

Special relativity

狭义相对论基本原理

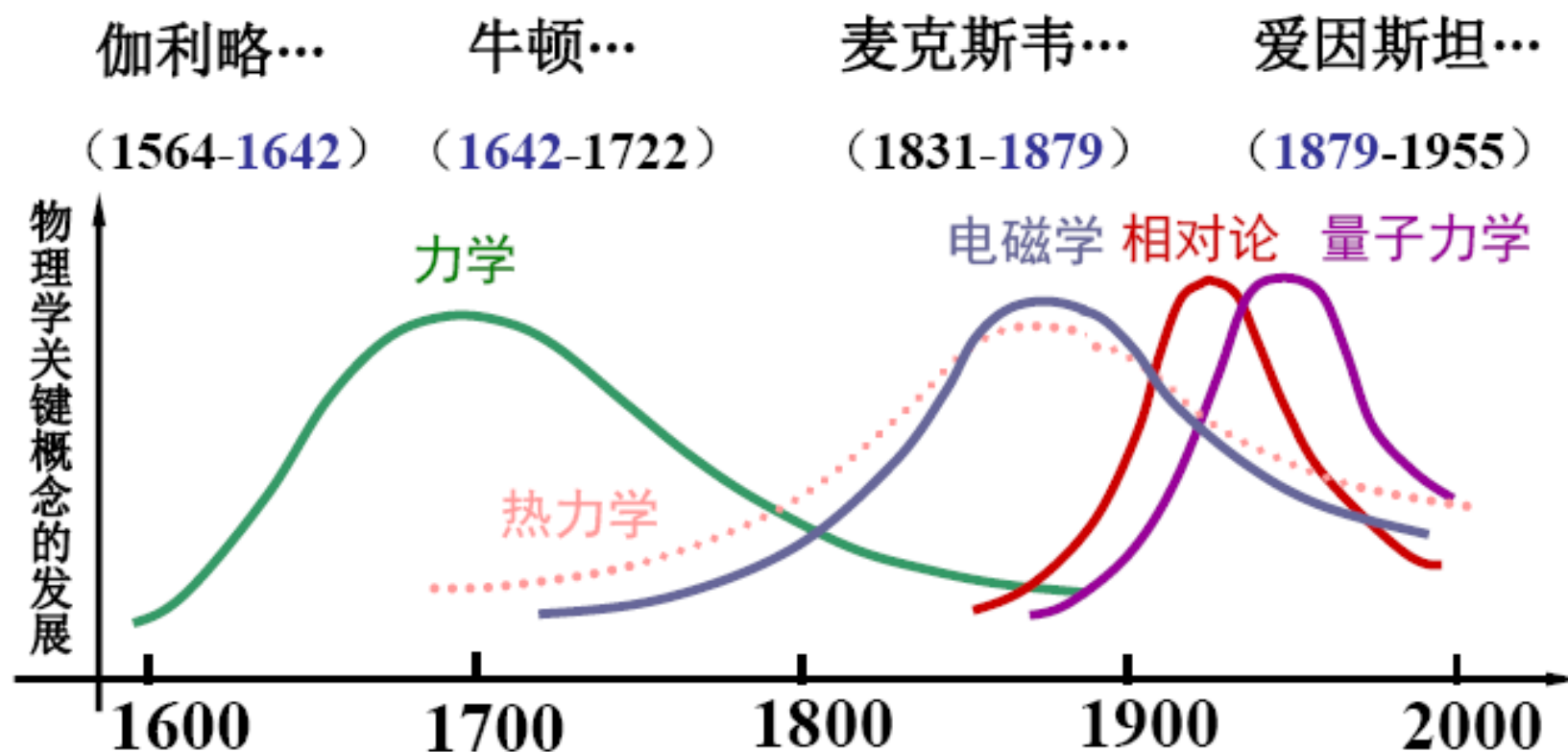
- ◆狭义相对性原理
- ◆光速不变原理

狭义相对论时空观

- ◆同时性的相对性
- ◆时间延缓、动钟变慢
原时与非原时
- ◆长度收缩、动尺缩短
原长与非原长

相对论动力学基础

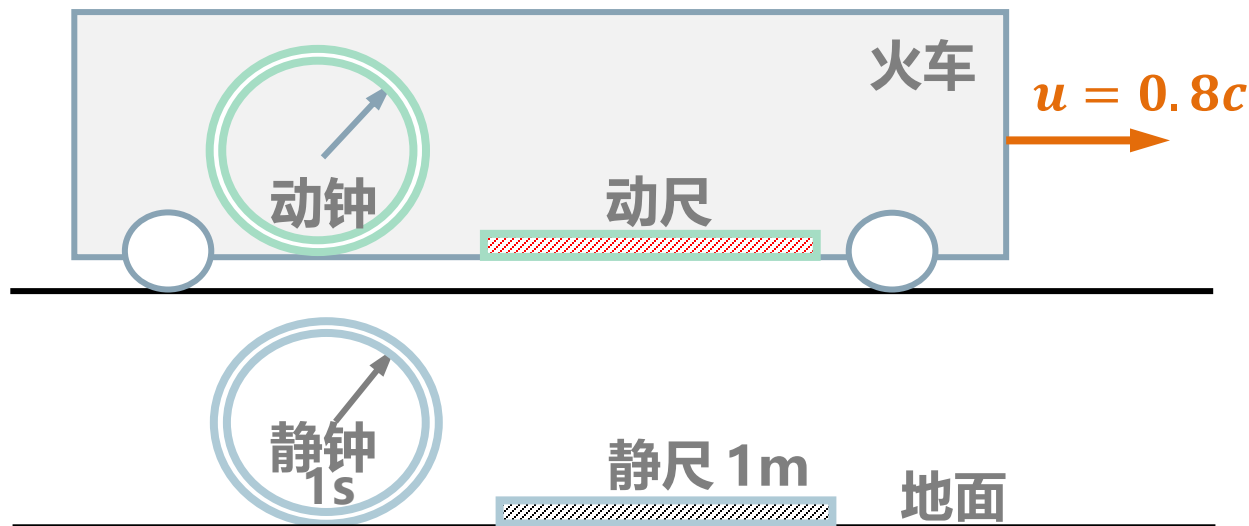
- ◆质速关系
- ◆质能关系



1900年初，英国物理学家开尔文勋爵在物理学报告会上做了新年祝词。在回顾19世纪物理学的成就时，他说整个物理学大厦已经落成，所剩的只是一些修饰工作；在展望20世纪物理学前景时，他说美丽而晴朗的物理学天空中还有**两朵小小的、令人不安的乌云**。

□ 黑体辐射的紫外灾难

□ Michelson-Morley 实验的零结果



设有一列火车在地面上作匀速直线运动，有两个结构完全相同的钟和两把完全相同的尺。

在同一参考系中，这两个钟走得一样快，这两把尺的长度严格相等。

现把其中的一个钟和一把尺放在火车上（**动钟、动尺**），另一个钟和另一把尺留在地面（**静钟、静尺**），两把尺沿火车运动方向放置。

问：动钟和静钟哪个走得快？动尺和静尺哪个短？

牛顿力学：动钟和静钟一样快，动尺和静尺一样长。

相对论：动钟比静钟慢(1.67s)，动尺比静尺短(0.6m)

---时间、长度的量度与参考系的关系问题

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955)

◆ 爱因斯坦奇迹年——1905年

- 《关于光的产生和转变的一个启发性观点》：**光量子学说**、解释了**光电效应**的实验、微观粒子的**波粒二象性**。
(1921年诺贝尔物理学奖)
- 《分子大小的新测定法》、《根据分子运动论研究静止液体中悬浮微粒的运动》：测定**分子大小**、**布朗运动**，解决半个多世纪来争论不休的原子是否存在的问题，**统计力学**的**创始人之一**。
- 《论动体的电动力学》：完整提出**狭义相对论理论**，开创了物理学的新纪元。
- 《物体惯性和能量的关系》：提出了**质能关系**，为原子核能的释放和利用奠定了理论基础。

惯性系--- 狭义相对论：揭示时间、空间与运动的关系

惯性系和非惯性系--- 广义相对论：揭示时间、空间与引力的关系

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955)

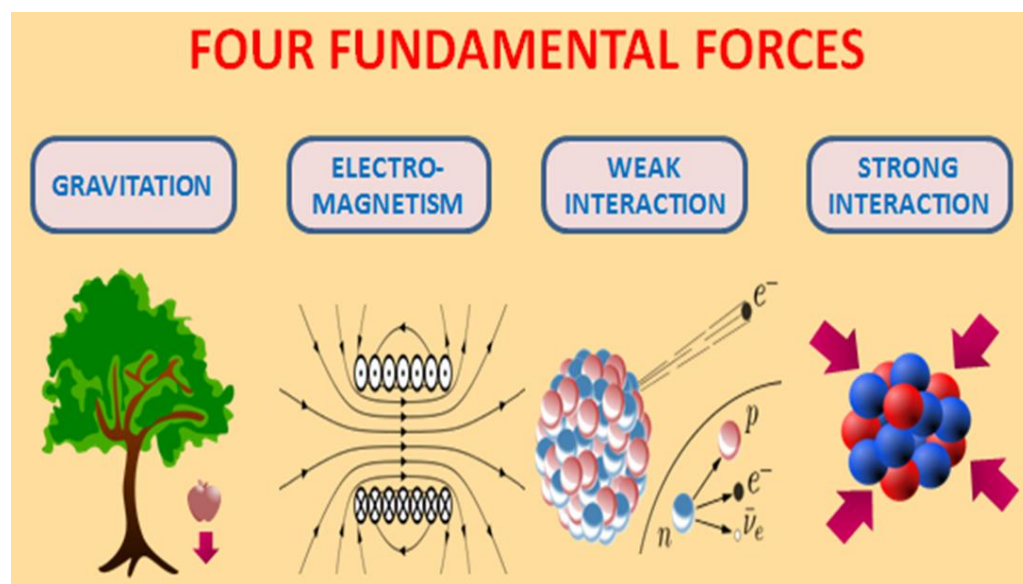
- 1915年, 《**广义相对论基础**》揭示了空间、时间、物质、运动的统一性。(提出了大质量物体的存在可引起时空连续场的弯曲, 为黑洞、大爆炸等新的宇宙论提供了理论依据) 100年后探测到引力波。
- 1916年, 《关于辐射的量子理论》, 提出了原子受激辐射理论, 是后来**激光**技术的理论基础。40年后激光才被发明。
- 1917年, 开创了**现代宇宙学**, 提出了宇宙有限无界的宇宙模型, 后来发展成为**宇宙膨胀理论**和**大爆炸理论**, 深刻地改变了传统的宇宙观。
- 1924年, 预言物质在绝对零度时的一种新状态: **玻色---爱因斯坦凝聚**。70年后才实现。

惯性系--- 狭义相对论: 揭示时间、空间与运动的关系

惯性系和非惯性系--- 广义相对论: 揭示时间、空间与引力的关系

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955)

在他生命的最后三十年，爱因斯坦几乎把他全部的科学创造精力都用于**统一场论**的探索，但始终没有成功。不过他的工作为物理学家们指明了方向：建立包含四种作用力的超统一理论。目前学术界公认的最有希望的候选者是超弦理论与超膜理论。



惯性系--- 狭义相对论：揭示时间、空间与运动的关系
惯性系和非惯性系--- 广义相对论：揭示时间、空间与引力的关系

力学规律在所有的惯性系中数学形式不变 ----力学相对性原理。

- ◆ 体现对称性思想---对于描述力学规律而言，一切惯性系彼此等价。
- ◆ 在一个惯性系中所做的任何力学实验，都不能判断该惯性系相对于其它惯性系的运动。

相对论就是关于相对性的理论。

任何一个回答有关相对运动中观察者的问题的物理理论，就是一个相对性理论。最早的相对性理论是伽利略通过分析理想实验“萨维阿奇大船”提出来的。

任何相对论性理论都要提出的标准问题是，如何将一个参考系中得到的测量结果与另一参考系中得到的测量结果进行比较？

伽利略、牛顿根据他们对时间、空间的认识，建立了各惯性系之间的时空变换关系，即伽利略变换。

坐标变换: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$
 速度变换: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

S 系和 S' 系坐标轴相互平行,
 S' 系相对于 S 系沿 $+x$ 方向以速率 u 运动时,
 当 O 和 O' 重合时, 令 $t = t' = 0$

正变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

逆变换

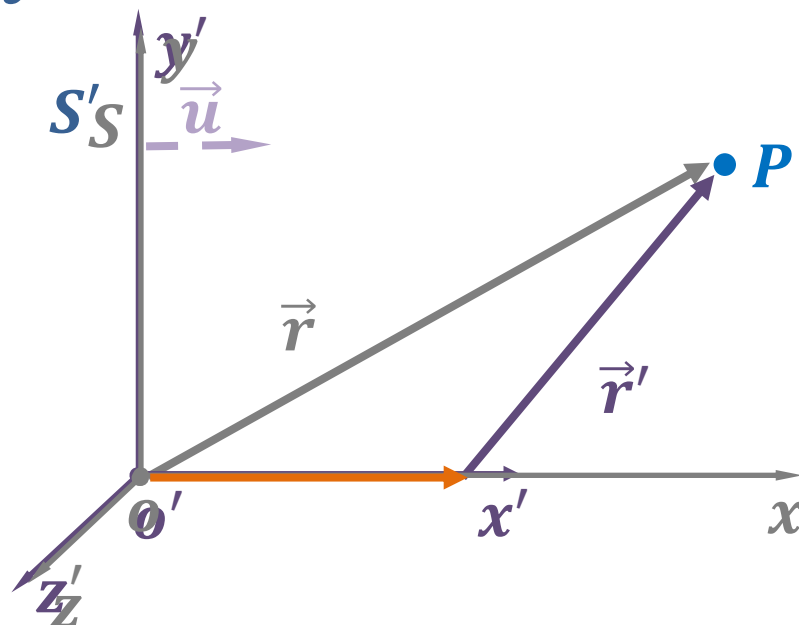
$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

正变换

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$



加速度变换

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a'_x \\ a_y &= a'_y \\ a_z &= a'_z \end{aligned} \right\} \vec{a} = \vec{a}' \xrightarrow[m = m']{\text{先验条件}} \begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ &= m'\vec{a}' = \vec{F}' \end{aligned}$$

质点受力只与质点相对位置有关。
 牛顿定律对任何惯性系都具有相同的形式。
 t' 只是一个辅助的数学量

- ◆ 力与参考系无关
- ◆ 质量与运动无关

- ◆ 牛顿第二定律及由其导出的一切经典力学定律在不同惯性系中数学形式相同。
- ◆ 经典力学规律具有伽利略变换不变性，伽利略变换是经典力学的对称操作。
- ◆ 不同惯性系中的观察者所观测到的具体力学现象可以不同，但所观测到的力学规律相同。
- ◆ 经典力学定律是自洽的。
- ◆ 伽利略变换中已经隐含了时空观念。

伽利略变换中默认了
 $t = t'$ 或 $\Delta t = \Delta t'$

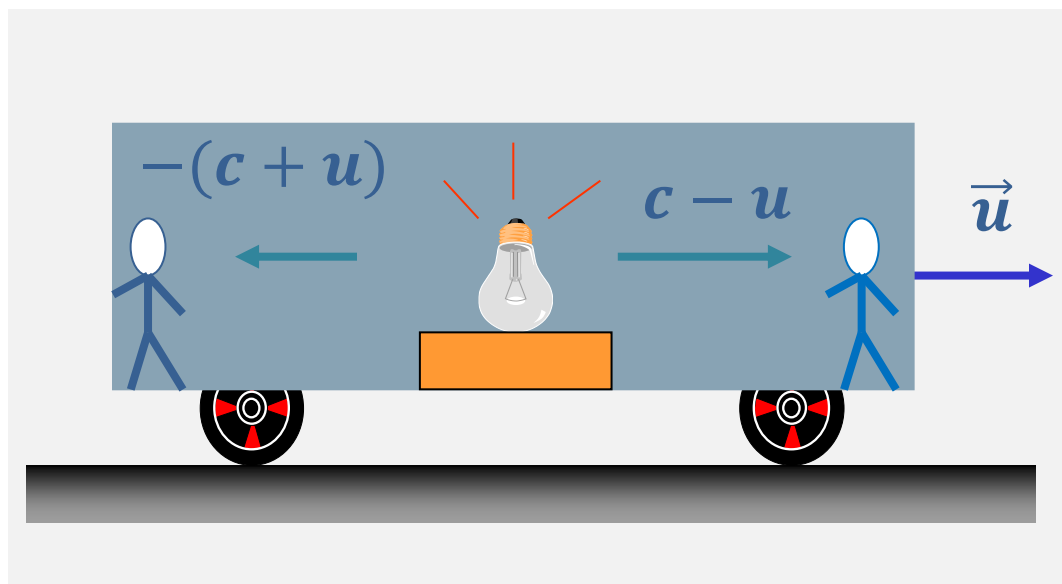
牛顿的绝对时空观： 事件经历的时间，物体的长度、质量
 等与物体运动无关（与参照系无关），具有绝对的意义。

与高速运动（光的传播）的实验结果不符

真空中的光速 c

由经典电磁理论 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

由伽利略变换知，速度与参考系选择有关。



$\vec{v}_{\text{光对车}} = \vec{v}_{\text{光对地}} + \vec{v}_{\text{地对车}}$
彼此矛盾！

当时认为电磁波（光波）是在以太（Ether）（绝对参照系）中传播，光速也是光相对于以太的速度。因此在不同的运动参照系中应该能观测到不同的光速。

矛盾如何解决？需要实验来验证！

1887年，迈克尔孙-莫雷实验的零结果证实：光速不变！

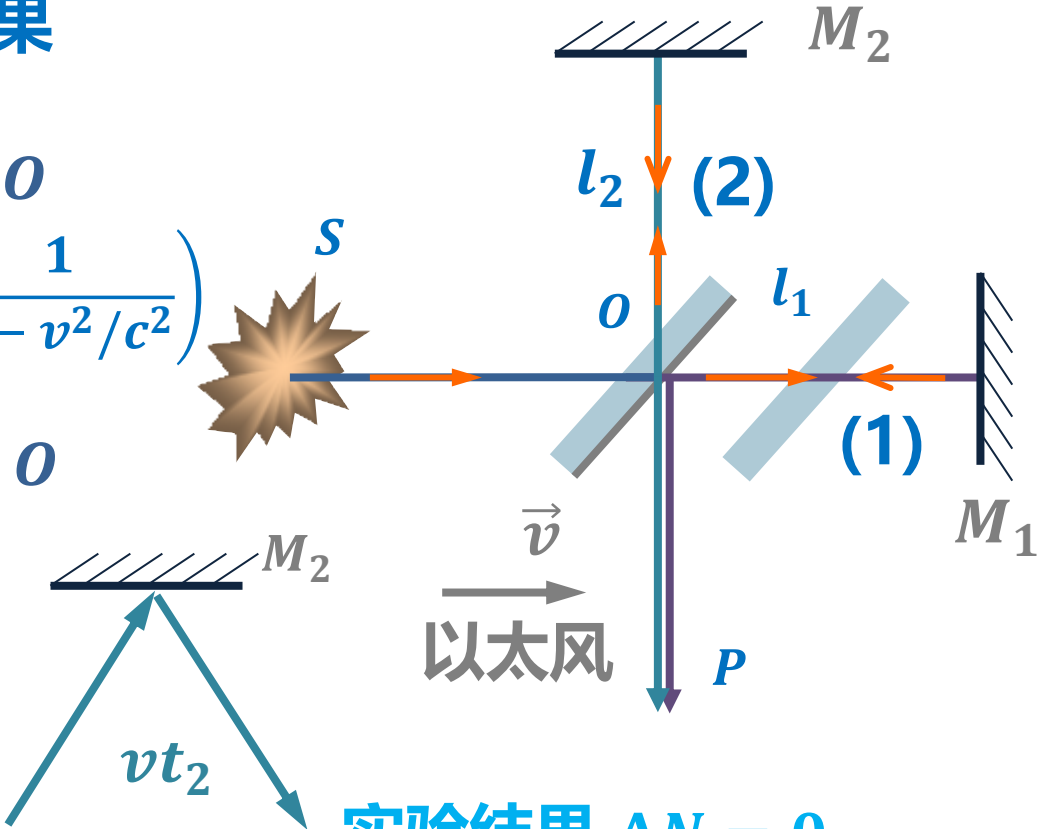
迈克耳逊---莫雷实验的零结果

对 (1) 光线: $O \rightarrow M_1 \rightarrow O$

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1}{c} \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} \right)$$

对 (2) 光线: $O \rightarrow M_2 \rightarrow O$

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$



由 $l_1 = l_2 = l$ 和 $v \ll c$

$$t_1 \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$t_2 \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

两束光线的
时间差

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = lv^2/c^3$$

实验结果 $\Delta N = 0$
说明“以太”本身不存在。

当仪器转动 $\pi/2$ 后, 引起干涉条纹移动

$$\Delta N = \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

伽利略变换不是经典电磁定律的对称操作

带电粒子受力

$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{电场力}} + \underbrace{q\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{洛伦兹力}}$$

电场力 洛伦兹力

洛伦兹力: $F = qvB\sin\theta$
垂直于 \vec{B} 、 \vec{v} 决定的平面

因速度 \vec{v} 与参考系有关，所以经伽利略变换后洛伦兹力将发生变化，经典电磁定律（麦克斯韦方程）不具有伽利略变换的不变性。

推广：一切与速度有关的力都不具有伽利略变换的不变性。

伽利略变换不适于光的运动，牛顿相对性原理不适于电磁理论。

绝对时空观

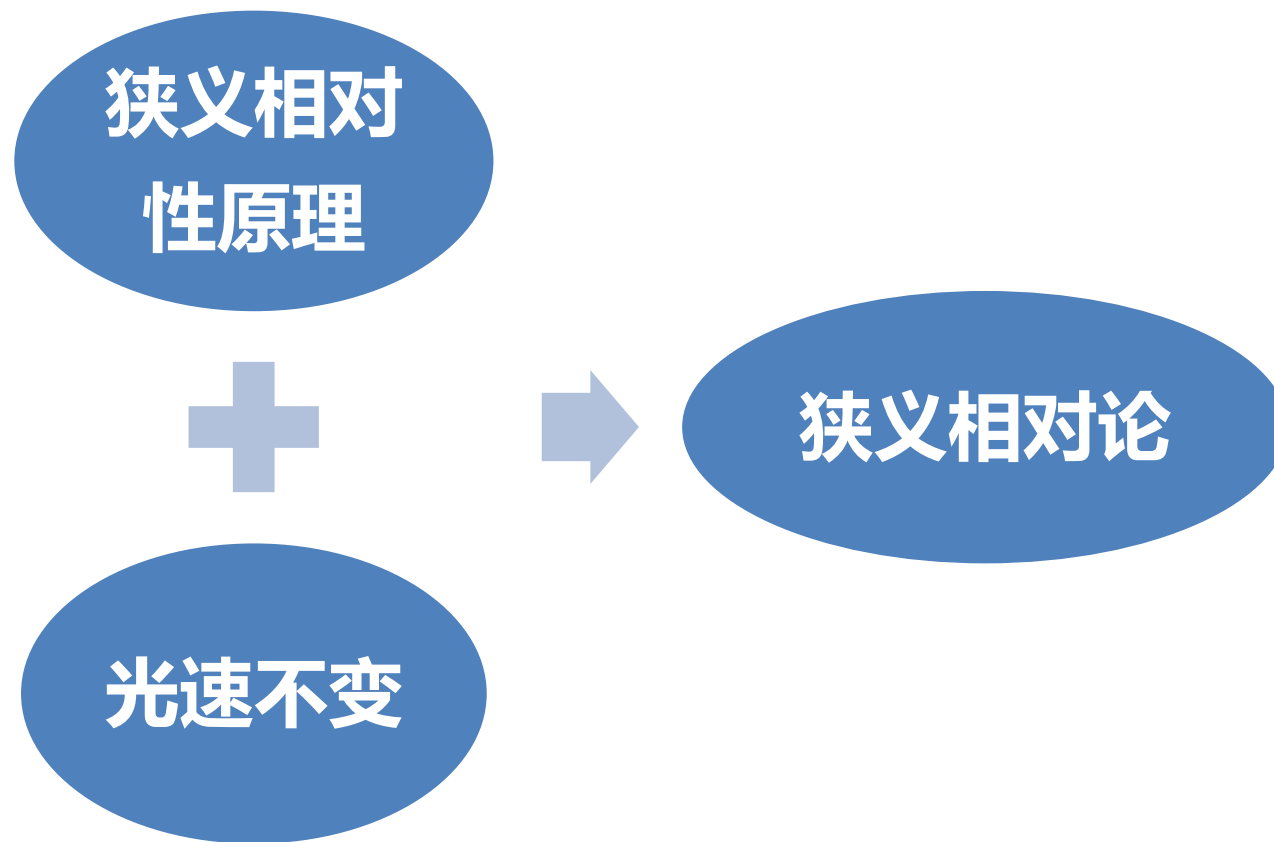
- ◆ 时间、空间彼此独立，而且与物质、运动无关。
- ◆ 时间间隔、空间距离的测量与参考系的选择无关。

经典力学的相对性原理

在所有惯性系中，物体运动所遵循的力学规律是相同的，具有相同的数学表达形式。或者说，对于描述力学现象的规律而言，所有惯性系是等价的。

S	m	\vec{a}	\vec{F}	$\vec{F} = m\vec{a}$
S'	m'	\vec{a}'	\vec{F}'	$\vec{F}' = m'\vec{a}'$

- 经典力学相对性原理与绝对时空观密切相关
 - 经典力学定律具有伽利略变换的不变性
 - 相对性原理的普遍性（对称性）
 - 伽利略变换（经典力学）
 - 电磁学定律
- 三者无法协调



绝对时空观 ➡ 相对时空观

伽利略变换 ➡ 洛伦兹变换

低速 ➡ 高速

狭义相对论的两条基本原理

① 狭义相对性原理



物理定律在所有的惯性系中都有相同数学形式。

- ◆ 是对力学相对性原理的推广
- ◆ 基于对自然规律对称性的深刻理解和坚定信仰：
所有的惯性系对物理规律等价。

② 光速不变原理：



在所有惯性系中，光在真空中的传播速率恒为 c ，
与光源或观察者的运动无关。

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- ◆ 是对实验事实的直接表达
- ◆ 光速 c 是自然界物体运动或信息及能量传递的极限
- ◆ 揭示出真空的对称性质：

对于光的传播而言，真空各向同性，所有惯性系彼此等价。

1905年，Einstein两个基本原理出发，导出了符合这两个基本原理的一组新的时空坐标变换，建立了狭义相对论。

超光速的现象：

- (1) 粒子在媒质中的传播速度可能超过媒质中的光速。在这种情况下会发生辐射，称为**切仑科夫效应**。
- (2) 第三观察者观察两个物体的相对速度可以超过光速。
- (3) 媒质中的相速度在某些频段可以超过真空中的光速。相速度是指连续的正弦波在媒质中传播一段距离后的相位滞后所对应的“传播速度”。

- ◆ **Einstein认为，相对性是自然界的根本规律，这也是狭义相对论的实质，是对牛顿相对性原理的发展。**
- ◆ **光速不变原理与伽利略的速度合成定理针锋相对。**
爱因斯坦将相对性原理推广到电磁领域，得到了光速不变原理，否定了“以太参照系”，同样也否定了伽利略变换。光速不变原理被大量实验结果证实。
- ◆ **时间和长度等的测量**
在牛顿力学中，与参考系无关。
在狭义相对论力学中，与参考系有关。

事件：在任意参照系中有确定的时空坐标 (x, y, x, t)
在不同参照系中其时空坐标不同。

时空坐标的测量：事件在观测者所在参照系中的位置坐标及固定在此位置处的钟的读数。

一参照系中的不同位置上都放置了彼此同步的时钟。

事件时间坐标的测量实际上是**同地同时性问题**。

这列火车2点钟到达这里，相当于火车到站台上的钟敲2点这两个动作在站 台内同时发生。

同地同时性不会因观测者所在参照系的不同而改变。

时间：用以表征物质存在的持续性，物质运动、变化的阶段性和顺序性。

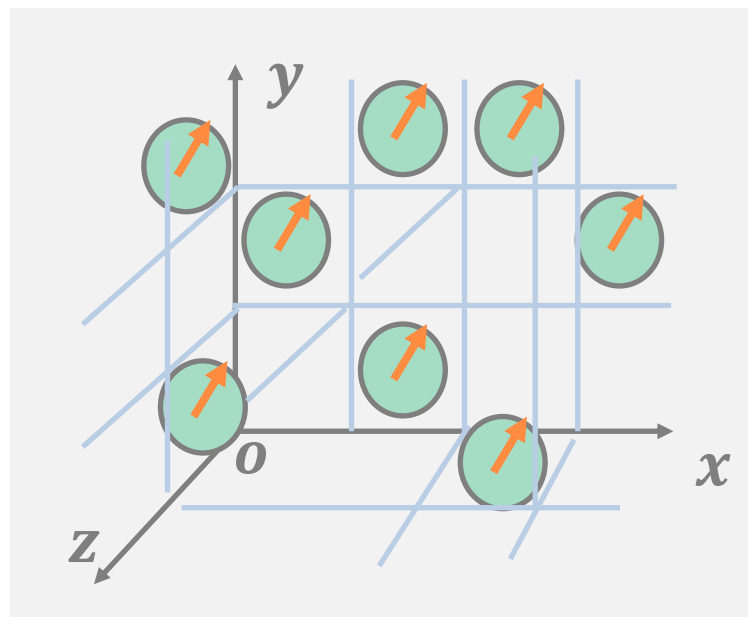
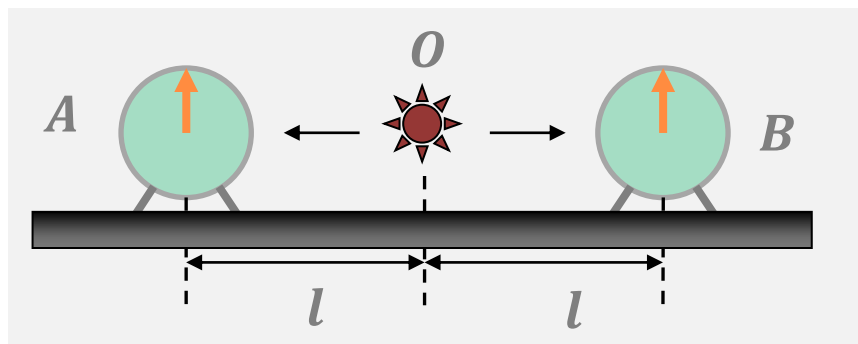
时间的测量：“钟”任何周期性过程均可用来计量时间。

例如：行星的自转或公转；单摆；晶体振动；分子、原子能级跃迁辐射...

国际单位：“秒” 与铯133原子基态两个超精细能级之间跃迁相对应的辐射周期的9,192,631,700倍（精确度 $10^{-12} \sim 10^{-13}$ ）

在惯性系中的不同地点建立统一的时间坐标：

校钟操作

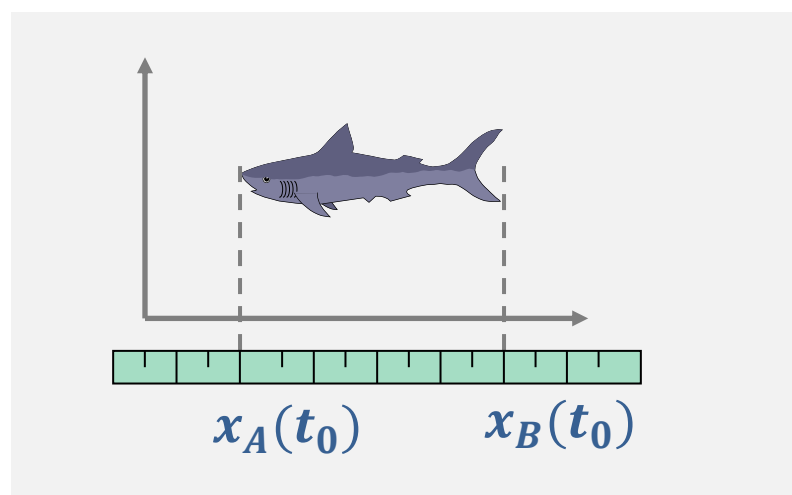
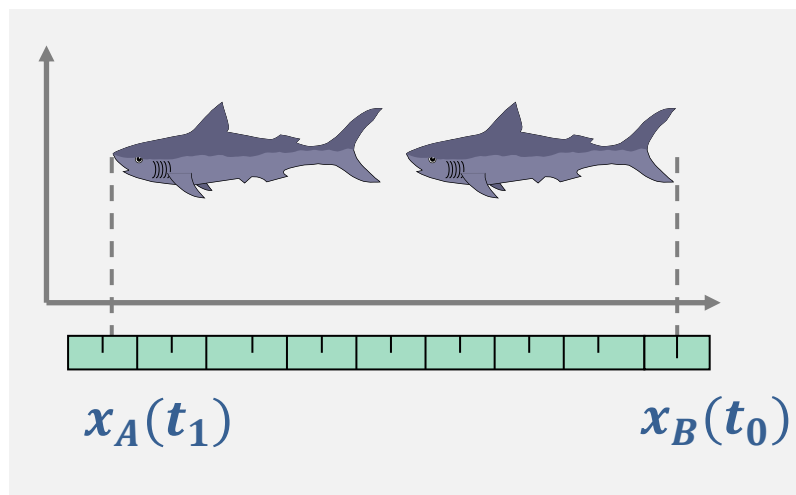


空间： 用以表征物质及其运动的广延性

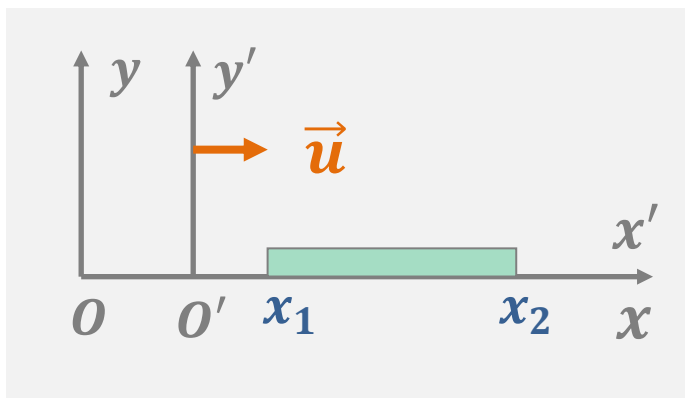
空间测量： 刚性尺, 米 (SI制)

米： 光在真空中(299792458)-1秒的时间间隔内传播的距离。

长度 = 在与长度方向平行的坐标轴上，物体两端坐标值之差



注意： 当物体运动时，两端坐标必须同时记录。



尺子相对于S系静止

由伽利略变换

$$x_1 = x'_1 + ut'_1$$

$$x_2 = x'_2 + ut'_2$$

$$\begin{aligned} \text{直尺长度 } \Delta x &= x_2 - x_1 \\ &= x'_2 - x'_1 + u(t'_2 - t'_1) \end{aligned}$$

$$\because t'_1 = t'_2$$

$$\therefore x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$$

绝对时空观：时间、空间彼此独立，而且与物质、运动无关

- ◆ 尺的长度与其运动状态无关；
- ◆ 空间测量与惯性系的选择无关。

	S 系	S' 系
事件A、B	$A(x_1, t_1)$ $B(x_2, t_2)$	$A(x'_1, t'_1)$ $B(x'_2, t'_2)$

S 系中两事件：在 S 系中观察，A、B两事件同时发生，但不在同一地点发生：

$$x_1 \neq x_2, \Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

S' 系中观测，A、B 两事件是否同时发生？

在 S 系中不同位置发生的A、B两事件同时发生，在 S' 系中并不同时发生。

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq 0$$

A、B两事件在 S' 系中同一地点发生

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1, \quad x'_2 = x'_1$$

S 系中观测，A、B两事件发生的时间间隔？

洛伦兹坐标变换

1899年, 1904年

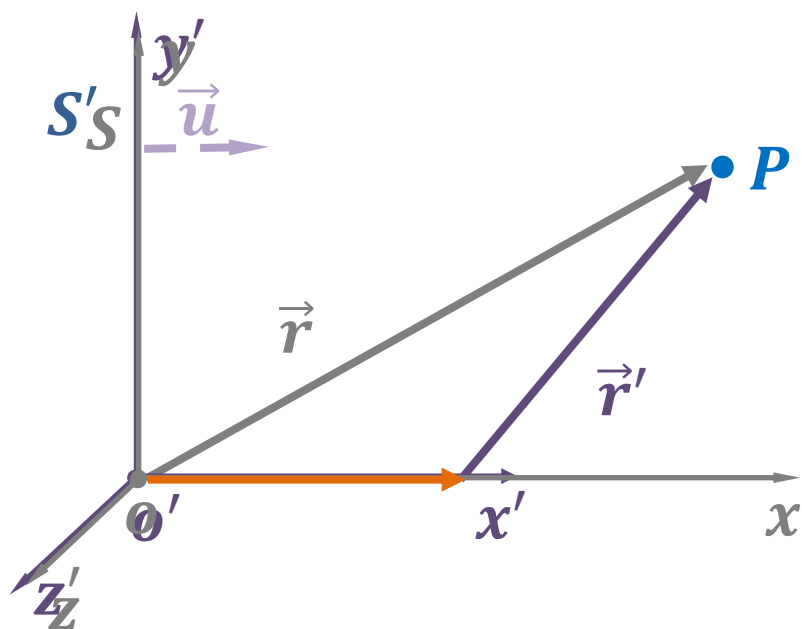
事件 P

S 系: $P(x, y, z, t)$

S' 系: $P(x', y', z', t')$

寻找
→

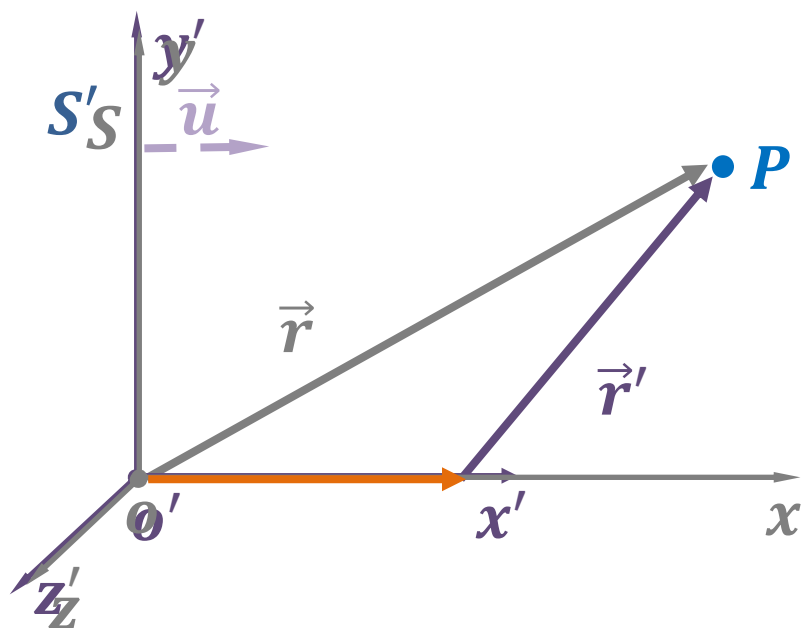
对同一客观事件 P , 两个惯性系中相应的坐标值之间的关系。



当 $t = t' = 0$ 时,
由 O (O')发出光信号,
光信号到达 P :

S 系: $P(x, y, z, t)$

S' 系: $P(x', y', z', t')$



在 S 系, S' 系中,
真空中光速均为 c

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$$



$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

S 系, S' 系只在 x 方向有相对运动,

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

伽利略变换

$$x' = x - ut$$

$$t' = t$$

设 x 坐标变换满足线性关系：

$$\begin{aligned} x' &= k(x - ut) \\ x &= k'(x' + ut') \end{aligned} \xrightarrow{\text{两式互代消去 } x \text{ 或 } x'} \begin{aligned} t &= k' \left[t' + \frac{x'}{u} \left(1 - \frac{1}{kk'} \right) \right] \\ t' &= k \left[t - \frac{x}{u} \left(1 - \frac{1}{kk'} \right) \right] \end{aligned}$$

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (c^2 k^2 - k^2 u^2 - c^2) t^2 + \left[2uk^2 - \frac{2c^2 k^2}{u} \left(1 - \frac{1}{kk'} \right) \right] xt \\ & + \left[1 - k^2 + \frac{c^2 k^2}{u^2} \left(1 - \frac{1}{kk'} \right)^2 \right] x^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = k' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

◆ 新变换表示为:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma'(x' + ut')$$

γ 、 γ' --- 待定参量

伽利略变换

$$x' = x - ut$$

$$t' = t$$

根据爱因斯坦相对性原理 $\gamma' = \gamma$

新变换可简单地写成:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

参数 γ 可用光速不变原理确定

设想当原点 O 和 O' 重合时, 由 $O(O')$ 点发出一个闪光。在 S 、 S' 系中, 闪光到达地点的 $x(x')$ 轴坐标:

$$x' = ct'$$

$$x = ct$$



$$ct' = \gamma(c - u)t$$

$$ct = \gamma(c + u)t'$$

可得: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

γ 为什么只取正值?
为使 γ 有意义, u 不能达到光速, 即实际物体不能达到光速。

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

推导时间 t' 与 t 之间的变换关系:

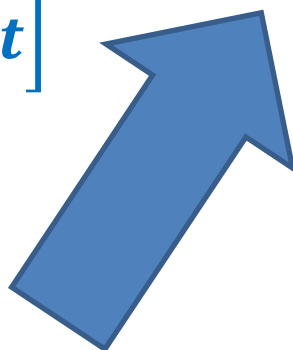
$$x = \gamma(x' + ut') \Rightarrow t' = \frac{1}{u} \left(\frac{x}{\gamma} - x' \right)$$

把 $x' = \gamma(x - ut)$ 代入, 得

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{u} \left[\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - ut) \right] \\ &= \frac{\gamma}{u} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) x + ut \right] \end{aligned}$$

把 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 代入, 得

$$t' = \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right)$$



正变换

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

逆变换

$u \rightarrow -u$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

洛伦兹坐标变换

$$\text{正变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

$$\text{逆变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

$$u \ll c$$

伽利略坐标正变换

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

伽利略坐标逆变换

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right.$$

洛伦兹时空坐标变换

正变换

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

逆变换

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

相对论因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- ◆ 时空是密切相关不可分割的整体。
空间坐标变换式中含时间坐标;
时间坐标变换式中含空间坐标;
- ◆ 时间和空间并非绝对, 而与物质的运动密切相关。

x 、 t 和 x' 、 t' 中均有速度因子 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$

- ◆ 无论是正变换或逆变换中的 u , 均指 S' 系相对于 S 系的运动速度。
- ◆ c 为极限速度, $u > c$ 变换式无意义。
- ◆ u 接近 c , 伽利略坐标变换不成立。 $u \ll c$, 转为伽利略坐标变换。

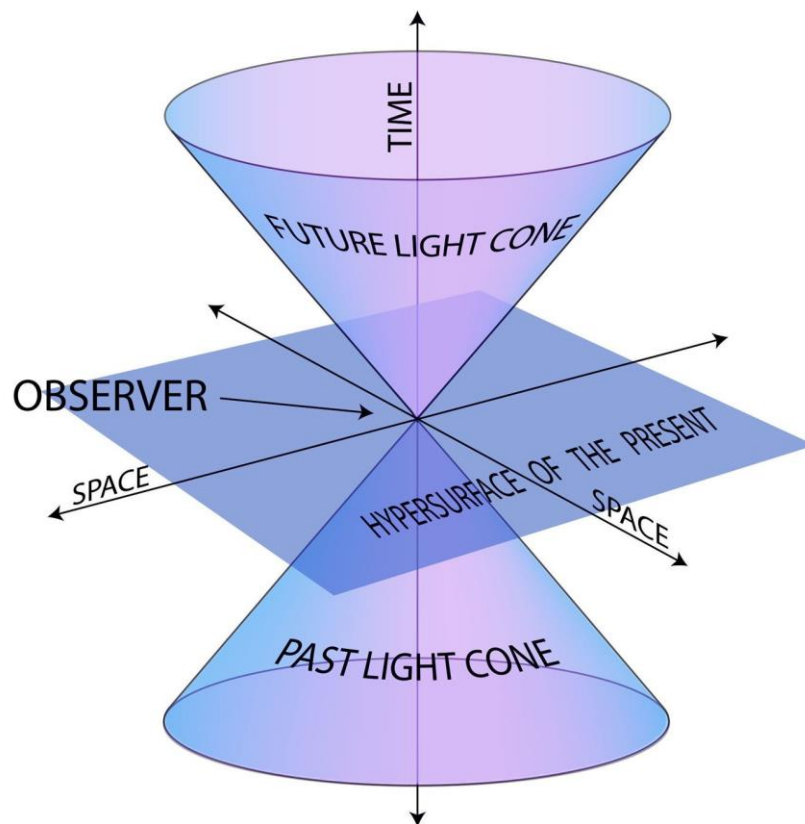
闵可夫斯基 (Minkowski) 时空

四维“直角”坐标系

时空坐标: (x, y, z, t)

四维间隔: $S^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (ict)^2$

- 在相对论中，时间空间的测量不能分离，事件间的时间间隔和空间距离被统一到四维闵可夫斯基时空中的“四维间隔”。
- 洛伦兹变换能保证四维间隔的平方在不同惯性系中保持不变。
- 四维间隔的平方可小于、等于和大于零，这对应了事件间的不同时空属性。



S 系观测者观测到在 $x = 100\text{km}$ 处 $t = 5 \times 10^{-4}\text{s}$ 时的闪光。
若 S' 系相对于 S 系以 $0.8c$ 向 $-x$ 方向运动，求在 S' 系中的观测者测得这一闪光的时空坐标。

解：事件 P S 系： $P(x, y, z, t)$
 S' 系： $P(x', y', z', t')$

$$x = 100\text{km}, \quad t = 5 \times 10^{-4}\text{s}, \quad u = -0.8c$$

相对论因子 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$

由洛伦兹坐标变换的正变换

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ &= \frac{5}{3} \left[100 - (-0.8 \times 3 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-4}) \right] = 367 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \\ &= \frac{5}{3} \left[5 \times 10^{-4} - \frac{-0.8 \times 3 \times 10^5}{(3 \times 10^5)^2} \right] = 12.8 \times 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

正变换

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut') \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right) \end{aligned}$$

原长为 L' 的飞船以速度 u 相对于地面做匀速直线运动。有个小球从飞船的尾部运动到头部，宇航员测得小球的速度恒为 v' ，求：(1) 宇航员测得小球运动所需时间；
(2) 地面观测者测得小球运动所需时间。

解：以地面为 S 系，飞船为 S' 系。 S' 系相对 S 系沿 x 轴正方向以速度 u 运动。

	S 系	S' 系
事件1：小球开始运动	(x_1, t_1)	(x'_1, t'_1)
事件2：小球结束运动	(x_2, t_2)	(x'_2, t'_2)

已知： $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = L'$

(1)
$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1 \\ &= \frac{x'_2 - x'_1}{v'} \\ &= \frac{L'}{v'}\end{aligned}$$

(2) 由洛伦兹坐标变换的逆变换，

$$\begin{aligned}\Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ &= \frac{\frac{L'}{v'} + \frac{u}{c^2} L'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

一宇宙飞船相对地面以 $0.8c$ 的速度飞行，飞船上的观察者测得飞船的长度为 100m 。一光脉冲从船尾传到船头，求地面上的观察者测量，光脉冲“从船尾发出”和“到达船头”这两个事件的空间间隔是多少？

解：只涉及时空变换的问题称为运动学问题，一般按以下步骤求解：

(1) 设定参考系

飞船： S' 系；地面： S 系

S' 相对 S 以 $u = 0.8c$ 作匀速直线运动

(2) 定义事件及其时空坐标

事件1：光脉冲从船尾发出。

在 S 系、 S' 系中时空坐标记为 (x_1, t_1) 、 (x'_1, t'_1)

事件2：光脉冲到达船头。

在 S 系、 S' 系中时空坐标记为 (x_2, t_2) 、 (x'_2, t'_2) 。

正变换

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

逆变换

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

一宇宙飞船相对地面以 $0.8c$ 的速度飞行，飞船上的观察者测得飞船的长度为 100m 。一光脉冲从船尾传到船头，求地面上的观察者测量，光脉冲“从船尾发出”和“到达船头”这两个事件的空间间隔是多少？

解：只涉及时空变换的问题称为运动学问题，一般按以下步骤求解：

正变换

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + ut') \\t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

(3) 洛伦兹变换，求两事件在 S 系中的空间间隔。

已知： $x'_2 - x'_1 = 100\text{m}$,

$$t'_2 - t'_1 = (x'_2 - x'_1)/c$$

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \frac{(x'_2 - x'_1) + u(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\&= \frac{100 + 0.8 \times 100}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \text{ m} \\&= 300 \text{ m}\end{aligned}$$

速度变换

$$S \text{系: } \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$S' \text{系: } \vec{v}'(x', y', z', t')$$

根据速度定义得: $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$

$$x' = \gamma(x - ut) \quad \Rightarrow \quad dx' = \gamma(dx - udt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \quad \Rightarrow \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} \\ &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \end{aligned}$$

同理可得 v'_y 、 v'_z

正变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$$

逆变换

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$$

洛伦兹变换的意义

◆ 洛伦兹变换是不同惯性系中时空变换的普遍公式

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

$$u \ll c, \\ \frac{u}{c} \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$$

洛伦兹变换 \longrightarrow 伽利略变换, 满足对应原理

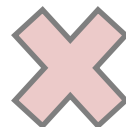
◆ 与光速不变原理、真空中光速为极限速率的实验事实相协调。

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \quad \text{当 } v_x = c \text{ 时, } v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c}} = c$$

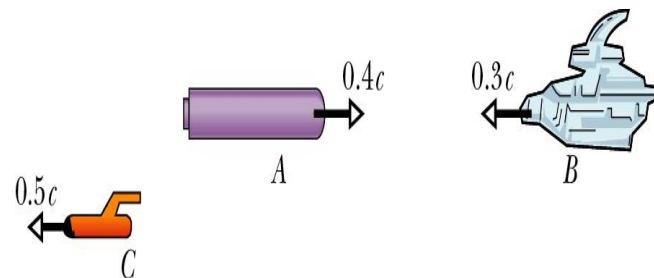
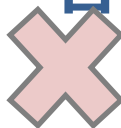
◆ 给出了对物理定律的约束条件：相对论的对称性，即物理定律在洛伦兹变换下的不变性。

◆ 建立了新的时空观。

甲、乙两物体以相同的速率 $0.9c$ 相向运动，则乙对甲的速率为 $1.8c$ 。



图中，飞船A向飞船B发射一个激光脉冲，此时一艘侦查飞船C正向远处飞去，各飞船的飞行速率如图所示，都是从同一参照系测量所得。由此可知，各飞船测量激光脉冲的速率值不相等。



有一速度为 u 的宇宙飞船沿 x 轴正方向飞行，飞船头尾各有一个脉冲光源发出光波。处于船尾的观察者测得船头光源发出的光脉冲的传播速度大小为 c ；处于船头的观察者测得船尾光源发出的光脉冲的传播速度大小为 c 。

有一静止的电子枪向相反方向发射甲、乙两个电子。实验室测得甲电子的速率为 $0.6c$ ，乙电子速率为 $0.7c$ ，求一个电子相对于另一个电子的速率。

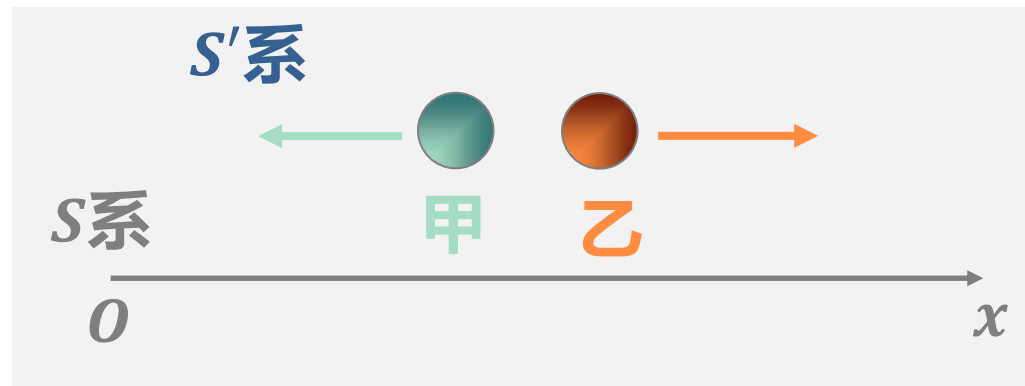
解：设实验室为 S 系，甲电子为 S' 系

在 S 系中，乙电子的速率为 $v_x = 0.7c$

S' 系相对于 S 系运动 $u = -0.6c$

由洛伦兹速度变换公式

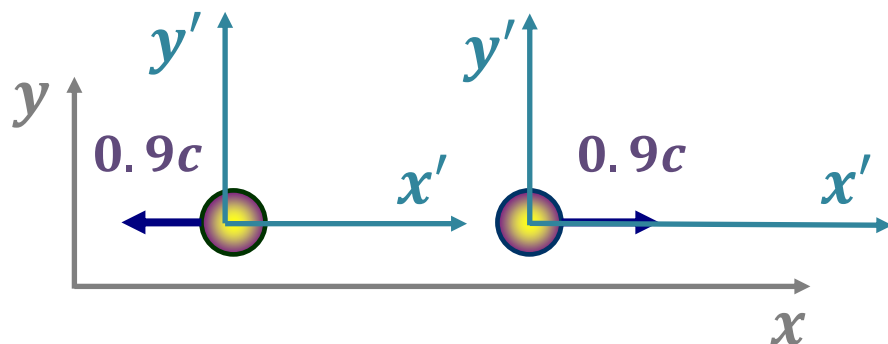
$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \\ &= \frac{0.7c - (-0.6c)}{1 - 0.7c(-0.6c)/c^2} \\ &= \frac{1.3c}{1.42} \approx 0.92c < c \end{aligned}$$



地面上测量，两飞船都以 $0.9c$ 的速度向相反方向飞行。

求一飞船相对于另一飞船的速度多大？

问一飞船上观察者测量另一飞船上的米尺的长度为多少？



$$u = 0.9c - (-0.9c) = 1.8c$$

在地面上建立 S 系，在向右运动的飞船上建立 S' 系，
利用洛伦兹速度正变换：

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ &= \frac{(-0.9c) - 0.9c}{1 - \frac{0.9c}{c^2}(-0.9c)} = -0.994c \end{aligned}$$

在地面上建立 S 系，在向左运动的飞船上建立 S' 系，
利用洛伦兹速度正变换：

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ &= \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \frac{-0.9c}{c^2}0.9c} = 0.994c \end{aligned}$$

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}} L = \sqrt{1 - 0.994^2} \times 1 = 0.11 \text{ (m)}$$

北京和上海直线相距1000km，在某一时刻从两地同时各开出一列火车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向从高空掠过，速率恒为9km/s。求宇航员测得的两列火车开出时刻的间隔，哪一列先开出？

解：以地面为 S 系，坐标原点在北京，以北京到上海的方向为 x 轴正方向，飞船为 S' 系。

	S 系	S' 系
事件1：北京开出火车	(x_1, t_1)	(x'_1, t'_1)
事件2：上海开出火车	(x_2, t_2)	(x'_2, t'_2)

已知： $u = 9\text{km/s}$

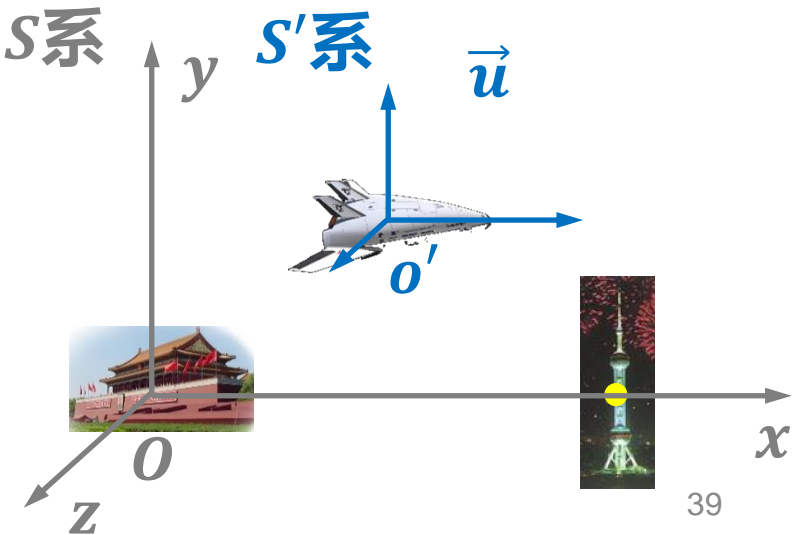
$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 10^6 \text{ m}$

由洛伦兹坐标变换，

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx -10^{-7} \text{ s}$$

负号表示：宇航员发现上海的火车先开出。



不同惯性系中观察者时空观念的关联		
事件	S 系 $I(x_1, t_1)$ $II(x_2, t_2)$	S' 系 $I(x'_1, t'_1)$ $II(x'_2, t'_2)$
变换	$x = \gamma(x' + ut')$ $t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$	$x' = \gamma(x - ut)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$
事件 空间间隔	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$
事件 时间间隔	$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$	$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \geq 1$		