- 质点、质点系和刚体运动的角动量
- 刚体的转动惯量
- 质点、质点系和刚体角动量的时间变化率 、力矩
- 刚体定轴转动定律
- 质点、质点系和刚体的角冲量、角动量定理
- 角动量守恒定律

质点 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$

质点系 $\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$

$$=\vec{L}_{轨道}+\vec{L}_{自旋}=\vec{r}_C\times m\vec{v}_C+\sum_i\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$$

定轴转动刚体 $L_z=\omega\sum_i r_i^2 m_i=J\omega$

□ 转动惯量

$J=\sum_i r_i^2 m_i$

$J=\int r^2\,\mathrm{d}m$

◆ 力对于某固定点的力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

$M_z=\pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_\perp\right|$ $\qquad \sum_i\vec{M}_{i内}=0$

◆ 角动量定理 $\vec{M}_{外}=\vec{r}\times\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

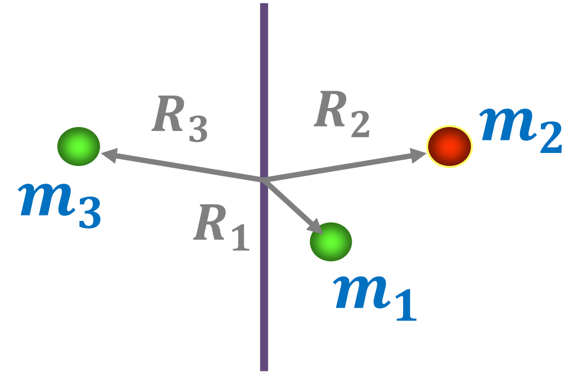
◆ 角动量守恒定律

若合外力矩为零，质点或质点系的角动量守恒。

$$\vec{M}_{外}=0，则\ \vec{L}=常矢量$$

◆ 叠加定理

转动惯量是标量，所以几个物体的转动惯量是各个物体相对与同一转轴转动惯量的代数和。 $J=\sum_i J_i$



◆ 平行轴定理

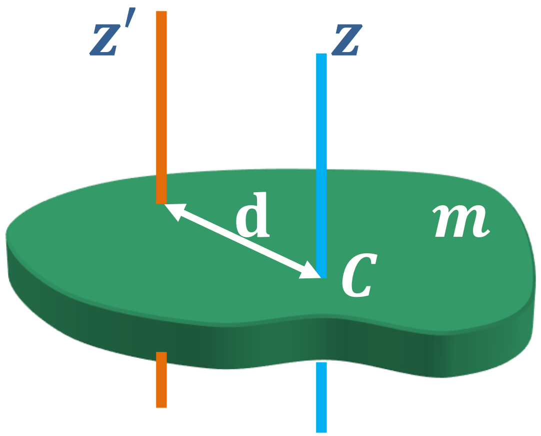
若两轴平行，其中一个轴通过质心，则刚体对两轴的转动惯量的关系为

$$J_z=J_C+md^2$$

J_z 刚体绕任意轴的转动惯量

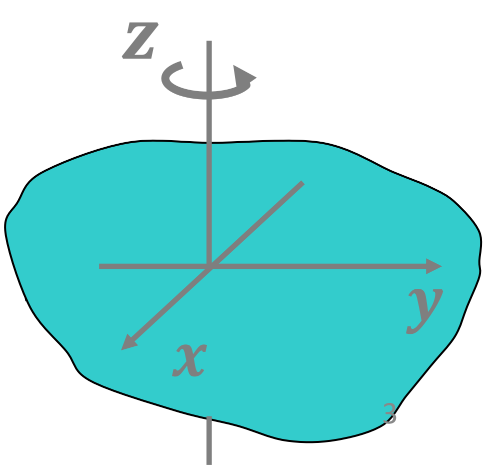
J_C 刚体绕通过质心的轴的转动惯量

d 两平行轴的垂直距离

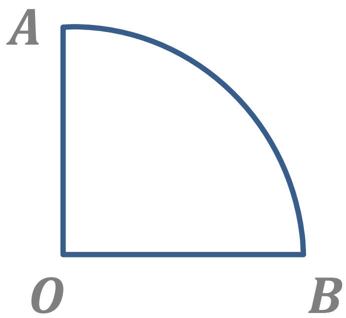


◆ 正交轴定理

无穷小厚度的薄板状刚体，对板内与定轴相垂直的两个正交轴的转动惯量之和，等于该刚体对定轴的转动惯量。$J_z=J_x+J_y$



如图所示的OAB均匀薄板，恰好是四分之一圆。薄板对于通过O点且垂直于板面的轴的转动惯量为J，则它对于与边OA或OB重合的轴的转动惯量为________。

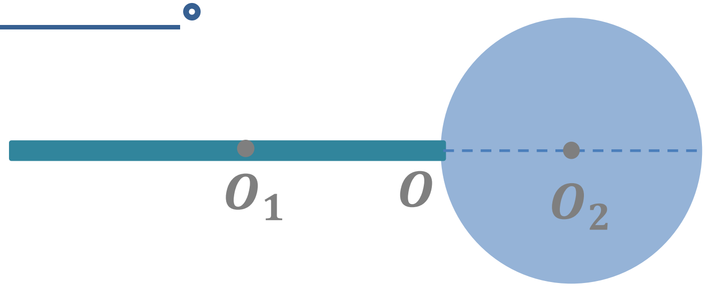


用垂直轴定理可得 $\frac{J}{2}$

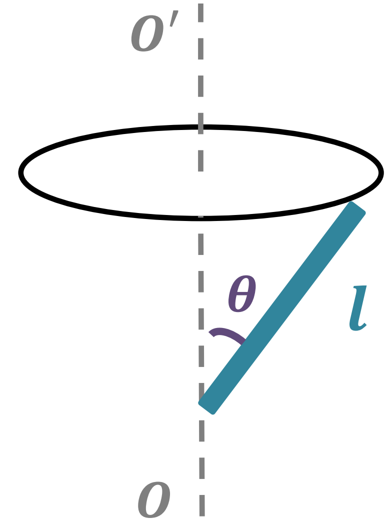
一刚体由匀质细杆和匀质球体两部分构成，杆在球体直径的延长线上，如图所示。球体的半径为R，杆长为$2R$，杆和球体的质量均为m。若杆对通过其中点O_1，与杆垂直的轴的转动惯量为J_1，球体对通过球心O_2的转动惯量为J_2，则整个刚体对通过杆与球体的固结点O且与杆垂直的轴的转动惯量为________。

用平行轴定理可得

$$J=\left(J_1+mR^2\right)+\left(J_2+mR^2\right)$$



一质量为m的均质细杆长为l，绕铅直轴OO'成θ角转动，其转动惯量为



A. $\frac{1}{12}ml^2$　　B. $\frac{1}{4}ml^2\sin^2\theta$

C. $\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta$　　D. $\frac{1}{3}ml^2$

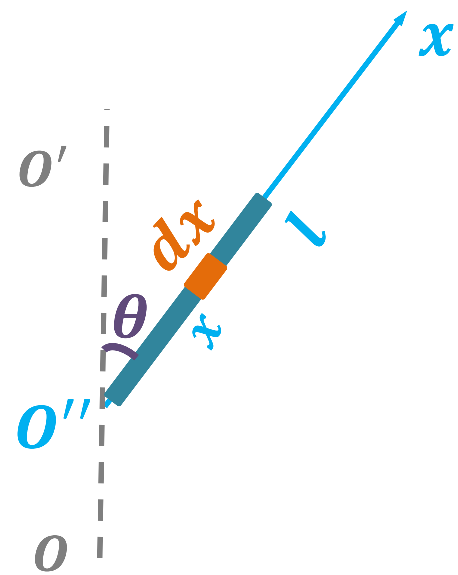
解：以杆与轴的交点为原点O''，沿杆的方向为x轴正方向，将杆分成无穷段，如图x处长为$\mathrm{d}x$的微元对轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}J=\mathrm{d}m\,(x\sin\theta)^2$$

将变量统一为x表示并在杆上积分得：

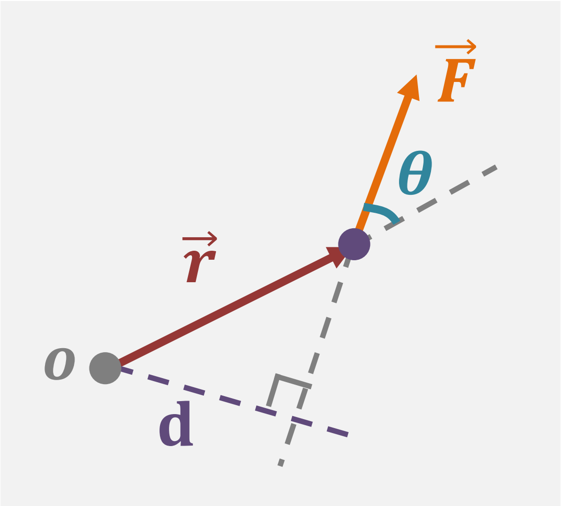
$$J=\int \mathrm{d}m\,(x\sin\theta)^2=\int_0^l (x\sin\theta)^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta$$



力对固定点的力矩

定义：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



◆大小：$M = Fr\sin\theta = F\mathrm{d}$

力矩的大小等于力乘以力臂。

d ---力臂

$\vec{r}$---是力的作用点的位置矢量。

◆方向：垂直于 $\vec{r}$和$\vec{F}$组成的平面，服从右手螺旋定则。

◆单位：$\mathrm{N \cdot m}$

在直角坐标系中

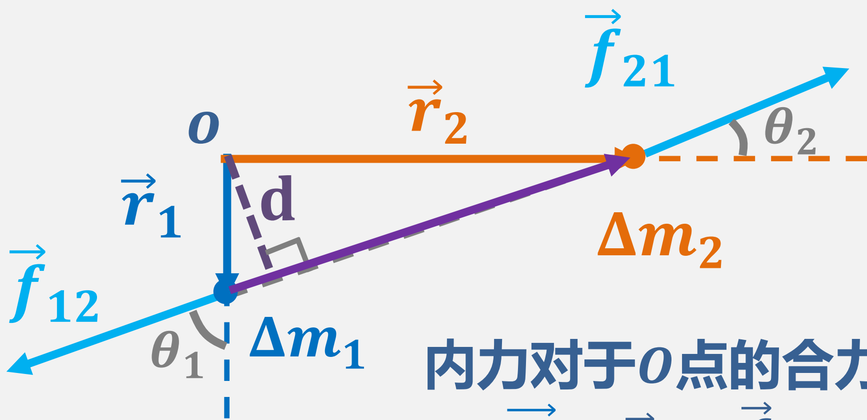
$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_z \end{cases}$$

特例：

- 若 $\vec{r} \perp \vec{F}$，则$|\vec{M}| = Fr$
- 若 $\vec{r} // \vec{F}$，则$|\vec{M}| = 0$

力作用于参考点或其作用线通过参考点时，力对参考点的力矩为零。

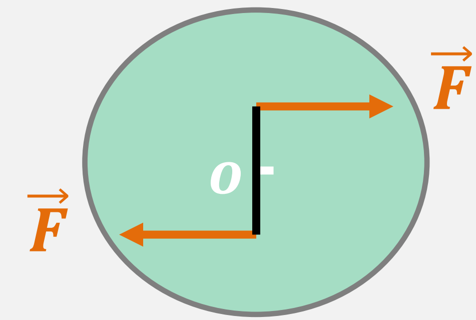
力对固定点的力矩



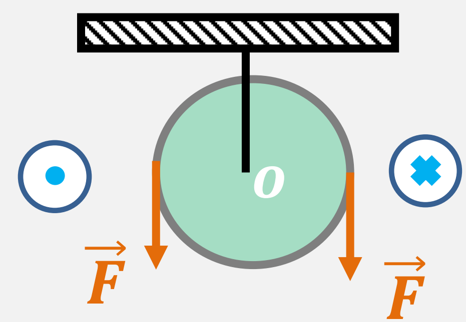
内力对于o点的合力矩

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}$$
$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{f}_{21} = 0$$

$$\sum_i \vec{M}_{i内} \equiv 0$$



$$\sum \vec{F} = 0, \quad \sum \vec{M}_O \neq 0$$



$$\sum \vec{F} \neq 0, \quad \sum \vec{M}_O = 0$$

- ◆ 质点系所有内力矩之和为零。
- ◆ 合力为零时，其合力矩不一定为零。
- ◆ 合力矩为零时，合力不一定为零。
- □ 力矩求和只能对同一参考点（或轴）进行。

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{1o} + \vec{M}_{2o} + \cdots \qquad 矢量和$$
$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \cdots \qquad 代数和$$

力对固定轴的力矩

力对O点的力矩：

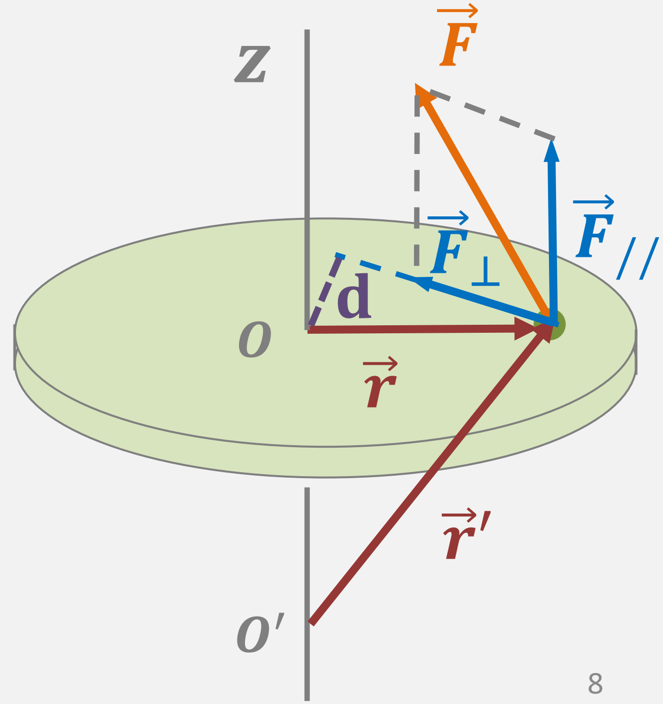
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{r}\times(\vec{F}_{//}+\vec{F}_{\perp})=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}+\vec{r}\times\vec{F}_{//}$$

方向垂直于轴，其效果是企图改变轴的方位，在定轴问题中，与轴承约束力矩平衡。

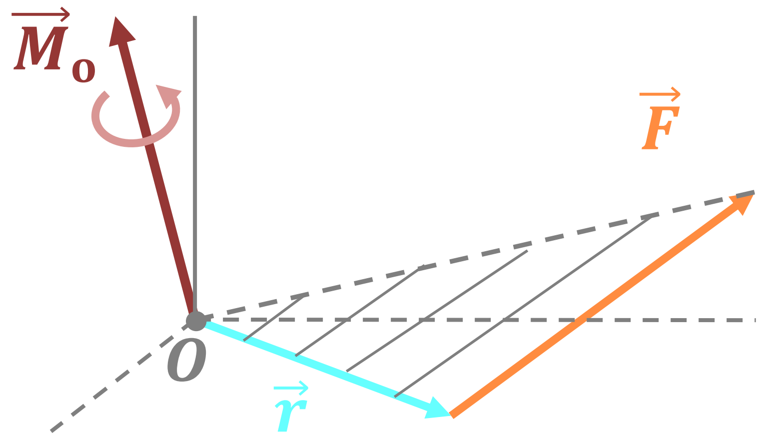
$$\vec{M}_z=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

- 方向平行于轴，其效果是改变绕轴的转动状态，称为**力对转轴 z 的力矩**。
- 力对O点的力矩在z轴方向的分量。
- 大小： $M_z=\pm\left|\vec{M}_z\right|=\pm\left|\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}\right|$
  $=\pm F_{\perp}r\sin\theta=\pm F_{\perp}\mathrm{d}$
- 方向：$\vec{M}_z$沿规定的正方向，取“+”；反之取“−”。



力 ➡ 改变质点的运动状态 ➡ 质点获得加速度

力矩 ➡ 改变刚体的转动状态 ➡ 刚体获得角加速度

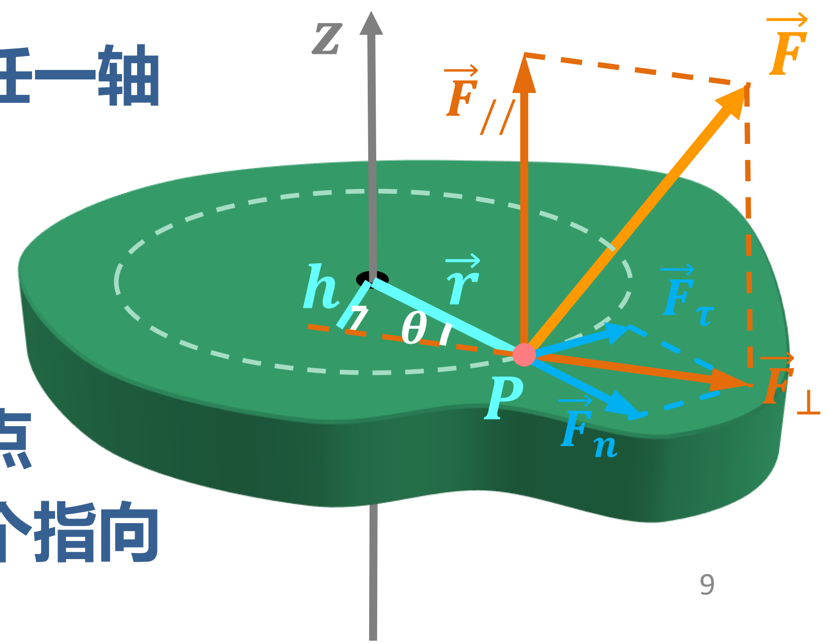


◆ 力对点的力矩

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

◆ 力对任意点的力矩，在通过该点的任一轴上的投影，等于该力对该轴的力矩

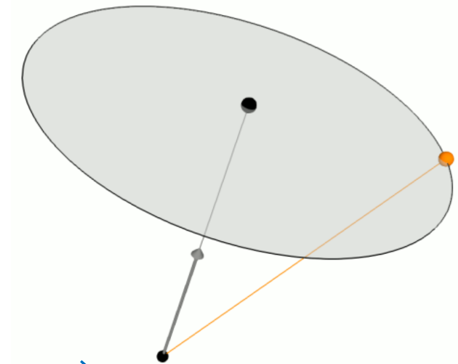
$$\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$$

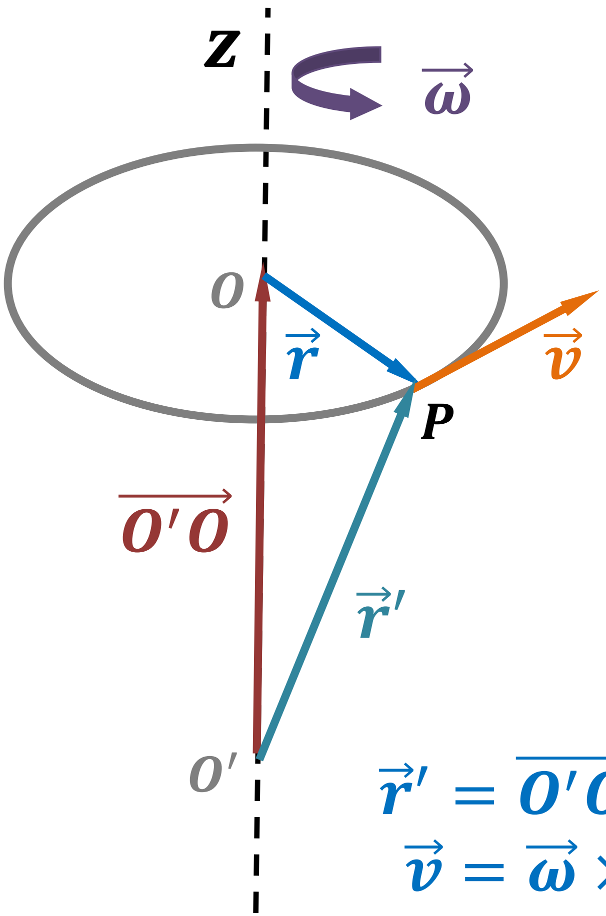


◆ 力矩取决于力的大小、方向和作用点

◆ 在刚体的定轴转动中，力矩只有两个指向

一质量为m的质点在xOy平面内以角速度ω沿圆心位于O点、半径为r的圆周运动，方向如图所示。求该质点相对于O点正下方O'点的角动量在z轴上的分量L_z。





$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= \vec{r}' \times \vec{p} = \vec{r}' \times m\vec{v} \\ &= m\left(\overrightarrow{O'O} + \vec{r}\right) \times \vec{v} \\ &= m\,\vec{r} \times \vec{v} + m\,\overrightarrow{O'O} \times \vec{v} \\ &= mrv\vec{k} - m\left|\overrightarrow{O'O}\right| v\hat{r} \\ &= mr^2\omega\vec{k} - m\left|\overrightarrow{O'O}\right|\omega\vec{r}\end{aligned}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\Longrightarrow L_z = mr^2\omega$$

- 质点相对于z轴上的各个点的**角动量（$\vec{L}$）不同**
- 质点相对于z轴上的各点的**角动量沿z轴的分量（L_z）相同**

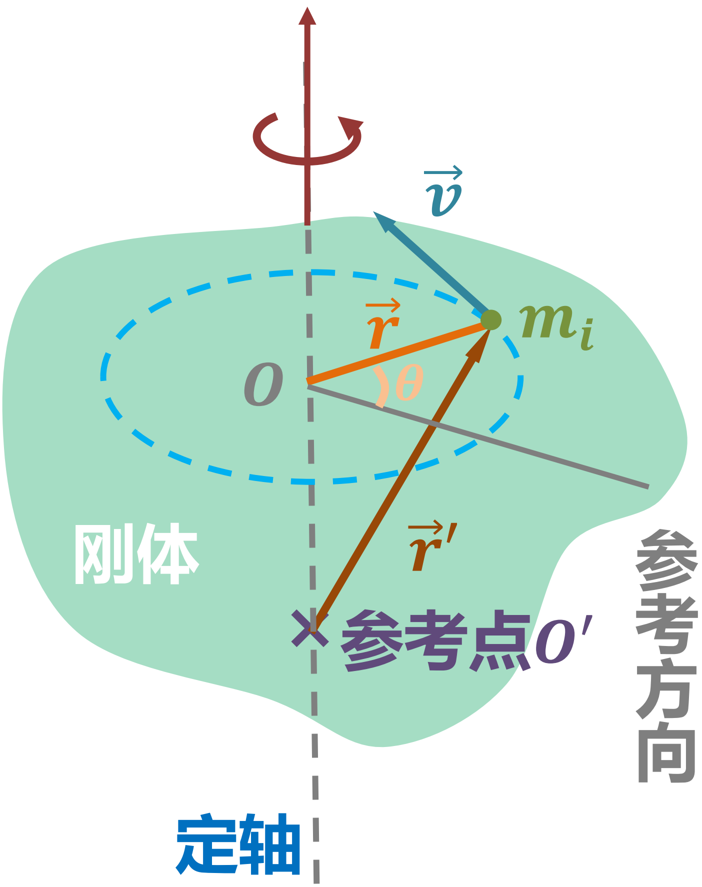
◆ 质量元Δm_i对z轴的角动量

$$L_{iz}=L_{iO}=\Delta m_i r_i^2\omega$$

◆ 定轴转动刚体对z轴的总角动量

$$L_z=\sum_i L_{iz}=\sum_i m_i r_i^2\,\omega=J\omega$$

$$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta$$



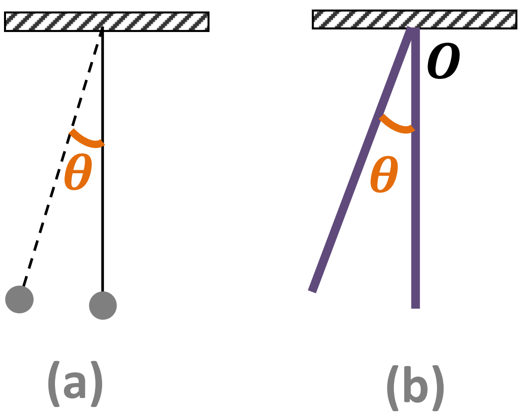
$$M_z=\sum M_{外iz}=J\beta$$

刚体在作定轴转动时，角加速度与刚体所受的对转轴的合外力矩成正比且方向相同皆沿转轴，与刚体的转动惯量成反比。---刚体定轴转动定律

刚体定轴转动定律	牛顿第二定律
地位相同	
$M_z = J\beta$	$\vec{F} = m\vec{a}$
刚体定轴转动问题	物体或质点平动问题
β 刚体获得角加速度	$\vec{a}$ 质点获得加速度
J 物体转动惯性的量度	m 物体平动惯性的量度
M_z 改变物体绕轴转动状态的原因	$\vec{F}$ 改变物体平动状态的原因

- $M_z \propto \beta$ ， $M_z \propto 1/J$
- 力矩相同，若转动惯量不同，产生的角加速度不同
- J一定，力矩越大，刚体的β越大
- 当M_z为零时，则刚体保持静止或匀速转动

图(a)为一轻绳长为l、质量为m的单摆，图(b)为一长度为l、质量为m能绕水平固定轴O自由转动的均质细棒，现将单摆和细棒同时从与竖直线成θ角的位置由静止释放，若运动到竖直位置时，单摆、细棒的角速度分别以ω_1、ω_2表示，则



A. $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2$　　B. $\omega_1 = \omega_2$

C. $\omega_1 = \frac{2}{3}\omega_2$　　D. $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_2$

选取垂直纸面向外为正

对(a)图

小球所受力矩为 $M_z = mgl\sin\theta$

根据刚体转动定律 $M_z = J\beta = ml^2\beta$

求得 $\beta = \frac{g\sin\theta}{l}$

根据 $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$

分离变量积分 $\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_{\theta}^{0}\frac{g\sin\theta}{l}\mathrm{d}\theta$

得 $\omega^2 = \frac{2g}{l}(1-cos\theta)$

对(b)图

杆所受力矩为$M_z = mg\frac{1}{2}l\sin\theta$

根据刚体转动定律 $M_z = J\beta = \frac{1}{3}ml^2\beta$

求得 $\beta = \frac{3g\sin\theta}{2l}$

根据 $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$

分离变量积分 $\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_{\theta}^{0}\frac{3g\sin\theta}{2l}\mathrm{d}\theta$

得 $\omega^2 = \frac{3g}{l}(1-cos\theta)$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1=\Delta\vec{L}$$

质点所受的合力矩的角冲量等于质点的角动量的增量。 ---质点角动量定理

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

质点系所受合外力矩的角冲量等于质点系总角动量的增量。---质点系角动量定理

$$\vec{M}_{外}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}M_z\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}L_z=J\omega_2-J\omega_1=\Delta L_z$$

刚体所受对转轴的合外力矩的角冲量等于刚体对转轴的角动量的增量。

---定轴转动刚体角动量定理

$$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta$$

- 力矩、角动量、角速度均对惯性系中同一个参考点或同一转轴。

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$ 常矢量

如果对于某一固定点，质点所受的合外力矩为零，则此质点对该固定点的角动量不随时间变化。---质点角动量守恒定律

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

若 $\vec{M}_{外}=0$，则 $\vec{L}=$ 常矢量

质点系所受外力对某参考点的力矩的矢量和为零时，质点系对该参考点的总角动量不随时间变化。---质点角动量守恒定律

$$\vec{M}_{外}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$J\uparrow\Longrightarrow\omega\downarrow$

$J\downarrow\Longrightarrow\omega\uparrow$

若 $M_z=0$，则 $L_z=J\omega=$ 常量

刚体所受外力对转轴的力矩的矢量和为零时，刚体对转轴的角动量不随时间变化。

---定轴转动刚体角动量守恒定律

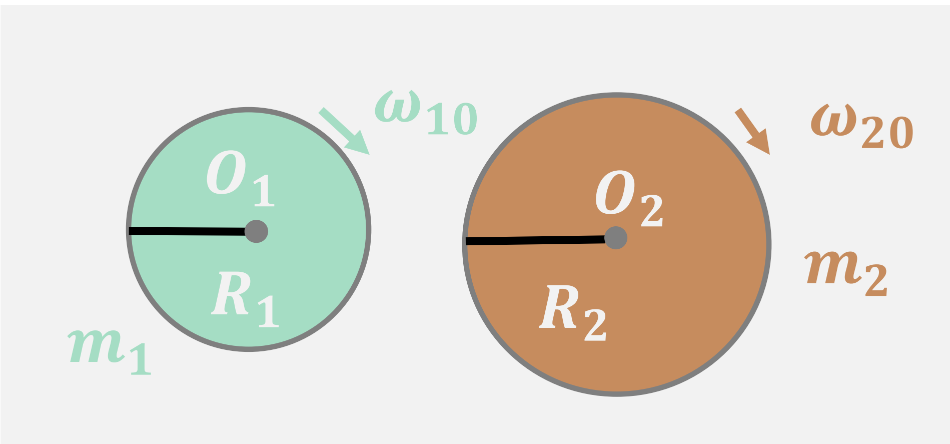
$$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta$$

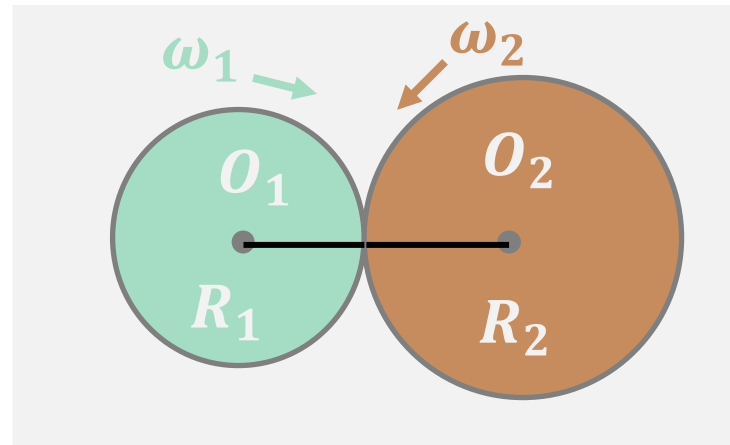
- 力矩、角动量、角速度均对惯性系中同一个参考点或同一转轴。

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为J_0，角速度为ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为$\frac{1}{3}J_0$，这时她转动的角速度变为

A. $\frac{1}{3}\omega_0$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$ **C.** $\sqrt{3}\omega_0$ **D.** $3\omega_0$

已知：两平行圆柱在水平面内转动 m_1，R_1，ω_{10}；
m_2，R_2，ω_{20}；
求接触且无相对滑动时 $\omega_1=?$ $\omega_2=?$





解：因摩擦力为内力，外力过轴，外力矩为零，则m_1和m_2系统接触前后角动量守恒，以顺时针方向旋转为正

$$J_1\omega_{10}+J_2\omega_{20}=J_1\omega_1-J_2\omega_2 \qquad (1)$$

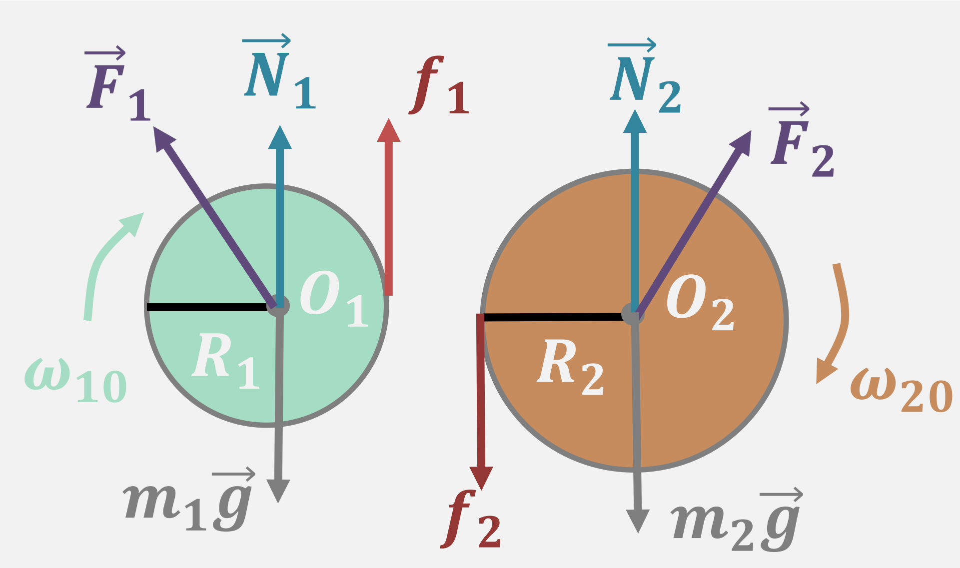
接触点无相对滑动：$\omega_1 R_1=\omega_2 R_2$ (2)

$$J_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2 \qquad (3)$$

$$J_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2 \qquad (4)$$

联立1、2、3、4式求解。

原因: 角动量守恒中力矩和角动量应对同一个轴而言，而此处不是。



$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$为轴的冲击力

以O_1为轴，$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}_2\neq 0$

以O_2为轴，$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}_1\neq 0$

接触前后系统角动量不守恒!

正确的解法:

分别对m_1和m_2应用角动量定理列方程，设$f_1=f_2=f$，以顺时针方向为正:

m_1对O_1轴:

$$-\int R_1 f\mathrm{d}t = J_1\omega_1 - J_1\omega_{10}$$

$$J_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2$$

m_2对O_2轴:

$$-\int R_2 f\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_2\omega_{20}$$

$$J_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2$$

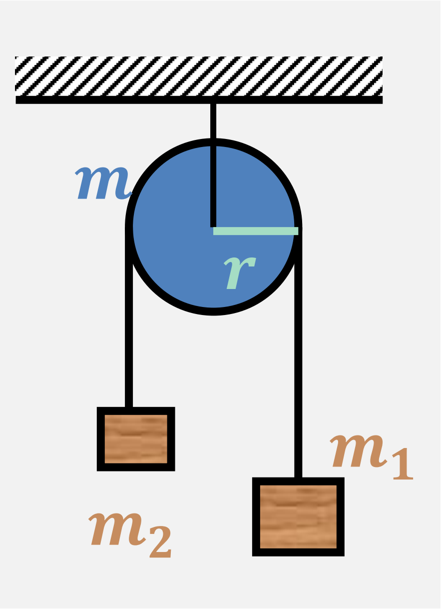
接触点: $\omega_1R_1=\omega_2R_2$

联立各式解得:

$$\omega_1=\frac{m_1R_1\omega_{10}-m_2R_2\omega_{20}}{(m_1+m_2)R_1}$$

$$\omega_2=\frac{m_1R_1\omega_{10}-m_2R_2\omega_{20}}{(m_1+m_2)R_2}$$

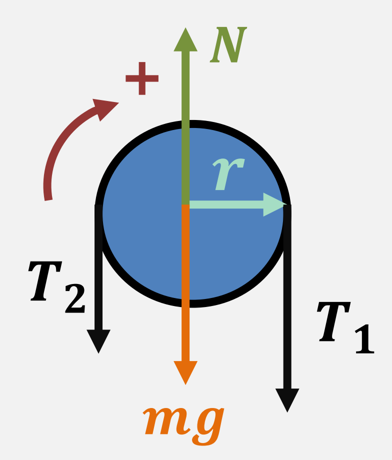
一定滑轮的质量为m，半径为r，一轻绳两边分别系m_1和m_2两物体挂于滑轮上，绳不伸长，绳与滑轮间无相对滑动。不计轴的摩擦，初角速度为零，求(1)两物体的加速度；（2）滑轮转动角速度随时间变化的规律。

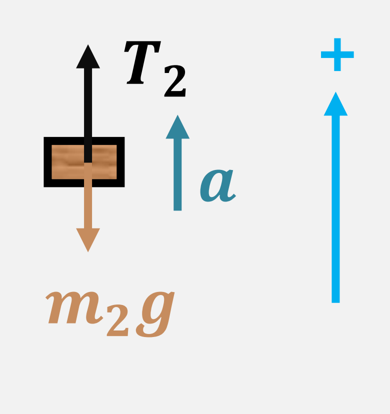


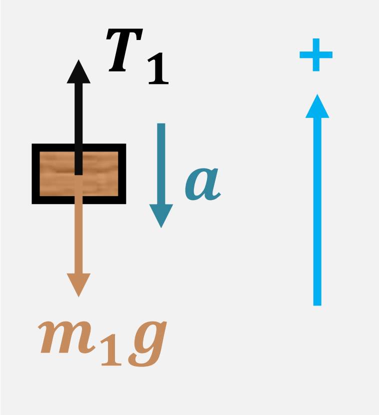
思路：质点平动与刚体定轴转动关联问题，隔离法，分别列方程，先求加速度和角加速度，由 $\beta \longrightarrow \omega$

思考：$T_1 = T_2$ ？

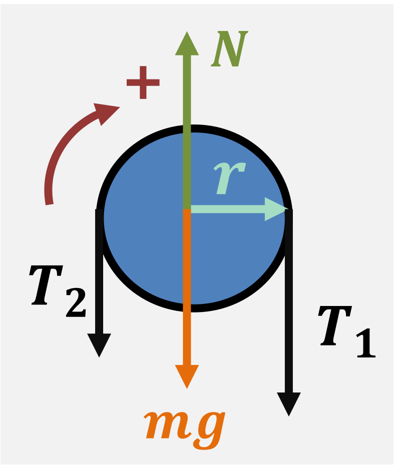
$a_1 = a_2$ ？







解：在地面参考系中，分别以m_1、m_2和m为研究对象，用隔离体法，分别以牛顿第二定律和刚体定轴转动定律建立方程。



物体m_1： $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

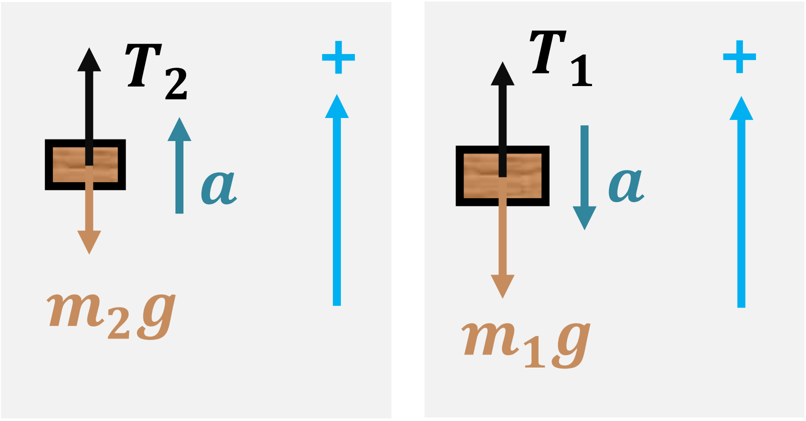
物体m_2： $T_2 - m_2 g = m_2 a$ (2)

滑轮m：以顺时针方向为正方向

$$T_1 r - T_2 r = J\beta = \frac{1}{2} m r^2 \beta \quad (3)$$

绳与滑轮间无相对滑动，由角量和线量的关系

$$a = r\beta \quad (4)$$



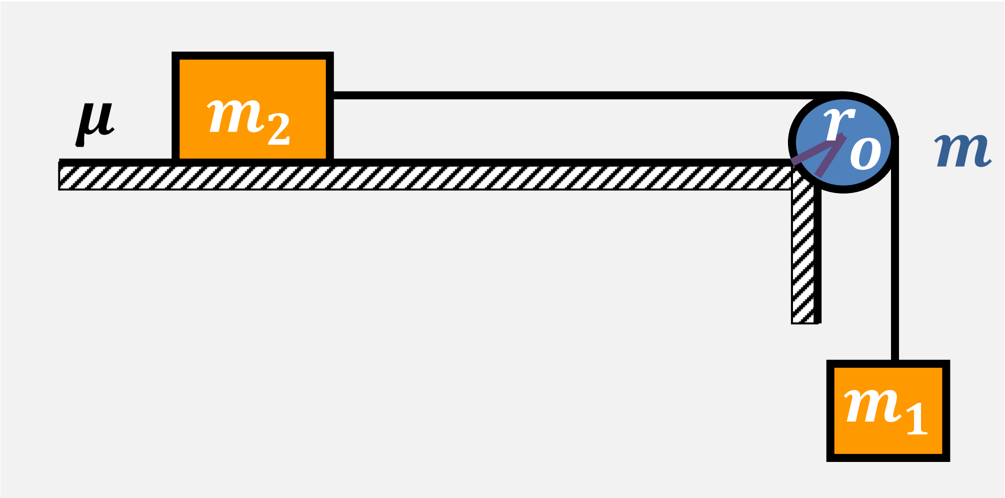
解方程 (1)- (4)，得

两物体的加速度 $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$

滑轮转动角速度 $\omega = \omega_0 + \beta t$

$$= \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r} t$$

如图示，两物体质量分别为m_1和m_2，滑轮质量为m，半径为r。已知m_2与桌面间的滑动摩擦系数为μ，求m_1下落的加速度和两段绳中的张力，假设绳不伸长，绳与滑轮间无相对滑动。

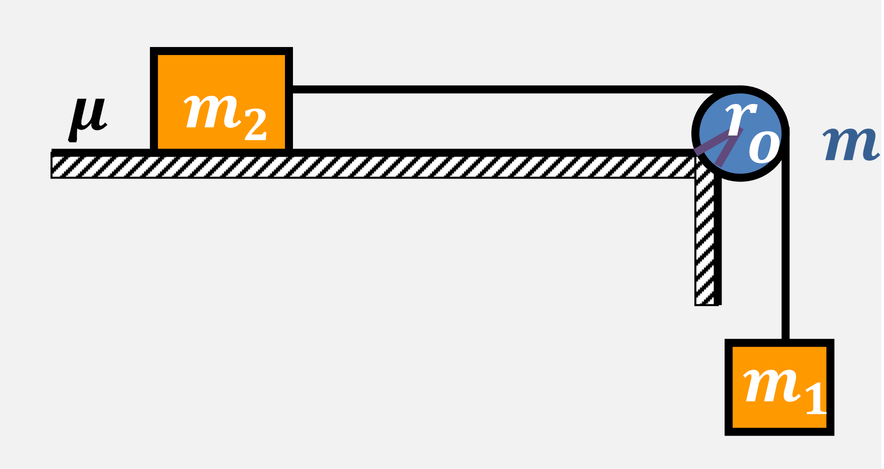


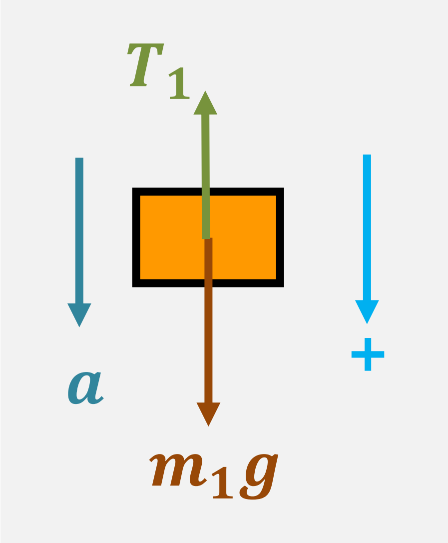
思路：在地面参考系中，选取m_1、m_2和滑轮m为研究对象，采用隔离体法分别运用牛顿定律和刚体定轴转动定律求解。

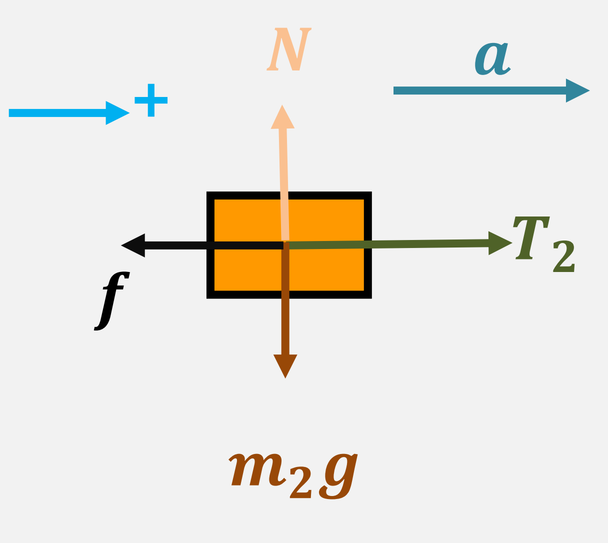
解：在地面参考系中，选取m_1和m_2滑轮m为研究对象，采用隔离体法分别运用牛顿定律和刚体定轴转动定律求解。

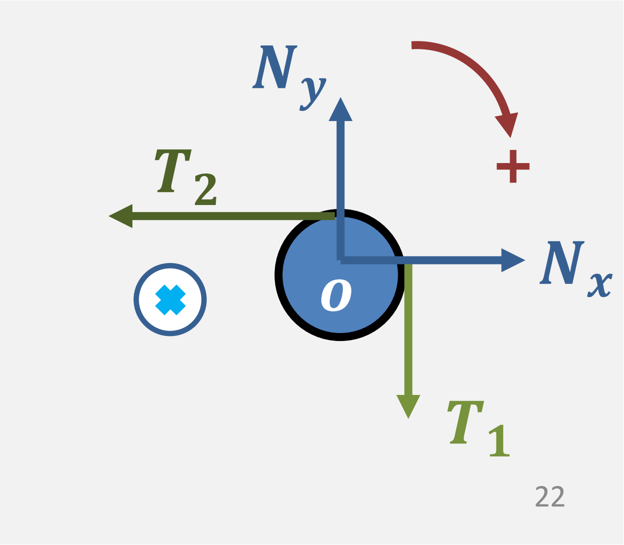
列方程

$$
\begin{cases}
m_1 g - T_1 = m_1 a \\
T_2 - f = m_2 a \\
f = \mu N \\
N - m_2 g = 0 \\
(T_1 - T_2) r = \dfrac{1}{2} m r^2 \beta \\
a = r\beta
\end{cases}
$$

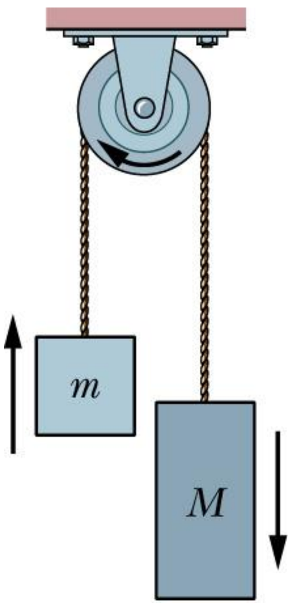


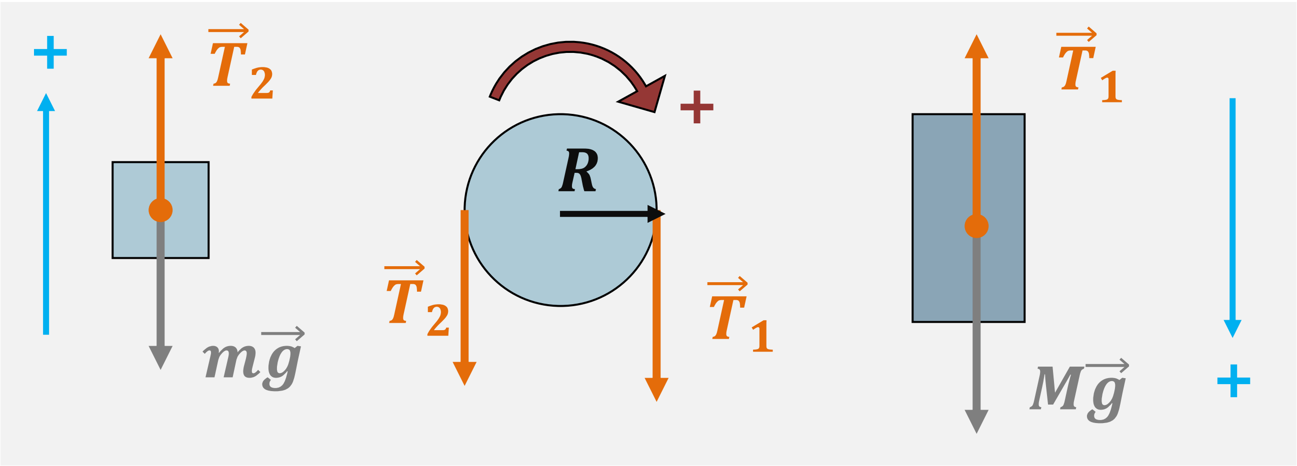






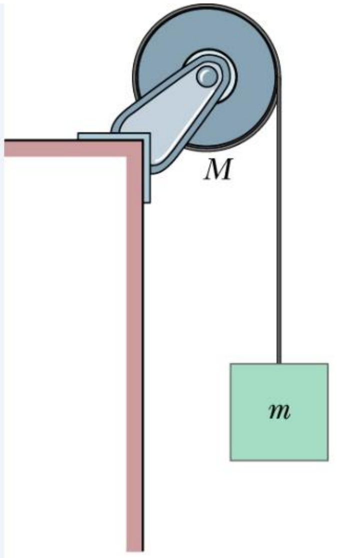
如图所示，大物块质量为$M = 500\text{g}$, 小物块质量为$m = 460\text{g}$, 一个半径为5.00cm，半径为R，质量不可忽略的滑轮被固定在一个水平定轴上。由静止开始，当大物块M在5.00s内下降$h = 75.0\text{cm}$时（绳与滑轮之间无滑动）。求 (a) 物块的加速度; (b) 绳中的张力; (c) 滑轮的角加速度; (e) 滑轮的转动惯量。





$$
\begin{cases}
Mg - T_1 = Ma \\
T_2 - mg = ma \\
(T_1 - T_2)R = J\beta \\
a = R\beta \\
h = \dfrac{1}{2}at^2
\end{cases}
$$

如图所示为一个质量$M=2.5\mathrm{kg}$,半径$R=20\mathrm{cm}$的均匀圆盘装在一个水平轴上，一个质量$m=1.2\mathrm{kg}$的物块由一根绕在盘沿上、无质量的绳悬着，绳不打滑，在轴上没有摩擦。（1）求下落的物块的加速度、圆盘的角加速度和绳中的张力。（2）若使圆盘在$t=0$时从静止开始运动，那么在$t=2.5\mathrm{s}$时它的转动动能是多少?

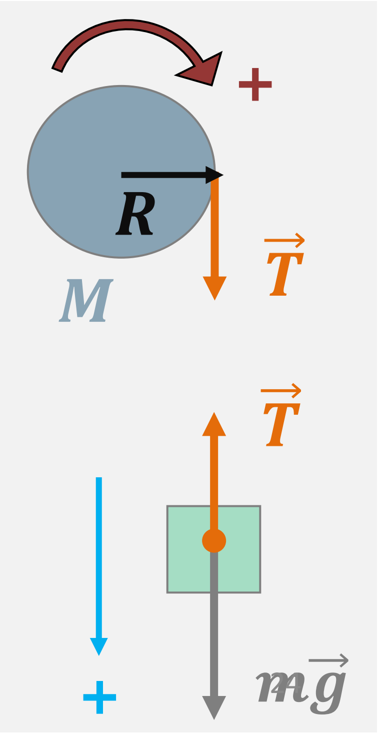


解：滑轮和物块的受力图如右图

对物块: 由牛顿第二定律得 $mg-T=ma$ (1)

对圆盘：以顺时针方向为正，由刚体定轴转动定律可得绳的张力T对O轴的力矩 $M_z=RT=J\beta=\frac{1}{2}MR^2\beta$ (2)

绳不打滑条件，角量和线量的关系 $a=R\beta$ (3)



物块的加速度 $a=\frac{2m}{2m+M}g=\frac{2\times1.2}{2\times1.2+2.5}\times9.8=4.8\,(\mathrm{m/s^2})$

绳中的张力 $T=\frac{1}{2}Ma=\frac{1}{2}\times2.5\times4.8=6.0\,(\mathrm{N})$

圆盘的角加速度 $\beta=\frac{a}{R}=\frac{-4.8}{0.2}=-24\,(\mathrm{rad/s^2})$

(2) 圆盘转动动能

方法一：由角速度公式得

$$\omega = \omega_0 + \beta t = 0 + \beta t = \beta t$$

故圆盘的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(\beta t)^2 = \frac{1}{4}M(R\beta t)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 2.5 \times [0.2 \times (-24) \times 2.5]^2 = 90\ (\mathrm{J})$$

方法二：设圆盘转动初末角位置分别为θ_i和θ_f，由运动学公式得

$$\theta_f - \theta_i = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 0 + \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}\beta t^2$$

恒定力矩做功为

$$A = M_z(\theta_f - \theta_i) = RT(\theta_f - \theta_i) = \frac{1}{2}TR\beta t^2$$

由定轴转动的动能定理得

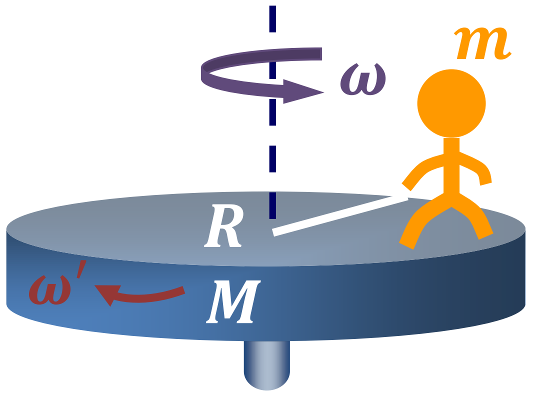
$$E_k = 0 + A = \frac{1}{2}TR\beta t^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 0.2 \times 24 \times (2.5)^2 = 90\ (\mathrm{J})$$

一半径为R、质量为M的转台，可绕通过其中心的竖直轴转动, 质量为m的人站在转台边缘，最初人和台都静止。若人沿转台边缘跑一周 (不计阻力)，相对于地面，人和台各转了多少角度?

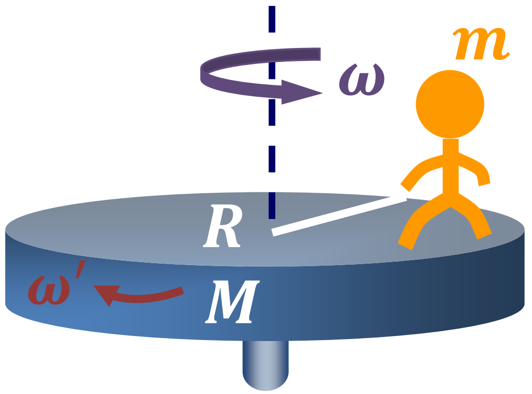
思考:

1. **台为什么转动？向什么方向转动?**
2. **人相对转台跑一周，相对于地面是否也跑了一周?**
3. **人和台相对于地面转过的角度之间有什么关系?**



解：选地面为参考系，设对转轴

人： $J = mR^2$， ω； 台： $J' = \frac{1}{2}MR^2$, ω'



系统对转轴合外力矩为零，角动量守恒。以向上为正

$$0 = J\omega - J'\omega' \implies \omega' = \frac{2m}{M}\omega$$

选逆时针（人跑方向）为正，则

$$\theta_{人地} = \theta_{人台} + \theta_{台地}$$

设人沿转台边缘跑一周的时间为t

$$\int_0^t \omega \mathrm{d}t = 2\pi + \int_0^t (-\omega')\mathrm{d}t$$

$$\implies \int_0^t \omega \mathrm{d}t + \frac{2m}{M}\int_0^t \omega \mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\implies \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m+M}$$

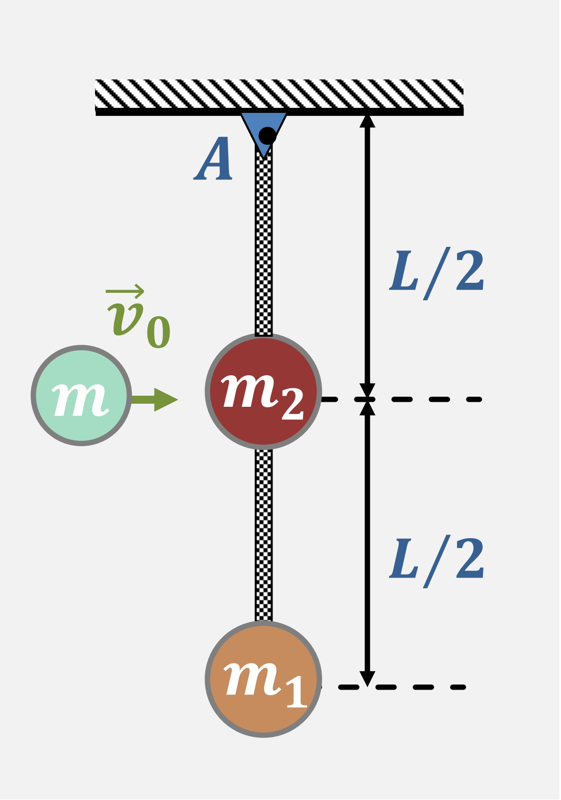
人相对地面转过的角度

$$\theta = \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m + M}$$

台相对地面转过的角度：

$$\theta' = \int_0^t \omega' \mathrm{d}t = \frac{2m}{M}\int_0^t \omega \mathrm{d}t = \frac{4\pi m}{2m + M}$$

已知：轻杆，$m_1=m, m_2=4m$，油灰球m，油灰球m以速度$\vec{v}_0$撞击m_2，发生完全非弹性碰撞。求碰撞后m_2的速率v。



解：m和m_2系统动量守恒

$$mv_0=(m+m_2)v$$

解：m和$(m+m_2)$系统动量守恒

$$mv_0=(m+m_1+m_2)v$$

解：$mv_0=(m+m_2)v+m_1\cdot 2v$

因为相撞时轴A对杆的作用力不能忽略不计，故系统动量不守恒。上面三种方法均不对！

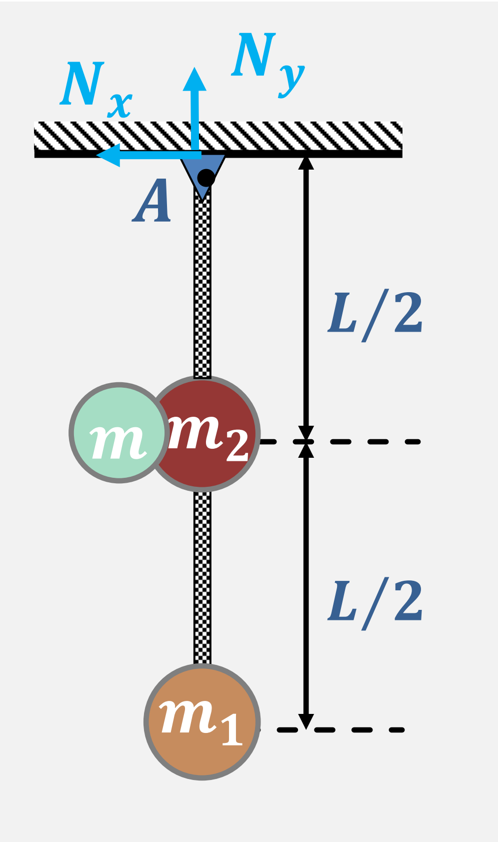
正确的解法：因为碰撞前后重力、轴作用力过轴，对轴的力矩为零，故系统角动量守恒。由此列出以下方程：

$$mv_0\cdot\frac{L}{2}=(m+m_2)v\cdot\frac{L}{2}+m_1\cdot 2v\cdot L$$

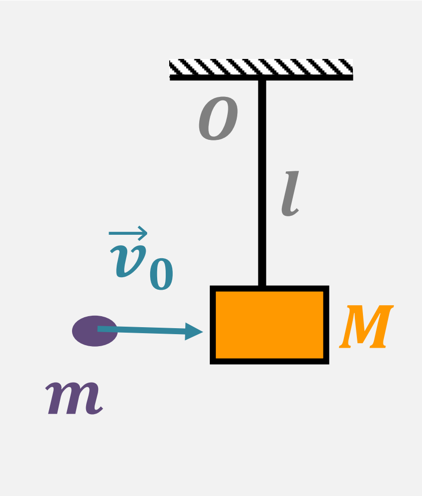
或 $m\left(\frac{L}{2}\right)^2\cdot\omega_0=\left[(m+m_2)\left(\frac{L}{2}\right)^2+m_1L^2\right]\cdot\omega$

由 $\omega_0\cdot\frac{L}{2}=v_0$，$\omega\cdot\frac{L}{2}=v$

得 $v=\frac{v_0}{9}$



注意：区分两类冲击摆



◆ 质点⟺质点　柔绳无切向力

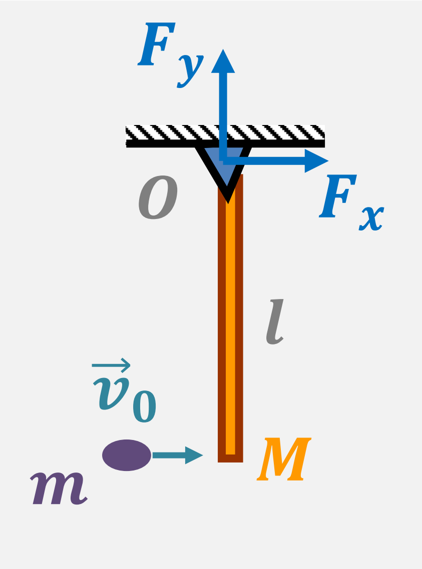
- 水平方向：$F_x = 0$，p_x守恒。

$$mv_0 = (m+M)v$$

- 对O点：$\vec{M} = 0$，$\vec{L}$守恒。

$$mv_0 l = (m+M)vl$$

$$v = \frac{mv_0}{m+M}$$



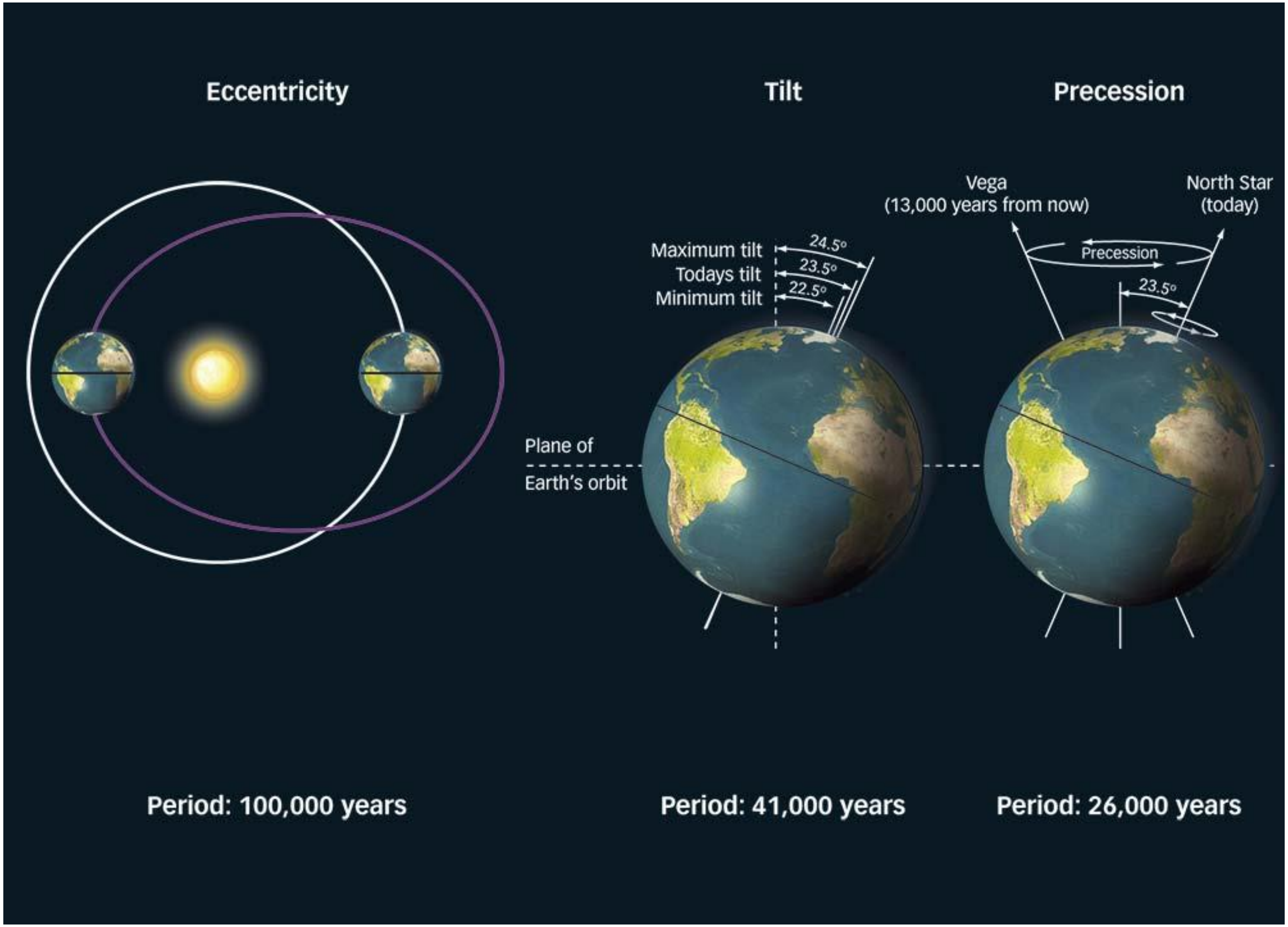
◆ 质点⟺定轴刚体（不能简化为质点）

- 轴作用力不能忽略，动量不守恒。
- 对O轴合力矩为零，角动量守恒。

$$mv_0 l = ml^2\omega + \frac{1}{3}Ml^2 \cdot \omega$$

$$v = \omega l$$

$$v = \frac{mv_0}{m+\frac{1}{3}M}$$


Eccentricity
Tilt
Precession
Vega
(13,000 years from now)
North Star
(today)
Maximum tilt
Todays tilt
Minimum tilt
24.5°
23.5°
22.5°
Precession
23.5°
Plane of
Earth's orbit
Period: 100,000 years
Period: 41,000 years
Period: 26,000 years