解释结构模型

学习要点

解释结构模型是用于分析复杂要素间关联结构的一种专门研究方法，作用是能够利用系统要素之间已知的零乱关系，揭示出系统的内部结构。解释结构模型法的具体操作是用图形和矩阵描述出各种已知的关系,通过矩阵做进一步运算，并推导出结论来解释系统结构的关系。

介绍解释结构模型的基本概念；论述了解释结构模型法应用的具体步骤。通过学习，应了解解释结构模型的基本概念，明确有向图、邻接矩阵和可达矩阵的含义，掌握解释结构模型法应用的步骤，熟练运用解释结构模型法分析解决具体问题。

第一节 解释结构模型的基本概念

一、系统结构的基本表达方式

系统结构的表达方式包括集合、有向图和矩阵三种相互对应的方式。

1、系统结构的集合表达

设系统由n（n≥2）个要素（S_1, S_2，…，S_n）组成，其集合为S，则有$S = \{S_1, S_2，…，S_n\}$

二元关系是根据系统的性质和研究的目的所约定的一种需要讨论的，存在于系统中的两个要素$\{S_i, S_j\}$之间的关系R_{ij}，简记为R。通常有影响关系、因果关系、包含关系、隶属关系以及各种可以比较的关系（如大小、先后、轻重、优劣等）。

二元关系是结构分析中所要讨论的系统构成要素间的基本关系，一般有以下三种情形：

①$\boldsymbol{S_i}$与$\boldsymbol{S_j}$间有某种二元关系$\boldsymbol{R}$，即$\boldsymbol{S_i R S_j}$

②$\boldsymbol{S_i}$与$\boldsymbol{S_j}$间无某种二元关系$\boldsymbol{R}$，即$\boldsymbol{S_i \overline{R} S_j}$

③$\boldsymbol{S_i}$与$\boldsymbol{S_j}$间某种二元关系$\boldsymbol{R}$不明，即$\boldsymbol{S_i \tilde{R} S_j}$

有时，对系统的任意构成要素$\boldsymbol{S_i}$与$\boldsymbol{S_j}$来说，既有$\boldsymbol{S_i R S_j}$，又有$\boldsymbol{S_j R S_i}$，这种相互关联的二元关系叫强连接关系。具有强连接关系的各要素之间存在替换性。

例3-1

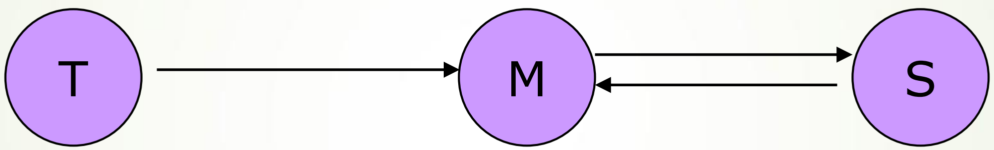
某系统由七个要素（S_1, S_2，…，　S_7）组成。经过两两判断认为，S_2影响 S_1，S_3影响 S_4，S_4影响 S_5，S_7影响 S_2，S_4和 S_6相互影响。这样，该系统的基本结构可用要素集合S和二元关系集合R_b来表达，其中

$$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7)$$

$$R_b = \{(S_2, S_1), (S_3, S_4), (S_4, S_5), (S_7, S_2), (S_4, S_6), (S_6, S_4)\}$$

2、系统结构的有向图表达

- 有向图——由节点和连接各节点的有向弧（箭线）两部分组成



3、系统结构的矩阵表达

（1）邻接矩阵

对于一个有向图，我们可以用一个m×m方形矩阵来表示。m为系统要素的个数。矩阵的每一行和每一列对应图中一个节点（系统要素）。规定，要素Si 对Sj 有影响时，矩阵元素a_{ij}为1，要素S_i对S_j无影响时，矩阵元素a_{ij}为0。即

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}S_i\text{对}S_j\text{有影响时,}\\ 0 & \text{当}S_i\text{对}S_j\text{无影响时,}\end{cases} \qquad (1)$$

对于图1中，m=3即可构成一个3×3的方形矩阵，表示为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

根据式（1）则用矩阵表示为：

$$
A=\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & M & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

上述这种与有向图形对应的，并用1和0表现元素的矩阵称为**邻接矩阵**

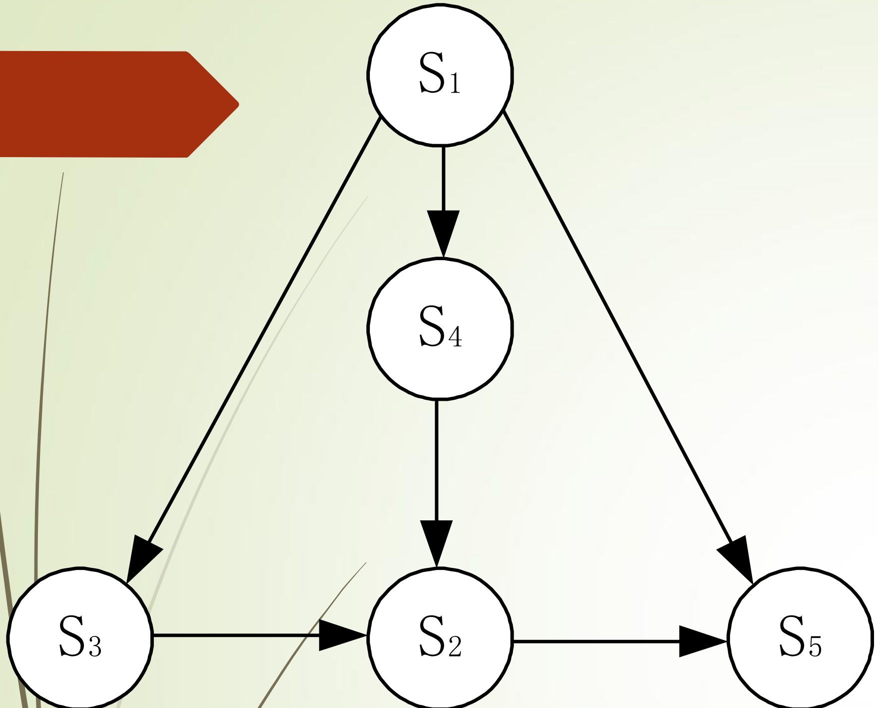


图12-2有向图

$$
A = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \mathrm{S1} & \mathrm{S2} & \mathrm{S3} & \mathrm{S4} & \mathrm{S5} \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

邻接矩阵的性质

邻接矩阵描述了系统各要素之间直接关系，它具有如下性质：

1. 邻接矩阵和有向图是同一系统结构的两种不同表达形式。矩阵与图一一对应，有向图确定，邻接矩阵也就唯一确定。反之，邻接矩阵确定，有向图也就唯一确定。

2. 邻接矩阵的矩阵元素只能是**1**和**0**，它属于布尔矩阵。布尔矩阵的运算主要有逻辑和运算以及逻辑乘运算，即：

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+1=1$$

$$1\times 0=0 \quad 0\times 1=0 \quad 1\times 1=1$$

3. 在邻接矩阵中，如果第**j**列元素全部都为**0**，则这一列所对应的要素S_j可确定为该系统的输入端。例如，上述矩阵**A**中，对应S_1列全部为**0**，要素S_1可确定为系统的输入端。

4. 在邻接矩阵中，如果第i行元素全部都为0，则这一行所对应的要素S_i可确定为该系统的输出端。例如，上述矩阵A中，对应S_5行全部为0，要素S_5可确定为系统的输出端。

5. 计算 A^K ，如果A 矩阵元素中出现 $a_{ij}=1$，则表明从系统要素S_i出发，经过k条边可达到系统要素S_j 。这时我们说系统要素S_i与S_j之间存在长度为k的通道。如上述矩阵

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵A^2表明，从系统要素S_1出发经过长度为2的通道分别到达系统要素S_2。同时，系统要素S_3和S_4也分别有长度为2的通道到达系统要素S_5。它们分别为：

① → ④ → ②；③ → ④ → ⑤；④ → ③ → ⑤

计算出矩阵 A^3 得到：

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵A^3表明，从系统要素S_1出发经过长度为3的通道到达系统要素S_5。它就是①→③→②→⑤或者①→④→②→⑤ 。

(2) 可达矩阵

如果一个矩阵，仅其对角线元素为1，其他元素均为0，这样的矩阵称为单位矩阵，用I表示。根据布尔矩阵运算法则，可以证明：

$$(A+I)^2 = I + A + A^2$$

同理可以证明：

$$(A+I)^k = I + A + A^2 + \ldots + A^k$$

如果系统A满足条件

$$(A+I)^{k-1} \neq (A+I)^k = (A+I)^{k+1} = M$$

则称M为系统A的可达矩阵。可达矩阵表示从一个要素到另一个要素是否存在连接的路径。

（3）缩减矩阵

根据强连接关系的可替换性，在已有的可达矩阵M中，将具有强连接关系的一组要素看作一个要素，保留其中的某个代表要素，删除掉其余要素及其在M中的行和列，即得到该可达矩阵M的缩减矩阵M’

（4）骨架矩阵

对于给定系统，A的可达矩阵M是唯一的，但实现某一可达矩阵M的邻接矩阵A可以具有多个。我们把实现某一可达矩阵M 、具有最小二元关系个数（1元素最少）的邻接矩阵叫做M的最小实现二元关系矩阵，或称之为骨架矩阵，记作A’

第二节 解释结构模型法应用的步骤

一、 ISM方法的基本步骤

ISM方法的作用是把任意包含许多离散的，无序的静态的系统，利用系统要素之间已知的、但凌乱的的关系， 揭示出系统的内部结构。其基本方法是先用图形和矩阵描述各种已知的关系，在 矩阵的基础上再进一步运算、推导来解释系统结构的特点。其基本步骤如下：

（1）建立系统要素关系表

（2）根据系统要素关系表，作出相应的有向图，并建立邻接矩阵；

（3）通过矩阵运算求出该系统的可达矩阵M；

（4）对可达矩阵M进行区域分解和级间分解；

（5）建立系统结构模型。

例3-1

某系统由七个要素（S_1, S_2， …， S_7）组成。经过两两判断认为，S_2影响 S_1，S_3影响 S_4，S_4影响 S_5，S_7影响 S_2，S_4和 S_6相互影响。这样，该系统的基本结构可用要素集合S和二元关系集合R_b来表达，其中

$$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7)$$

$$R_b = \{(S_2, S_1), (S_3, S_4), (S_4, S_5), (S_7, S_2), (S_4, S_6), (S_6, S_4)\}$$

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
	S1	0	0	0	0	0	0	0
	S2	1	0	0	0	0	0	0
邻接矩阵A	S3	0	0	0	1	0	0	0
	S4	0	0	0	0	1	1	0
	S5	0	0	0	0	0	0	0
	S6	0	0	0	1	0	0	0
	S7	0	1	0	0	0	0	0

		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
	S1	1	0	0	0	0	0	0
	S2	1	1	0	0	0	0	0
	S3	0	0	1	1	1	1	0
可达矩阵M	S4	0	0	0	1	1	1	0
	S5	0	0	0	0	1	0	0
	S6	0	0	0	1	1	1	0
	S7	1	1	0	0	0	0	1

区域划分

i	R(S_i) 可达集	A(S_i) 先行集	C=R(S_i)∩A(S_i)	C=A （起点）
1	1	1,2,7	1	
2	1,2	2,7	2	
3	3,4,5,6	3	3	√
4	4,5,6	3,4,6	4,6	
5	5	3,4,5,6	5	
6	4,5,6	3,4,6	4,6	
7	1,2,7	7	7	√

		S3	S4	S5	S6		S1	S2	S7
	S3	1	1	1	1		0	0	0
	S4	0	1	1	1		0	0	0
	S5	0	0	1	0		0	0	0
区域划分	S6	0	1	1	1		0	0	0
	S1	0	0	0	0		1	0	0
	S2	0	0	0	0		1	1	0
	S7	0	0	0	0		1	1	1

按区域进行级位划分

i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R （终点）
3	3,4,5,6	3	3	
4	4,5,6	3,4,6	4,6	
5	5	3,4,5,6	5	√ L1
6	4,5,6	3,4,6	4,6	

去掉5

i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R（终点）
3	3,4,6	3	3	
4	4,6	3,4,6	4,6	√ L2
6	4,6	3,4,6	4,6	√ L2

去掉4, 6

i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R（终点）
3	3	3	3	√ L3

类似的，对另一区域进行级位划分

i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R（终点）
1	1	1,2,7	1	√ L1
2	1,2	2,7	2	
7	1,2,7	7	7	

去掉1

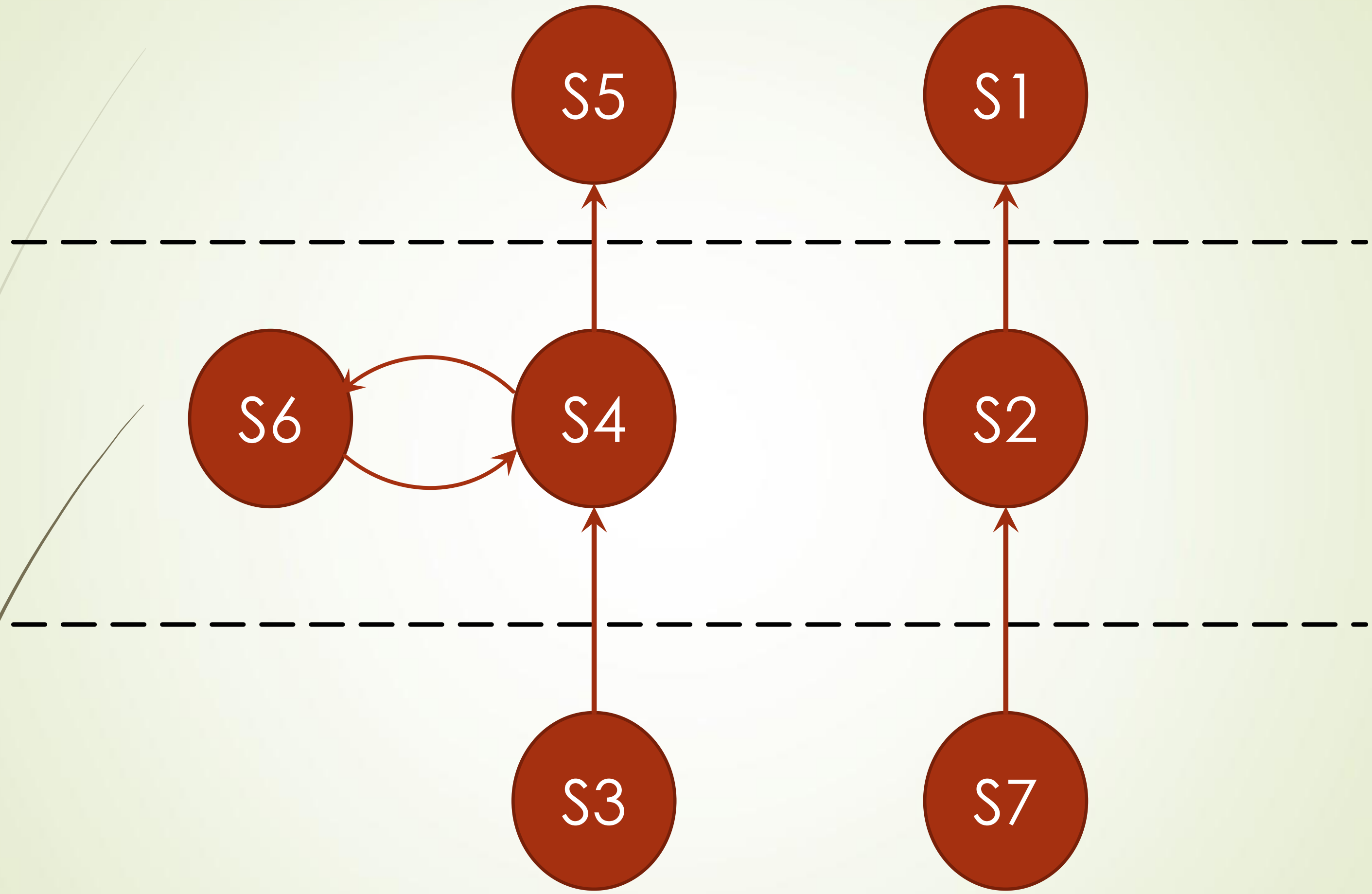
i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R（终点）
2	2	2,7	2	√ L2
7	2,7	7	7	

去掉2

i	$R(S_i)$	$A(S_i)$	$C=R(S_i)\cap A(S_i)$	C=R（终点）
7	7	7	7	√ L3

			S5	S4	S6	S3		S1	S2	S7
	L1	S5	1	0	0	0		0	0	0
	L2	S4	1	1	1	0		0	0	0
	L2	S6	1	1	1	0		0	0	0
按级位重新写M	L3	S3	1	1	1	1		0	0	0
	L1	S1	0	0	0	0		1	0	0
	L2	S2	0	0	0	0		1	1	0
	L3	S7	0	0	0	0		1	1	1

			S5	S4		S3		S1	S2	S7
	L1	S5	0	0		0		0	0	0
	L2	S4	1	0		0		0	0	0
提取骨架矩阵A’	L3	S3	0	1		0		0	0	0
	L1	S1	0	0		0		0	0	0
	L2	S2	0	0		0		1	0	0
	L3	S7	0	0		0		0	1	0


S5
S1
S6
S4
S2
S3
S7