- 质点、质点系和刚体运动的动能
- 变力做功问题
- 质点、质点系和刚体运动的动能定理
- 保守力、势能
- 质点系的功能原理、机械能守恒定律
- 三个守恒定律的应用

质点动能

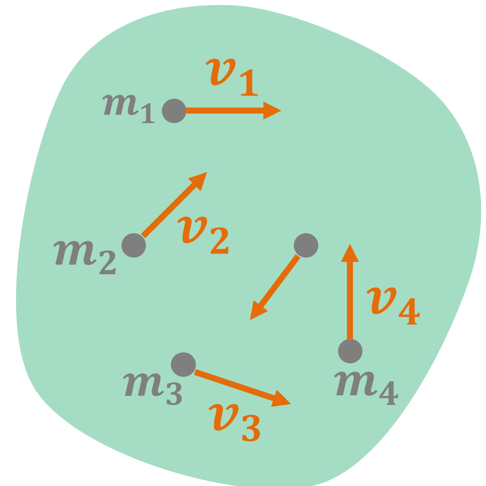
定义：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

单位：焦耳 (J)

量纲：$\mathrm{ML^2T^{-2}}$

质点系动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



◆ 物体（质点）的动能是物体由于运动而具有的能量，是物体运动状态的单值函数。

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

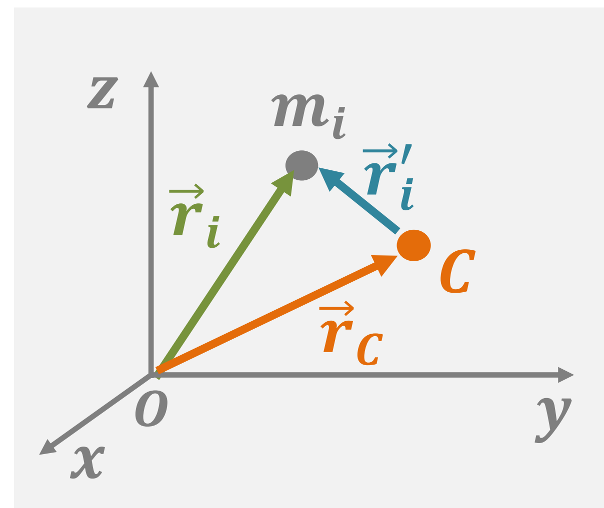
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_C^2 + \vec{v}_i'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_i' \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i'^2 + \vec{v}_C \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i'$$

$$= \frac{1}{2} m v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

等于零



C为质点系质心位置

相对于$O-xyz$参考系

质点位置 $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i'$

质点速度 $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i'$

刚体动能---等于质点系质量全部集中于质心的等效质点的动能和各质点相对质心运动动能之总和。

$$E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2$$

◆ 质点系相对于惯性系的动能

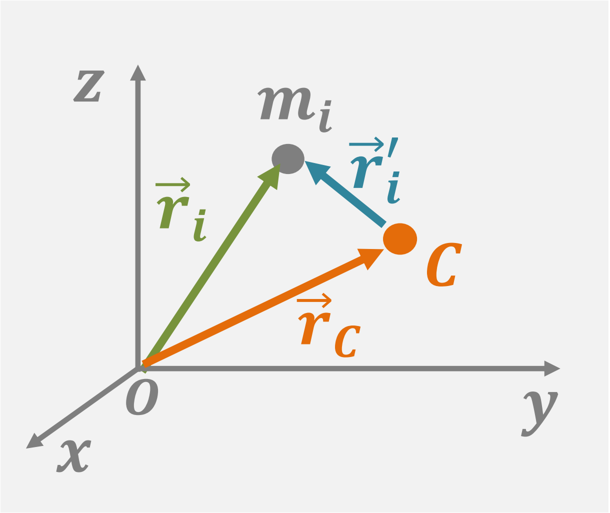
$$E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2$$

克尼希定理：质点系相对于某一惯性系的动能等于该质点系的轨道动能与内动能之和。

轨道动能： $E_k=\frac{1}{2}mv_C^2$

内动能：质点系相对于质心系的动能

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2$$



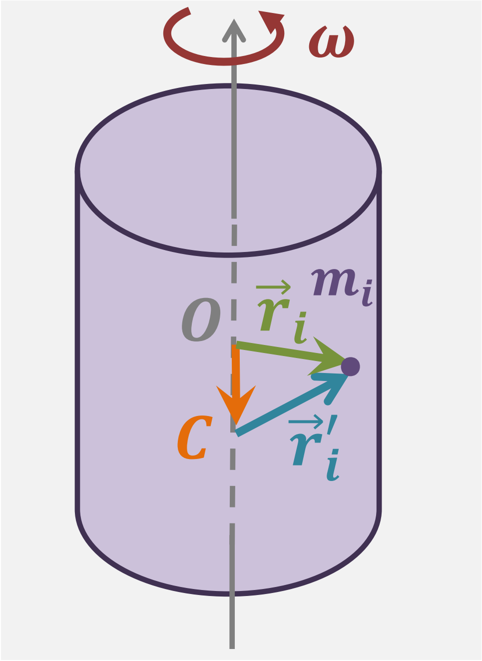
C为质点系质心位置

相对于$O-xyz$参考系

质点位置 $\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_i'$

质点速度 $\vec{v}_i=\vec{v}_C+\vec{v}_i'$

□ 转轴穿过刚体质心



$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

v_i为刚体各质量元相对于转轴的运动速率。

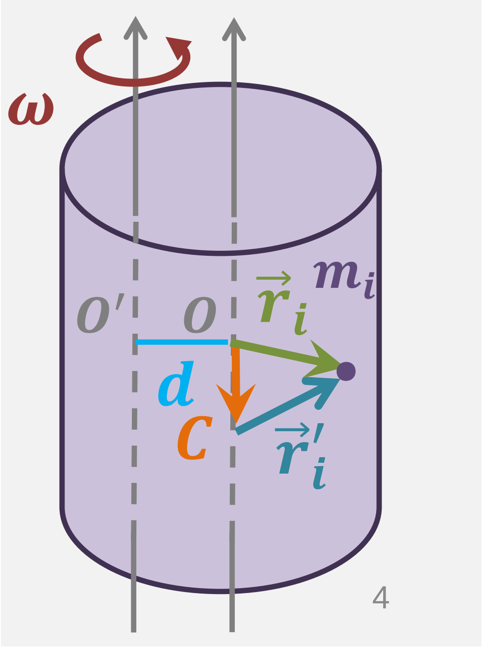
设刚体定轴转动角速度ω，第i个质点到转轴的垂直距离为r_i，由质点圆周运动线量与角量的关系 $v_i=\omega r_i$

$\because\ \vec{r}_i'=\vec{r}_i-\vec{r}_C$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$

$\therefore\ \vec{v}_i'=\vec{v}_i$

□ 转轴穿过刚体（不穿过刚体质心）



$$E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

$$=\frac{1}{2}md^2\omega^2+\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}J\omega^2$$

动能的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}=m\vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}E_k=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

元功

$$\Rightarrow \quad \int\mathrm{d}E_k=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

功

质点动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m^2v^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$$

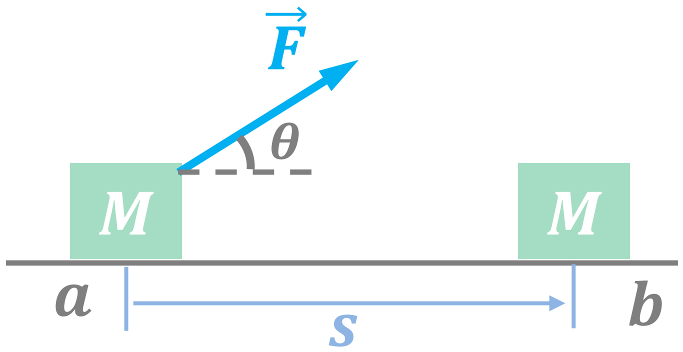
$$=\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{2}$$

定轴转动刚体的动能

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{J^2\omega^2}{2J}=\frac{L^2}{2J}$$

$$=\frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{2}$$

$\vec{F}\begin{cases}\text{空间积累：功 --- 是能量变化的量度}\\ \text{时间积累：冲量}\end{cases}$



□ 恒力的功

$$A = Fs\cos\theta$$

$$A = \vec{F}\cdot\vec{r}$$

功 A
---力和力的作用点位移的标积

□ 变力的功

求质点M在变力作用下，沿曲线轨迹由a运动到b，变力作的功

$\vec{F}$在$\mathrm{d}\vec{r}$一段上的元功

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$\vec{F}$在ab一段上的功

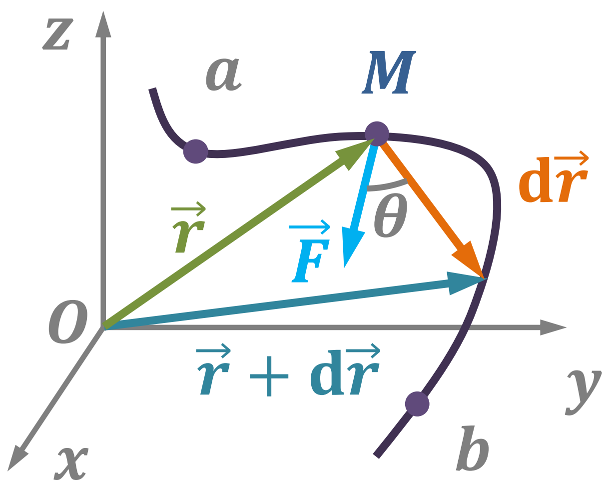
$$A = \int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}A = F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta$$

在自然坐标系中

$|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$ ➡

$$A = \int_{a(L)}^{b}F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$



功是能量变化的量度

定义：

$$A=\int \mathrm{d}A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

力和力的作用点位移的标积

单位：焦耳 (J) $1\mathrm{J}=1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

量纲： $\mathrm{ML^2T^{-2}}$

直角坐标系：

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

$$A=\int \mathrm{d}A=\int F_x\mathrm{d}x+\int F_y\mathrm{d}y+\int F_z\mathrm{d}z$$

自然坐标系：

$$\vec{F}=\vec{F}_n+\vec{F}_\tau=F_n\vec{e}_n+F_\tau\vec{e}_\tau$$

$$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$$

$$A=\int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int(\vec{F}_n+\vec{F}_\tau)\cdot(ds\vec{e}_\tau)$$

$$=\int F_\tau\,\mathrm{d}s$$

- 功是标量，且有正负
- 合力的功等于各分力的功的代数和

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}_{合}\cdot d\vec{r}=\int_{a(L)}^{b}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_{a(L)}^{b}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\cdots+\int_{a(L)}^{b}\vec{F}_n\cdot d\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

- 功是过程量，一般来说与质点运动的路径有关
- 功是相对量 （与参考系选择有关）
- 功是标量（代数量）
  - $A>0$ 力对物体做正功
  - $A<0$ 力对物体做负功，物体反抗阻力做功
  - $A=0$ 力作用点无位移；力与位移相互垂直

力矩的功

设做圆周运动的质点m在力F的作用下移动距离ds，

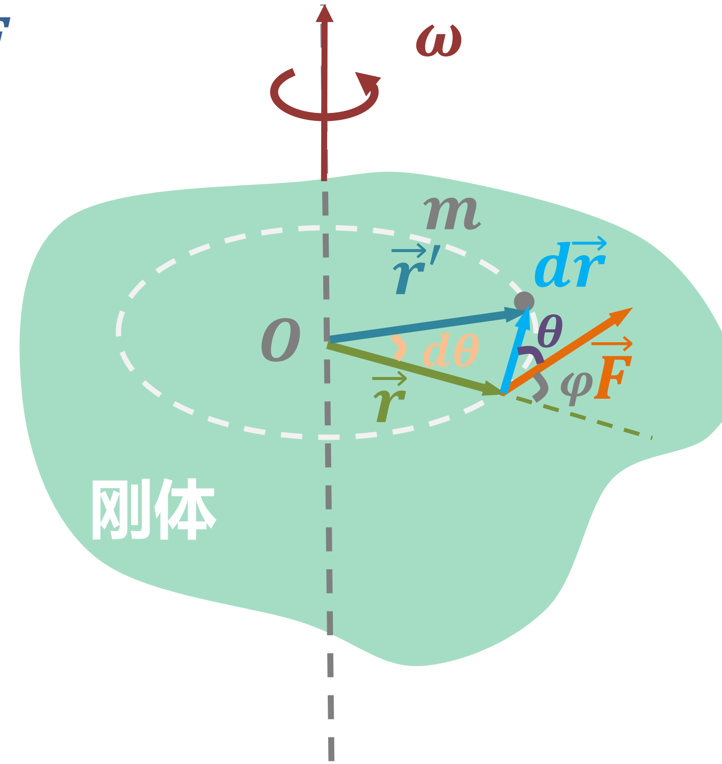
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

$$= F\cos\theta\, r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= Fr\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

力矩 M_z

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{d}A = M_z\mathrm{d}\theta$$



刚体定轴转动的初、末角位置分别为θ_i和θ_f，转动过程中力做功为

$$A = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M_z\mathrm{d}\theta$$

---力矩的功

设力矩M_z为恒力矩，则

$$A = M_z(\theta_f - \theta_i)$$

功率 $P = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = M_z\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M_z\omega$

- 力矩的功就是力的功，并没有改变功的定义，只是用角量表示而已。

功率 力在单位时间内所作的功

--- 描述力做功快慢的物理量

平均功率 $\overline{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$

瞬时功率 $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

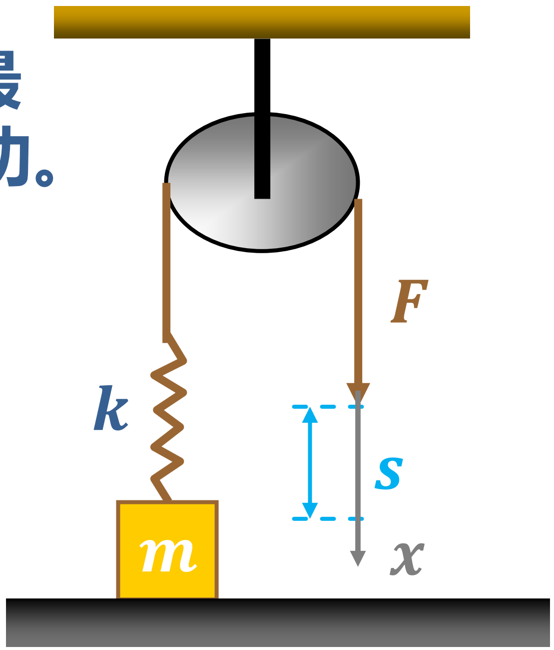
$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{M\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$$

功率的单位：W 瓦[特]（SI）、 hp 马力（英制）

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{J/s}$$

$$1\mathrm{hp} = 746\mathrm{W}$$

如图$\mathrm{m}=2.0\mathrm{kg}$，$k=200\mathrm{N/m}$, $s=0.2\mathrm{m}$, $\mathrm{g}=10\mathrm{m/s^2}$，不计轮、绳质量和摩擦，弹簧最初为自然长度，缓慢下拉s，求拉力F所做的功。



解：用F将绳端下拉0.2m, 物体将上升多高?

$$kx_0-mg=0 \Longrightarrow x_0=0.1\mathrm{m}$$

$s=0.2\mathrm{m}$，得 $\begin{cases}\text{弹簧伸长}0.1\mathrm{m}\\ \text{物体上升}0.1\mathrm{m}\end{cases}$

缓慢下拉： 每时刻物体处于平衡态

$$F=\begin{cases}kx & (0<x\le 0.1\mathrm{m}) & \text{前}0.1\mathrm{m}\text{为变力}\\ kx_0=mg & (0.1<x\le 0.2\mathrm{m}) & \text{后}0.1\mathrm{m}\text{为恒力}\end{cases}$$

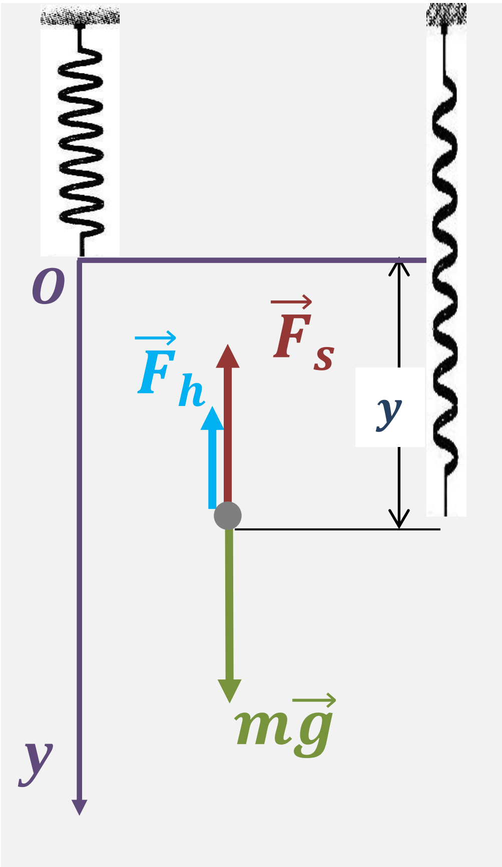
$$A=\int_0^{0.1}kx\mathrm{d}x+\int_0^{0.2}mg\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{0.1}+mgx\Big|_{0.1}^{0.2}=3\ (\mathrm{J})$$

一弹簧铅直悬挂，下面连接一个质量为m的小球。一人用手托住小球使弹簧不伸长。然后以恒定速率使小球缓慢下移，直至小球到达平衡位置（即弹性力与重力平衡）。该位置处测得弹簧伸长量为d。求该过程中重力、弹性力和手所做的功。

解：选弹簧原长处为坐标原点，向下为正的坐标轴y。

由题意可知任意时刻有 $\vec{F}_s + \vec{F}_h + \vec{F}_g = 0$



- 重力---恒力

$$A_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r}$$
$$= mg\vec{j} \cdot (d-0)\vec{j} = mgd$$

- 弹性力---变力

$$kd = mg \Longrightarrow k = \frac{mg}{d}$$

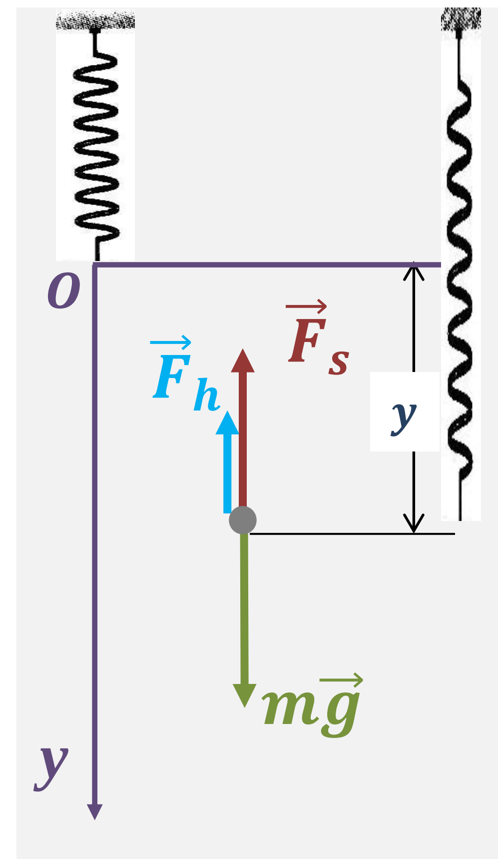
$$\vec{F}_s = -ky\vec{j}$$

$$A_s = \int_0^{d} \vec{F}_s \cdot \mathrm{d}y\,\vec{j} = \int_0^{d} -ky\vec{j} \cdot \mathrm{d}y\,\vec{j}$$
$$= -\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mgd$$

一弹簧铅直悬挂，下面连接一个质量为m的小球。 一人用手托住小球使弹簧不伸长。 然后以恒定速率使小球缓慢下移, 直至小球到达平衡位置（即弹性力与重力平衡）。该位置处测得弹簧伸长量为d。求该过程中重力、弹性力和手所做的功。

解：选弹簧原长处为坐标原点，向下为正的坐标轴y。

由题意可知任意时刻有 $\vec{F}_s + \vec{F}_h + \vec{F}_g = 0$



- 手的托举力—变力

$$\vec{F}_h = -\vec{F}_s - \vec{F}_g = ky\vec{j} - mg\vec{j}$$

$$A_h = \int_0^{d} \vec{A}_h \cdot \mathrm{d}y\hat{j}$$

$$= \int_0^{d} (ky - mg)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}mgd - gmd$$

$$= -\frac{1}{2}mgd$$

$$A_s + A_h + A_g = 0$$

质点动能定理

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t},\quad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

合力对质点做功：

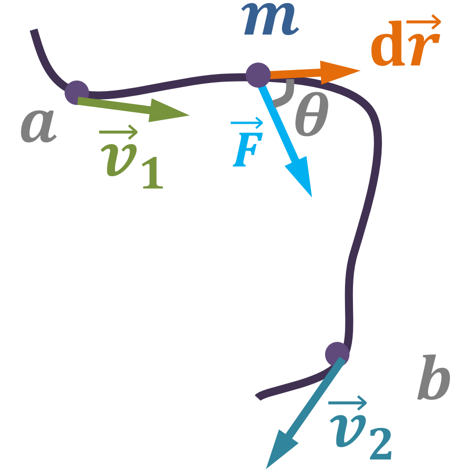
$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}$$

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\qquad\Longrightarrow\quad \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$=m\int\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$=m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}m\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}(v^2)$$

$$=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$



$$A=\Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}$$

作用于质点的合力在某一路程中对质点所作的功，等于质点在同一路程的始、末两个状态动能的增量。

---质点动能定理

$$dA=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta$$
$$=F\mathrm{d}s\cos\theta=F_t\mathrm{d}s$$
$$=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=mv\mathrm{d}v$$
$$A=\int\mathrm{d}A=\int_{v_1}^{v_2}mv\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能定理只适用于惯性系。
- 动能定理给出了力对质点的持续作用引起的质点运动状态变化的规律。
- 力对质点在某一过程中做的功，只与质点在始末状态的动能有关，而与运动过程中动能变化细节无关。

$$A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

作用于质点的合力在某一路程中对质点所作的功，等于质点在同一路程的始、末两个状态动能的增量。

---质点动能定理

功与动能的联系与区别

- 功A是过程量，反映了力对空间的累积效果，其结果是使得物体动能发生变化。
- 动能E_k是状态量，因为它由质点的运动状态决定。
- 功是用对物体施力的方法传给物体（或由物体传出）能量。

$A > 0$ 传给物体能量；

$A < 0$ 物体传出能量。

质量为$0.10\mathrm{kg}$的质点，由静止开始沿曲线 $\vec{r}=(5/3)t^3\vec{i}+2\vec{j}$ (SI) 运动，求在$t=0$到 $t=2\mathrm{s}$时间内，作用在该质点上的合外力所做的功。

解：质点任一瞬时的速度为 $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=5t^2\vec{i}$

由动能定理可得，作用在该质点上的合外力所做的功

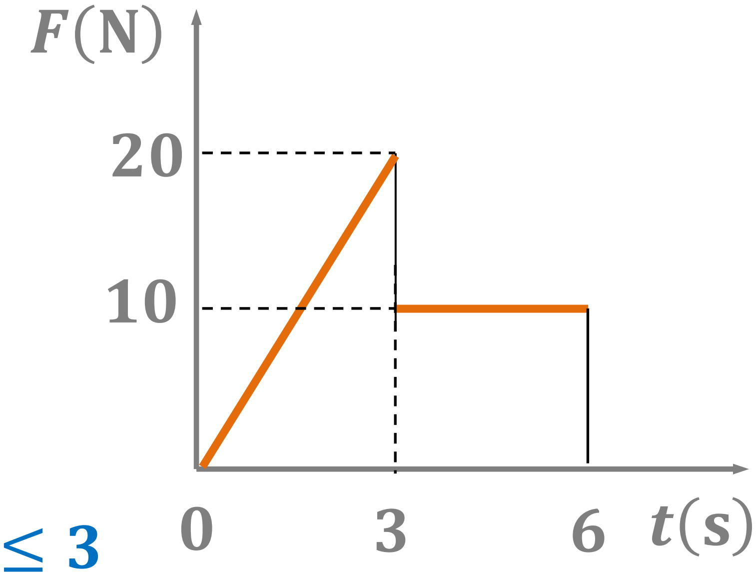
$$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}m\left(v_2^2-v_0^2\right)=\frac{1}{2}\times 0.10\times\left(20^2-0\right)=20\ (\mathrm{J})$$

一质点受力$\vec{F}=3x^2\vec{i}$ (SI) 作用，沿x轴正方向运动，求从$x=0$到$x=2$过程中，力$\vec{F}$所做的功。

解：由功的定义可得

$$A=\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^2=8\ (\mathrm{J})$$

一质量为$m=4\mathrm{kg}$ 的物体，在0到6秒内，受到如图所示的变力F的作用，由静止开始沿 x 轴正向运动，而力的方向始终为x轴的正方向，求6秒内变力F所做的功。



解： 由图可知，

物体受力为 $F(t)=\begin{cases}\dfrac{20}{3}t & 0\le t\le 3\\ 10 & 3\le t\le 6\end{cases}$

$0-6$秒内应用动量定理

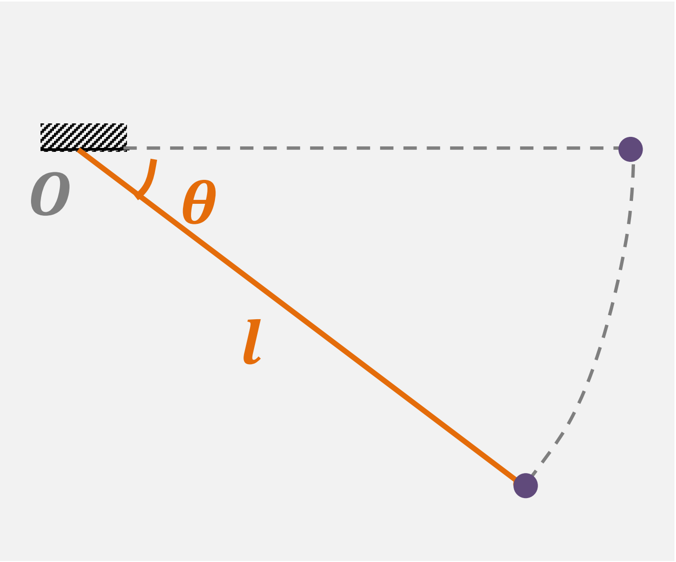
$$\int_0^3 \frac{20}{3}t\,\mathrm{d}t+\int_3^6 10\,\mathrm{d}t=mv_6-0$$

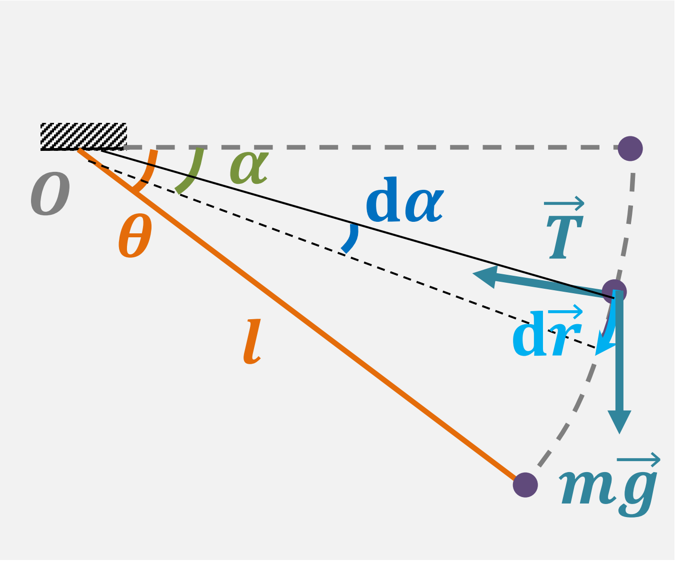
得 $v_6=15\ (\mathrm{m/s})$

根据质点的动能定理，6秒内变力的功为

$$A=\frac{1}{2}mv_6^2-0=\frac{1}{2}\times 4\times 15^2=450\ (\mathrm{J})$$

一个理想的单摆由长度为l，质量可忽略且不可伸长的细线与一个质量为m的小球组成。初始时刻单摆静止于水平位置，以初速为零释放。当杆或摆线与水平方向夹角为θ时，求小球的速率。





解：小球移动过程中，只有重力做功。

小球移动位移$\mathrm{d}\vec{r}$时，重力的功

$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int mg|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha$$

$$=\int_0^{\theta} mg\cos\alpha\,(l\mathrm{d}\alpha)$$

$$=mgl\sin\theta$$

由动能定理

$$A=\Delta E_k$$

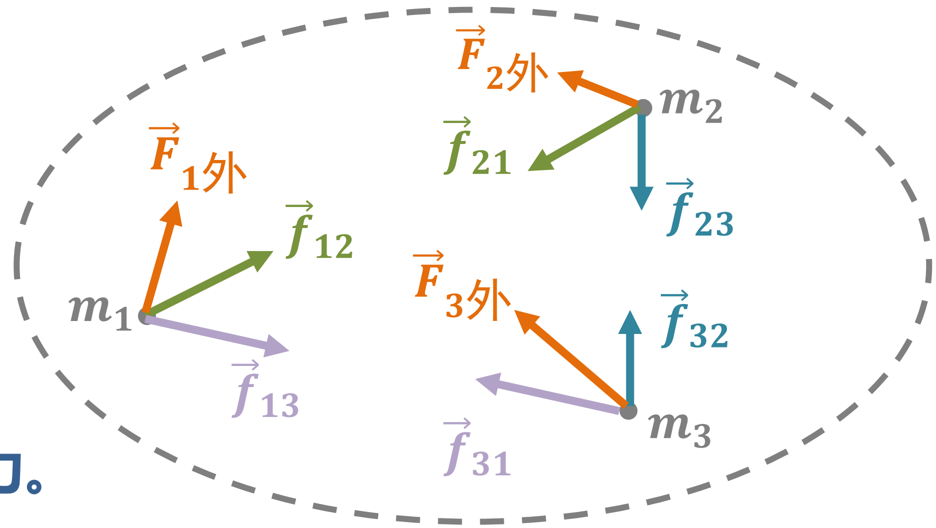
$$=E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

可得 $v=\sqrt{2mgl\sin\theta}$

考虑两个质量分别为m_1和m_2的质点组成的质点系：
两个质点受力分别为

$$\vec{F}_1=\vec{f}_{1内}+\vec{F}_{1外}$$

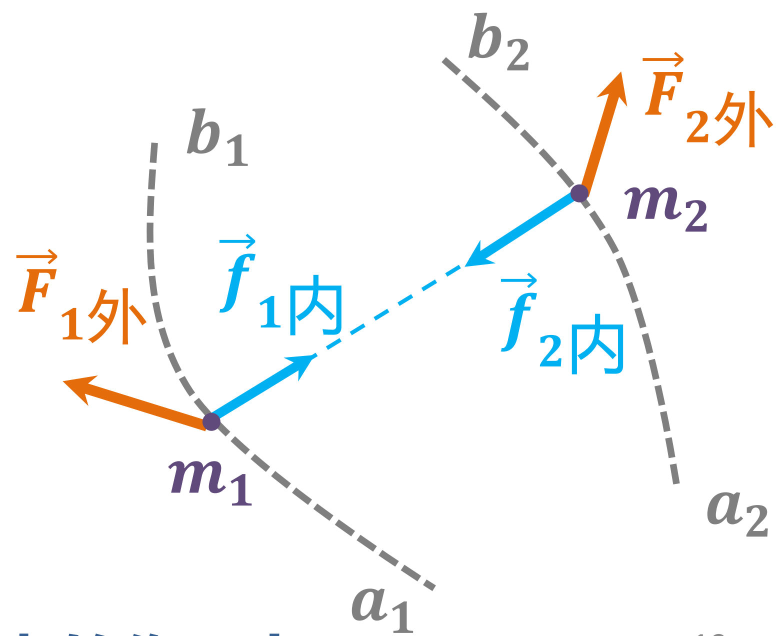
$$\vec{F}_2=\vec{f}_{2内}+\vec{F}_{2外}$$



$\vec{F}_{1外}$和$\vec{F}_{2外}$分别为两个质点所受合外力。
$\vec{f}_{1内}$和$\vec{f}_{2内}$分别为两个质点相互作用内力。

$$A_{内}=\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{1内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{f}_{2内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$=?$$



内力：系统内质点间的相互作用力
外力：系统外的物体对系统内任一质点的作用力

一对内力的功

以两个质点系统为例：

$$\mathrm{d}A=\vec{f}_{1内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{f}_{2内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

由于 $\vec{f}_{1内}=-\vec{f}_{2内}$

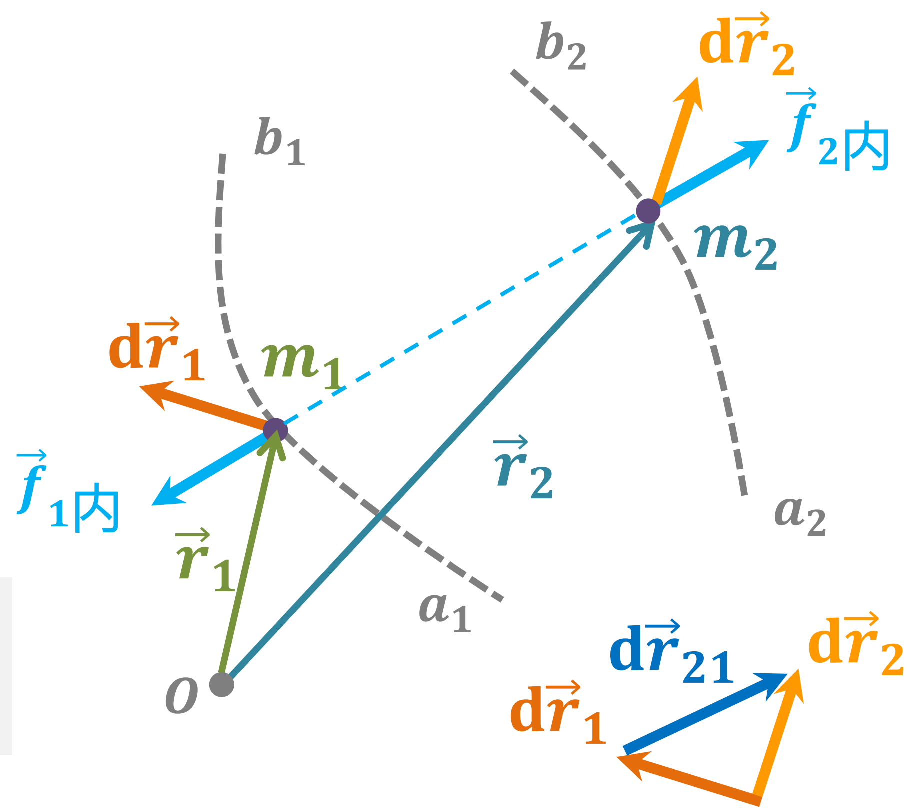
$$\mathrm{d}A_{内力}=\vec{f}_{2内}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_2-\mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$=\vec{f}_{2内}\cdot\mathrm{d}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

$$=\vec{f}_{2内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

$$A_{内力}=\int\mathrm{d}A_{内力}=\int\vec{f}_{2内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

一对内力的功与两个质点的相对位移或相对运动路径有关。仅当两个质点之间没有相对移动或质点相对移动方向与内力方向垂直时，一对内力的功才等于零。



◆ **一对内力的功不一定等于零**

而是等于其中一个物体所受内力沿着该物体相对于另一个物体所移动的路径所做的功。

质点m_1从a_1点运动到b_1点，
由质点动能定理，所有力对质点m_1所做的功

$$A_1=\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1=\int_{a_1}^{b_1}\left(\vec{F}_{1外}+\vec{f}_{1内}\right)\cdot d\vec{r}_1=\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2$$

质点m_2从a_2点运动到b_2点，
由质点动能定理，所有力对质点m_2所做的功

$$A_2=\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2=\int_{a_2}^{b_2}\left(\vec{F}_{2外}+\vec{f}_{2内}\right)\cdot d\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2$$

$$A=\left(\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_{1外}\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_{1外}\cdot d\vec{r}_2\right)+\left(\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{1内}\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{f}_{2内}\cdot d\vec{r}_2\right)$$

$$=A_{外}+A_{内}$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2\right)$$

$$=(E_{k1b}+E_{k2b})-(E_{k1a}+E_{k2a})$$

$$=\Delta E_k$$

$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

所有外力和内力对质点系所有质点所做的功的代数和等于质点系总动能的增量---质点系动能定理

- 内力可以改变质点系的总动能，尽管内力不能改变质点系的总动量、总角动量。

  例：爆竹爆炸过程，内力和为零，
  但内力所做的功转化为了动能。

  例：同号电荷接近时，动能减少。

- 适用于惯性系。

$A_{外} + A_{内} = 0$，系统动能守恒（不变）。
每时每刻均成立

确定研究对象 → 分析力及力的功 → 选定研究过程及过程的始末状态 → 列方程求解

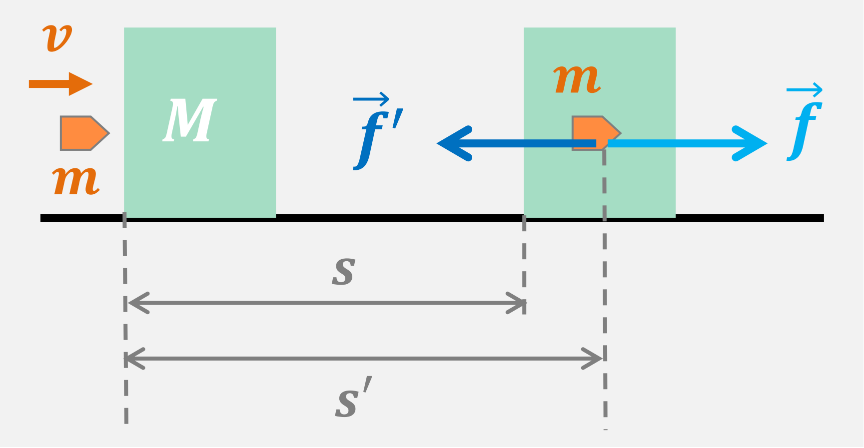
一对内力的功

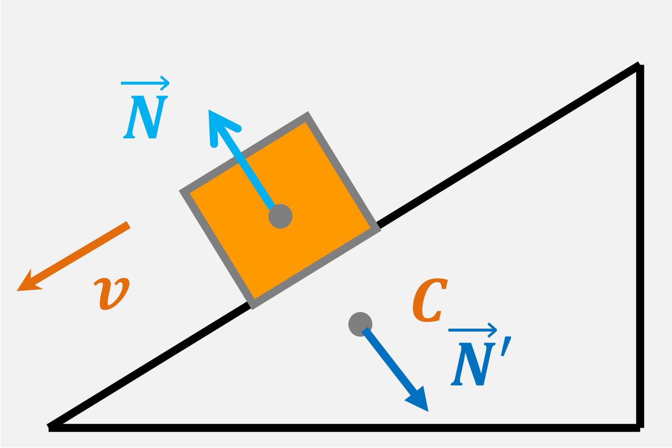
一对力的功，等于其中一个物体所受的力沿两物体相对移动的路径所做的功。

- **若力与相对位移垂直，则这一对力的功为零。**

  例：内力与相对位移总垂直，故内力所做的功总和为零。

- **一对力的功与参考系的选择无关。**





$$A_f + A_{f'} < 0$$

$$A_f = \vec{f}\cdot\vec{s} > 0$$

$$A_{f'} = \vec{f}'\cdot\vec{s}' < 0$$

$$A_N + A_{N'} = 0$$

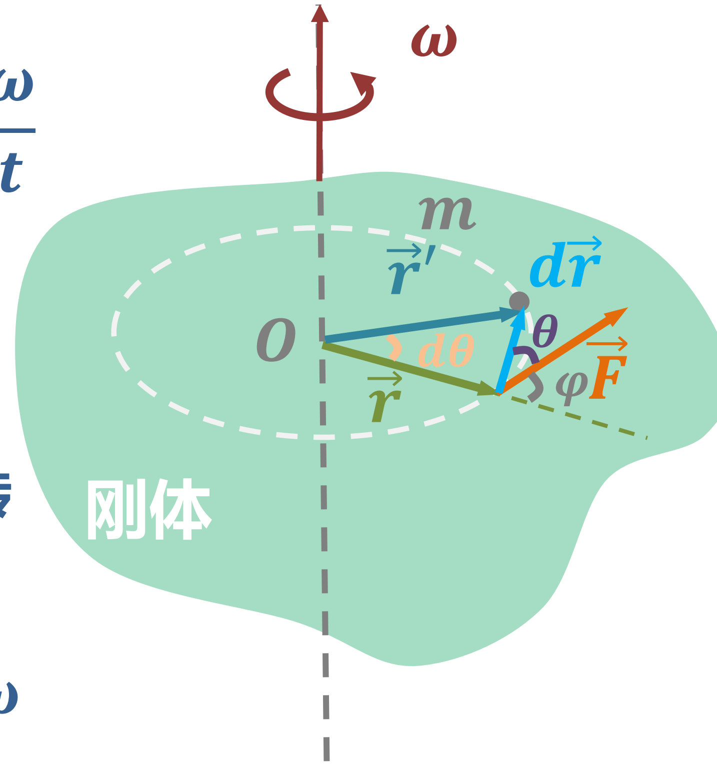
$$A = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M_z \mathrm{d}\theta$$

---力矩的功

由于 $\mathrm{d}A = M_z \mathrm{d}\theta$

$$\begin{cases} M_z = J\beta = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \\ \mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}A = \left(J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\omega \mathrm{d}t$$



刚体定轴转动的初、末角速率分别为ω_0和ω，转动过程中合外力矩做功为：

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{\omega_0}^{\omega}\left(J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\omega \mathrm{d}t = \int_{\omega_0}^{\omega} J\omega \mathrm{d}\omega$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

---刚体定轴转动动能

$$A_{外} = \Delta E_k$$

合外力矩对绕固定轴转动的刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。---定轴转动刚体动能定理

内力的性质

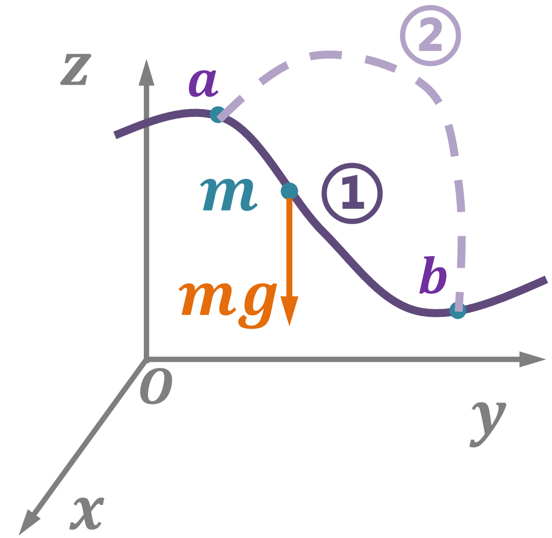
内力矢量和	内力的总冲量	内力对点（轴）的合力矩	内力矩的角冲量	内力的总功
$\sum_i \vec{F}_{i内} \equiv 0$ 系统内力矢量和恒为零	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i内}\,\mathrm{d}t \equiv 0$ 系统内力的总冲量恒为零	$\sum_i \vec{M}_{i内} \equiv 0$ 系统内力对同一参考点（轴）的合力矩恒为零	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{i内}\,\mathrm{d}t \equiv 0$ 系统内力的总角冲量恒为零	定轴刚体 $\sum_i A_{i内} \equiv 0$ 一般情况 $\sum_i A_{i内} \neq 0$
内力不改变质心的运动状态	内力不改变系统的总动量	内力不改变系统的转动状态	内力不改变系统的总角动量	系统内力的总功不一定为零。内力的功可以改变系统的总动能。

质点、质点系、定轴转动刚体的动能定理		
质点	质点系	定轴转动刚体
$A=\Delta E_k$	$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$	$A_{外}=\Delta E_k$
作用于质点的合力对质点所作的功，等于质点动能的增量。	质点系内所有质点所受外力和内力做功的代数和等于质点系总动能的增量。	对定轴的外力矩所做的功的代数和等于刚体转动动能的增量。

- 力对空间累积的效果是改变质点的动能。
- 内力做功可以改变质点系的动能。
- 刚体各质点之间没有相对运动，所以其内力做功的代数和恒为零。
- 内力对时间积累和对空间积累的不对称，来源于做功可以涉及机械运动与其他运动形式之间的能量转化。

重力的功

----与物体和地球间的重力相关



重力所做元功：$\mathrm{d}A = m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

重力做的总功：

$$A = \int_a^b m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b -(mg\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= \int_{z_a}^{z_b} -mg\mathrm{d}z$$

$$= -(mgz_b - mgz_a)$$

◆ **重力所作的功**等于重力的大小乘以质点起始位置与末位置的高度差。

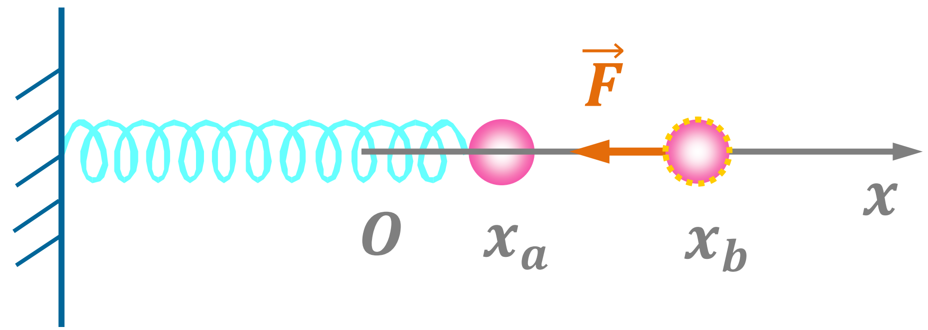
◆ 重力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。

◆ 质点上升时，重力作负功；质点下降时，重力作正功。

弹性力的功

----与物体和弹簧间相互作用力对应

由胡克定律有： $\vec{F}=-kx\vec{i}$



$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}(-kx\vec{i})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i})$$

$$=-k\int_{x_a}^{x_b}x\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

- 弹性力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。
- 弹簧的变形减小时，弹性力作正功；弹簧的变形增大时，弹性力作负功。

- 弹性力的功等于弹簧劲度系数乘以质点始末位置弹簧形变量平方之差的一半。

万有引力的功

----与两个物体间万有引力相关

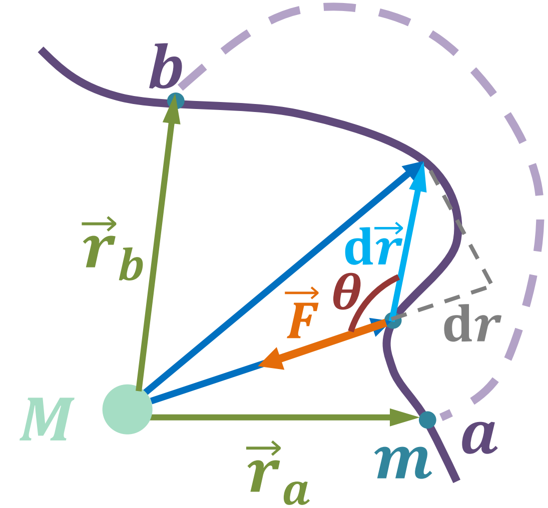
$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b G\frac{mM}{r^2}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$=\int_{r_a}^{r_b} -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-\left[\left(-G\frac{mM}{r_b}\right)-\left(-G\frac{mM}{r_a}\right)\right]$$

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$



$\vec{F}$在位移元$\mathrm{d}\vec{r}$上的元功为

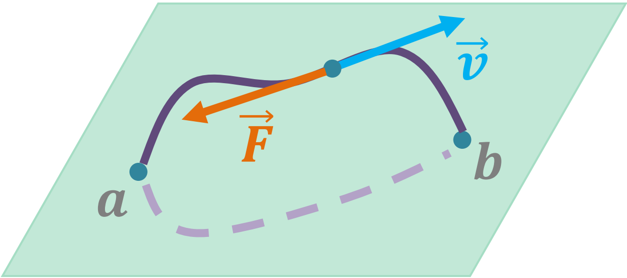
$$\mathrm{d}A=F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

$$\mathrm{d}r=\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos(\pi-\theta)$$
$$=-\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$\mathrm{d}A=-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

- ◆**万有引力的功**，也是只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。
- ◆质点移近质点时，万有引力作正功；质点远离质点时，万有引力作负功。

摩擦力的功



摩擦力$\vec{F}$在某过程中作的功为

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{a(L)}^{b} -F\mathrm{d}s$$

$$= \int_{a(L)}^{b} -\mu m g \mathrm{d}s$$

$$= -\mu m g(s_2 - s_1)$$

$$F = \mu m g$$

摩擦力方向始终与质点速度方向相反

- **摩擦力的功**，不仅与始、末位置有关，而且与质点所行经的路径有关。

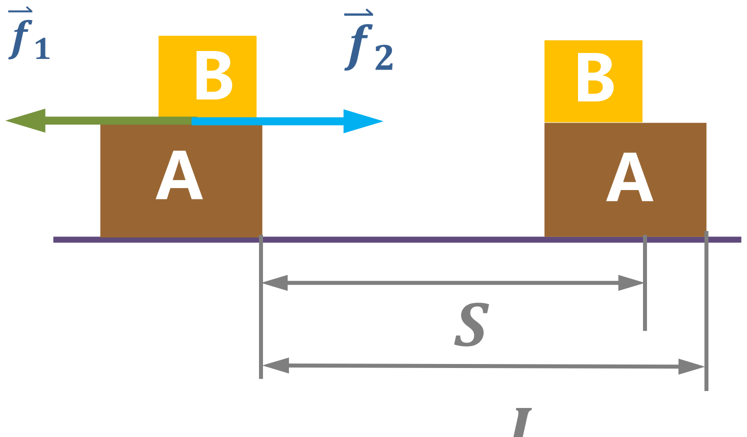
一物体的质量为 m ，被置于水平桌面上，在外力作用下沿半径为R的圆从A 运动到B，移动了半个圆周，设摩擦系数为μ,求此过程中桌面对它的摩擦力做的功。

$$A = -\mu m g \pi R$$

若沿直径运动：$A = -2\mu m g R$

(1) 内力和为零,内力功的和

不一定为零



◆ 保守力做功与路径无关，只与初、末态相对位置有关。

$$A_{保} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

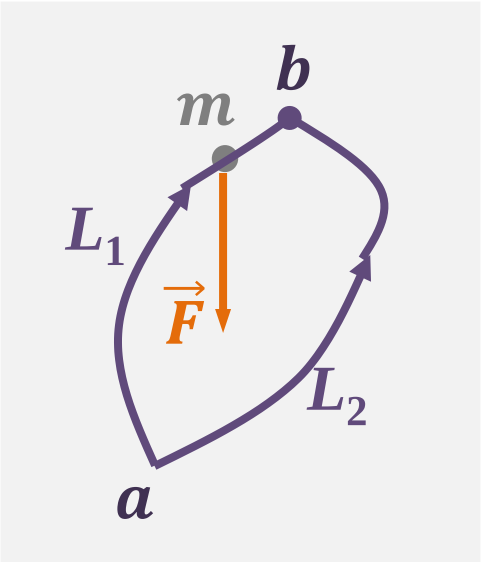
（路径L_1）（路径L_2）

◆ 保守力对沿闭合路径绕行一周的质点所做的净功为零。

$$A_{保} = \oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\int_{a(L_1)}^b \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{a(L_2)}^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_b^a \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$



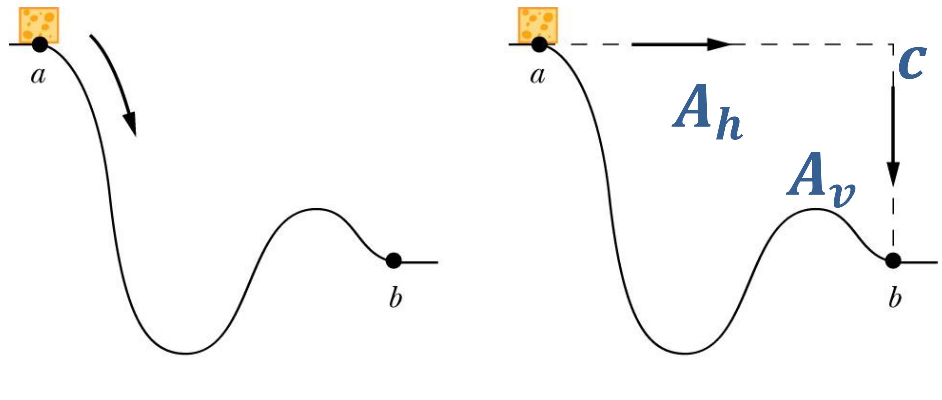
□ 保守力包括：万有引力、重力、弹簧的弹力、静电力
（四种基本相互作用力均是保守力）

□ 非保守力：也称为耗散力(dissipative force)，如摩擦力

如图所示，一块2.0kg的奶酪，由a点沿着光滑轨道滑到b点，奶酪沿轨道经过的总路程为2.0m，竖直距离为0.8m，在奶酪下滑期间，重力对它做了多少功?

解：轨道方向不断变化，不能用 $A_g = mgd\cos\phi$ 计算。

重力mg是保守力，可以在a点与b点之间任意选择计算路径，选择ac、cb两段路径，做功分别为A_h和A_v。



(a) (b)

$$A_h = 0$$

$$\begin{aligned} A_v &= mg \cdot \mathrm{d} \\ &= 2.0 \times 9.8 \times 0.8 \\ &= 15.7(\mathrm{J}) \end{aligned}$$

$$A = A_v = 15.7(\mathrm{J})$$

势能

----与系统相对位置有关的能量。

定义：保守力做的功等于系统势能增量的负值

$$A_{保} = -\Delta E_p$$

$$E_p = \int_{场点}^{零势点} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

物体在保守力场中某点的势能，数值上等于将物体从该点移到零势点过程中保守力做的功。

- ◆ 物体系势能的大小取决于零势点的选择。
- ◆ 某点势能指该点与参考点势能之差

- ◆ 在有相互作用的物体系中，势能是与相对位置相联系的能量。所以，势能是与物体系中相互作用内力的功相联系的能量。
- ◆ 势能是研究一对保守力的功时引入的，它属于以保守力作用的整个系统，实质上是相互作用能。

$$E_p = \int_{\text{场点}}^{\text{零势点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

物体在保守力场中某点的势能，数值上等于将物体从该点移到零势点过程中保守力做的功。

势能的性质:

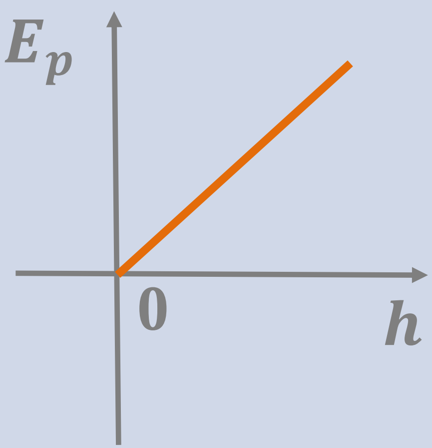
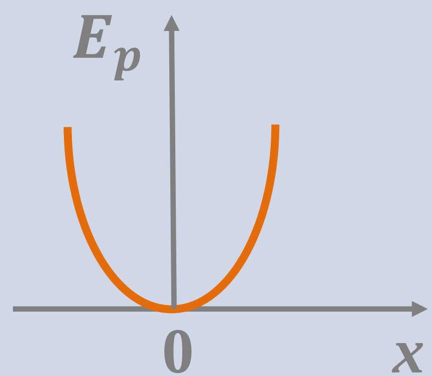
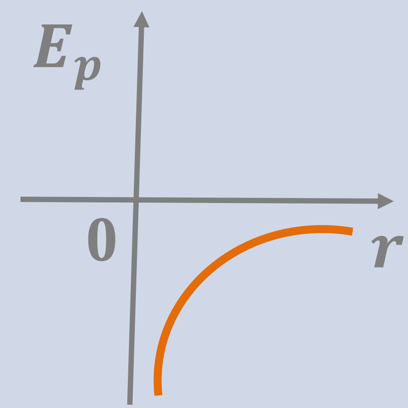
- **势能是位置（相互作用物体的相对位置）的函数;**
- **势能属于相互作用的系统;**
- **势能零点的选择是任意的;**
- **势能差有绝对意义，势能只有相对意义;**
- **只有保守力才能定义势能。**
- **保守力做正功，势能减少; 反之势能增加。**

重力势能: $E_p = \int_z^0 m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_z^0 -mg\mathrm{d}z = mgz$

弹力势能: $E_p = \int_x^0 (-kx\vec{i}) \cdot (\mathrm{d}x\vec{i}) = -\int_x^0 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$

引力势能: $E_p = \int_r^\infty -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathrm{d}r = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

几种常见势能函数及对应的势能曲线

保守力	重力	弹性力	引力
势能	重力势能	弹性势能	引力势能
势能零点	$h = 0$ 地面	$x = 0$ 自然伸长	$r \longrightarrow \infty$ 相距无限远
势能函数	$E_p = mgh$	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
势能曲线（势能与位置坐标的函数曲线）			

由万有引力势能到重力势能

$$E_{p,h}=-G\frac{Mm}{R+h}$$

$$E_{p,0}=-G\frac{Mm}{R}$$

$$E_{p,h}-E_{p,0}=-G\frac{Mm}{R+h}+G\frac{Mm}{R}=G\frac{Mm}{R(R+h)}$$

在地球表面附近 $h\ll R$，

$$E_{p,h}-E_{p,0}\approx G\frac{Mmh}{R^2}=mgh$$

□由势能函数求保守力

三维直角坐标系中， $E_p = E_p(x,y,z)$

$$\mathrm{d}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}A_{保} = \vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}A_{保} = -\mathrm{d}E_p \longrightarrow$$

◆定义梯度算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F}_{保} = -\nabla E_p$$

$$\vec{F}_{保} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

◆保守力沿某一给定方向的分量等于此保守力相应的势能函数沿该方向空间变化率的负值。

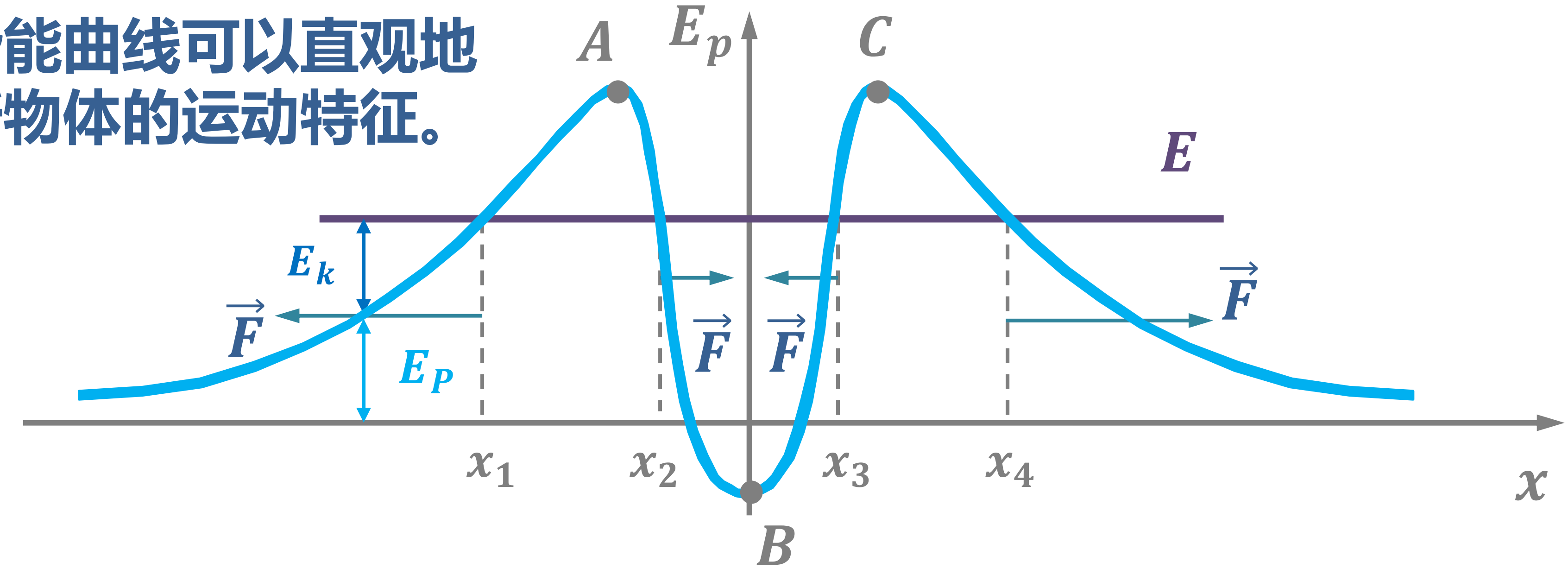
◆保守力等于其相关势能函数梯度的负值。

□由势能曲线求保守力

----势能随物体间相对位置变化的曲线。

物体系在相应位置的保守力等于势能曲线在该处斜率的负值。

由势能曲线可以直观地分析物体的运动特征。



质点运动范围 $E_k = E - E_p > 0$

$(-\infty \to x_1)$ $(x_2 \to x_3)$ $(x_4 \to \infty)$

质点在 $(x_2 \to x_3)$ 内释放：做往复振动

B 点：$\vec{F} = 0$ 稳定平衡位置

A、C点：$\vec{F} = 0$ 非稳定平衡位置

◆ 直角坐标系中

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

如果是保守力，则

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x}$$

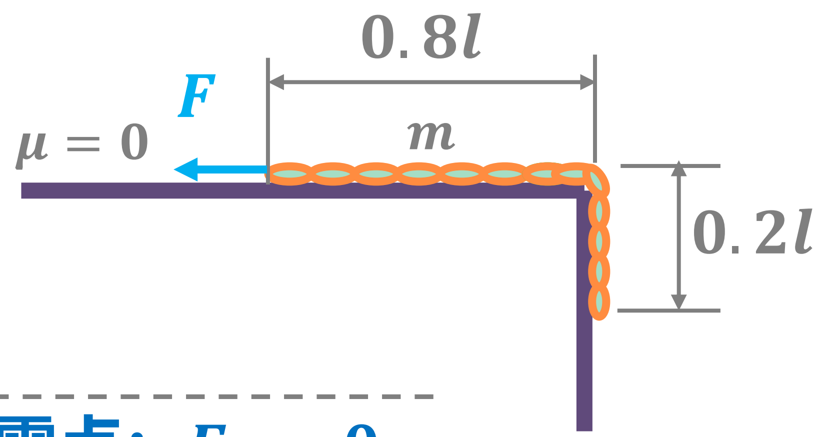
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\vec{F} = x^2 y^2 \vec{i} + x^2 y^2 \vec{j}$ **是不是保守力?**

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x^2 y \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy^2$$

不是保守力。

一个长度为l，质量m均匀分布的长链被置于光滑无摩擦的水平桌面上。有$0.2l$的部分沿桌面边沿垂下，如图所示。如果要将该链缓慢拉回桌面，求拉力F所做的功。



解： F 为一变力，其大小等于垂下部分的重力。

垂下部分的质量 $\frac{m}{l}x$，所以$G=\frac{mx}{l}g$

$$A_G=\int\vec{G}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\frac{mg}{l}x\hat{\imath}\cdot\mathrm{d}x\hat{\imath}$$

$$=\frac{mg}{l}\int_{0.2l}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{mgl}{50}$$

拉力F的功 $A_F=-A_G=\frac{mgl}{50}$

重力是保守力。选择桌面为势能零点：$E_\mathrm{p}=0$

初态势能：$E_\mathrm{p1}=\frac{mg}{5}h_c=\frac{mg}{5}\left(-\frac{l}{10}\right)=-\frac{mgl}{50}$

末态势能：$E_\mathrm{p2}=0$

重力的功：$A_G=-\Delta E_\mathrm{p}=-\left(E_\mathrm{p2}-E_\mathrm{p1}\right)=-\frac{mgl}{50}$

拉力的功：$A_F=-A_G=\frac{mgl}{50}$

功能原理

机械能 $E = E_k + E_p$

由质点系动能定理 $A = \Delta E_k$

由于 $A_{外} + A_{非保内} + A_{保内} = \Delta E_k$

$A_{外} + A_{非保内} - \Delta E_p = \Delta E_k$

所以 $A_{外} + A_{非保内} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E$$

质点系所受外力和非保守内力做功代数和等于质点系总机械能的增量。---质点系的功能原理

□动能定理与功能原理的区别与联系

- ✓ 质点系的功能原理的形式便于讨论机械能与其他形式能量的相互转化问题。
- ✓ 质点系的功能原理与质点系动能定理的物理内容是相同的。

口动能定理与功能原理的区别与联系

- ◆功能原理是从动能定理推出的，完全包含在动能定理之中，由于保守力的功已反映在势能的改变中，
- ✓ 运用功能原理时，只需要计算非保守力的功；
- ✓ 运用动能定理时，则需要计算所有力做的功 。

质点系动能定理

$$A_{外}+A_{非保内}+A_{保内}=\Delta E_k$$

质点系功能原理

$$A_{外}+A_{非保内}=\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p$$

外力

内力
- 保守内力（重力、弹力、万有引力）
- 非保守内力（耗散力，如摩擦力、冲撞力、爆炸力）

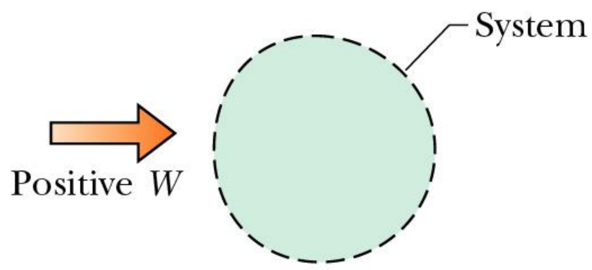
功能原理

功是通过作用于物体（质点）的力传给物体（或由物体传出）的**能量**。

对于物体系（系统），功的定义可以推广为：**功**是通过作用于系统的外力传给系统（或由系统传出）的**能量**。

功与能的联系与区别

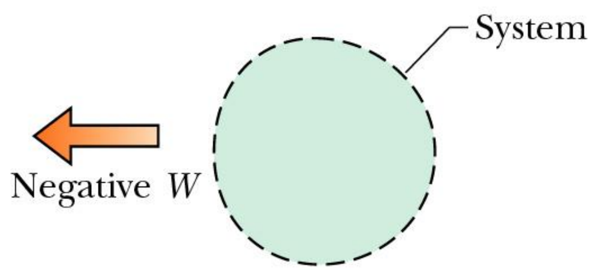
- 功与能的单位与量纲相同；
- 功是过程量，能量是状态量；
- 功是能量传递和转化的一种方式，是传递和转化能量的量度。



(a)

正功向系统传入能量

负功从系统传出能量



(b)

由质点系**动能定理** $A=\Delta E_k$

由于 $A_{外}+A_{非保内}+A_{保内}=\Delta E_k$

$A_{外}+A_{非保内}-\Delta E_p=\Delta E_k$

所以 $A_{外}+A_{非保内}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E$

$dA_{外}+dA_{非保内}=0$,

则 $\mathrm{d}E=0$，$E=E_k+E_p=$ 常量

◆ $A_{外}+A_{非保内}=0$，$E_1=E_2$

系统初、末态机械能相等（不一定守恒）。

对于某物体系统，在其从初态到末态的每一个微元过程中，外力和非保守内力所做元功的代数和均等于零，那么整个过程中质点系的机械能保持恒定。---质点系**机械能守恒定律**。

在只有保守内力做功的系统中，动能与势能可以相互转化，但它们的和（系统的机械能）不会改变。

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=0$$

在只有保守内力做功的系统中：

因为 $\Delta E_k=A$，$\Delta E_p=-A$

所以 $\Delta E_k=-\Delta E_p$

$$E_{k2}-E_{k1}=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)$$

$$E_{k2}+E_{p2}=E_{k1}+E_{p1}$$

能量不能消失，也不能创造，只能从一种形式转化为另一种形式。对一个孤立系统来说，不论发生何种变化，各种形式的能量可以互相转化，但它们总和是一个常量。这一结论称为**能量守恒定律**。

例如：利用水位差推动水轮机转动，能使发电机发电，将机械能转换为电能。
电流通过电热器能发热，把电能又转换为热能。

能量是一个比力更基本的概念或物理量！

功能原理表明，保守内力的功转变成系统的势能，外力的功转变成系统动能，非保守内力的功转变成什么能量？

外力和摩擦内力的功：
由牛顿第二定律可得

$$F - F_k = ma$$

由匀加速运动公式

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

$$F\mathrm{d} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + F_k\mathrm{d}$$

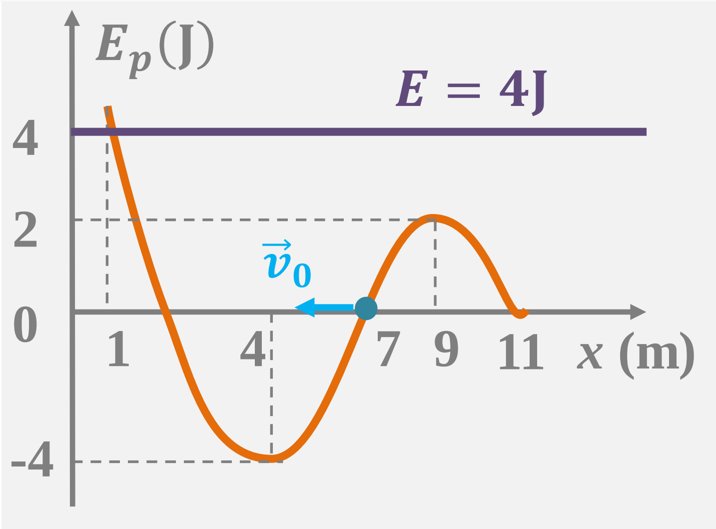
$$F\mathrm{d} = \Delta E_k + F_k\mathrm{d}$$

$$A = \Delta E_k + +\Delta E_{th}$$

- 能量守恒定律可以适用于任何变化过程。
- 功是能量交换或转换的一种度量。
- 机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

如图所示为一粒子在一维保守势场中运动、质量为m的粒子，$m = 2$ kg，$v_0 = -2\vec{i}$ m/s，$x_0 = 7$ m。

求：1. 质点运动范围；2. 在哪些区域 $F > 0$? 3. 在哪个位置的速率最大?



解：

1. 初态 $E = E_{k0} + E_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 4$ (J)

画出能量线 $E = 4$J

有一个交点（转折点）在$x = 1$，

可知质点运动范围为 $x \geq 1$

2. 如果希望 $F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} > 0$，则 $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} < 0$

即能量曲线的斜率要小于零，由此可知

$1 < x < 4$，$9 < x < 11$区域 $F > 0$。

3. 在 $x = 4$m处，势能最小，因而动能最大。

$$E = E_{k\max} + E_{p\min}$$
$$E_{k\max} = E - E_{p\min} = 8 \text{ (J)}$$
$$v_{\max} = 2\sqrt{2} \approx 2.82 \text{ (m/s)}$$

人造地球卫星质量为m，绕地球做半径为$3R$的圆周运动，R为地球半径。用m, R, G, 和地球质量M表示出（1）卫星的动能；（2）卫星和地球间的引力势能；（3）系统的总机械能。

（1）由牛顿第二定律

$$G\frac{mM}{(3R)^2}=m\frac{v^2}{3R}$$

卫星的动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GmM}{6R}$

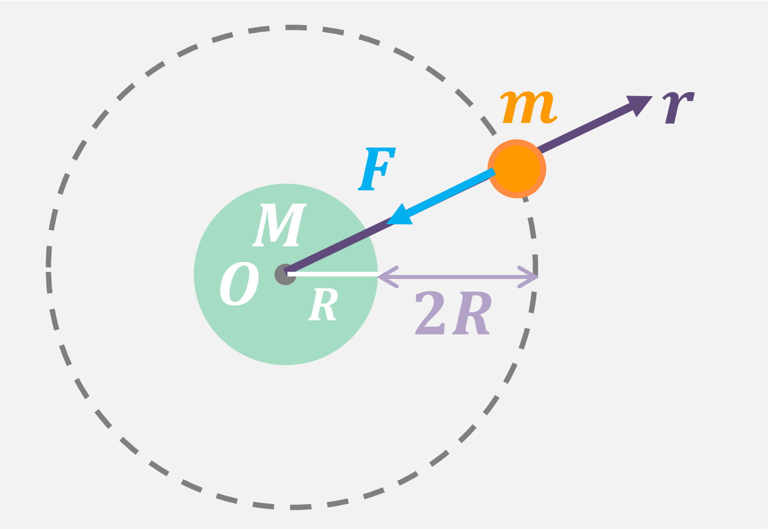
（2）以无穷远处为引力势能零点，人造地球卫星的势能为

$$E_p=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-G\frac{mM}{3R}$$

（3）$E=E_k+E_p=-G\frac{mM}{6R}$

束缚于地球引力场中

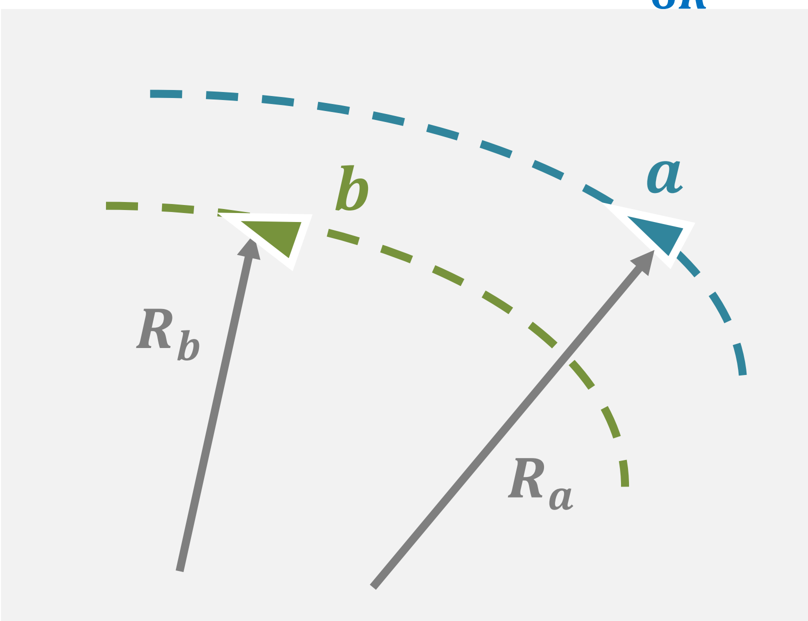


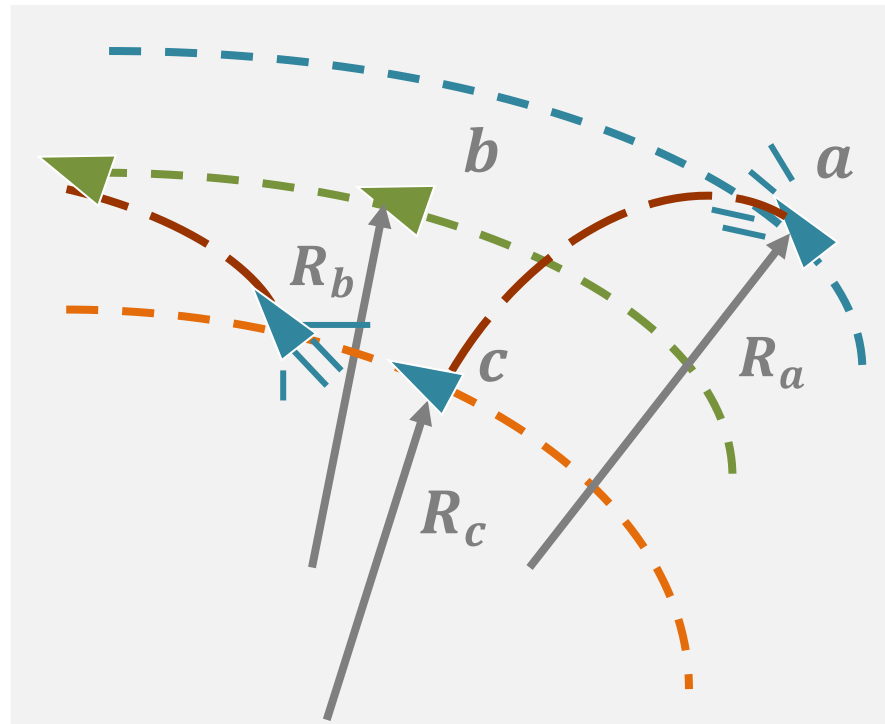
卫星对接问题

设飞船a、b圆轨道在同一平面内，飞船a要追上b并与之对接，能否直接加速？

加速，发动机做功，$\Delta E > 0$，轨道半径R增大，不能对接；

$$E = E_k + E_p = -G\frac{mM}{6R}$$





方法：

$$\left.\begin{matrix} a\ \text{减速} \\ \Delta E < 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{R\text{减小}} R_C\ \text{轨道} \xrightarrow{\text{加速}} R_b\ \text{轨道}$$

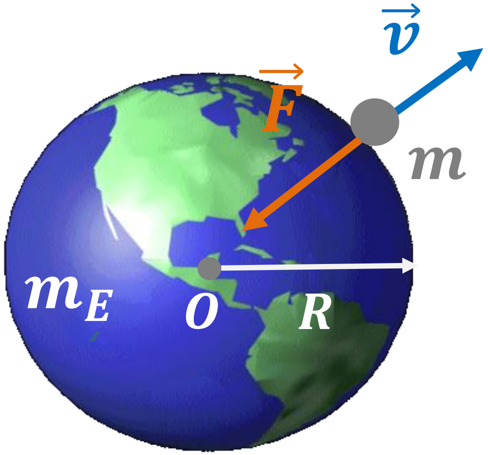
引力场中的逃逸速率与黑洞。

以地球引力场为例：使抛体完全脱离地球引力的作用范围，一直向上运动直至无限远处的最小初始速率——逃逸速率。

由于只有地球引力这个保守力做功，
系统机械能守恒 $\Delta E = -\Delta E_p$

即 $0-\frac{1}{2}mv^2 = -\left[0-\left(-\frac{Gm_E m}{R}\right)\right]$

可得 $v=\sqrt{\frac{2Gm_E}{R}}$



脱离地球吸引的速率又称为第二宇宙速率

$$v = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

绕地球作匀速圆周运动的抛体所需的最小发射速率称为第一宇宙速率

$$G\frac{mm_E}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \implies v=\sqrt{\frac{Gm_E}{R}} = 7.9\ \mathrm{km/s}$$

黑洞：

如果一个质量为m的星体小到一个非常小的尺度以至于光也无法逃逸，该星体将形成所谓的黑洞。

黑洞的临界半径 R_s（施瓦希半径）：

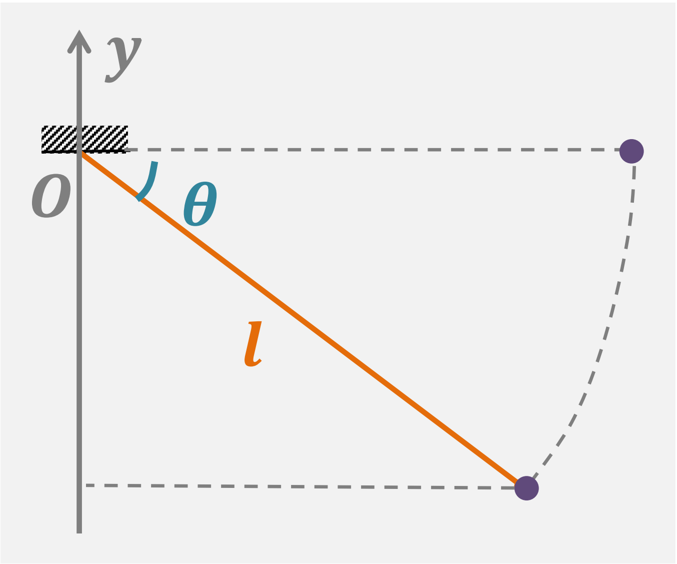
由于 $v_{escape} = \sqrt{\dfrac{2Gm}{R}} = \text{光速} = c$

所以 $\sqrt{\dfrac{2Gm}{R_s}} = c$

$$\Longrightarrow R_s = \frac{2Gm}{c^2}$$

对地球有 $R_s = 8.86 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$

一个理想的单摆由长度为l，质量可忽略且不可伸长的细线与一个质量为m的小球组成。初始时刻单摆静止于水平位置，以初速为零释放。当杆或摆线与水平方向夹角为θ时，求小球的速率。



解：建立如图所示坐标系。

小球沿切向运动张力不做功，只有重力（保守力）做功，系统（小球和地球）机械能守恒。

选初始水平线 $y=0$ 处为势能零点位置。

起点（初始时刻） $E_0=E_{k0}+E_{p0}=\frac{1}{2}mv_0^2+mgy_0$

末点（末时刻） $E_1=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+mgy$

由于$E_0=E_1$，**得** $mgy_0+\frac{1}{2}mv_0^2=mgy+\frac{1}{2}mv^2$

$y_0=0$，$v_0=0$，$\Longrightarrow\ -mgy=mgl\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2$

可得 $v=\sqrt{2mgl\sin\theta}$

求解综合性问题

对复杂问题常常分阶段处理。根据具体情况，每个阶段可以选择不同的研究对象和力学定律。利用前一阶段的末状态即后一阶段的初状态将各个阶段衔接起来。常见情况如下：

- 碰撞、冲击阶段往往$A_{\text{非保内}} \neq 0$，又不知道内力的具体形式，无法使用动能定理或功能原理，但力作用时间短，内力≫外力，可以适当选择系统，用**动量定理、动量守恒定律或角动量定理、角动量守恒定律**求解。
- 对摆动、在曲面上滑动这类过程往往用**动能定理、功能原理或机械能守恒定律**求解。
- 牛顿第二定律只应用于质点，只处理瞬时问题。如果用于质点系，需要用**隔离法**将系统内力转化为外力，列方程组求解。而动量定理、角动量定理、动能定理可以直接用于体系，只讨论初、末状态，不涉及过程细节，往往使问题简化。

动能定理

① 确定研究对象；
② 选定惯性系；
③ 选过程，确定初、末状态动能；
④ 分析受力（外力、保守内力、非保守内力），求出过程中各力的功；
⑤ 由功---动能定理列方程：

$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

⑥ 求解并讨论。

应用功能原理或机械能守恒定律解题

① 选体系，使保守力成为系统的内力，例如：有重力时应该将地球包括到体系中；有弹力时应该将弹簧包括到体系中。
② 选过程，选势能零点，确定初、末状态机械能；
③ 分析受力（外力、非保守内力），求出过程中各力的功；判断是否满足机械能守恒条件；
④ 由功能原理或机械能守恒定律列方程；

功能原理：

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$$

机械能守恒：

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

⑤ 求解并讨论。

三类碰撞比较

	完全弹性碰撞	完全非弹性碰撞	非完全弹性碰撞
作用力	弹性力	耗散力	弹性力＋耗散力
形变	完全恢复	完全不能恢复	部分恢复
相对速度	大小不变	为零	变小
动能损耗	无	较大	较小
典型实例	粒子散射	冲击摆	一般情况
动量守恒	成立	质点↔质点：成立 质点↔定轴刚体：不成立	具体分析
角动量守恒	成立	成立	具体分析
机械能守恒	成立	不成立	不成立

把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以第二宇宙速度$v_0=\sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$发射出去，阻力忽略不计。求物体从地面飞行到与地心相距 nR_e 处经历的时间。

解：根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{M_e m}{R_e}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{M_e m}{x}$$

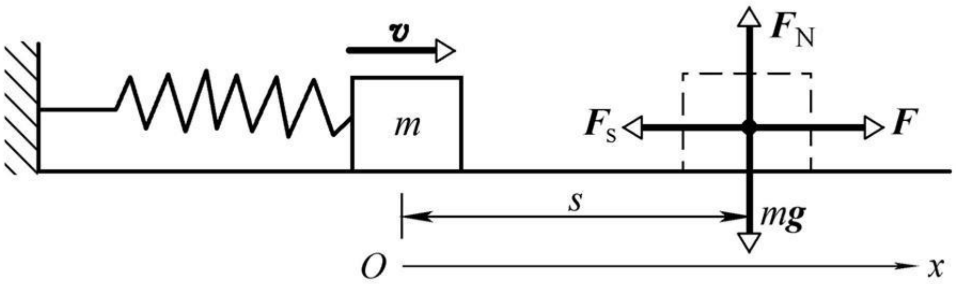
$$v=\sqrt{\frac{2GM_e}{x}}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ \Rightarrow\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v}=\frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{t_1}\mathrm{d}t=\int_{R_e}^{nR_e}\frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ t_1=\frac{2}{3\sqrt{2GM_e}}R_e^{3/2}\left(n^{3/2}-1\right)$$

光滑平面上的一个弹簧系统，如图所示，弹簧的劲度系数$k=24\mathrm{N/m}$，在弹簧原长处系一质量为m的物块，这时物块处于静止状态。现用一恒力拉此弹簧系统，使物块m运动0.5m，若$F=10\mathrm{N}$，$m=4\mathrm{kg}$，求物块运动到0.5m处时的速度v。



解：研究系统：物块-弹簧-地球

方法二：用动能定理解题

$$A=A_{外}+A_{保内}=\Delta E_k$$

$$Fs+\int_0^s \vec{F}_s\cdot d\vec{s}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

$$Fs-\int_0^s ks\,ds=\frac{1}{2}mv^2-0$$

$$\Longrightarrow F\cdot s=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}ks^2$$

$$v=\left(\frac{Fs-\frac{1}{2}ks^2}{\frac{1}{2}m}\right)^{1/2}=1(\mathrm{m/s})$$

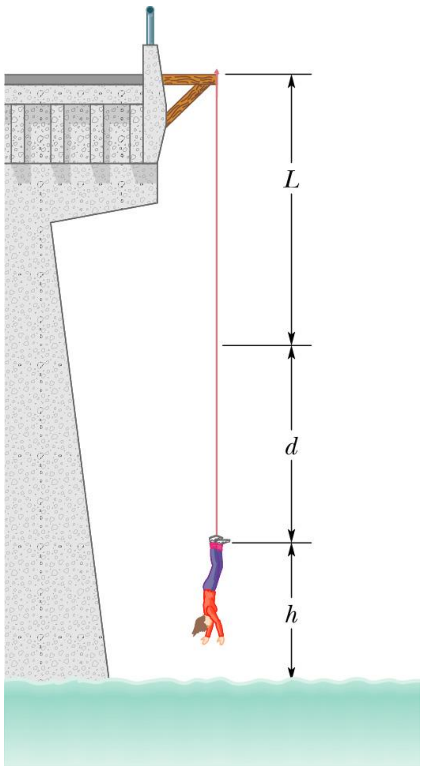
方法一：用功能原理解题

$$A_{外}=\Delta E$$

$$F\cdot s=\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}ks^2\right)-0$$

$$v=\left(\frac{Fs-\frac{1}{2}ks^2}{\frac{1}{2}m}\right)^{1/2}=1(\mathrm{m/s})$$

一个61.0kg的跳蹦极的人站在距河面45.0m高的桥上，弹性蹦极绳的松弛长度为$L=25.0\mathrm{m}$，设该绳子遵从胡克定律（$k=160\mathrm{N/m}$）。如果这个人到达水面之前停下，问在身处最低点时，她的脚距水面的高度h。



解：蹦极者、地球、绳为系统， 弹力与重力为内力。选择跳台为重力势能零点，绳原长为弹性势能零点。由于蹦极者跃下的整个过程中，机械能守恒，所以

$$\Delta E_{\mathrm{k}}+\Delta E_{\mathrm{pk}}+\Delta E_{\mathrm{pg}}=0$$

观察起始点（初态）与最低点（末态）

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=0$$

$$\Delta E_{\mathrm{pg}}=mg\Delta y=-mg(L+d)$$

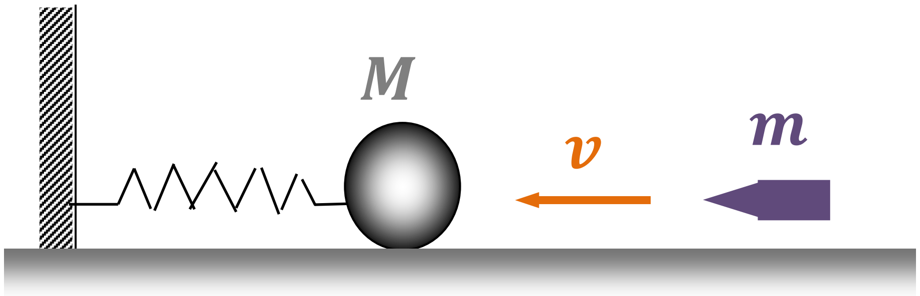
$$\Delta E_{\mathrm{pk}}=\frac{1}{2}kd^2$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}kd^2-mg(L+d)=0$$

$$d=17.9\mathrm{m}$$

$$h=45.0-25.0-17.9$$
$$=2.1\mathrm{m}$$

质量为M的弹簧振子，水平放置静止在平衡位置，如图所示，一质量为m的子弹以水平速度v射入振子中， 并随之一起运动。如果水平面光滑，求此后弹簧的最大势能。



解：先以m和M为研究对象，忽略它们碰撞过程中弹簧因形变而产生的力，系统动量守恒。

设碰后二者共同运动的速率为u, 由动量守恒定律

$$mv = (m + M)u$$

得 $u = \frac{m}{m+M}v$

再以m、M和弹簧为研究对象，$A_{外} = 0$，系统机械能守恒：

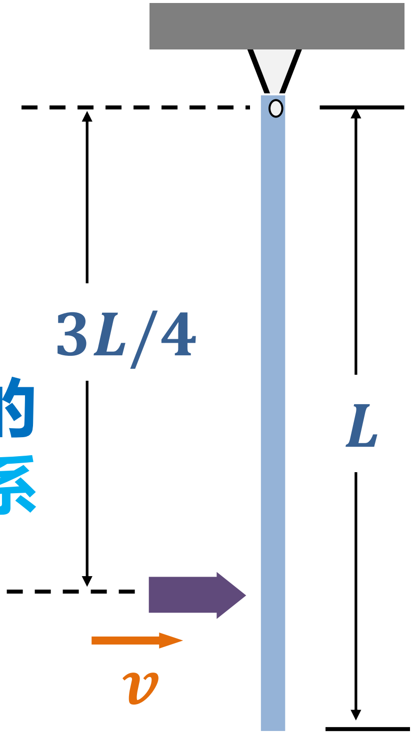
最大势力能等于初动能，即

$$E_{p_{max}} = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}$$

一均质细杆，长$L=1\mathrm{m}$，可绕通过其一端的水平光滑轴O在铅直面内自由转动，如图所示。开始时杆处于铅直位置，今有一粒子弹沿水平方向以$v=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速度射入细杆。设入射点离$O$点的距离为$3L/4$，子弹的质量为杆质量的$1/9$，试求：

（1）子弹与杆开始共同运动的角速度；

（2）子弹与杆共同摆动能达到的最大角度。



解：

（1）设子弹的质量为m，则杆的质量为$M=9m$，以子弹和杆组成的系统作为研究对象，则系统所受的合外力矩为零（重力和轴承约束力均通过转轴），**系统的角动量守恒**，即：

$$\frac{3}{4}L\cdot mv=\left[m\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2+\frac{1}{3}ML^2\right]\cdot\omega$$

代入已知数据，可得子弹与杆开始共同运动的角速度

$$\omega=\frac{\frac{3}{4}L\cdot mv}{\left[m\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2+\frac{1}{3}ML^2\right]}=\frac{4v}{19L}=\frac{40}{19}=2.11(\mathrm{rad/s})$$

一均质细杆，长$L = 1\mathrm{m}$，可绕通过其一端的水平光滑轴O在铅直面内自由转动，如图所示。开始时杆处于铅直位置，今有一粒子弹沿水平方向以$v = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的速度射入细杆。设入射点离$O$点的距离为$3L/4$，子弹的质量为杆质量的$1/9$，试求：

（1）子弹与杆开始共同运动的角速度；

（2）子弹与杆共同摆动能达到的最大角度。

解：

（2）设碰撞后子弹和杆组成的系统的动能为E_k，则

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\left[m\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right]$$

设子弹与杆共同摆动能达到的最大角度为θ，选竖直位置时子弹和杆质心所在水平面为零势能面，则系统重力势能为：

$$E_p = Mg\cdot\frac{1}{2}L\cdot(1-\cos\theta) + mg\cdot\frac{3}{4}L\cdot(1-\cos\theta)$$

子弹、杆和地球组成的系统机械能守恒　$E_k + 0 = 0 + E_p$

可得 $(1-\cos\theta) = \dfrac{200}{133g} = 0.15$

所以摆动能达到的最大角度为$\theta = 0.56\ \mathrm{rad} = 32.09^\circ$

- 质点系的内力可以改变系统的总动能，因此也改变系统的总动量。

不正确，质点系内力作功的代数和不一定为0，因而可以改变系统的总动能，质点系的内力的矢量和为0，所以不会改变系统的总动量。

- 内力都是保守力的系统，当它所受的合外力为零时，它的机械能必然守恒。

不正确。合外力为零，但各分力作功的位移可不相同，合外力 做功不一定为零，所以机械能不一定守恒。

- 只有保守内力作用又不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

正确。

动量守恒	角动量守恒	机械能守恒
$\vec{F}_{外}=\mathbf{0}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=0$ $\vec{p}=$常矢量	$\vec{M}_{外}=\mathbf{0}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{0}$ $\vec{L}=$常矢量	$A_{非保内}+A_{外}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\mathrm{d}E=\mathbf{0}$ $E_k+E_p=$常量
研究对象：系统；成立条件：惯性系		

判断下列情况下所研究系统的动量与机械能是否守恒。

□ 子弹水平射入放在光滑水平桌面上的木块内，以子弹和木块为研究系统。

系统受的合外力为零，入射过程中子弹与木块有相对运动，存在摩擦力内力，为非保守力，因此，系统动量守恒，机械能不守恒。

□ 物体沿光滑固定斜面下滑，以物体和地球为研究系统。

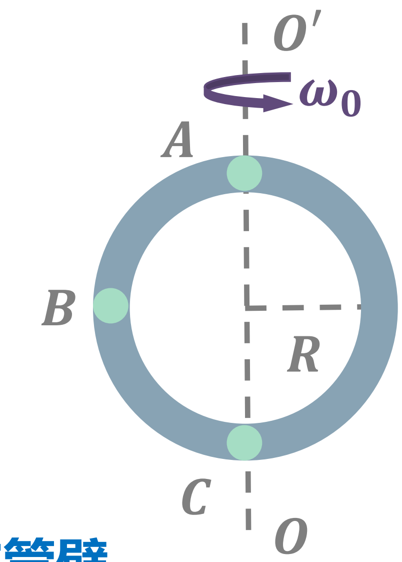
忽略宇宙间万有引力作为外力的影响，地球对物体的引力为保守内力，因此，系统动量守恒，机械能守恒。

□ 斜面置于光滑水平面上，一物体沿斜面无摩擦下滑，以物体和地球为研究系统。

应该是斜面、物体、地球为系统的动量守恒，机械能守恒。但是提问中没有把斜面当作系统，因此，动量不守恒，机械能不守恒。

动量守恒	角动量守恒	机械能守恒
$\vec{F}_{外}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}=0$ $\vec{p}=$ 常矢量	$\vec{M}_{外}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0$ $\vec{L}=$ 常矢量	$A_{非保内}+A_{外}=0 \Rightarrow dE=0$ $E_k+E_p=$ 常量
研究对象：系统；成立条件：惯性系		

一个内壁光滑的圆形细管，正绕竖直光滑固定轴OO'自由转动。管是刚性的，转动惯量为J。环的半径为R，初角速度为ω_0，一个质量为m的小球静止于管内最高点A处，如图所示，由于微扰，小球向下滑动。试判断小球在管内下滑过程中：



- 地球、环与小球系统的机械能是否守恒?

  守恒。因为整个系统，外力的功为零，非保守内力是小球与管壁的作用力N与反作用力N'。在小球下滑过程中，小球受壁的压力N始终与管壁垂直，也始终与小球相对管壁的速度方向垂直，所以N和N'作功为零，满足机械能守恒。

- 小球的动量是否守恒?

  不守恒。小球在下落过程中，受到重力和管壁的作用力，这两个力的合力不为零，所以小球的动量会不断变化。

- 小球与环组成的系统对OO'轴的角动量是否守恒?

  小球与环组成的系统，受到的外力为重力和通过轴的支持力，重力的方向与OO'轴的方向平行，支持力的方向通过轴，因此它们对OO'轴力矩都为零。因此整个系统角动量守恒。