Special relativity

狭义相对论基本原理

- 狭义相对性原理
- 光速不变原理

狭义相对论时空观

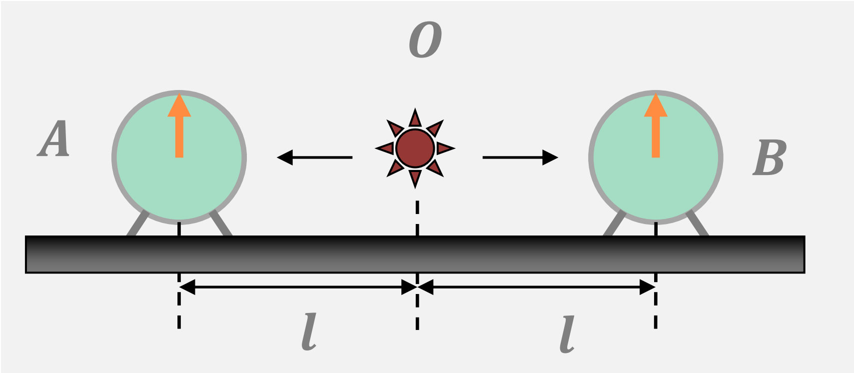
- 同时性的相对性
- 时间延缓、动钟变慢
  原时与非原时
- 长度收缩、动尺缩短
  原长与非原长

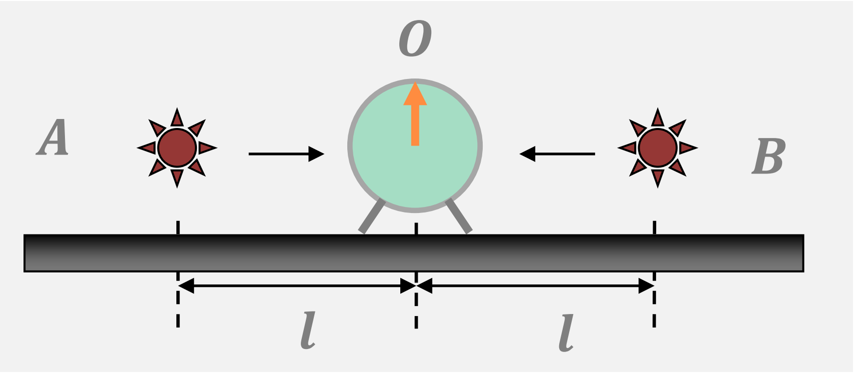
相对论动力学基础

- 质速关系
- 质能关系

不同惯性系中观察者时空观念的关联		
事件	S 系 $\mathrm{I}\,(x_1, t_1)$ $\mathrm{II}\,(x_2, t_2)$	S' 系 $\mathrm{I}(x_1', t_1')$ $\mathrm{II}(x_2', t_2')$
变换	$x = \gamma(x' + ut')$ $t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$	$x' = \gamma(x - ut)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$
事件空间间隔	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$
事件时间间隔	$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$	$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \geq 1$		

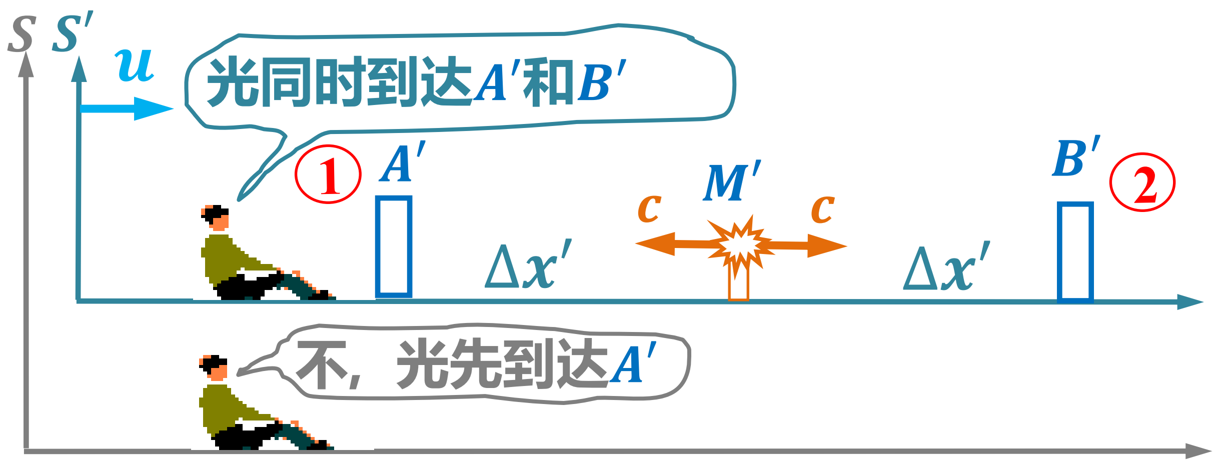
在同一惯性系中的“同时”概念





由**校钟**操作在同一惯性系中建立起统一的时间坐标，并定义“**同时**”概念。

同时性是绝对的，还是相对的？



例：光速不变→
同时性是相对的

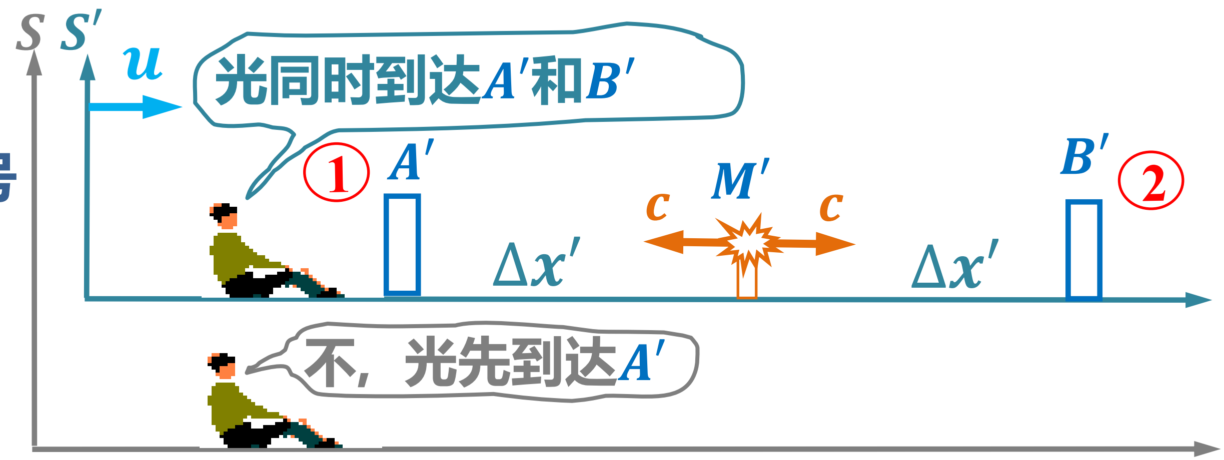
同时性的相对性是相对论中关键性、革命性的思想。

洛伦兹首先导出洛伦兹变换，相对性原理也是由**庞加莱**首先提出的，但是他们都没有认识同时性是相对的。

他们都走近了相对论，却没能创立相对论。只有26岁的爱因斯坦敢于质疑人们关于时间的原始观念，坚持同时性是相对的，才完成了这一历史的重任。

---参考杨振宁教授的讲演：“爱因斯坦：机遇与眼光”

爱因斯坦思想实验



$t = t' = 0$, M'发出一光信号
事件 1：A' 接收到光信号
事件 2：B' 接收到光信号

S'系：爱因斯坦火车
S系：地面参考系
中点 M'：光信号发生器
A'、B'：位于车头、车尾的信号接收器

S'系：光速不变，都是c，M'在A'和B'中点位置。

事件 1、事件 2 同时发生。

S系： A'迎着光、B'背着光运动

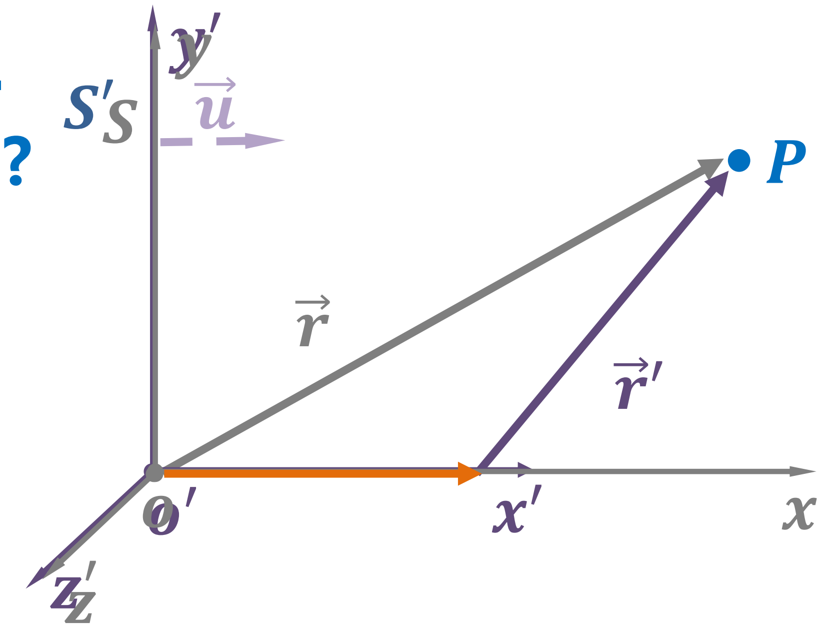
事件 1、事件 2不同时发生，事件1 先发生。

◆ 在相对运动前方的钟走的快，后方的钟走的慢。

研究的问题：两个参照系中两事件发生的先后次序？

在某一惯性系中的同时事件，在另一相对其运动的惯性系中是否是同时的?

	事件1	事件2
S 系	x_1，t_1	x_2，t_2
S'系	x_1'，t_1'	x_2'，t_2'



$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$
$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0?$$

由洛仑兹变换:

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right),\quad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right)$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right]$$
$$= \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$
$$= \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right]$$
$$= \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

S系同时发生的两事件 $\Delta t = 0$

$$\Delta t' = -\gamma\frac{u}{c^2}\Delta x$$

S'系

- 若 $\Delta x = 0$，则 $\Delta t' = 0$，两事件同时发生。
- 若 $\Delta x \neq 0$，则 $\Delta t' \neq 0$，两事件不同时发生。

同时性概念是因参考系而异的，在一个惯性系中认为同时发生的两个事件，在另一惯性系中看来，不一定同时发生。**同时性具有相对性。**

一个惯性系中的同时、同地事件，在其它惯性系中必为同时事件；
一个惯性系中的同时、异地事件，在其它惯性系中必为不同时事件。

- ◆ 同时性的相对性只发生在相对运动方向上。
- ◆ 同时性的相对性还有一种说法是：时钟不同步。
  一个惯性系中已经校准（同步）的时钟在另一个参考系看来是没有校准（不同步）的。
  在相对运动前方的钟走的快，后方的钟走的慢。

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

当$u << c$时：

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left[\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')\right] \approx 0$$

---牛顿力学认为同时性是“绝对”的

在两个惯性系相对运动的方向上发生的两个事件，若在一个惯性系中这两个事件同时发生，则在另一惯性系中观测，总是处于前一个惯性系运动后方的事件先发生。

- **在某一惯性系中同时发生的两事件，在另一与之有相对运动的惯性系中观察，可能不同时发生。**
- **同时性的相对性是光速不变原理的直接结果。**
- **“同时性” 只有在同一惯性系中或事件发生在空间同一处才能进行比较，空间上远离的事件在不同参照系中没有统一的同时性。**

两个事件发生的时序与因果律关系

由洛仑兹变换 $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$

$$= \gamma\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

$u < c$

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = ?$

事件1、事件2

S系：若事件1先发生，$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$

S'系：$\Delta t' = t_2' - t_1'$

$\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) > 0$，则 $\Delta t' > 0$　　事件1先发生

$\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = 0$，则 $\Delta t' = 0$　　同时发生

$\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) < 0$，则 $\Delta t' < 0$　　事件2先发生

◆ 在 S' 系中观测，事件1和事件2发生的时序有可能颠倒。

时序与因果律的关系

S系：事件1先发生　$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$

时序不变：

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) > 0$$

$$\Delta t > \frac{u}{c^2}\Delta x$$

$$v_s = \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c^2}{u}$$

有可能由信号关联

时序可能变：

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) \le 0$$

$$\Delta t \le \frac{u}{c^2}\Delta x$$

$$v_s = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ge \frac{c^2}{u} > c$$

不可能由信号关联

有因果关联的事件之间的信号速率　$v_s = \frac{\Delta x}{\Delta t} \le c < \frac{c^2}{u}$

- 有因果关联或可能有因果关联的事件时序不变，
- 无因果关联的事件才可能发生时序变化。

狭义相对论不违背因果律。

同时性是相对的→对两个相对运动的惯性系来说，沿相对运动方向发生的两个事件之间的时间间隔不同

---时间的量度是相对的

原时（固有时间、本征时间）：$\Delta\tau$

在某一惯性系中同一地点发生的两个事件的时间间隔。

非原时（运动时间）：Δt

在另一个惯性系中测量的这两个事件的时间间隔。

在其他任何运动惯性系观测，这两个事件的时间间隔：

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad \Delta t > \Delta\tau \quad \text{（原时）}$$

在一个惯性系中观测，另一个作匀速直线运动的惯性系中同地发生的两个事件的时间间隔变大。---时间延缓

“原时最短”---对时间延缓的另一种说法

“原时最短”：可以同地发生的两个事件的时间间隔，在它们同地发生的惯性系中最短。

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

非原时　　原时

Δt是原时。

$\Delta t'$是S'系中不同地点的同步时钟测得，叫运动时。

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t_2' - t_1' \\ &= \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \\ &= \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)\end{aligned}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

非原时　　原时

$\Delta t'$是原时。

Δt是S系中不同地点的同步时钟测得，叫运动时。

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \gamma\left[(t_2' - t_1') + \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')\right] \\ &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)\end{aligned}$$

$\Delta t > \Delta t'$意味着S'系的一只钟（测固有时）比S系的多只钟(同步，测运动时)测得的时间间隔小，似乎走得慢点，这个效应称为时间延缓。

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

非原时　　原时

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$= \gamma\left[(t_2' - t_1') + \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')\right]$$
$$= \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

- S'系中，发生在同一地点的两事件的时间间隔为固有时或原时，是运动物体时间进程的客观量度。而在S系中测得的此两事件的时间间隔总大于固有时。所以说运动的时钟变慢。
- 时间延缓是一种相对效应：S'系中的观察者发现静止于S系中相对于自己运动的任一只钟比自己参照系中的一系列同步的钟走得慢。
- 其实钟是一样的的标准钟，走得一样快。运动时钟变慢只是S'系中一只静止的钟在随 S'系相对于S系运动时，与经过的S 系中的时钟不停地进行比较，比较的结果是S系中的时钟的读数比自己超前了。
- 牛顿的绝对时间概念实际上是相对论时间概念在参照系的相对速度很小时的近似。

$$u << c, \quad \frac{u}{c} \to 0, \quad \gamma \to 1, \quad \Delta t' = \Delta t$$

在涉及某个参考系中两个同地发生的事件的问题中，一般应先确定哪个是原时。

设有静止的许多已经校准的同步钟（静钟），它们的指针走一个格所用时间都为1s。如果让其中的一个钟以$u = 0.8c$的速度相对静止观察者运动，那么在静止观察者看来这个运动的钟（动钟）的指针走一个格用多少时间？

"动钟比静钟走得慢"

解： 事件1：钟的秒针刚开始转一个格
事件2：秒针转完一个格

在相对钟静止的参考系中，事件1、2同地发生，时间间隔$\Delta\tau = 1s$为原时。

静止观察者观测，时间间隔：

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = 1s/\sqrt{1-0.8^2} = 1.67s$$

这纯属时空的性质，而不是钟的结构发生了变化。动钟和静钟的结构完全相同，放在一起时它们走得一样快。

在静止观察者看来，动钟的指针转一个格所用的时间，比本参考系中静钟指针转一个格所用的时间要长$0.67s$。

在涉及某个参考系中两个同地发生的事件的问题中，一般应先确定哪个是原时。

在一个惯性系中观测，在另一个运动惯性系中同一地点发生的任何过程（包括物理、化学和生命过程）的节奏要变慢。

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} < \Delta\tau$$

非原时　　原时

- 时间延缓（时间膨胀）效应是相对的。
- 时间延缓公式只能适用于本征时间和运动时间，不是任意两个事件的时间间隔都有简单的倍数关系，需要利用洛伦兹变化公式讨论。
- 时间延缓效应常用于讨论某一过程所经历的时间，比如粒子衰变、宇宙飞船的飞行等。本征时间只有一个，运动时间有很多。
- 时间延缓但是不会颠倒，所以不会违背因果关系。

实验验证：μ子衰变

宇宙射线和大气相互作用时能产生π介子衰变，在大气上层放出μ子。这些μ子的速度约为$0.998c$，如果在实验室中测得静止μ子的寿命为$2.2\times10^{-6}\mathrm{s}$，试问，在8000m高空由$\pi$介子衰变放出的$\mu$子能否飞到地面?

按照相对论理论，地面参考系测得μ子的寿命应为

$$\Delta t=\gamma\Delta t'=\gamma\tau$$

在地面参考系看来，μ子的飞行距离为

$$L=u\Delta t=u\gamma\tau$$

$$=\frac{0.998\times3\times10^{8}\times2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.998^{2}}}=10420\mathrm{m}>8000\mathrm{m}$$

显然，μ子可以飞到地面。

测量结果：到达地面的μ子流为$500\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

验证了相对论时间膨胀效应。

实验验证：μ子衰变

宇宙射线和大气相互作用时能产生π介子衰变，在大气上层放出μ子。这些μ子的速度约为$0.998c$，如果在实验室中测得静止μ子的寿命为$2.2\times10^{-6}\mathrm{s}$，试问，在8000m高空由$\pi$介子衰变放出的$\mu$子能否飞到地面?

按照经典理论，μ子飞行的距离为

$$L = u\tau$$
$$= 0.998\times3\times10^{8}\times2.2\times10^{-6} = 658.7\mathrm{m}$$

显然，μ子不能飞到地面。

实验验证：

1966年，实验中让μ子沿一直径为14米的圆环运动再回到出发点，结果表明运动的μ子的确比静止的μ子寿命更长。

静止的π介子衰变的平均寿命是2.5×10^{-8}s。当它以速率$u=0.99c$ 相对于实验室运动时，在衰变前能通过多长距离?

解：寿命2.5×10^{-8}s是介子参照系中衰变过程的原时，其在实验室参照系中的对应时间间隔应为

$$\Delta t=\gamma\Delta t'=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$=\frac{2.5\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.99^2}}=1.8\times10^{-7}\ (\mathrm{s})$$

通过的距离为 $L=u\Delta t$

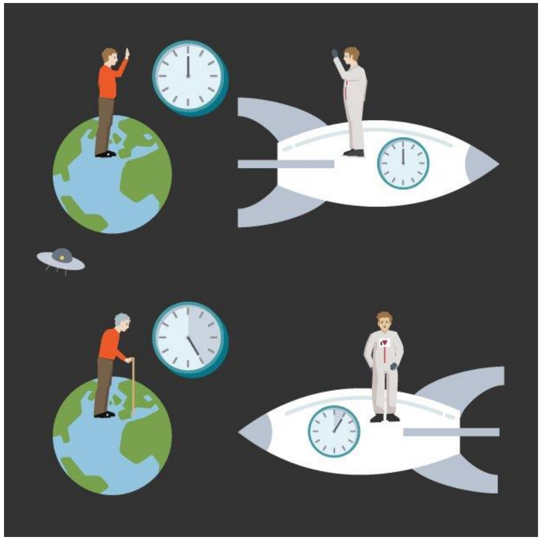
$$=0.99\times3\times10^{8}\times1.8\times10^{-7}=53\ (\mathrm{m})$$

与实验结果 52m 符合很好。

时间延缓效应的实验验证

双生子“佯谬”

有一对双生兄弟A和 B，A留在地球上生活，B登上飞船（速度接近光速）作太空旅行。



◆ 地球参考系：

飞船高速离开，高速返回，由时间延缓效应，飞船上的动钟变慢，B返回地球后，A发现B比他年轻了。

◆ 飞船参考系：

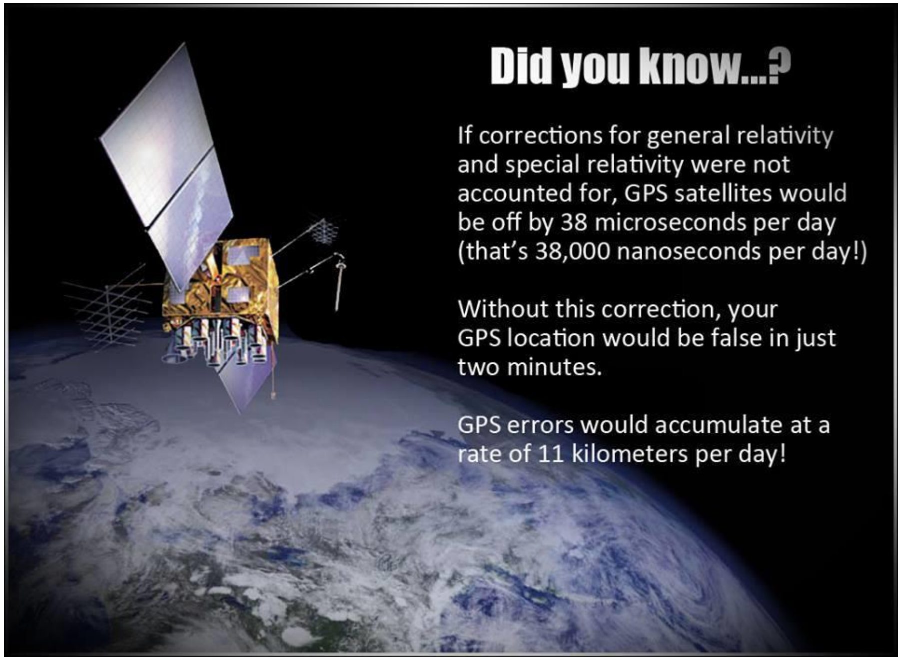
地球高速离开，高速返回，地球上的时钟因时间延缓效应走得较慢，当地球回到飞船时，B发现A比他更年轻。

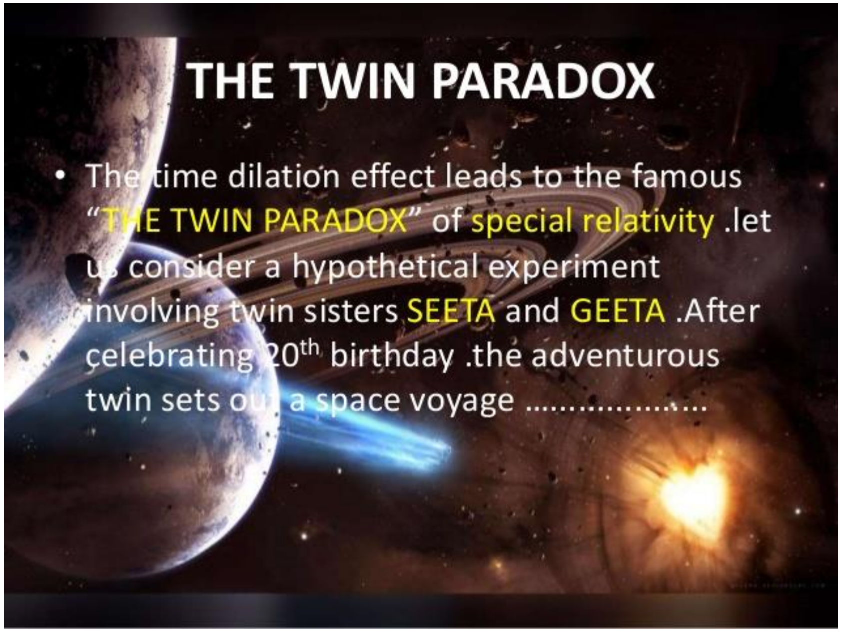
广义相对论：加速系相当于引力场
狭义相对论：参照系的跳跃

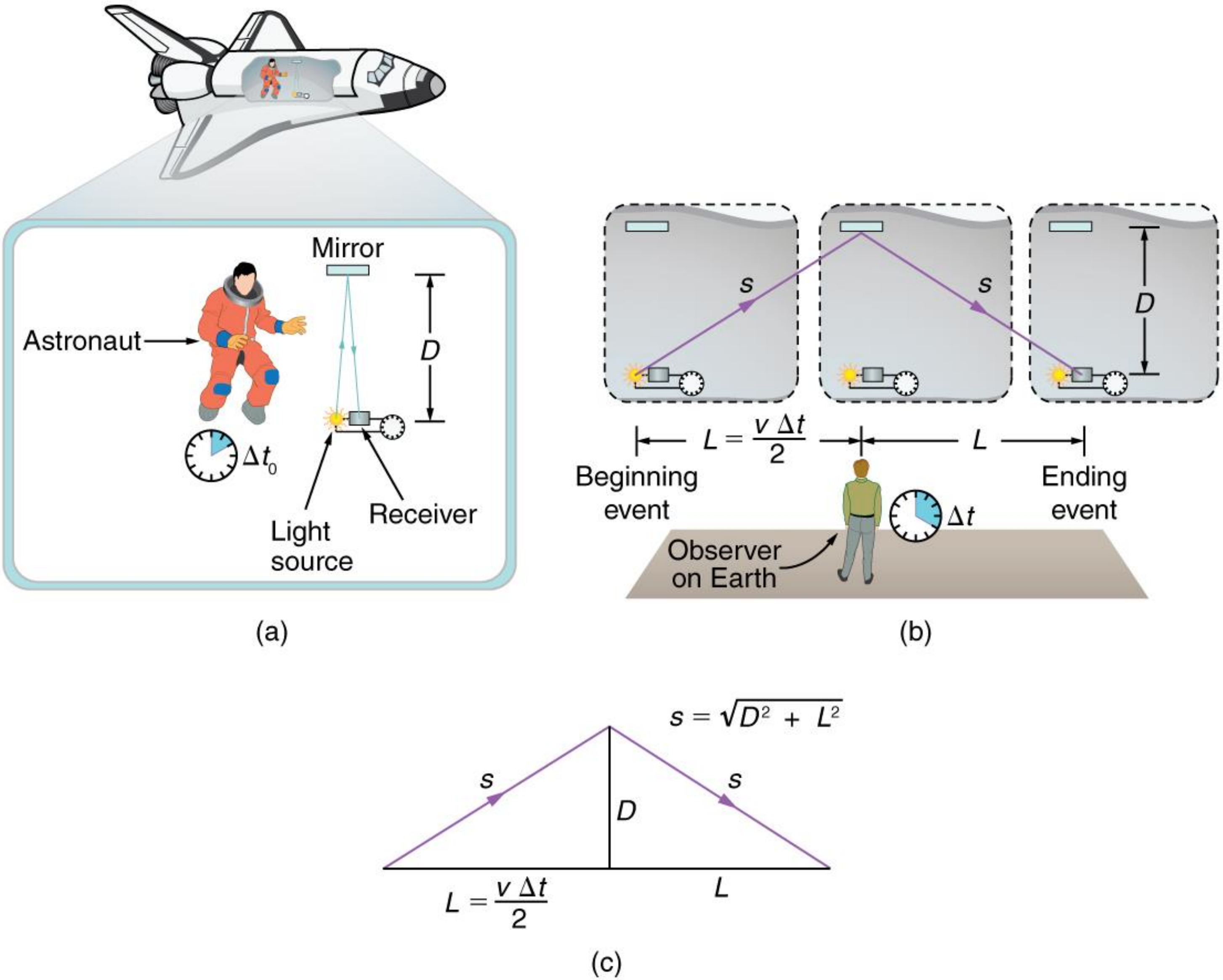
双生子效应：实际情况是飞船旅行者B更年轻。

1971年，美国海军天文台把四台铯原子钟装上飞机从华盛顿出发，分别向东和向西作环球飞行。结果发现，向东飞行的铯钟与停放在该天文台的铯钟之间读数相差59ns，向西飞行时，这一差值为273ns。


Speed of Light =
299,792 km/sec
Earth to Moon = 1.3 Light seconds
Earth to Sun = 8 Light minutes
Earth to Mars = 12.7 Light minutes
Earth to Alpha Centauri = 4.4 Light years
Earth to far side of our Milky Way Galaxy = 52,000 Light years


Did you know...?
If corrections for general relativity and special relativity were not accounted for, GPS satellites would be off by 38 microseconds per day (that's 38,000 nanoseconds per day!)
Without this correction, your GPS location would be false in just two minutes.
GPS errors would accumulate at a rate of 11 kilometers per day!


THE TWIN PARADOX
• The time dilation effect leads to the famous "THE TWIN PARADOX" of special relativity .let us consider a hypothetical experiment involving twin sisters SEETA and GEETA .After celebrating 20th birthday .the adventurous twin sets out a space voyage ………………..



Mirror
Astronaut
D
Δt_0
Light source
Receiver
(a)
s
s
D
$L = \frac{v\,\Delta t}{2}$
L
Beginning event
Ending event
Observer on Earth
Δt
(b)
$s = \sqrt{D^2 + L^2}$
s
s
D
$L = \frac{v\,\Delta t}{2}$
L
(c)

一飞船以$9\times10^3\mathrm{m/s}$的速率相对于地面（假定为惯性系）匀速飞行。飞船上的钟走了 5s，问地面上经历了多少秒?

解：地面为S系，船为S'系。 $\Delta t' = 5\mathrm{s}$ 是固有时

$$\Delta t = \gamma\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1-(9\times10^3)^2/(3\times10^8)^2}}$$

$$\approx 5.000000002\ (\mathrm{s})$$

固有长度为 5m 的飞船以 $9\times10^3\mathrm{m/s}$的速率相对于地面匀速飞行时，从地面上测量，它的长度是多少?

解：地面为S系，船为S'系。 $l' = 5\mathrm{m}$ 是固有长度

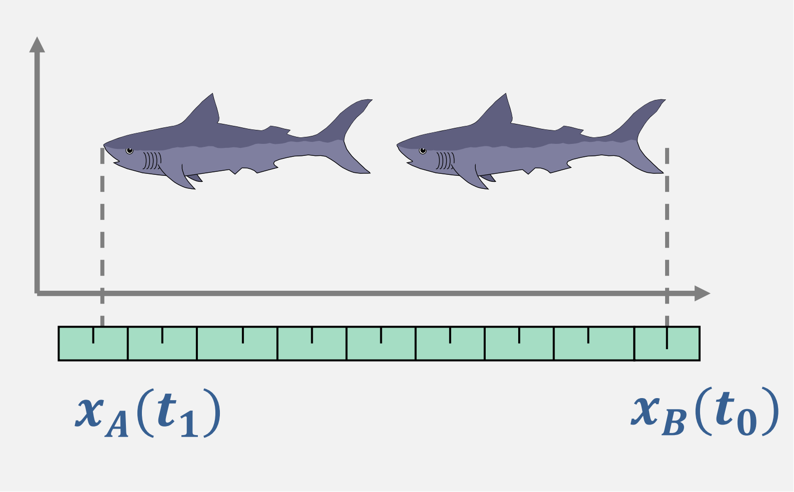
$$l = \gamma^{-1}l' = \sqrt{1-u^2/c^2}\,l'$$

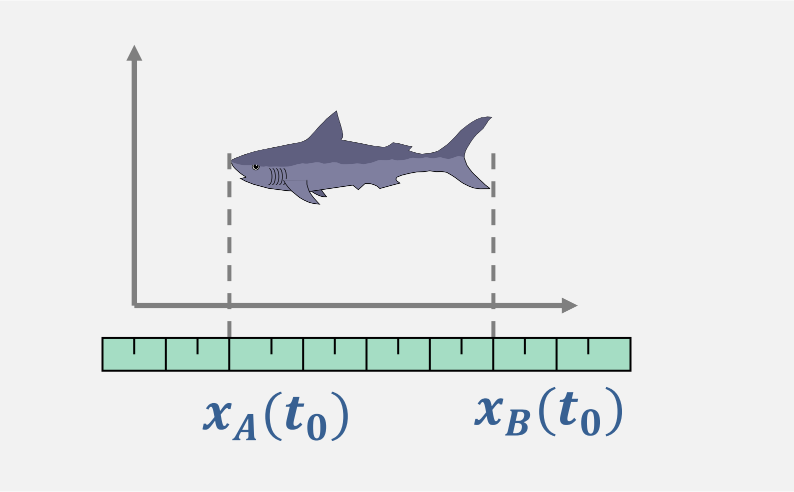
$$= 5\sqrt{1-(9\times10^3)^2/(3\times10^8)^2}$$

$$\approx 4.999999998\ (\mathrm{m})$$

长度的测量：

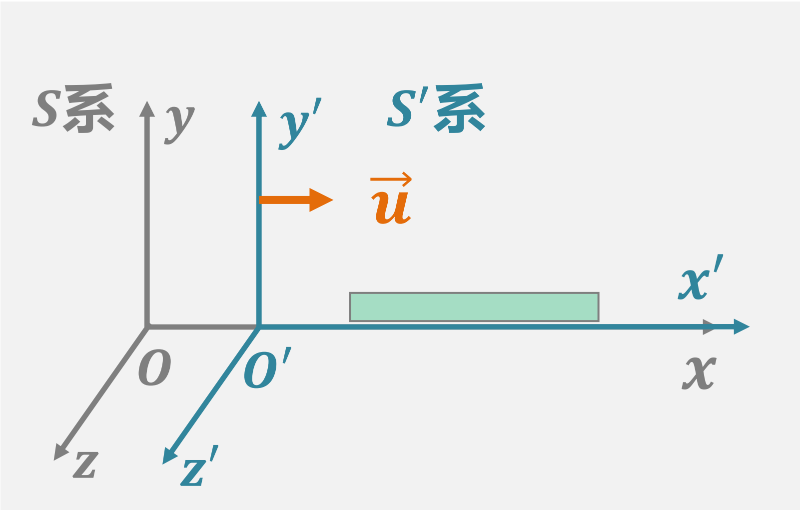
长度 = 在与长度方向平行的坐标轴上，物体两端坐标值之差。
当物体**静止**时，两坐标**不一定同时**记录；
当物体**运动**时，两坐标**必须同时**记录。





$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$

测量物体两端坐标这两个事件→推广到任意两个可以同时发生的事件



	事件1	事件2
S 系	x_1，t_1	x_2，t_2
S'系	x'_1，t'_1	x'_2，t'_2

设尺相对于S'系静止
测量其两端坐标：

在相对于物体静止的参考系中测量的长度

---原长（固有长度、本征长度）

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

两端坐标一定要同时测量。

在相对于物体运动的参考系中测量的长度

---非原长（观测长度）

$$L = x_2 - x_1$$

两端坐标不一定同时测量。

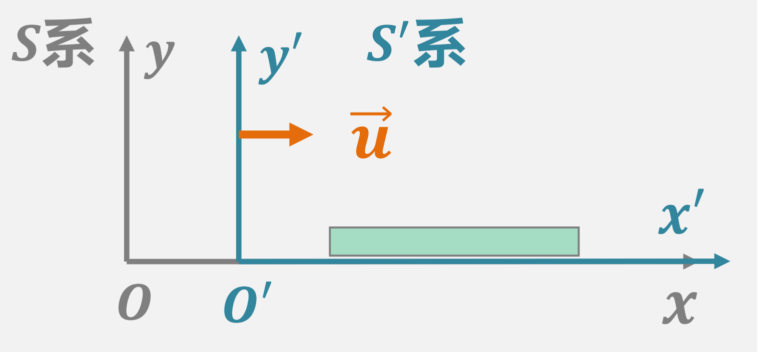
测量静止物体长度（S'系）：

测出物体两端坐标，差值 $\Delta x'$ 就是物体的长度（静长）

---对测量的先后次序没有要求，可以不同时测量物体两端坐标，t_1'可以不等于t_2'。

测量运动物体长度（S系）：

---只有同时测定两端坐标，$t_1 = t_2$，差值Δx才是物体长度（测长）



把测量物体两端坐标，定义为两个事件：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow \underset{(测长)}{\Delta x} < \underset{(静长)}{\Delta x'}$$

在惯性系中观测，运动物体在其运动方向上的长度要缩短。

---长度收缩效应（尺缩效应）

“测长最短”---对长度收缩的更普遍说法

尺相对于S'系静止

静系：$\Delta t'$ 不一定为零

$\Delta x'$ 为原长

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$

原长　观测长度(非原长)　0

动系：Δt 一定为零

Δx 为非原长

$$\Delta x = \gamma^{-1}\Delta x' < \Delta x'$$

非原长　原长

尺相对于S系静止

静系：Δt 不一定为零

Δx 为原长

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' - u\Delta t')$$

原长　观测长度(非原长)　0

动系：$\Delta t'$ 一定为零

$\Delta x'$ 为非原长

$$\Delta x' = \gamma^{-1}\Delta x < \Delta x$$

非原长　原长

◆ 空间间隔的测量是相对的，物体的长度与惯性系的选择有关。

◆ 在一切长度测量中原长最长。

◆ 在其它惯性系中测量相对其运动的尺，总得到比原长小的结果---动尺缩短。

$$L=\gamma^{-1}L_0=\sqrt{1-u^2/c^2}\,L_0<L_0$$

非原长　　原长

长度收缩公式适用条件：
能同时测量动尺（空间间隔）两端的坐标。
否则，只能用空间间隔变换式进行变换。

原长：相对于尺静止的参考系测得的长度。
非原长：相对于尺运动的参考系测得的长度。

- 尺缩效应只在相对运动方向上发生；
- 尺缩效应是高速运动物体的测量形象，不是视觉形象。

$$L=\gamma^{-1}L_0=\sqrt{1-u^2/c^2}\,L_0 \quad \rightarrow L\text{（测长）}< L_0$$

"测长最短"：可以同时发生的两个事件的空间间隔，在它们同时发生的惯性系中最短。

在某一惯性系中同时发生的两个事件的空间间隔，记为L（测长）。由同时性的相对性可知，在其他任何沿测长方向作相对运动的惯性系中，这两个事件一定不能同时发生，空间间隔记为L_0。

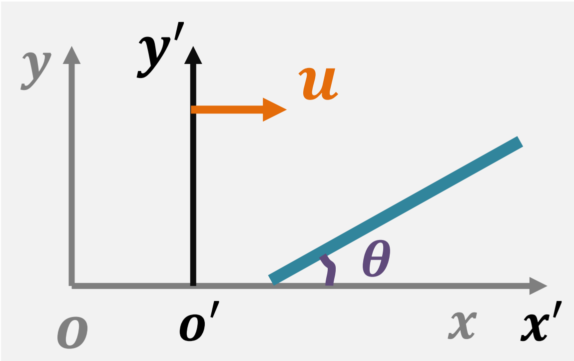
在涉及某个参考系中两个同时发生的事件的问题中，一般应先确定哪个是测长。

- 长度收缩与同时性的相对性有关，是不同惯性系之间进行时间测量的结果。
- 长度收缩只发生在物体运动的方向上，在垂直方向上不收缩。---纵向收缩，横向不收缩。
- 长度收缩纯属时空性质，与在热胀冷缩现象中所发生的实际的收缩和膨胀完全不同。

一根米尺静止放置在S'系中，与$O'x'$轴成30°角。已知S'系平行于S系的Ox轴正向匀速运动，如果在S系中测得米尺与Ox轴成45°角，问:

(1) S'系相对于S的运动速度u为多大?

(2) S系中测得米尺的长度是多少?



解：由题意可知 $\tan 30^\circ = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$，$\tan 45^\circ = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

由 $\Delta y = \Delta y'$得，$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}$

(1) 根据相对论“尺缩”效应，有 $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$

即 $\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ}$$

得 $u = \sqrt{\frac{2}{3}}c = 0.816$

(2) 由于$\Delta y = \Delta y'$

所以 $L'\sin 30^\circ = L\sin 45^\circ$

米尺长度 $L = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}L'$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 1 = 0.707\text{m}$$

宇宙飞船相对地球以 $0.8c$ 飞行，一光脉冲从船尾传到船头，飞船上的观察者测得飞船长90m，地球上的观察者测得光脉冲从船尾传到船头两事件的空间间隔是：

(A) 30 m　(B) 54 m　(C) 270 m　(D) 90 m

解一：设飞船系为S'，地球系为S，S'相对S以$0.8c$运动，

由尺缩效应

$$\Delta l=\gamma^{-1}\Delta l'=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\Delta l'=0.6\times 90=54\ \mathrm{m}$$

光脉冲从船尾传到船头为因果关联事件，在地球系中时序不变：

$\Delta t_{地球}\neq 0$，$\Delta l_{地球}$ **不是地球系中观测到的飞船长度，而只是两事件的空间间隔**

宇宙飞船相对地球以 $0.8c$ 飞行，一光脉冲从船尾传到船头，飞船上的观察者测得飞船长90m，地球上的观察者测得光脉冲从船尾传到船头两事件的空间间隔是：

(A) 30 m　(B) 54 m　(C) 270 m　(D) 90 m

解一：设飞船系为S'，地球系为S，S'相对S以$0.8c$运动，

飞船系中 $\Delta x' = 90\text{m}$，$\Delta t' = 90/c$

地球系中 $\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}\left(90 + 0.8c \times \frac{90}{c}\right) = 270\ \text{m}$$

解二：设飞船系为S，地球系为S'，S'相对S以$-0.8c$运动，

飞船系中 $\Delta x = 90\text{m}$，$\Delta t = 90/c$

地球系中 $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}\left(90 - (-0.8c) \times \frac{90}{c}\right) = 270\ \text{m}$$

一固有长度为100m的火箭以速度$v=0.8c$相对于以地面飞行，发现一流星从火箭的头部飞向尾部，掠过火箭的时间在火箭上测得为10^{-6}秒 。试问地上的观察者测量时

(1) 流星掠过火箭的时间是多少?

(2) 该时间内流星飞过的距离是多少?

(3) 流星运动的速度和方向如何?

解：设火箭为S'系，地面为S系，并以火箭的运动方向为x轴的正方向。令流星到达火箭首、尾端的事件分别为事件1和事件2，依照题意，已知条件为

$$v=0.8c,\quad \Delta x'=x_2'-x_1'=-100\ \text{m},\quad \Delta t'=1.0\times 10^{-6}\text{s}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=5/3$$

(1) 由时间间隔变换公式 $\Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$

得地上测得流星掠过火箭的时间

$$\Delta t=\frac{5}{3}\left(10^{-6}-\frac{0.8c}{c^2}\times 100\right)=1.2\times 10^{-6}\ (\text{s})$$

解：设火箭为S'系，地面为S系，并以火箭的运动方向为x轴的正方向。令流星到达火箭首、尾端的事件分别为事件1和事件2，依照题意，已知条件为

$$v = 0.8c, \quad \Delta x' = x_2' - x_1' = -100\ \mathrm{m}, \quad \Delta t' = 1.0 \times 10^{-6}\mathrm{s}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 5/3$$

(2) 由空间间隔变换公式 $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$
得地上测得该时间内流星飞过的距离

$$\Delta x = \frac{5}{3}\left(-100 + 0.8c \times 10^{-6}\right) = 2.2 \times 10^2\ (\mathrm{m})$$

(3) 流星飞过的距离和时间，是同一S系中的测量值，故飞行速度为

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2.2\times10^2}{1.2\times10^{-6}} = 1.8 \times 10^8(\mathrm{m/s})$$

$u > 0$ 表示在S系中观察流星的方向与火箭的运动同向。
由于 $u < v$ ，实际上是火箭在追赶流星，造成流星由火箭头部飞向尾端。

在理想实验中，静止长为1200m的火车，相对车站以匀速u直线运动，已知车站站台长900m，站上观察者观测到车尾通过站台进口时，车头正好通过站台出口，求：

（1）车的速率是多少?

（2）车上乘客观测到车站站台是多长?

解：（1）火车的静止长度$L_0 = 1200\text{m}$就是其原长（即固有长度），站台上的观察者观测到的长度是火车的运动长度 $L = 900\text{m}$，根据尺缩公式

$$L = \gamma^{-1} L_0 = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, L_0,$$

代入数据 $900 = 1200 \times \sqrt{1 - \frac{u^2}{(3\times10^8)^2}}$，解得 $u = 2 \times 10^8(\text{m/s})$

（2）对于车上的观察者而言，车站是运动的，此时车站的长度将由原长（即固有长度）$L = 900\text{m}$收缩为L'，根据尺缩公式，

$$L' = \gamma^{-1} L = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 900 \times \sqrt{1 - \frac{(2\times10^8)^2}{(3\times10^8)^2}} \approx 671(\text{m})$$

假设空间中有一艘飞船相对于某空间站以$v=0.6c$（c为真空中光速）的匀速度飞离该空间站。在飞船逃离$\Delta t'=10\mathrm{s}$（飞船上的钟)后，为了摧毁该空间站，飞船向空间站发射了一枚导弹。导弹速度相对于空间站为$v_1=0.3c$，问飞船逃离后多长时间（空间站上的钟），导弹到达空间站？计算中假设空间站静止不动。

解：按空间站上的钟，导弹发射的时间是在飞船逃离后

$$\Delta t_1=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{10}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}=12.5\ \mathrm{s}$$

这段时间飞船在空间飞行距离：$L=v\cdot\Delta t_1$

则导弹飞到空间站的时间是：

$$\Delta t_2=\frac{L}{v_1}=\frac{v}{v_1}\Delta t_1=\frac{0.6c}{0.3c}\times 12.5=25\ \mathrm{s}$$

从飞船逃离后到导弹到达空间站的时间是：

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=12.5+25=37.5\ \mathrm{s}$$

“同时”的相对性、时空量度的相对性

事件	S 系 I (x_1, t_1) II (x_2, t_2)	S' 系 I(x_1', t_1') II(x_2', t_2')
变换	$x = \gamma(x' + ut')$ $t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$	$x' = \gamma(x - ut)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$

洛伦兹时空间隔变换

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

一个惯性系中的同时、同地事件，在其它惯性系中必为同时事件；
一个惯性系中的同时、异地事件，在其它惯性系中必为不同时事件。

洛伦兹时空间隔变换

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

“原时”和“非原时”可以涵盖所有的时间间隔测量，
“原长”和“非原长”不能涵盖所有的空间间隔测量。
时间间隔、空间间隔的测量是相对的，与惯性系的选择有关。

- 在一切时间测量中，**原时最短**。
  从相对事件发生地运动的参考系中测量出的时间总比原时长（**时间膨胀**）。
- 每个参考系中的观测者都会认为相对自己运动的钟比自己的钟走得慢（**动钟变慢**）。

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t$$

- 在一切长度测量中**原长最长**；
- 在其它惯性系中测量相对其运动的尺，总得到比原长小的结果---**动尺缩短**。

$$L = \gamma^{-1}L_0 = \sqrt{1-u^2/c^2}\,L_0 < L_0$$

在相对论的基本假设之下研究**质量**、**动量**和**能量**等问题是**相对论动力学**的内容。

相对论动力学的要遵循的原则：

- 动量守恒和能量守恒在不同的惯性系中成立；
- 在不同的惯性系之间满足Lorentz变换；
- 在低速条件下（$v << c$），所有概念和规律与经典力学的一致。

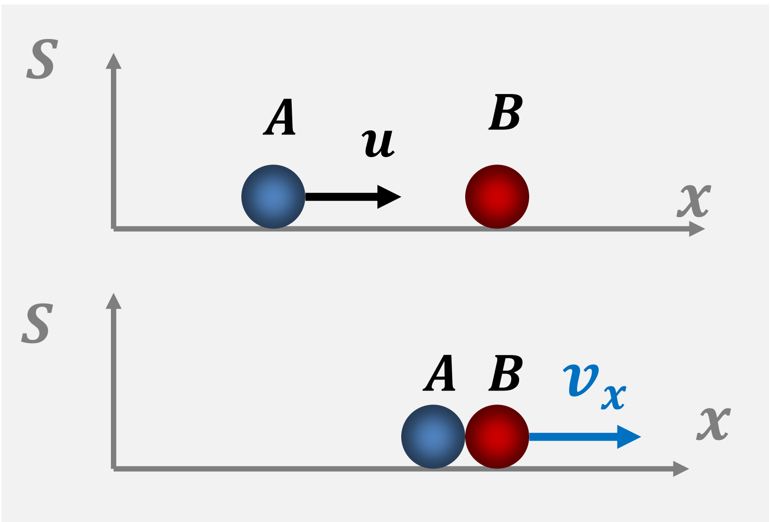
按上述原则动量守恒定律应在Lorentz变换下成立，且动量的概念在低速情况下与经典一致。

假设相对论下动量的概念仍为$\vec{p} = m\vec{v}$，其中质量m为常量。

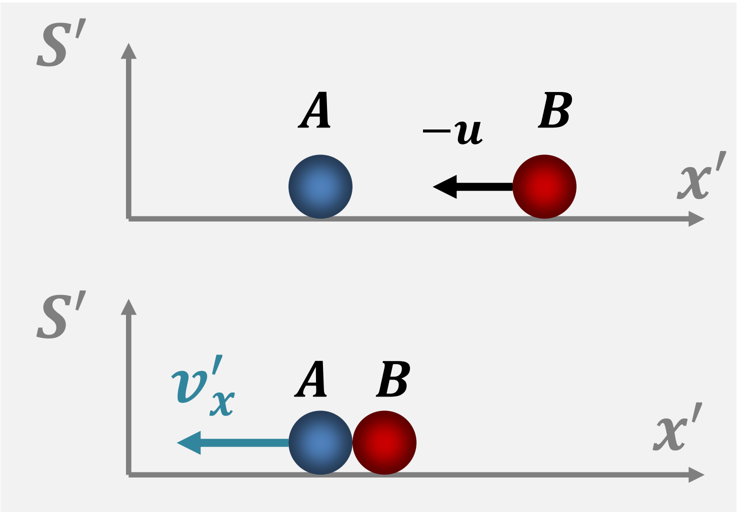
显然动量在Galileo变换下满足守恒定律，但在Lorentz变换下呢?

静系中：m_0　　动系中：$m(u)$

理想实验： 全同粒子的完全非弹性碰撞



固结于粒子B的S系



固结于粒子A的S'系

质量守恒 $m_0 + m(u) = M(v_x)$

动量守恒 $m(u)u = M(v_x)v_x$

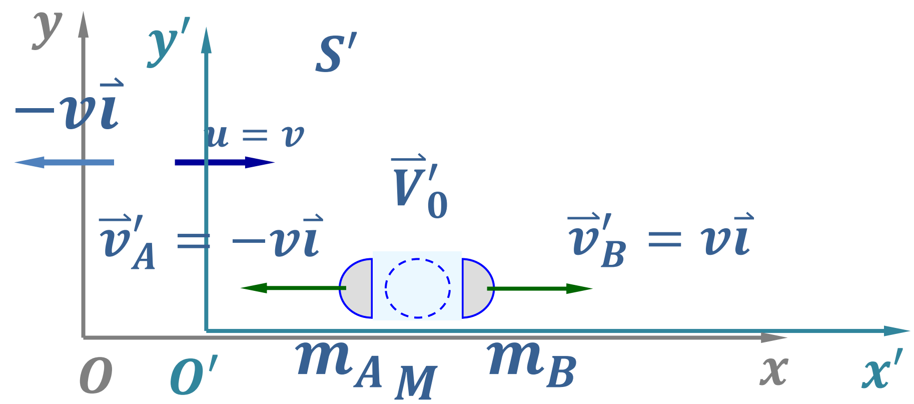
解得 $v_x = \dfrac{m(u)u}{m_0+m(u)}$

$m_0 + m(u) = M(v'_x)$

$-m(u)u = M(v'_x)v'_x$

$v'_x = -\dfrac{m(u)u}{m_0+m(u)}$

在S'系中一静止粒子分裂为两半A和B，分别获速度v'_A和v'_B。



$$M\vec{V}'_0=m_A\vec{v}'_A+m_B\vec{v}'_B \qquad m_A=m_B$$

变换到S系中：

$$V_0=\frac{V'_0+u}{1+V'_0u/c^2}=v$$

$$v_A=\frac{v'_A+u}{1+v'_Au/c^2}=0$$

$$v_B=\frac{v'_B+u}{1+V'_Bu/c^2}=\frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

按相对性原理要求应有：$MV_0=m_Av_A+m_Av_B$

即 $Mv=\dfrac{2m_Bv}{1+v^2/c^2}\neq\dfrac{Mv}{1+v^2/c^2}$ 相对性原理不成立?

经典：质量与速率无关，有 $m_A=m_B=M/2$

相对论：质量与速率有关，即 $m=m(v)$

$$\begin{cases} v_A = 0 \\ v_B = \dfrac{2v}{1+v^2/c^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_A = m(0) \\ m_B = m(v_B) \end{cases}$$

$$Mv = \frac{2m_B v}{1+v^2/c^2} \quad \xrightarrow{M = m_A + m_B} \quad m_A + m_B = \frac{2m_B}{1+v^2/c^2}$$

$$m_B = m_A \frac{1}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} \qquad m(v_B) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}$$

静质量m_0---物体静止时的质量

相对论质量m（Relativistic Mass）

相对论质量

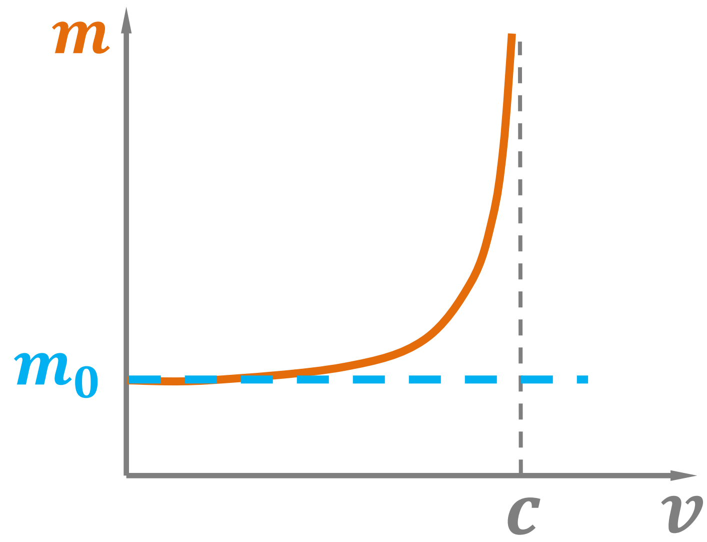
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

相对论动量

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{p}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

质速关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



◆ $v\uparrow\Longrightarrow m\uparrow$。

但只有速率与c可以比拟时才显著。

◆低速情况下与经典结论一致：

$$v<<c\Longrightarrow\ m\approx m_0=\text{常量}$$

◆物体的运动速率不可能达到真空中的光速 c 。

1901年考夫曼发现从放射性镭中放出来的高速电子（β射线），质量随速度变化而变化。

◆相对论力学

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}+m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}+m\vec{a}$$

经典力学（$v<<c$）：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

地球公转$v\sim10^{-4}c$

$$m-m_0\sim5\times10^{-9}m_0$$

$$v = 100\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 10^5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1},\quad m/m_0 = ?$$

$$\frac{m}{m_0} = \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$= 1/\sqrt{1 - 10^{10}/9\times10^{16}} \approx 1.000000056$$

如果物体以小于一百多km/s速率运动，其质量在10^{-6}的精度内不变。

虽然低速下是一个非常小的效应，但要求我们的观念发生深刻的变化。---物体质量并不恒定，随速率增大而增大。

$\frac{V}{c}$	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$
0	1
0.01	1.00005
0.1	1.0050
0.3	1.0483
0.5	1.1547
0.7	1.4003
0.9	2.2942
0.99	7.0888
0.999	22.366
0.999 9	70.712
0.999 99	223.607
0.999 999 999 4	28867.513

美国斯坦福直线加速器：全长 3km，每米加七百万伏电压。

由牛顿定律，电子速度可达 280c，

而实测值为 $v = 0.999\,999\,9997c < c$

相对论动能（relativistic kinetic energy)

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_k &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \cdot d\vec{r} \\ &= \mathrm{d}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = (md\vec{v} + \vec{v}dm) \cdot \vec{v} \\ &= m\vec{v} \cdot d\vec{v} + v^2 dm \\ &= mvdv + v^2 dm \\ &= c^2 dm \end{aligned}$$

由 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，

$$m(c^2 - v^2) = m_0^2$$

$$dm = \frac{mvdv}{c^2 - v^2}$$

$$mvdv = c^2 dm - v^2 dm$$

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$v << c$ 时，$E_k << m_0 c^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Longrightarrow E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

◆ 相对论动能不是 $\frac{1}{2} mv^2$

相对论动能（relativistic kinetic energy）

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

相对论能量 （relativistic energy）

$$E = E_k + m_0c^2$$

$E_0 = m_0c^2$ --- 静止能量（rest energy）

$mc^2 = E_k + m_0c^2$ ---总能量（total energy）

$$E = mc^2$$

---质能关系（equivalence of mass and energy）

相对论统一了质量和能量守恒。

相对论质量，而非静止质量。

目前光子静止质量上限的实验测量结果为1.1×10^{-52} kg，可以认为$m_0 = 0$

孤立系统：

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta\left(m_0 c^2\right) = 0$$

$$\Delta E_k = (-\Delta m_0)c^2$$

$-(\Delta m_0)$ --- （静）质量亏损（mass defect），

为简便起见将质量亏损就用 Δm_0 表示。

当过程前后系统可看成由一些独立质点组成时，

质量亏损 $\Delta m_0 = \sum m_{0i初} - \sum m_{0i末}$

热核反应 ${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1\mathrm{n}$

$$\Delta m_0 = (m_\mathrm{D} + m_\mathrm{T}) - (m_\mathrm{He} + m_\mathrm{n})$$

$$= 0.0311 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$$

释放能量 $\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.799 \times 10^{-12}\ \mathrm{J}$

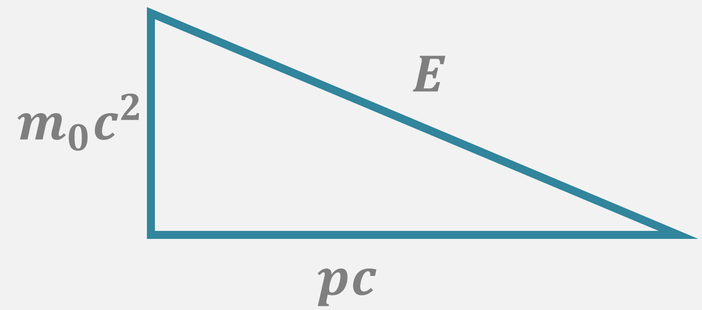
1938 年奥托 - 哈恩（Otto Hahn）发现的“铀核裂变”，开创了人类利用原子能的新纪元。
原子能就是开发利用静止能量。

1kg核燃料释放能量约为3.35×1014 J，这相当于
1kg优质煤燃烧热（2.93×107J）的 1千万倍！

质能关系$E = mc^2$的提出，开创了原子能时代。

相对论动量 $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

$v << c \quad \gamma \to 1 \quad \vec{p} = m_0 \vec{v}$



能量与动量的关系

$$E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{消去}m\text{得}} \vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \quad \to \quad v^2 = \frac{c^4}{E^2}p^2$$

得 $E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{c^2}{E^2}p^2}}$

当$v << c$ 时，

$$\begin{aligned} c^2p^2 &= E^2 - {E_0}^2 \\ &= (E + E_0)(E - E_0) \\ &= E_k(E + E_0) \\ &= E_k \cdot E_0(\gamma + 1) \\ &= 2E_k m_0 c^2 \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

（1）在什么速度下，粒子的动量等于其非相对论动量的两倍？
（2）在什么速度下，粒子的动能等于其非相对论动能的两倍？

解：$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \neq \frac{1}{2}\gamma m_0 v^2$$

（1）$p = \gamma m_0 v$

$$p_0 = m_0 v$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\gamma m_0 v}{m_0 v} = \gamma = 2$$

可得 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c$

（2）$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$E_{k0} = \frac{1}{2}m_0 v^2$$

$$\frac{E_k}{E_{k0}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}m_0v^2} = \frac{\gamma m_0}{m_0} = \gamma = 2$$

可得 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c$

（2）由题意

$$\frac{E_k}{E_{k0}} = \frac{mc^2 - m_0c^2}{\frac{1}{2}m_0v^2} = \frac{(\gamma-1)m_0c^2}{\frac{1}{2}m_0v^2} = 2$$

于是 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 = \dfrac{v^2}{c^2}$

得 $v = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\,c = 0.786c$

观察者甲以$0.8c$速率相对于观察者乙运动，甲携带长L，截面积S，质量为m的棒，棒沿运动方向安放，求乙和甲测定的棒的密度之比。

解：棒相对于甲静止，甲测定的密度为 $\rho=\frac{m}{LS}$

棒相对于乙运动，设乙测定的质量为m'，长度为L'，截面积为S'，则

$$m'=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$L'=\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot L$$

$$S'=S$$

乙测定的密度为 $\rho'=\frac{m'}{L'S'}=\frac{\gamma\, m}{\gamma^{-1}LS}=\gamma^2\rho$

得 $\frac{\rho'}{\rho}=\gamma^2=\frac{1}{1-0.8^2}=\frac{25}{9}\approx 2.78$

解：设合成粒子的运动质量为M，速率为u，
由动量守恒和能量守恒：

$$mv = Mu \qquad (1)$$

$$3m_0c^2 + mc^2 = Mc^2 \qquad (2)$$

由于 $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{m_0}{0.6}$

代入（2）式得 $M = 3m_0 + \frac{m_0}{0.6} = \frac{14}{3}m_0$

再代入（1）式得 $u = \frac{mv}{M} = \frac{\frac{m_0}{0.6}\times 0.8c}{\frac{14}{3}m_0} = \frac{2}{7}c$

又由 $M = \frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，得

$$M_0 = M\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{14}{3}m_0\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2} \approx 4.47m_0$$

质能关系的意义：

◆ 质量概念进一步深化

相对论总能E包含了物体的全部能量（机械能、电磁能、原子能等），解决了经典物理未能解决的物体总能问题；

质量是约束能量的形式，是能量的载体。质量、能量不可分割，没有脱离质量的能量，也没有无能量的质量。无论物质如何运动，二者只由常数c^2相联系。

◆ 质能关系统一了质量守恒定律和能量守恒定律。

在经典物理中二者互相独立，在相对论中二者关联，平行进行。在孤立系统内，

静质量 ⟷ 动质量

静能 ⟷ 动能

} 总质量、总能量不变

牛顿第三定律建立在超距作用和绝对时空观基础之上，而相对论认为场是传递相互作用的媒介，是物质存在的形式：

粒子 $\longleftrightarrow$ 场 $\longleftrightarrow$ 粒子

牛顿第三定律被动量、角动量守恒定律取代。

相对论动力学的三个主要关系

质速关系 $m = \gamma m_0 = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$

质能关系

总能 $E = mc^2$ $\quad \Delta E = c^2 \Delta m$

静能 $E_0 = m_0 c^2$

动能 $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$

能量与动量的关系 $E^2 = p^2 c^2 + {m_0}^2 c^4$

爱因斯坦式的工作程序：

科学观念 → 原理 → 逻辑结论和可观测事实 → 实验检验

低速 → 高速 → 宇观 / 微观

核能利用

相对论不是终极理论

- 狭义相对论未包容非惯性系和引力定律，对称性尚不完善。
- 受决定论思想方法支配，未包容微观世界规律。
- 未能揭示时间箭头的物理意义。

相对论只是物理理论发展中的一个台阶，它不能穷尽各层次事物间的相互联系和作用方式，相对论不是终极理论。