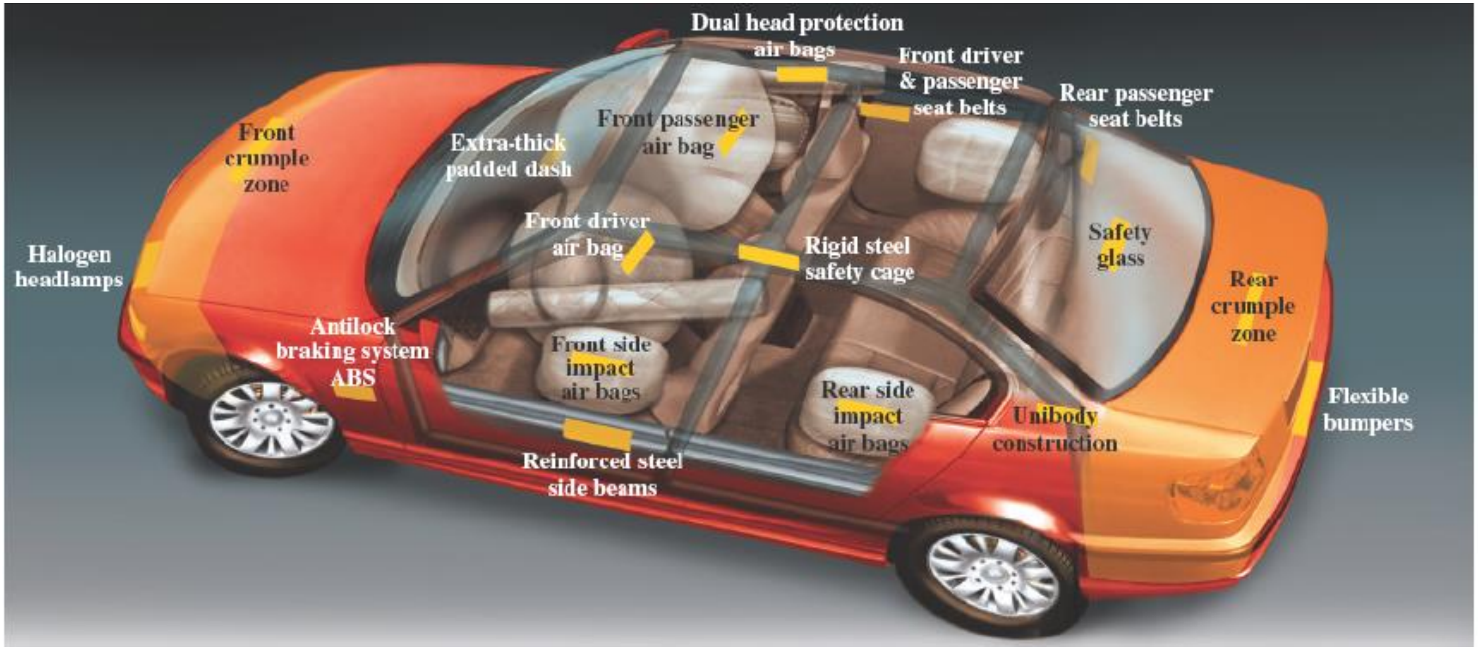
对地平均冲力

$$\overline{F} = \frac{2mv}{\Delta t}$$

$$= \frac{2 \times 0.58 \times 6.3}{0.019} = 3.8 \times 10^2 \mathrm{N}$$

相当于 40kg重物所受重力!





汽车 $v = 108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

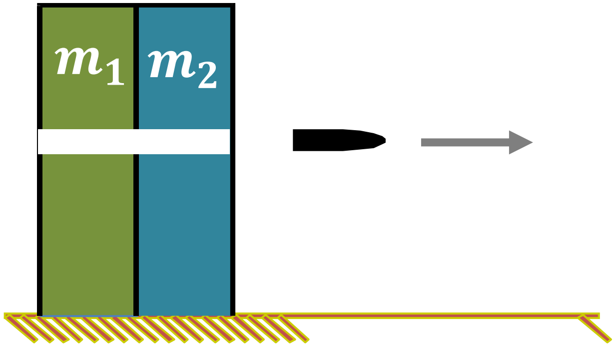
刹车 $\Delta t = 1\mathrm{s}$ 内停下

$m = 70\mathrm{kg}$，

乘客所受惯性力 $F_0 = ma_0 = 2100\ \mathrm{N}$

无法靠静摩擦力平衡，必须系安全带。

一粒子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块，已知两木块的质量分别为m_1、m_2，子弹穿过两木块的时间各为Δt_1、Δt_2。设子弹在木块中所受的阻力为恒力F。求子弹穿过后， 两木块各以多大速度运动。



解：子弹穿过第一木块时，两木块速度相同，均为v_1

$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2)\,v_1 - 0$$

子弹穿过第二木块后，第二木块速度变为v_2

$$F\Delta t_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1$$

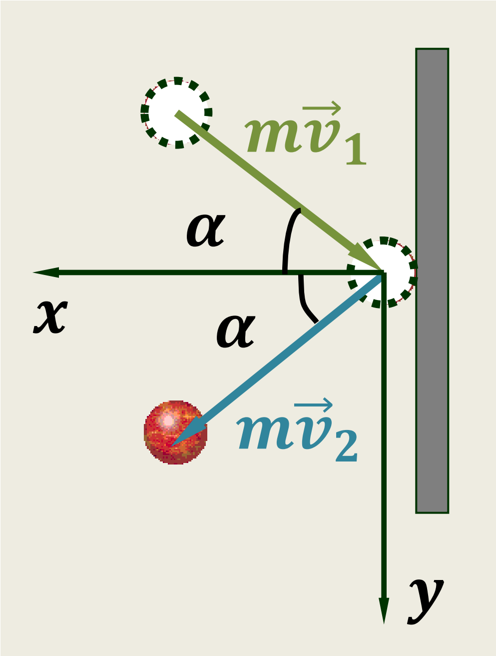
解得

$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$$

$$v_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

一质量为0.05kg、速率为10m/s的刚球，以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来。设碰撞时间为0.05s。求在此时间内钢板所受到的平均冲力$\overline{F}$。

解：建立如图坐标系，由动量定理得



$$\overline{F}_x\Delta t = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$= mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)$$

$$= 2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y\Delta t = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$= mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

$\overline{F} = \overline{F}_x = \dfrac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\text{N}$，**方向沿$x$轴反向。**

质点系的动量定理---某段时间内，质点系动量的增量等于作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和。

微分形式	积分形式
质点系所受外力矢量和的元冲量等于质点系总动量的元增量。	质点系所受外力矢量和的冲量等于质点系总动量的增量。
$\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$ $\mathrm{d}I_x=\sum_i F_{外ix}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\sum_i m_i v_{ix}\right)$ $\mathrm{d}I_y=\sum_i F_{外iy}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\sum_i m_i v_{iy}\right)$ $\mathrm{d}I_z=\sum_i F_{外iz}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\sum_i m_i v_{iz}\right)$	$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\Delta\vec{p}$ **分量式：** $I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_{外x}\mathrm{d}t=\Delta p_x$ $I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_{外y}\mathrm{d}t=\Delta p_y$ $I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_{外z}\mathrm{d}t=\Delta p_z$

质点系的动量定理

动量定理的微分形式	动量定理的积分形式
$\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$	$\vec{I}_{外}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\Delta\vec{p}$ $\vec{I}_{内}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{内}\mathrm{d}t\equiv 0$

$\vec{F}_{外}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{外i}$　　$\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i$　　$\vec{F}_{内}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}\vec{F}_{内ij}\equiv 0$

- □ 只有**外力**可改变系统的**总动量**
- □ **内力**可改变系统内**单个质点的动量**---内部作用复杂

质点系**总动量**的变化与内力的冲量无关。

内力的冲量起什么作用? 改变质点系总动量在系内各质点间的分配。

牛顿第二定律反映了力的瞬时效应;	加速度⟺合外力
动量定理则反映力对时间的累积效应;	动量变化⟺合外力的冲量。

质点系动量守恒定律

$$\sum_i \vec{F}_{外i} = 0 \longrightarrow \mathrm{d}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = 0$$

$$\vec{F}_{外} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = \left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = 常矢量$$

- 若惯性系中质点系受合外力为零，系统总动量不变。

  系统内任一物体的动量是可变的。

- 质点系的合外力只沿某个坐标方向为零，则沿此坐标方向的总动量的分量守恒。

动量守恒定律的分量表述

$$F_{外x} = 0 \Longrightarrow P_x = \sum_i m_i v_{ix} = 常量$$

$$F_{外y} = 0 \Longrightarrow P_y = \sum_i m_i v_{iy} = 常量$$

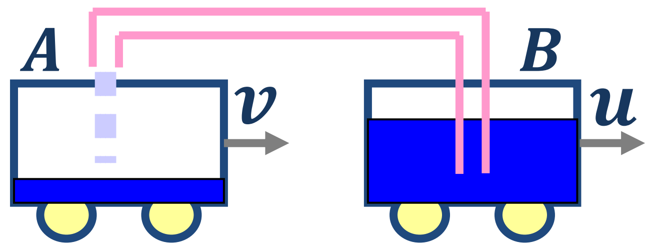
$$F_{外z} = 0 \Longrightarrow P_z = \sum_z m_i v_{iz} = 常量$$

- ◆ 系统动量守恒条件能否为

  $\vec{I}_{外} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \mathrm{d}t = 0$ ？

- ◆ 若系统内力>>外力，以致外力可以忽略不计时，可以应用动量守恒定律处理问题。（碰撞、爆炸、冲击）
- ◆ 式中各速度应对同一参考系而言。
- ◆ 孤立系统的质心作匀速直线运动。
- ◆ 动量守恒定律适用于惯性系，也适用于高速，微观领域。

如图所示，两部运水的卡车A、B在水平面上沿同一方向运动，B的速度为u，从B上以6kg/s的速率将水抽至A上，水从管子尾部出口垂直落下，车与地面间的摩擦不计，时刻t时，A车的质量为M，速度为v。求时刻t时，A的瞬时加速度。



解：选A车M和Δt时间内抽至A车的水Δm为研究系统，水平方向上动量守恒

$$Mv + \Delta m u = (M + \Delta m)v'$$

得 $$v' = \frac{Mv+\Delta m u}{M+\Delta m}$$

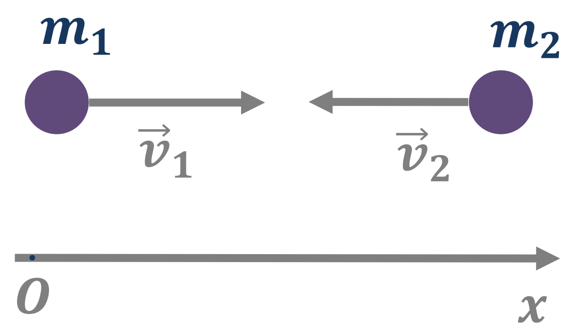
$$\Delta v = v' - v = \frac{\Delta m(u-v)}{M+\Delta m}$$

$$\Delta v \approx \frac{\Delta m}{M}(u - v)$$

卡车A的瞬时加速度 $$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{u-v}{M} = \frac{6}{M}(u - v)$$

在恒星系中，两个质量分别为m_1和m_2的星球，原来为静止，且相距为无穷远，后在引力的作用下，互相接近，到相距为r 时。求它们之间的相对速率为多少?



解：由动量守恒，机械能守恒

$$\begin{cases} mv_1 - mv_2 = 0 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - G\frac{m_1m_2}{r} = 0 \end{cases}$$

解得 $v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}$

$$v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}$$

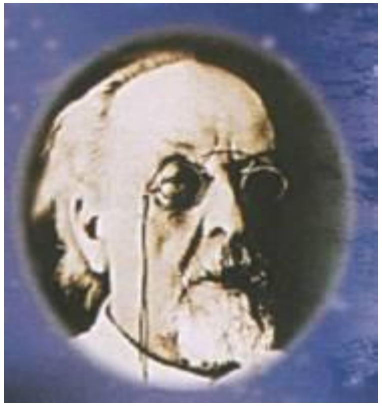
相对速率 $v_{12} = v_1 + v_2$

$$= m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}} + m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}$$

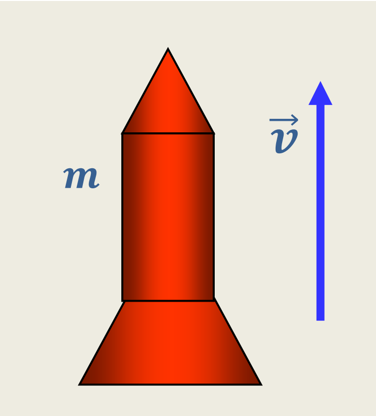
火箭的运动

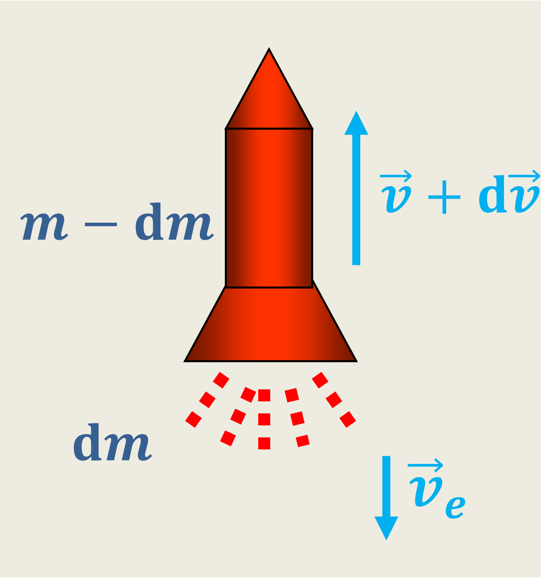
火箭前进的动力来自火箭燃料燃烧喷出的气体产生的反冲推力。火箭在进入运行轨道前，质量不断减少---**变质量系统**。

火箭依靠排出其内部燃烧室中产生的气体来获得向前的推力。设火箭发射时的质量为m_0，速率为v_0，燃料烧尽时的质量为m'，气体相对于火箭排出的速率为v_e。不计空气阻力，求火箭所能达到的最大速率。



火箭之父 - 齐奥尔科夫斯基





解：火箭和燃气组成一个系统。

t时刻：系统总质量为 m

系统总动量为 $\vec{p}_1=m\vec{v}$

$t+\mathrm{d}t$时刻：火箭质量为 $m-\mathrm{d}m$

排出的燃气质量为 $\mathrm{d}m$

火箭速度为 $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$

排出的燃气速度为 $\vec{v}_e+(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$

系统的总动量为：

$\vec{v}_{气地}=\vec{v}_{气箭}+\vec{u}_{箭地}$

$$\vec{p}_2=(m-\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+\mathrm{d}m(\vec{v}_e+\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$$
$$=m\vec{v}+m\mathrm{d}\vec{v}+\vec{v}_e\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}t$ 时间内系统的动量增量为：

$$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\mathrm{d}\vec{v}+\vec{v}_e\mathrm{d}m$$

火箭竖直向上运动时，忽略空气阻力，外力为重力mg。取向上为正，由质点系动量定理得

$$-mg\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v - v_e\mathrm{d}m$$

设t'时刻燃料烧尽，对上式两边积分得

$$-\int_0^{t'} g\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v_\mathrm{m}} \mathrm{d}v - v_e\int_{m_0}^{m'}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v_\mathrm{m} - v_0 = v_e \ln\frac{m_0}{m'} - gt'$$

火箭水平飞行时： $v_\mathrm{m} = v_0 + v_e \ln\frac{m_0}{m'}$

用增大喷气速度和增大质量比的方法可以提高火箭末速度。
多级火箭 $v_\mathrm{m} = v_0 + v_{e1}\ln N_1 + v_{e2}\ln N_2 + \cdots + v_{en}\ln N_n$

设$v_{e1} = v_{e2} = v_{e3} = 2500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$N_1 = N_2 = N_3 = 6$
得 $v_\mathrm{m} = 2500\cdot\ln 6^3 = 13440\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

足以发射人造地球卫星。

加农炮质量为M, 发射一质量为m的炮弹，炮弹相对炮口速率为v_0, 炮筒相对水平地面的倾角为θ。忽略加农炮与地面间的摩擦力。求炮弹相对地面的速度大小和方向。

解：系统水平方向动量守恒 $mv_0\cos\theta - Mv_{炮地} = 0$ **?**

由相对运动公式 $\vec{v}_{弹地} = \vec{v}_{弹炮} + \vec{v}_{炮地}$

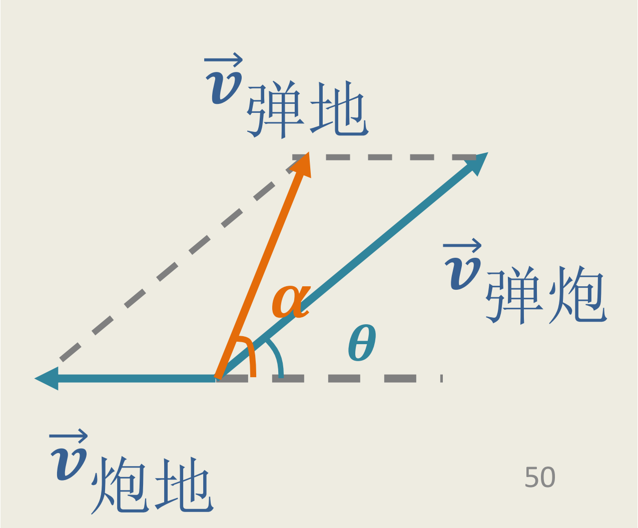
$$= \vec{v}_0 + \vec{v}_{炮地}$$

可得
$$\begin{cases} v_{弹地}\cos\alpha = v_0\cos\theta - v_{炮地} & (1) \\ v_{弹地}\sin\alpha = v_0\sin\theta & (2) \end{cases}$$

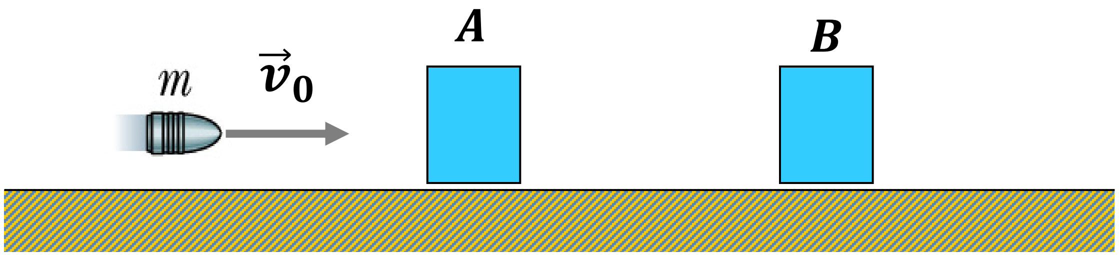
系统水平方向动量守恒

$$mv_{弹地}\cos\alpha - Mv_{炮地} = 0 \quad (3)$$

联立(1)(2)(3)求解。



光滑水平桌面上弹簧两端分别连接两个物块A和 B 。 两物块质量相同均为M。一颗质量为m初速率为v_0的子弹射入物块 A 并停留在里面，求弹簧的最大压缩距离。



解：子弹与物块 A的碰撞前后，动量守恒

$$mv_0 = (m+M)V_0 \quad \Longrightarrow \quad V_0 = \frac{mv_0}{m+M}$$

子弹与物块 A 和 B的碰撞前后，动量守恒

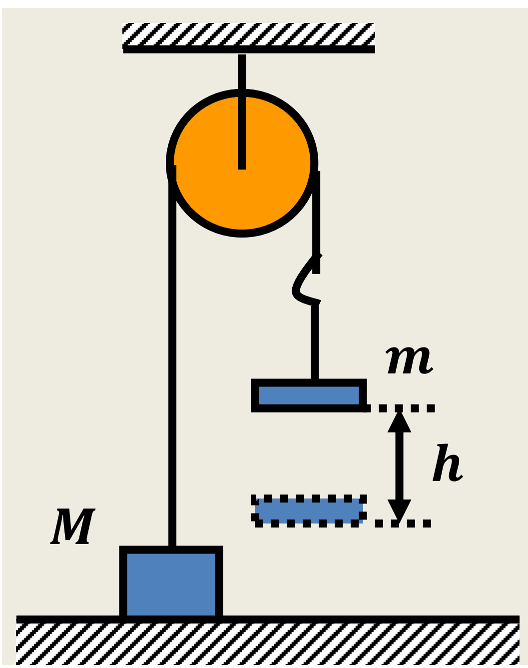
$$mv_0 = (m+2M)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mv_0}{m+2M}$$

当 A 和 B 获得相同速率时

$$\frac{1}{2}(m+M)V_0^2 = \frac{1}{2}(m+2M)V^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

求得 $$x_{\max} = mv_0\left[\frac{M}{k(m+M)(m+2M)}\right]^{1/2}$$

一绳跨过一定滑轮，两端分别系有质量m及M的物体，且$M > m$。最初M静止在桌上，抬高m使绳处于松弛状态。当m自由下落距离h后，绳才被拉紧，求此时两物体的速率v和M所能上升的最大高度（不计滑轮和绳的质量、轴承摩擦及绳的伸长）。



分析运动过程：

当m自由下落h距离，绳被拉紧的瞬间，m和M获得相同的运动速率v，此后m向下减速运动，M向上减速运动。

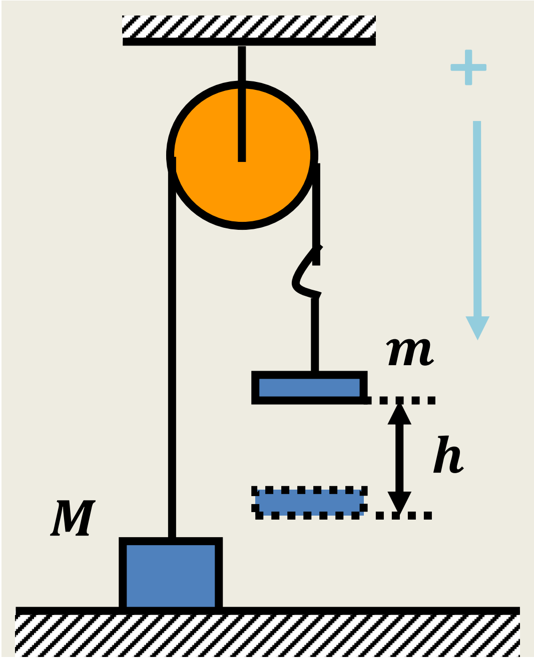
M上升的最大高度为 $H = \dfrac{v^2}{2a}$

分两个阶段求解

第一阶段：绳拉紧，求共同速率v

第二阶段：m和M有大小相等，方向相反的加速度a，设绳拉力为F，画出m和M的受力图。

◆ 第一阶段：绳拉紧，求共同速率v



解1： 因为$M > m$，所以m不能提起M，共同速率$v = 0$

解2： 绳拉紧时冲力很大，忽略重力，$m + M$系统动量守恒

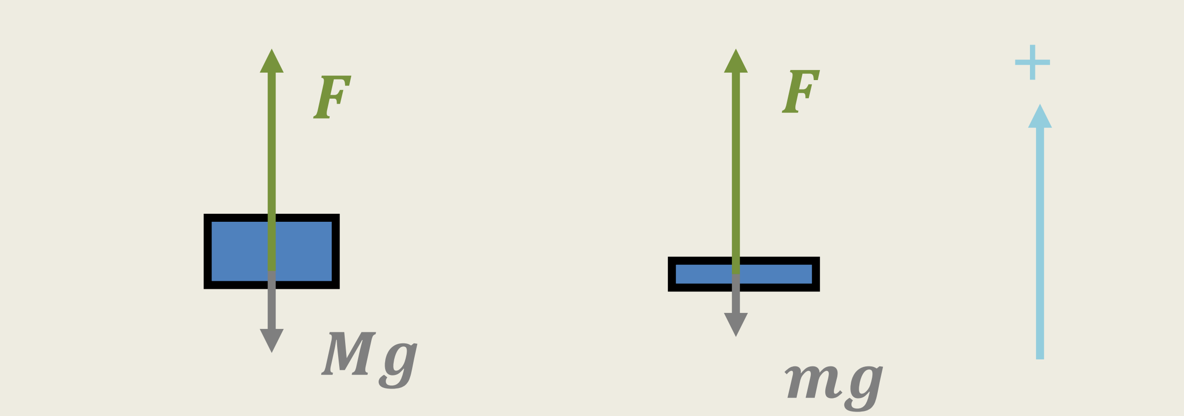
$$m\sqrt{2gh} = (m + M)v \qquad v = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

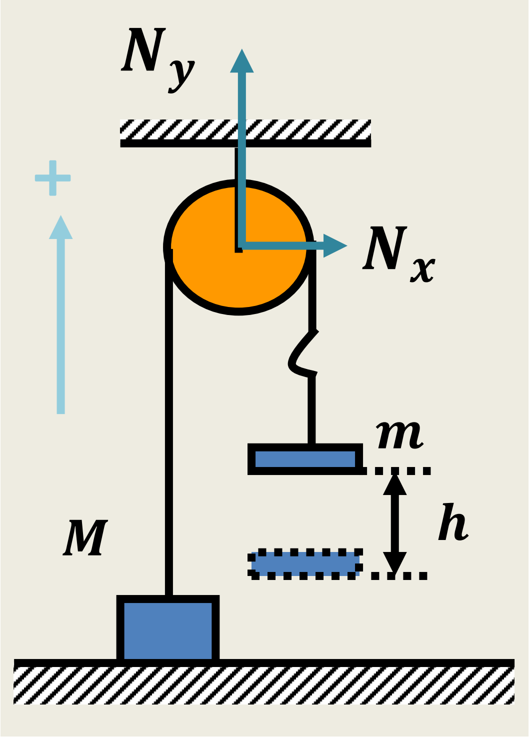
解3： 动量是矢量，以向下为正，系统动量守恒

$$m\sqrt{2gh} = mv + M(-v) \qquad v = \frac{m\sqrt{2gh}}{m-M}$$

◆ 第一阶段：绳拉紧，求共同速率v

绳拉紧时冲力很大，轮轴反作用力$\vec{N}$不能忽略，$m+M$系统动量不守恒，应分别对它们用动量定理；设冲力为$\vec{F}$，取向上为正方向





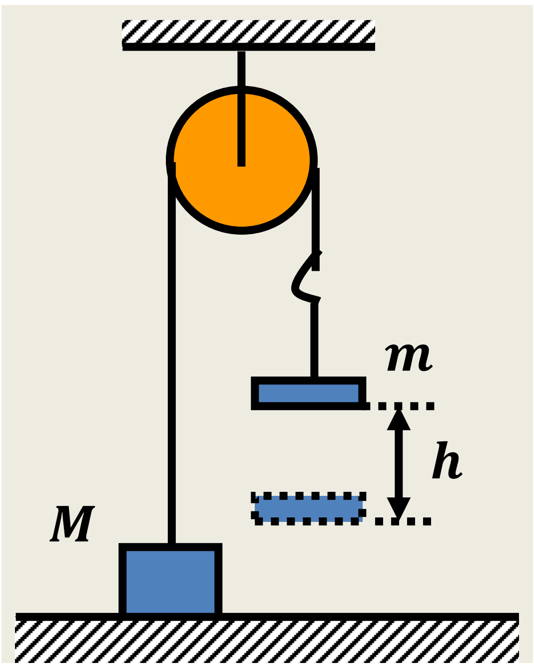
$$I_1=\int(F-mg)\mathrm{d}t=-mv-(-m\sqrt{2gh})$$

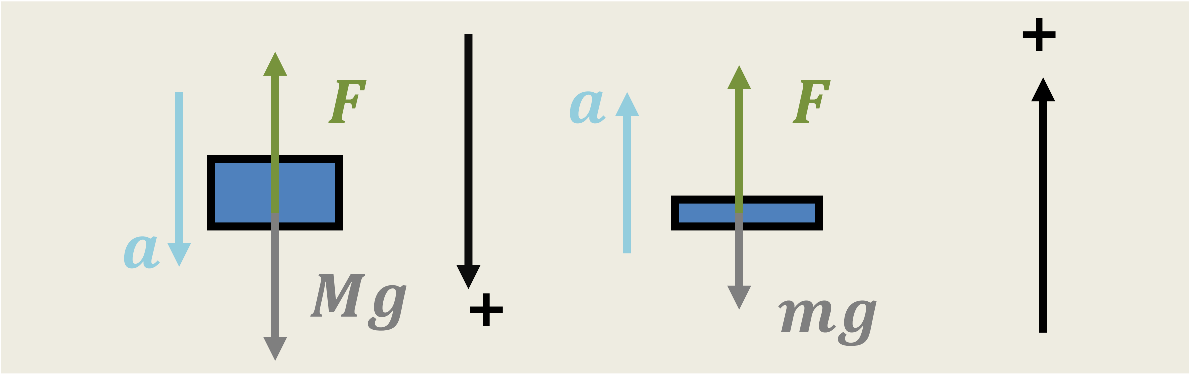
$$I_2=\int(F-Mg)dt=Mv-0=Mv$$

忽略重力，则有$I_1=I_2$

即 $-mv-(-m\sqrt{2gh})=Mv$ ➡ $v=\dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$

◆第二阶段：m和M有大小相等，方向相反的加速度a，设绳拉力为F，画出m和M的受力图。





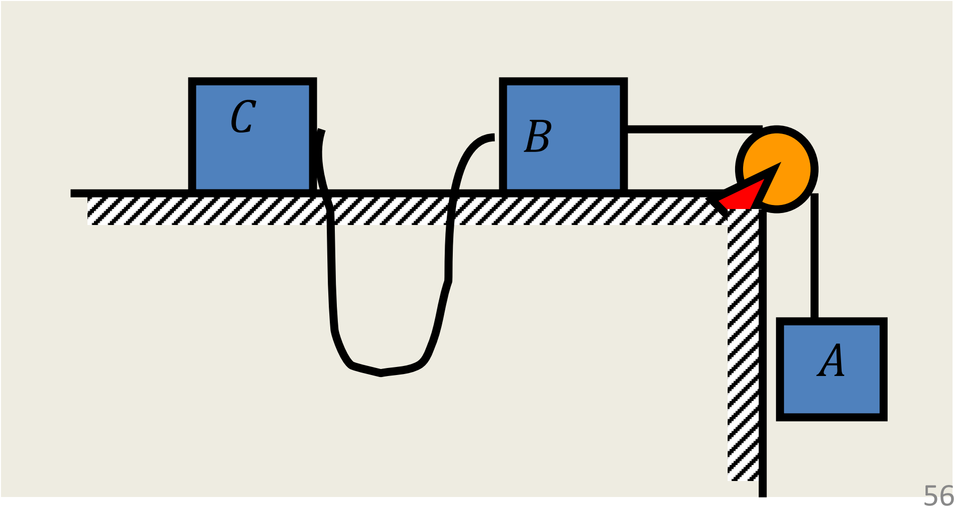
由牛顿运动定律
$$\begin{cases} Mg - F = Ma \\ F - mg = ma \end{cases}$$

解得 $a = \dfrac{(M-m)g}{M+m}$

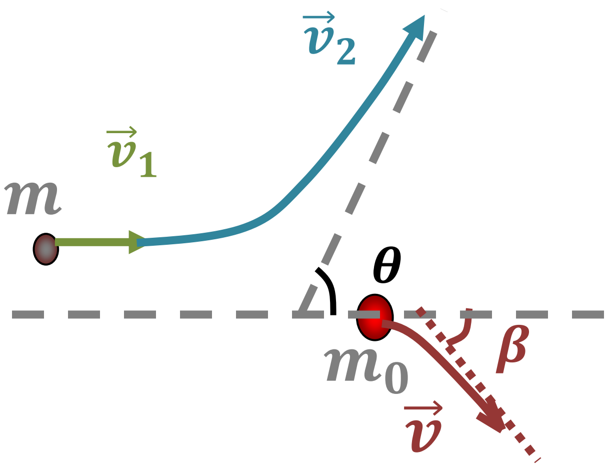
M上升的最大高度为

$$H = \frac{v^2}{2a} = \left(\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}\right)^2 \bigg/ \left(\frac{2(M-m)g}{M+m}\right) = \frac{m^2 h}{M^2-m^2}$$

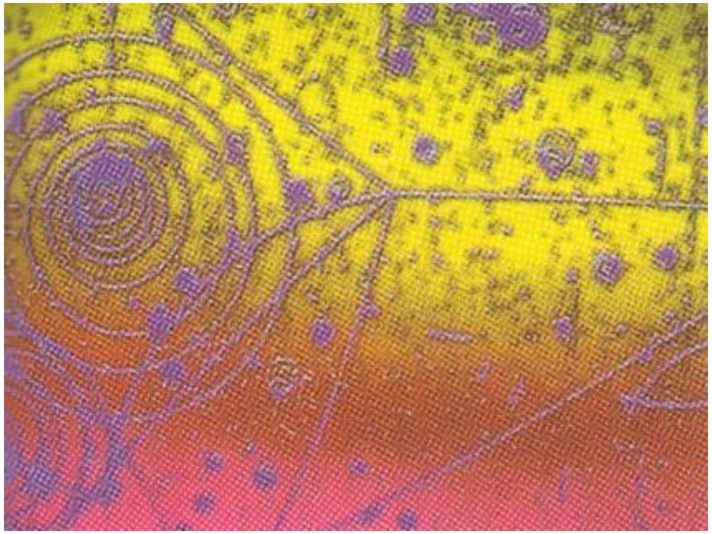
类似问题



α 粒子散射中，质量为m的α粒子与质量为m_0的静止氧原子核发生“碰撞”。实验测出“碰撞”后，α粒子沿与入射方向成$\theta = 72°$角方向运动，而氧原子核沿与α粒子入射方向成 $\beta = 41°$角反冲，如图示，求“碰撞”前后α粒子速率之比。



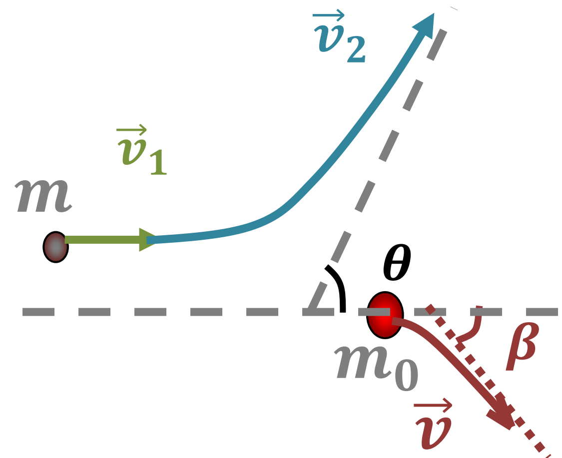
高能物理可以用探测器得到粒子径迹



在云雾室中得到的加速粒子的轨迹的彩色反转片

"碰撞"：相互靠近，由于斥力而分离的过程---**散射**。

对α粒子和氧原子核系统，碰撞过程总动量守恒。



碰前：　α粒子动量为$m\vec{v}_1$

　　　　氧原子核动量为0

碰后：　α粒子动量为$m\vec{v}_2$

　　　　氧原子核动量为$m_0\vec{v}$

由动量守恒定律得　$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + m_0\vec{v}$

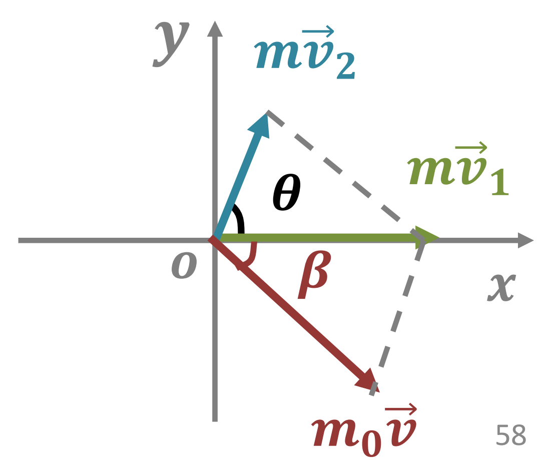
直角坐标系中

$$mv_1 = mv_2\cos\theta + m_0 v\cos\beta$$

$$0 = mv_2\sin\theta - m_0 v\sin\beta$$

解得"碰撞"前后，α粒子速率之比为

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin(72^\circ+41^\circ)} = 0.71$$



牛顿运动定律（瞬时关系）
- 适用范围：惯性系
- 隔离物体分析受力（施力体、受力体）
- 求解相关问题

$$\vec{F}_{外} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

- □ 注意牵连加速度的计算
- □ 矢量的计算，常常把矢量分解到一个具体的坐标系中进行标量计算。

质点（系）动量定理及守恒定律

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{I}_{外} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外}\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_{外x}\mathrm{d}t = \Delta p_x$$

□ 注意内力只改变系统内单个质点的动量不改变系统的总动量，只有外力才改变系统的总动量。

$$\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{外i}$$

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{F}_{外} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = 常矢量$$

$$F_x = 0 \Longrightarrow p_x = 常量$$

- □ 若惯性系中质点系受合外力为零，系统总动量不变。
- □ 质点系的合外力只沿某个坐标方向为零，则沿此坐标方向的总动量的分量守恒。

碰撞：物体在极短的时间内发生强烈相互作用的过程。

由于质点系受到的外力比碰撞物体间的相互作用力小得多，因此可以忽略外力，可将系统视为孤立系统，**碰撞系统构成的质点系总动量守恒。** 但机械能不一定守恒。

$$\vec{p} = \vec{p}_{1\text{前}} + \vec{p}_{2\text{前}} = \vec{p}_{1\text{后}} + \vec{p}_{2\text{后}}$$

根据不同情况可以将碰撞分为三类：

- 完全弹性碰撞
- 非弹性碰撞
- 完全非弹性碰撞

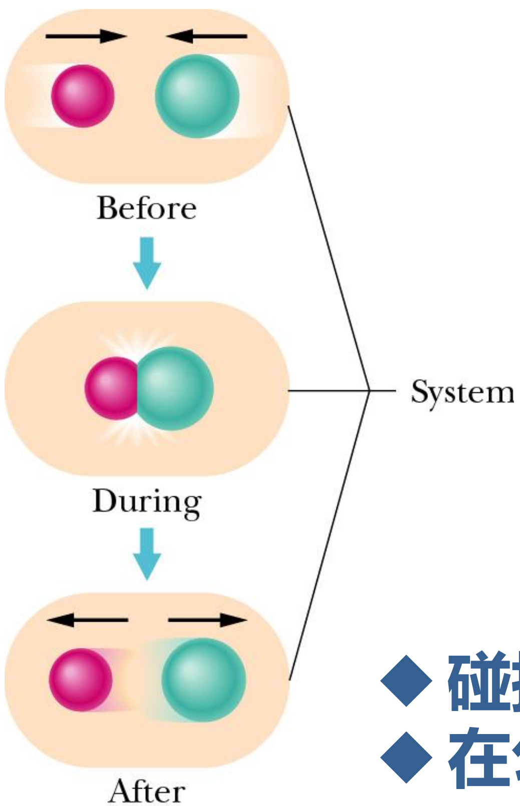
◆ 完全弹性碰撞

- 如果系统总动能不发生变化，则碰撞为弹性碰撞。

$$\Delta E_{k,总} = 0$$

- 系统内质点间的相互作用力为保守力，系统动能先转变为势能，再转变为动能，总动能不变，则碰撞为弹性碰撞。

$$A_{总} = \Delta E_{k,总} = 0\mathrm{J}$$



对于弹性碰撞，相对速度为$\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$的两个质点，碰撞后将以相同的相对速度离开。

即$\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20} = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

对心弹性碰撞过程中动能和动量守恒

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

◆ 碰撞过程中，动量总是守恒，而动能则未必守恒；

◆ 在匀速率圆周运动中，动能不变，而动量不守恒。

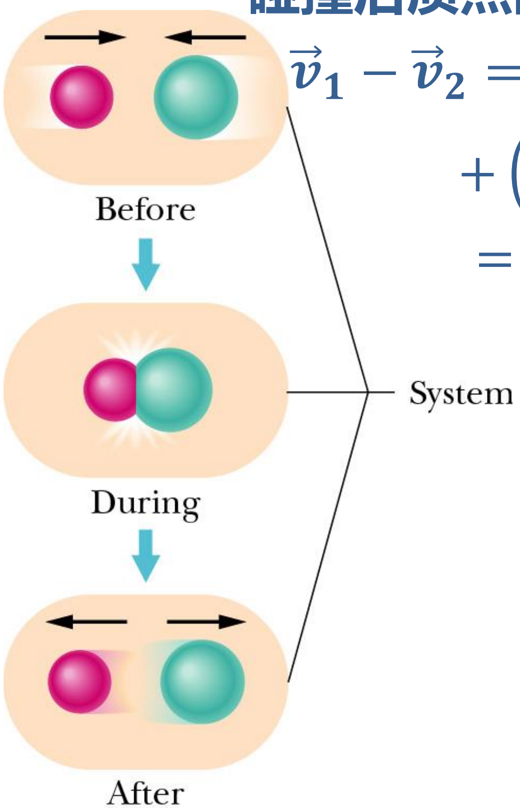
◆ 完全弹性碰撞

可以解得碰撞后的质点速度分别为

$$\vec{v}_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{10} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{20}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{20} + \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{10}$$

碰撞后质点的相对速度为



$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2} - \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_0 + \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} - \frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{10} = -(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20})$$

✓ **质量相等** $m_1 = m_2$

$$v_1 = v_{20} \quad v_2 = v_{10}$$

✓ **靶质点静止** $v_{20} = 0$

$$v_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}$$

✓ **靶质点质量很大** $m_2 >> m_1$

$$v_1 \approx -v_{10} + 2v_{20}$$
$$v_2 \approx v_{20}$$

✓ **大质量抛射体** $m_1 >> m_2$

$$v_1 \approx v_{10}$$
$$v_2 \approx 2v_{10} - v_{20}$$

完全非弹性碰撞

碰撞前后动量守恒：

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

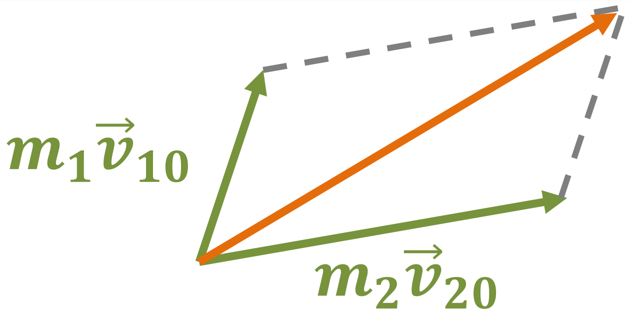
由于 $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$

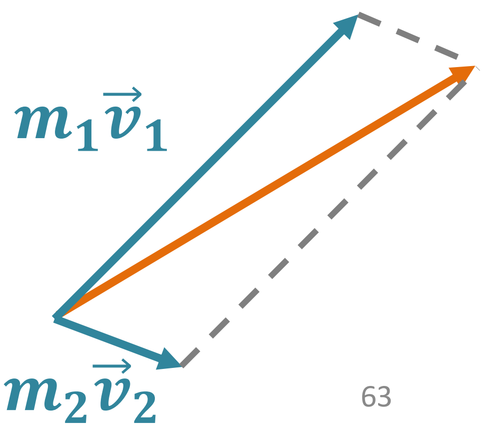
所以 $\vec{v} = \dfrac{m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}}{m_1+m_2}$

非弹性碰撞

碰撞前后动量守恒：

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$





质量相同的两个球，证明如果其中一个球碰撞前静止，发生非对心完全弹性碰撞后，两个球的速度方向相互垂直。

解：根据动量和动能守恒

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

由 $$\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$\Longrightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

比较两式 $$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

可知 $$2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

即 $$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\theta = 0$$

因此必有 $$\theta = \frac{\pi}{2}$$