- 磁感应强度 毕奥-萨伐尔定律及其应用
- 磁场的高斯定理和安培环路定理
- 洛伦兹力、安培力、载流线圈的磁矩

CH9 电相互作用：

场源电荷相对于观察者静止（静电场）

求解$\vec{E}$分布 → 场中检验电荷受力

无论检验电荷相对于观察者（场源电荷）运动或静止：

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

CH10 讨论"运动"电荷相互作用

不是指场源电荷与检验电荷间相对运动。
而是指对观察者而言，场源电荷、检验电荷是运动的。

场源电荷相对于观察者运动（非静电场） → 其电场如何分布？ → 场中检验电荷受力如何？

□ 运动电荷电场分布的一般规律：

在电荷相对其静止的参考系中：

$E'_{x'}$，$E'_{y'}$，$E'_{z'}$(静电场)

在电荷相对其运动的参考系中：

E_x，E_y，E_z （运动电荷电场） $\gamma = 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$

平行于相对速度 $\vec{u}$ 方向的场强分量不变。
垂直于相对速度 $\vec{u}$ 方向的场强分量扩大γ倍。

前提： ◆ 在不同参考系中，电荷的电量 q 不变。
(q为相对论不变量)
◆ 高斯定理对运动电荷电场仍成立。
(高斯定理比库仑定律普遍)
◆ 洛仑兹变换适用。

□ 电场强度在不同惯性系中的变换公式：

当场源电荷相对于观察者沿$+x$方向以$\vec{u}$匀速运动时：

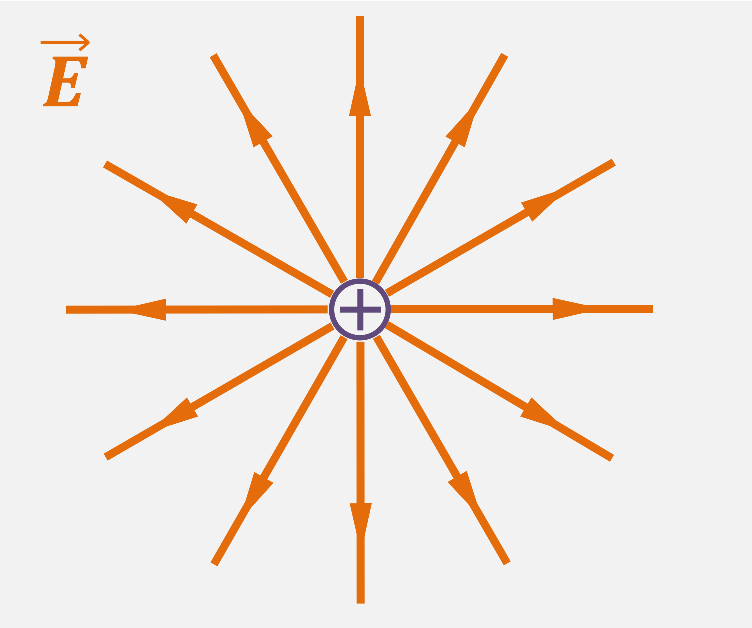
$$\begin{cases} E_x = E'_{x'} \\ E_y = \gamma E'_{y'} = \dfrac{E'_{y'}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \\ E_z = \gamma E'_{z'} = \dfrac{E'_{z'}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E'_{x'} = E_x \\ E'_{y'} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\, E_y \\ E'_{z'} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\, E_z \end{cases}$$

◆静止点电荷的电场

静电场，$\vec{E}$球对称性

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



◆运动点电荷的电场

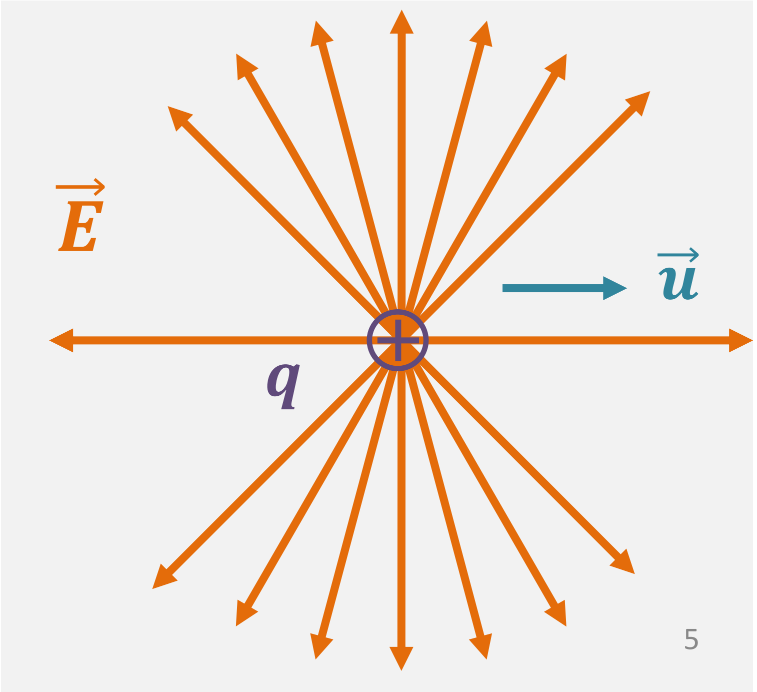
$\vec{E}$无球对称性

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

θ是矢径$\vec{r}$与q的速度$\vec{u}$的夹角

对 $\vec{u}$ 方向旋转对称分布



以$\vec{u}$运动的场源电荷和以$\vec{v}$运动的检验电荷间相互作用：

由洛伦兹变换

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{u}{c^2} v_x\right)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{u}{c^2} v_x\right)} \end{cases}$$

相对论力的变换式

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{F'_x + \frac{u}{c^2}\vec{F}' \cdot \vec{v}'}{1 - \frac{u}{c^2} v'_x} = qE_x + q\left(E_y v_y + E_z v_z\right)\dfrac{u}{c^2} \\ F_y = \dfrac{F'_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v'_x\right)} = qE_y - q\dfrac{uv_x}{c^2} E_y \\ F_z = \dfrac{F'_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} v'_x\right)} = qE_z - q\dfrac{uv_x}{c^2} E_z \end{cases}$$

$$\vec{F} = q\left(E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}\right)$$

$$+q\frac{u}{c^2}\left[\left(E_y v_y + E_z v_z\right)\vec{i} - v_x E_y \vec{j} - v_x E_z \vec{k}\right]$$

$$= q\vec{E} + q\vec{v} \times \left(\frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2}\right)$$

口运动电荷间的相互作用

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

检验电荷相对于观察者的速度

场源电荷相对于观察者的速度

磁感应强度 $\vec{B}=\dfrac{\vec{u}\times\vec{E}}{c^2}$

磁场力 $\vec{F}_m=q\vec{v}\times\vec{B}$ 与场源电荷、检验电荷相对于观察者的速度均有关。

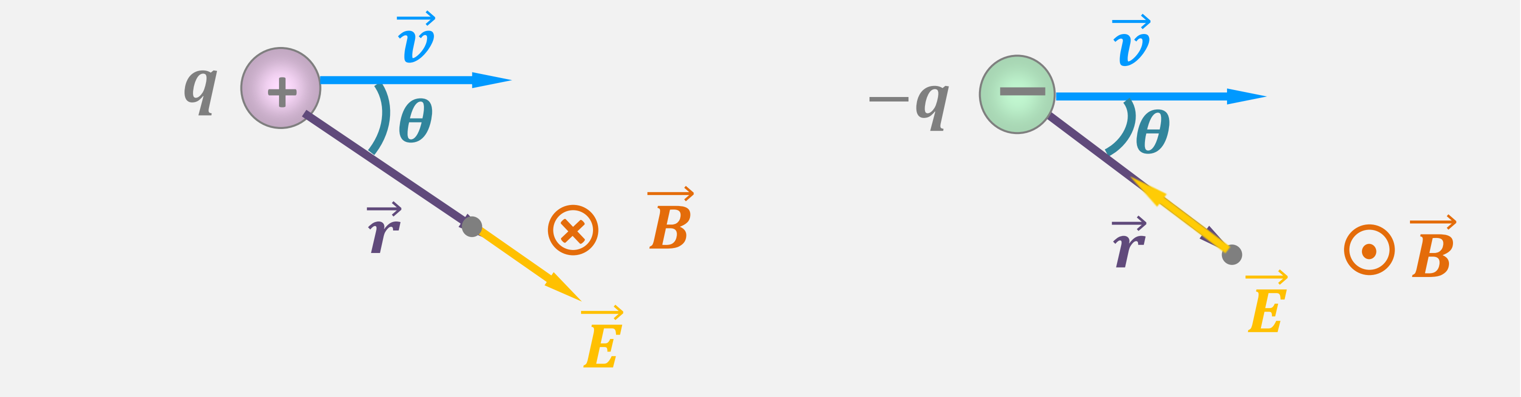
电场力 $\vec{F}_e=q\vec{E}$ 与场源电荷相对于观察者的速度有关；与检验电荷相对于观察者的速度无关。

在电磁学中，无论速度多么小（$v \ll c$），伽利略变换都不适用，电磁场的变换必须应用相对论变换。

□运动电荷的电磁场

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\beta = \frac{u}{c} < 1 \qquad \vec{E} \approx \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



◆ **运动电荷产生的电场（$u \ll c$）**

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

◆ **运动电荷产生的磁场**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

磁感应强度 $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}\times\vec{E}}{c^2}$

$$\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{u}\times\vec{E}$$

电磁场是统一的整体，在不同条件下表现形式不同，其物理图象是：

场源电荷

- 静止电荷 ---激发静电场 $\vec{E}'$
- 运动电荷（相对于观察者 $\vec{u}$）
  - 激发电场 $\vec{E}$：$E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}$，$E_{//} = E'_{//}$
  - 激发磁场 $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2}$

检验电荷

- 静止 ---只受电场力 $\vec{F} = q\vec{E}$
- 运动（相对观察者 $\vec{v}$）
  - 电场力 $\vec{F}_1 = q\vec{E}$
  - 磁场力 $\vec{F}_2 = q\vec{v} \times \vec{B}$

电场力

+

磁场力

→ 运动电荷间的相互作用力

磁场力只是运动电荷相互作用力的一部分，不是空间又出现了一个新的场， 而是为了处理问题方便，人为地定义了一个新的场---**磁场**。

电现象

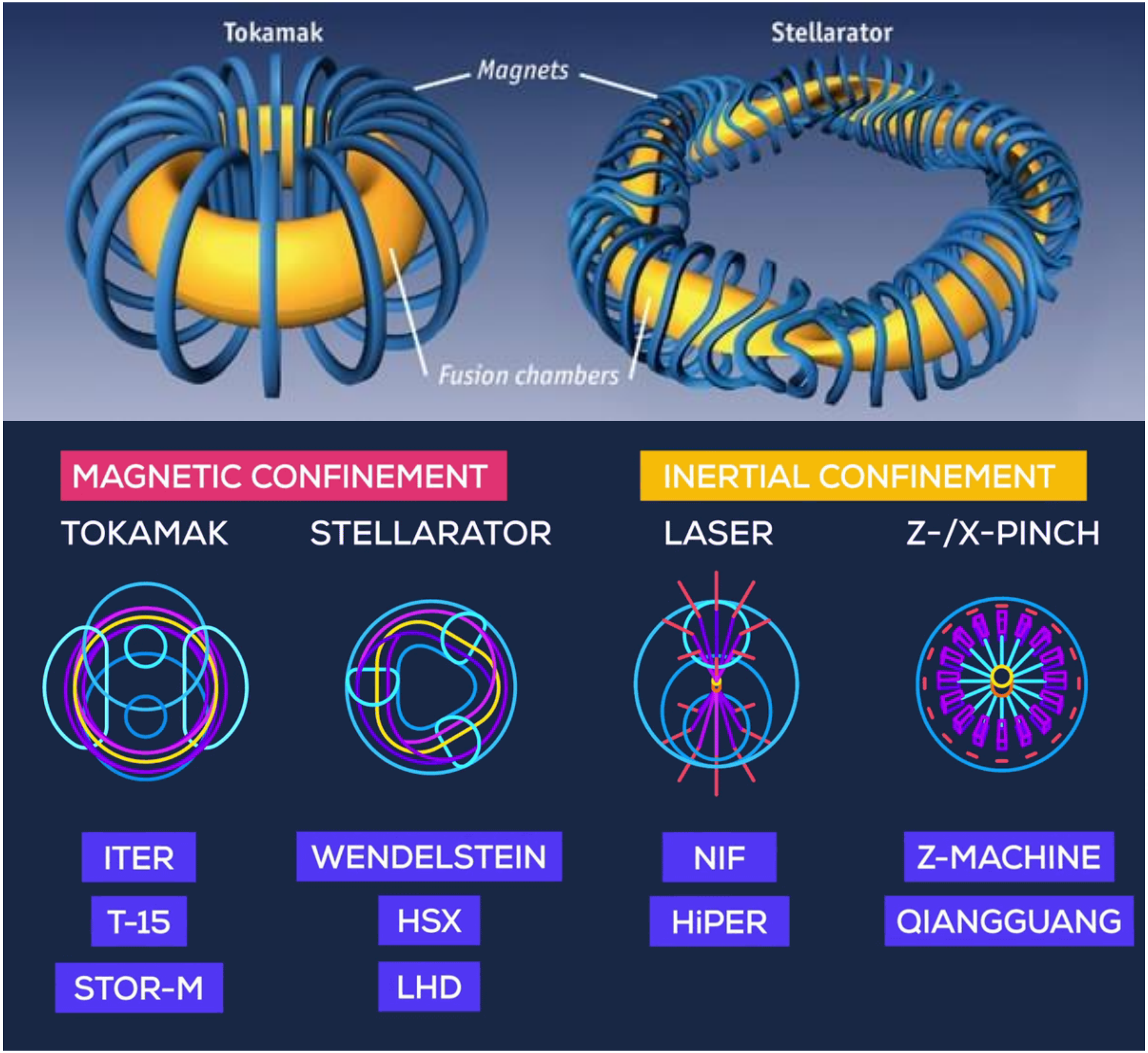
磁现象

电流的磁效应

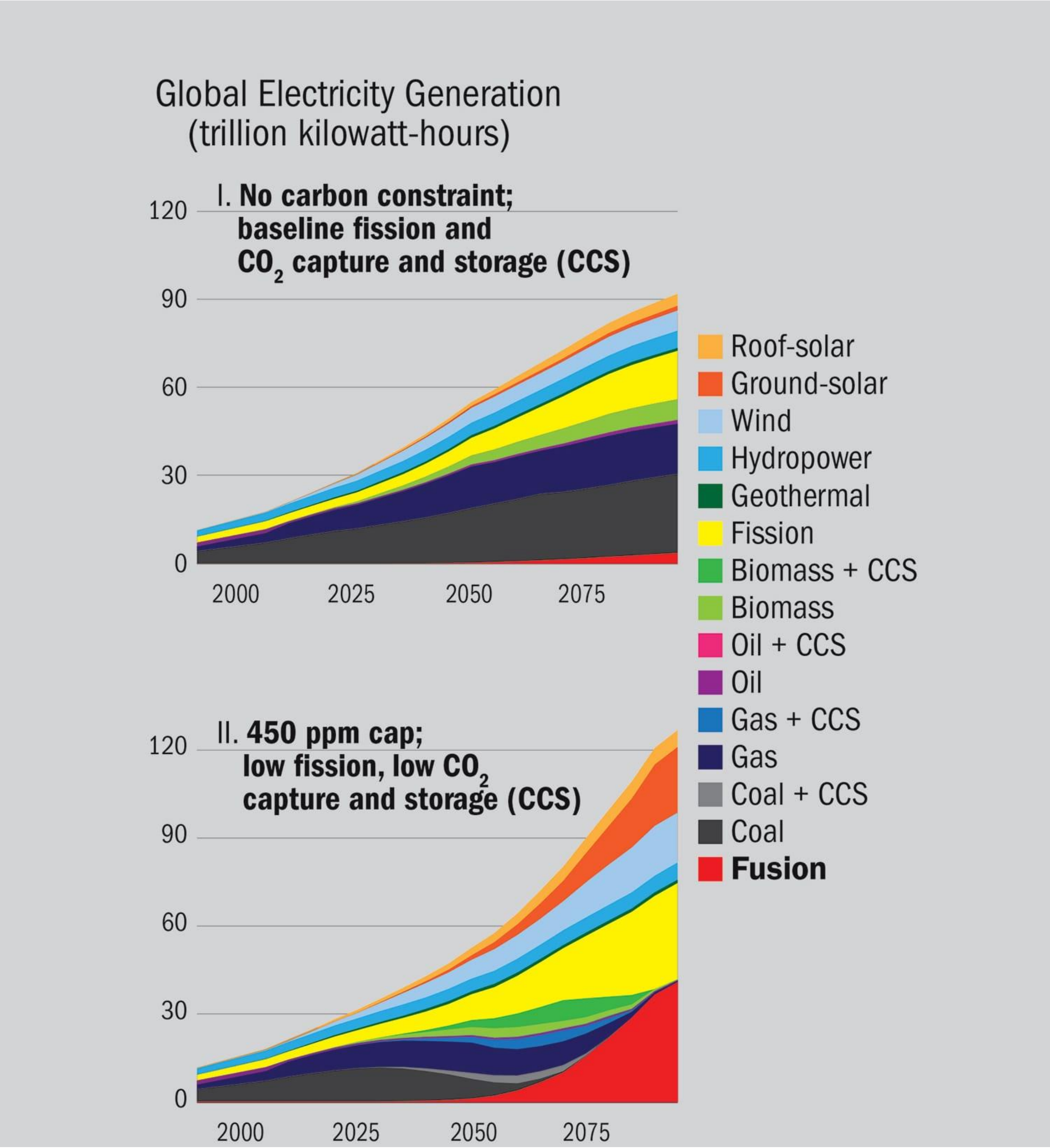
电磁感应

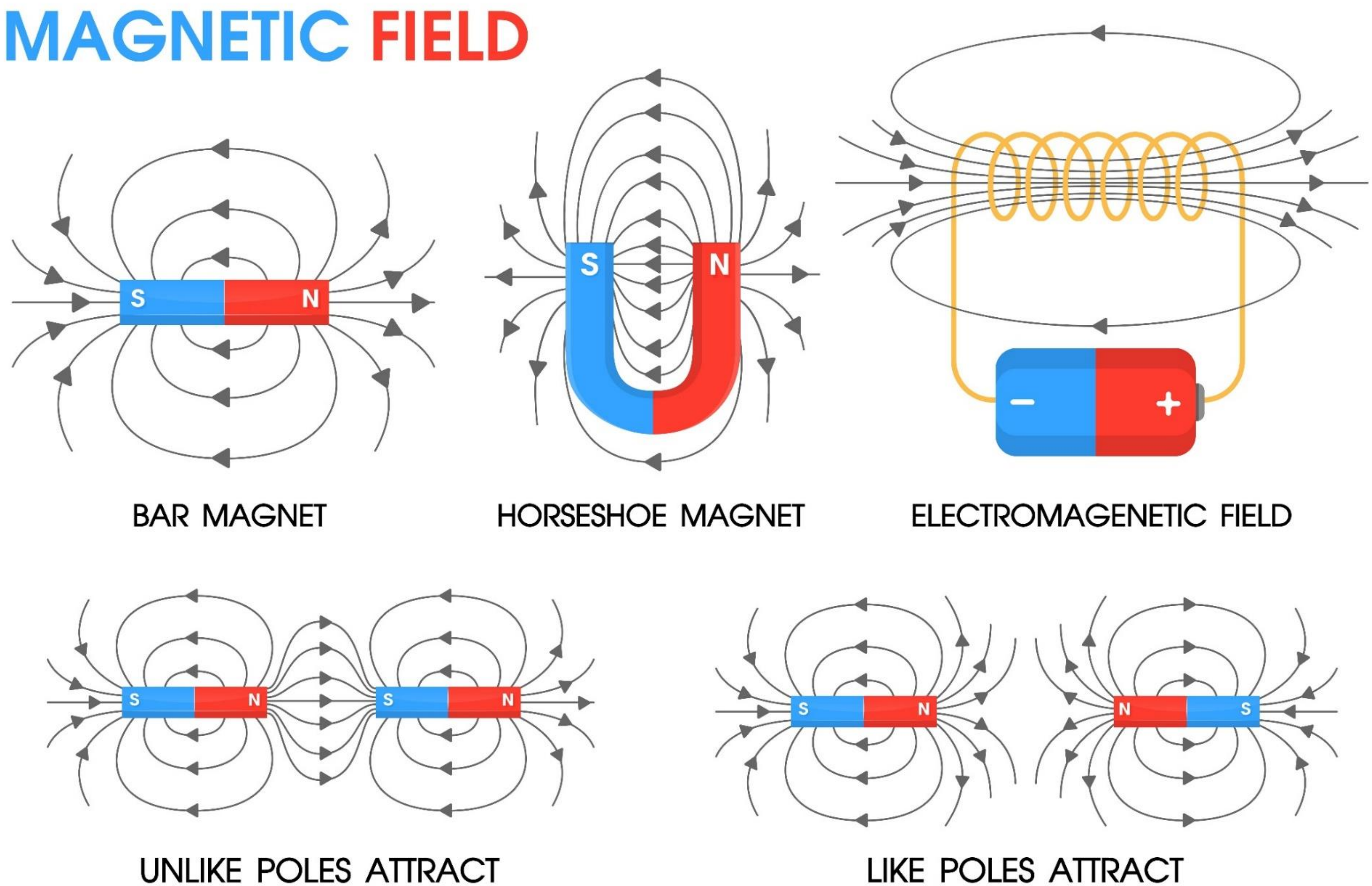
麦克斯韦方程

→ 磁场是电场的相对论效应


Tokamak
Stellarator
Magnets
Fusion chambers
MAGNETIC CONFINEMENT
INERTIAL CONFINEMENT
TOKAMAK
STELLARATOR
LASER
Z-/X-PINCH
ITER
T-15
STOR-M
WENDELSTEIN
HSX
LHD
NIF
HiPER
Z-MACHINE
QIANGGUANG

磁约束核聚变装置

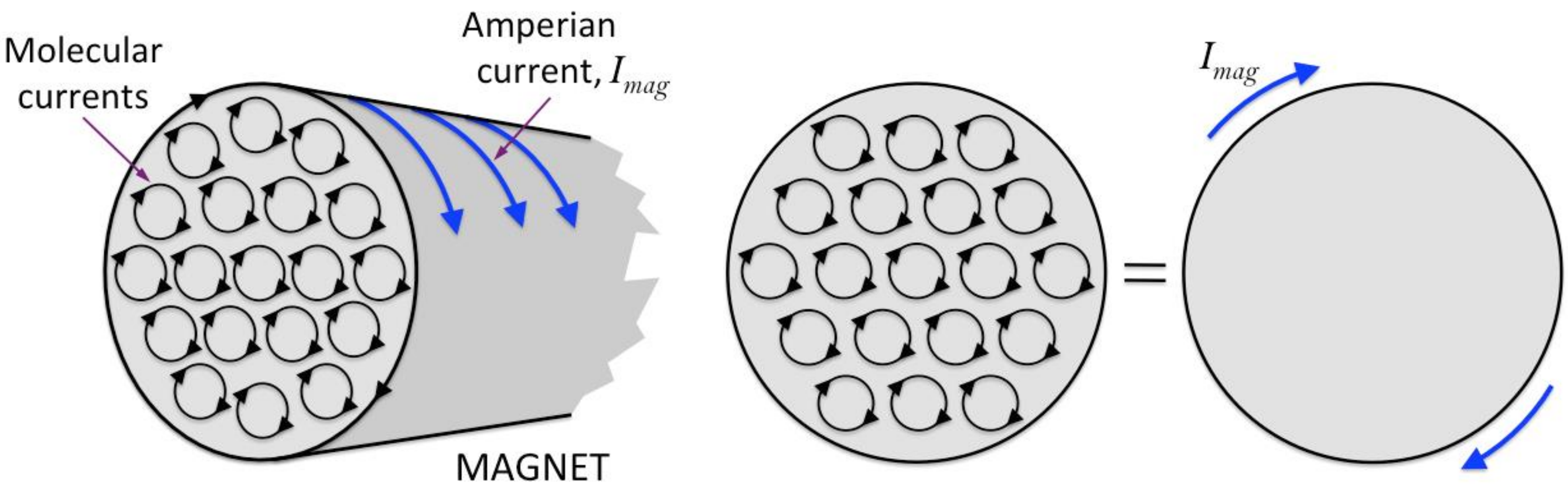

Global Electricity Generation
(trillion kilowatt-hours)
I. No carbon constraint;
baseline fission and
CO_2 capture and storage (CCS)
120
90
60
30
0
2000
2025
2050
2075
II. 450 ppm cap;
low fission, low CO_2
capture and storage (CCS)
120
90
60
30
0
2000
2025
2050
2075
Roof-solar
Ground-solar
Wind
Hydropower
Geothermal
Fission
Biomass + CCS
Biomass
Oil + CCS
Oil
Gas + CCS
Gas
Coal + CCS
Coal
Fusion



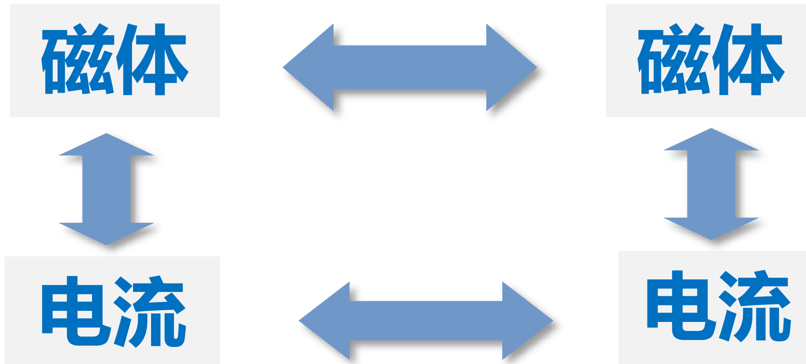
- 磁体有两极： 北极(N极)和南极(S极)，同极相斥，异极相吸。
- 实验中没有发现磁单极子存在。

□ 安培提出著名的“分子电流假说”

磁性物质中的每个分子都可视为环形电流，称为**分子电流**。当这些分子电流做定向排列时，在宏观上就会显示出磁性，N极和S极分布在环形电流的两侧。



- □ 现代理论表明，原子、分子内电子的运动形成了分子电流， 这就是物质磁性的根源。
- □ 磁力是运动电荷之间相互作用的表现。



安培提出：一切磁现象起源于电荷运动

运动电荷 ← 磁场 → 运动电荷

磁场的性质

(1) 对运动电荷(或电流)有力的作用;

(2) 磁场有能量。

1820 年4月:
丹麦物理学家**奥斯特**发现电流的磁效应。

1820 年8月:
法国物理学家**阿拉果**在瑞士得到消息，并于9月向法国科学院介绍了奥斯特实验，引起极大反响。

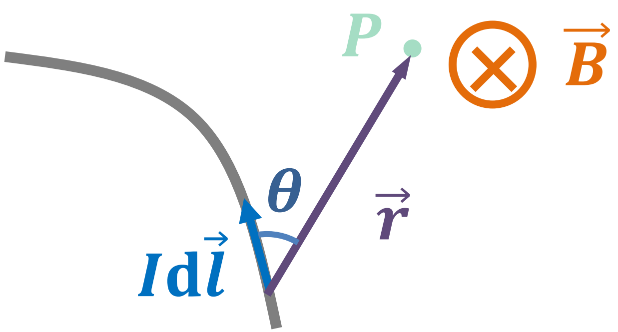
- 电流对磁铁的作用
- 磁铁对电流的作用
- 磁铁对运动带粒子的作用
- 电流与电流的相互作用
- 通电螺线管与条形磁铁等效

1820年10月:
法国物理学家**毕奥**和**萨伐尔**发表《运动的电传递给金属的磁化力》，提出直线电流对磁针作用的实验规律。

法国数学、物理学家**拉普拉斯**由实验规律推出载流线段元（电流元）磁场公式。**毕奥**和**萨伐尔**用实验验证了该公式。

运动点电荷磁场 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$

磁场叠加原理 $\vec{B}=\sum\vec{B}_i$



设：电流元$Id\vec{l}$, 截面积S
载流子电量q，密度n，漂移速度$\vec{u}$
则：电流元中载流子数$N=nSdl$

每个载流子在场点P磁场

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

电流元$Id\vec{l}$在场点P处磁场

$$d\vec{B}=N\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nSqdl\,\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

由于 $I=nqSu$ ➡

◆大小：$dB=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2}$

◆方向：垂直于$\vec{r}$和$Id\vec{l}$组成的平面，服从右手螺旋法则。

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

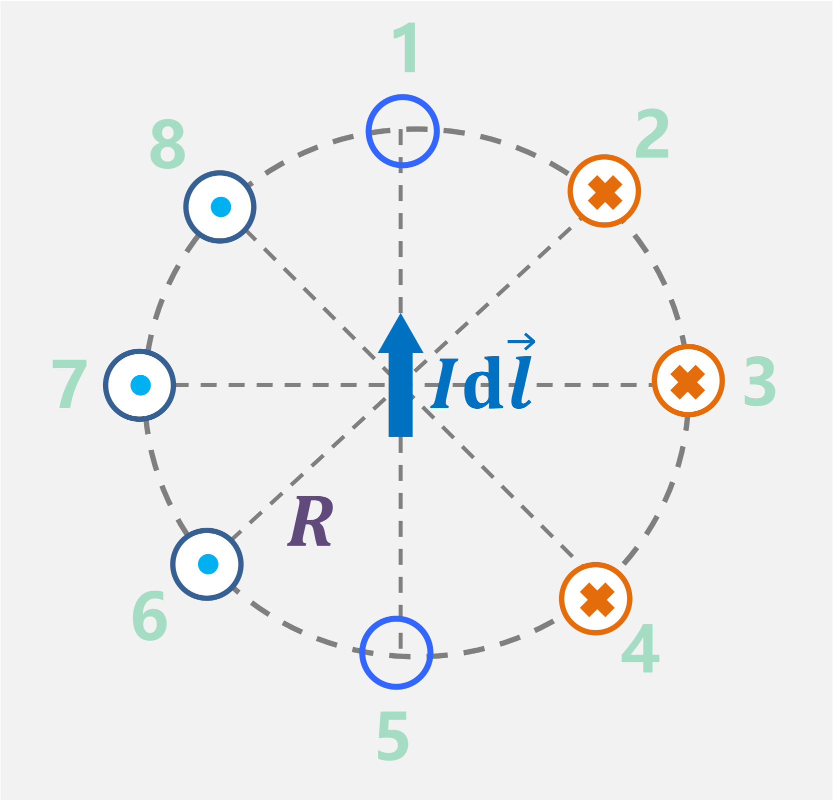
毕奥---萨伐尔定律

$\mu_0=\dfrac{1}{\varepsilon_0c^2}=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ ---真空磁导率

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

毕奥---萨伐尔定律

判断下列各点磁感强度的方向和大小。



1、5 点：$\mathrm{d}B = 0$

3、7点：$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{R^2}$

2、4、6、8 点：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{R^2}\sin 45^0$$

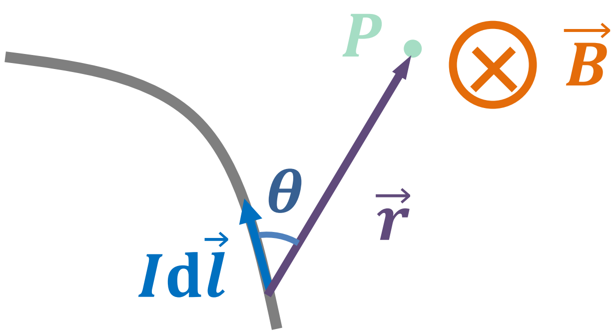
静电场: 取 $\mathrm{d}q \rightarrow \mathrm{d}\vec{E} \rightarrow \vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$

磁　场: 取 $I\mathrm{d}\vec{l}$? $\rightarrow \mathrm{d}\vec{B} \rightarrow \vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$

空间某点总磁感应强度等于各场源电荷单独在该点激发的磁感应强度的矢量和。

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

---磁场叠加原理



毕奥---萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

电流元在空间产生的磁场

任意载流导线在点P处的磁感强度

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

运动电荷在空间产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\,\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\,\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}$$

- 毕奥---萨伐尔定律中的电流元是指闭合稳恒电流中某一电流元，它是不能单独存在的。
- 毕奥---萨伐尔定律在稳恒磁场中的地位和作用，有如库仑定律在静电场中的地位和作用。
- 利用毕奥---萨伐尔定律和叠加原理，可以导出稳恒磁场的高斯定理和安培环路定理。这是稳恒磁场所遵从的两条基本规律。

利用毕奥---萨伐尔定律求解电流磁场分布基本思路：

电流元在空间产生的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

将电流视为电流元（或典型电流）的集合

电流元（或典型电流）磁场公式和磁场叠加原理

原则上可求出任意电流的磁场分布

如果空间存在一个任意载流导线，则空间某点总磁感应强度等于将载流导线分割成无穷多个无穷小的电流元，各电流元单独在该点激发的磁感应强度的矢量和。

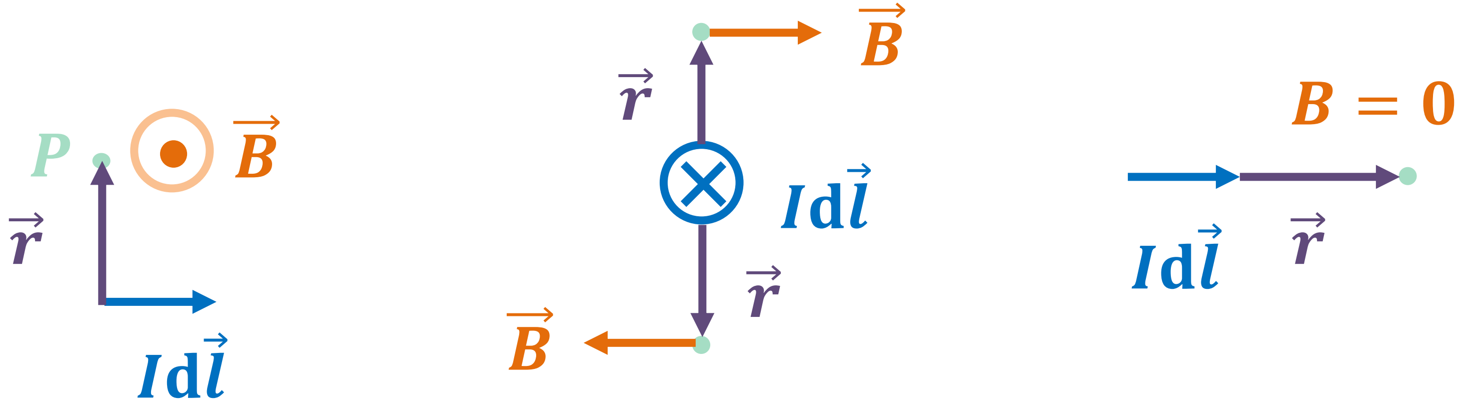
利用毕奥---萨伐尔定律求解电流磁场分布：

电流元在空间产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

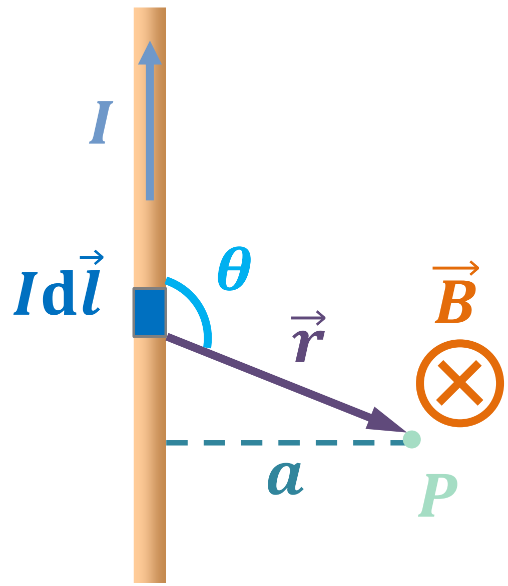
步骤

1. 首先，将载流导线划分为一段段电流元，任选一段电流元，并标出电流元到场点的位矢，确定两者的夹角；
2. 根据毕奥-萨伐尔定律，求出电流元在场点所激发的磁感强度$\mathrm{d}\vec{B}$，并由右手螺旋法则确定$\mathrm{d}\vec{B}$的方向；
3. 建立坐标系，将$\mathrm{d}\vec{B}$在坐标系中分解，并用磁场叠加原理作对称性分析，以简化计算步骤；
4. 最后，求出总磁感应强度大小和方向，对结果进行分析。



□ 载流直导线的磁场

求距离载流直导线为a处一点P的磁感应强度$\vec{B}$



解

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

□ 载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

根据几何关系 统一变量

$$r = a/\sin\theta$$

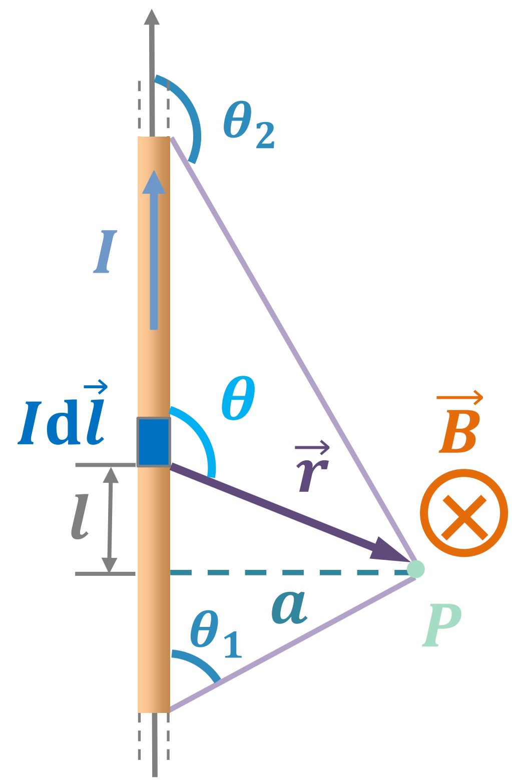
$$l = a\cot(\pi-\theta) = -a\cot\theta$$

$$\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta$$

式中 a 场点到直电流距离

θ_1 起点到场点矢径与I方向的夹角

θ_2 终点到场点矢径与I方向的夹角



- **无限长载流直导线**

$$\theta_1 \to 0\,,\quad \theta_2 \to \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

方向：右螺旋法则

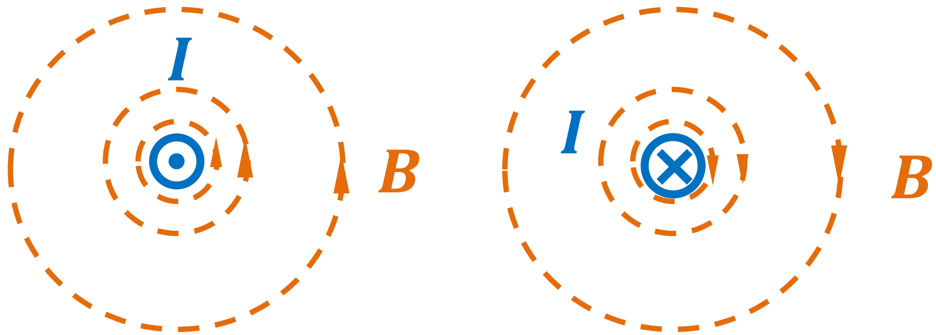
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

- **无限长载流长直导线的磁场**

$\theta_1\to 0$， $\theta_2\to\pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

内密外疏



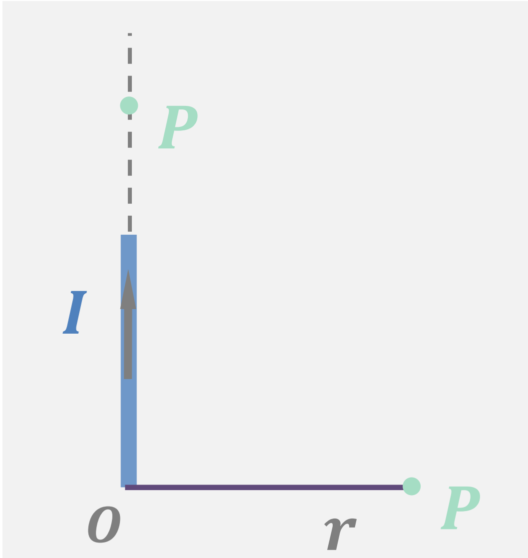
电流与磁感强度成右螺旋关系

- **半无限长载流长直导线的磁场**

$\theta_1\to\pi/2$， $\theta_2\to\pi$

端点处垂直距离为a的点

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

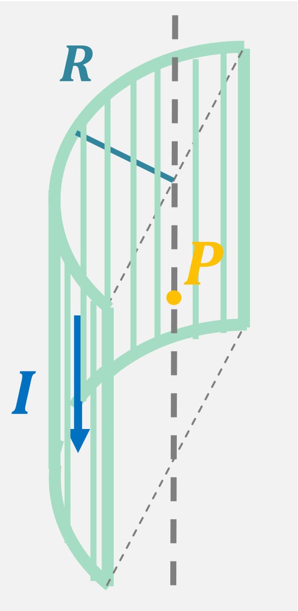


- **直导线及其延长线上点**

$\theta=0$或π

$$\vec{B}=0$$

半径R，无限长半圆柱金属面通电流I，求圆柱面轴线上任意一点的磁感强度。



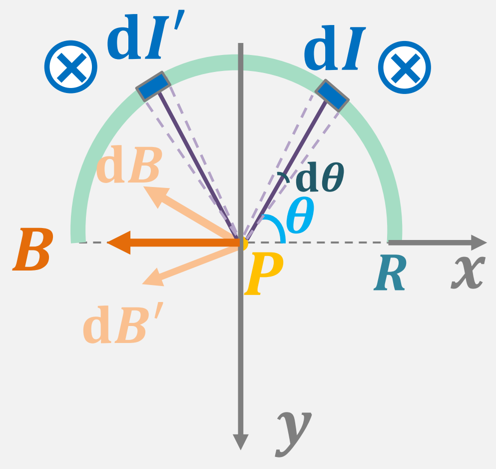
解：通电半圆柱面 ⇒ 电流元（无限长直电流）集合

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{\pi R} R\mathrm{d}\theta = \frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

由典型电流：圆形电流圆环轴线上任一点磁感应强度公式 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

则圆线轴线上任一点x处的$\vec{B}$的大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$



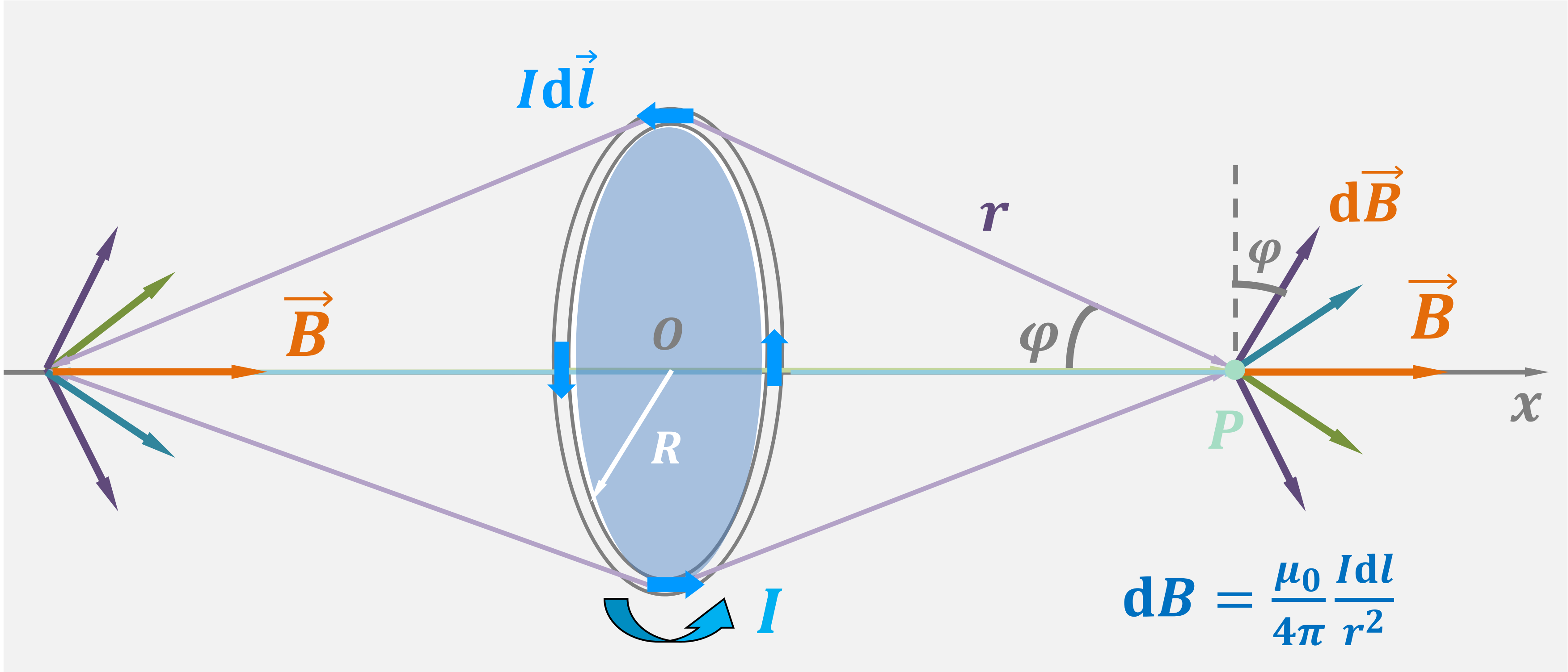
根据对称性分析 $B_y = \int \mathrm{d}B_y = 0$

$$B = B_x = \int \mathrm{d}B \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

沿$-x$方向

□ 载流圆线圈轴线上的磁场

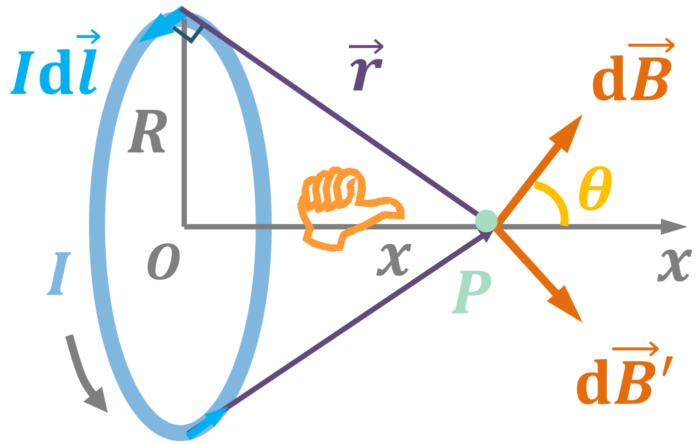
真空中，半径为R的载流导线，通有电流I, 称圆电流。
求其轴线上一点P的磁感强度的方向和大小。



解：根据对称性分析 $B = B_x = \int dB \sin\varphi$

□ 载流圆线圈轴线上的磁场

求轴线上一点P的磁感应强度



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{(R^2+x^2)}$$

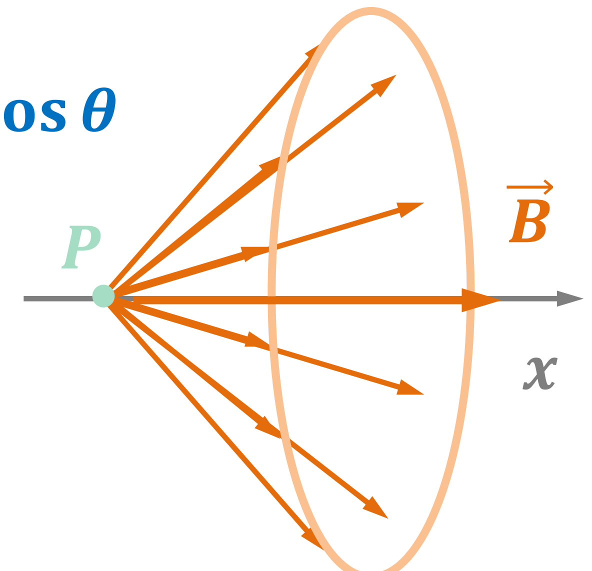
根据对称性 $B_\perp = \int dB_\perp = 0$

$$B = \int dB_x = \int dB\cos\theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$



方向（$+x$）与电流满足右手螺旋定则

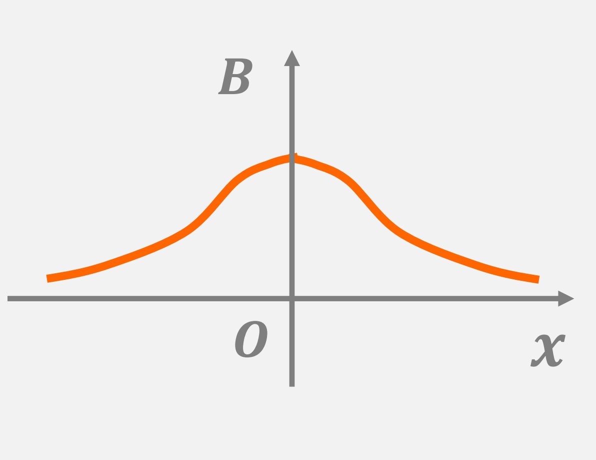
□ 载流圆线圈轴线上的磁场

求轴线上一点P的磁感应强度

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

◆ $x<0$，$\vec{B}$ 的方向不变

($\vec{B}$和I成右螺旋关系)



◆ $x=0$，载流圆线圈的圆心处

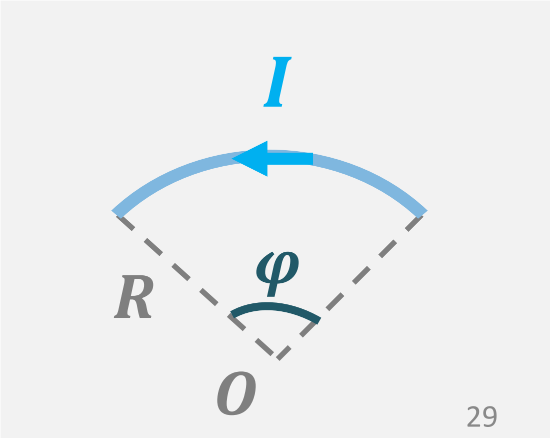
$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

如果由N匝圆线圈组成 $B=\frac{\mu_0 NI}{2R}$

$$B=\frac{\mu_0 NIR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

◆ 一段圆弧在圆心处产生的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R}$$



□ 载流圆线圈轴线上的磁场

求轴线上一点P的磁感应强度

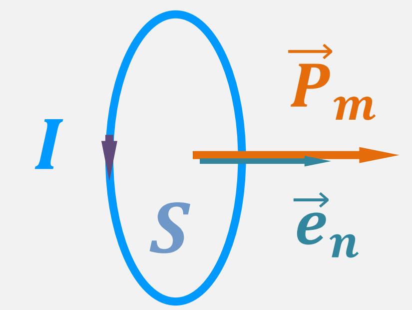
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

◆ $x >> R$， $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi x^3}$$



电流的磁矩

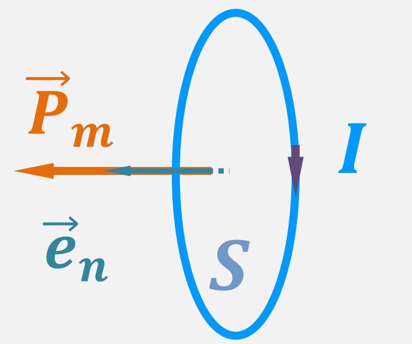
$$\vec{P}_m = I\vec{S} = IS\vec{e}_n$$

电流所包围的面积 S

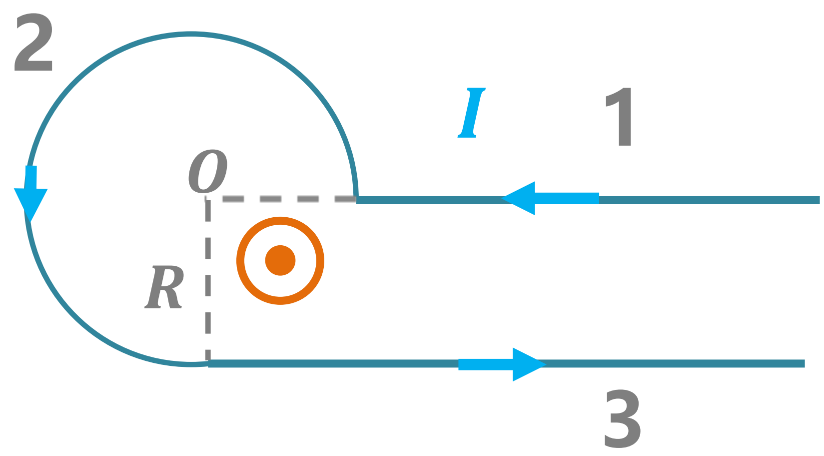
规定 正法线方向 $\vec{e}_n$与 I 指向成右手螺旋关系

圆电流磁矩 $\vec{P}_m = I\pi R^2 \vec{e}_n$

◆ 只有当圆形电流的面积S很小，或场点距圆电流很远时，才能把圆电流叫做**磁偶极子**。



右图中，求O点的磁感应强度



解：$B_1 = 0$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

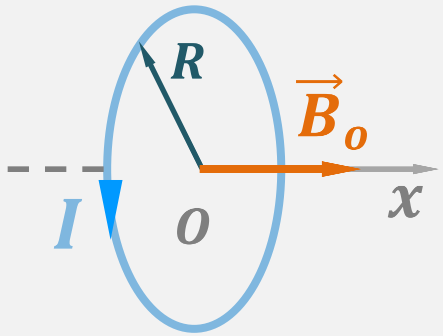
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

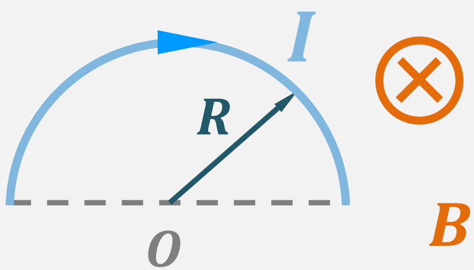
$$\boxed{\theta_1 = \pi/2 \quad \theta_2 = \pi}$$

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

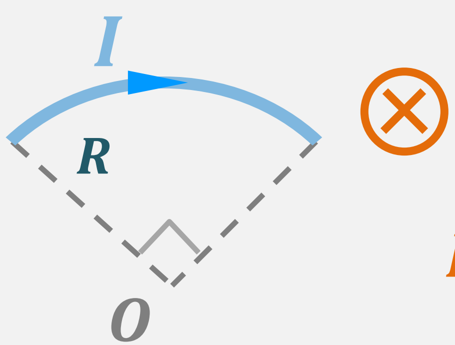
$$= \frac{3\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad \odot$$



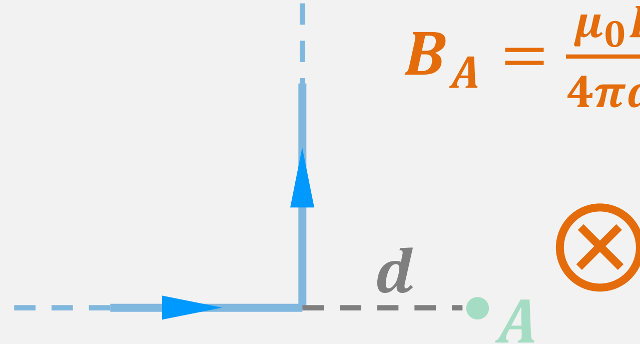
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



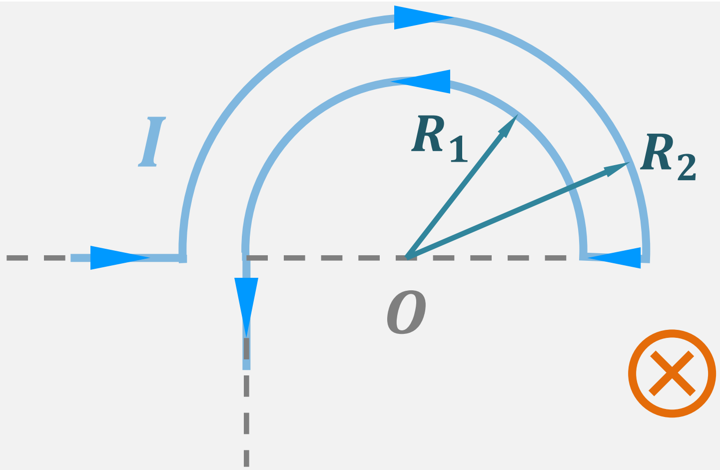
$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4R}$$



$$B_O = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

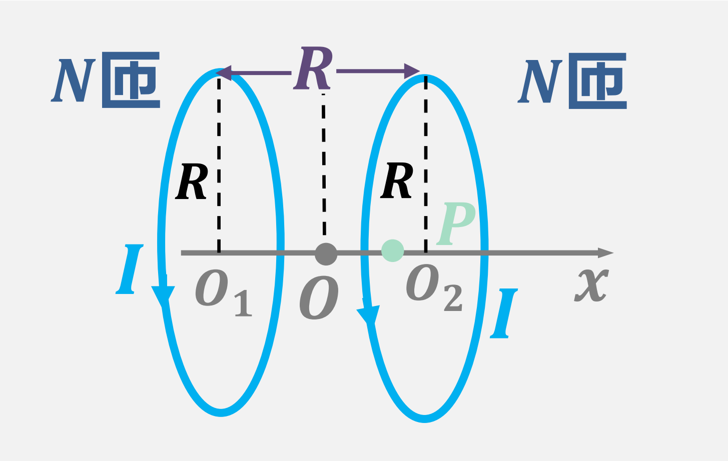


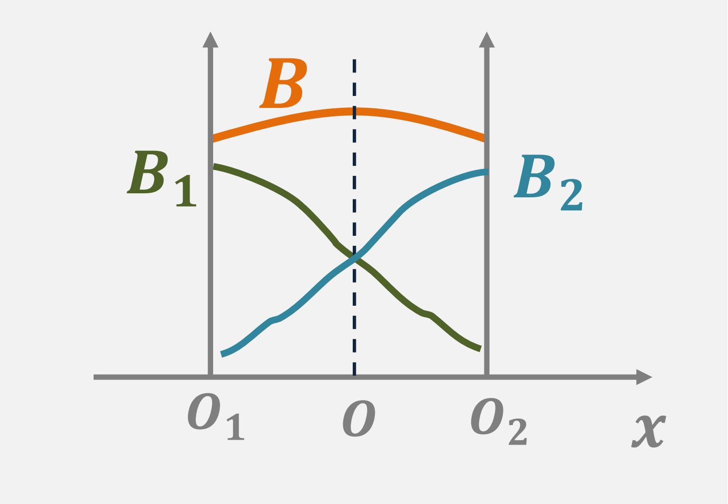
$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

亥姆霍兹圈：两个完全相同的N匝共轴密绕短线圈，其中心间距与线圈半径R相等，通同向平行等大电流I。求轴线上 O_1、O_2之间任一点P的磁场。





解：由圆电流轴线上磁感应强度公式，可得P点磁感应强度大小为

$$B_P=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}}$$

方向沿着 $+x$ 轴

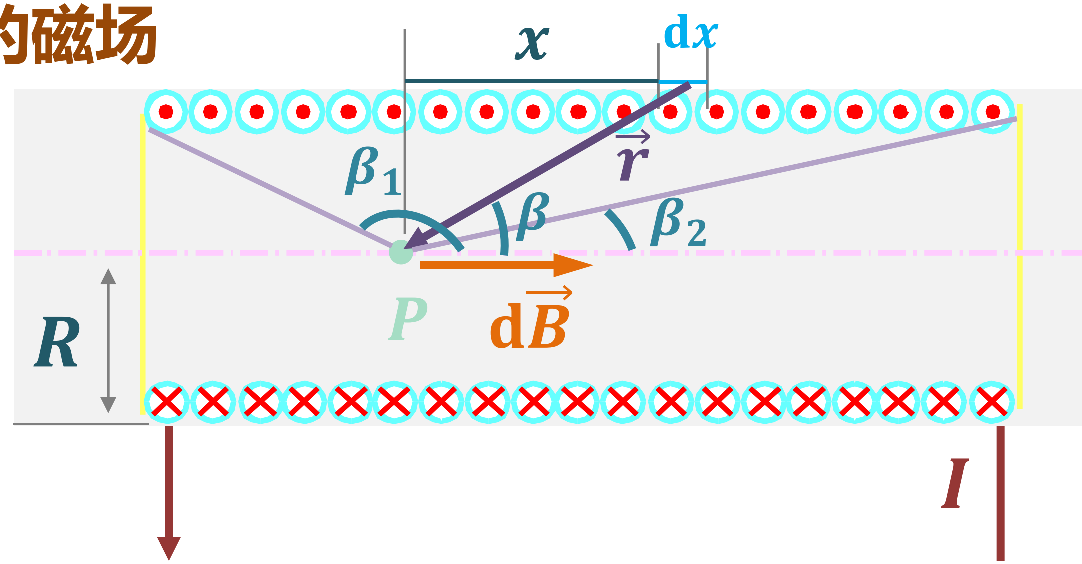
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad B_O=0.72\frac{\mu_0 NI}{R}$$

$$x=\pm\frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad B_{O1}=B_{O2}=0.68\frac{\mu_0 NI}{R}$$

$x=0$附近，磁场基本均匀。
实验室用近似均匀磁场。

□ 载流密绕螺线管轴线上的磁场

已知螺线管半径为R
单位长度上有n匝
通有电流 I



解：$\mathrm{d}I = nI\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 R^2 \mathrm{d}I}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 R^2 nI\mathrm{d}x}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} x = R\cot\beta \\ \mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta \\ R^2 + x^2 = R^2\csc^2\beta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

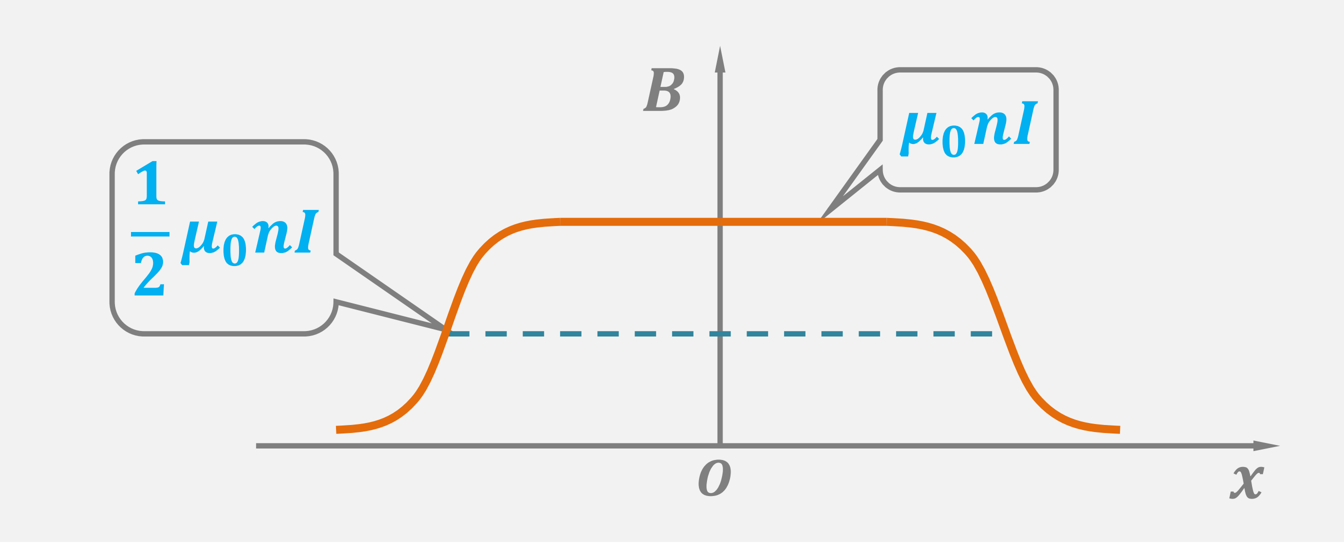
$$B = \int \mathrm{d}B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

- ◆ 无限长载流螺线管 $\beta_1 \to \pi$， $\beta_2 \to 0$ ⟹ $B = \mu_0 nI$
- ◆ 半无限长载流螺线管 $\beta_1 \to \pi/2$，$\beta_2 \to 0$ ⟹ $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$

□ 载流密绕螺线管轴线上的磁场

已知螺线管半径为R
单位长度上有n匝
通有电流 I

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

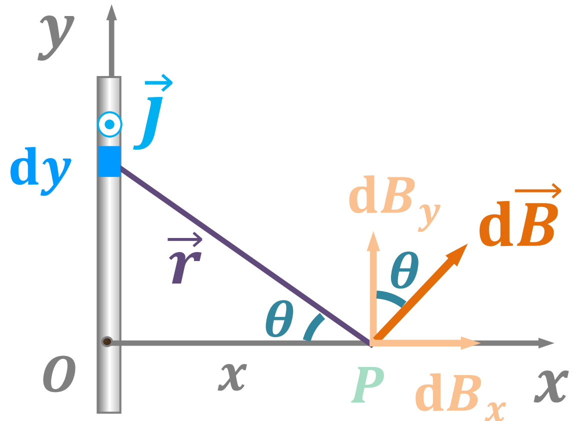


◆ 无限长载流螺线管 $\beta_1 \to \pi$，$\beta_2 \to 0$ ⟹ $B = \mu_0 nI$

◆ 半无限长载流螺线管 $\beta_1 \to \pi/2$，$\beta_2 \to 0$ ⟹ $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$

□ 无限大平面导体薄板的磁场

电流均匀地流过无限大平面导体薄板，面电流密度（单位垂直长度上流过的电流）为j，设板的厚度可以忽略不计，求板外的任意一点的磁感应强度。



解：建立如图所示的坐标系，$\vec{j}$沿z轴方向，平板在yz平面内，取宽度为$\mathrm{d}y$的长直电流，其电流强度为 $\mathrm{d}I=j\mathrm{d}y$，它在P点产生的磁感应强度大小为：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\mathrm{d}y}{2\pi r}$$

又 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

将$\mathrm{d}\vec{B}$分解为$\mathrm{d}B_x$和$\mathrm{d}B_y$，

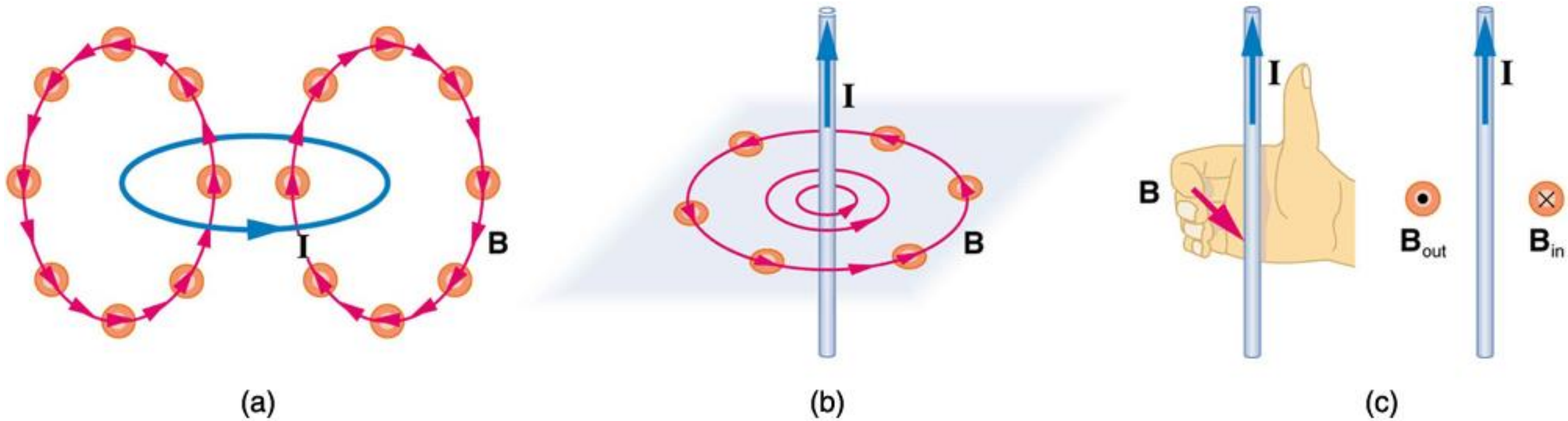
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

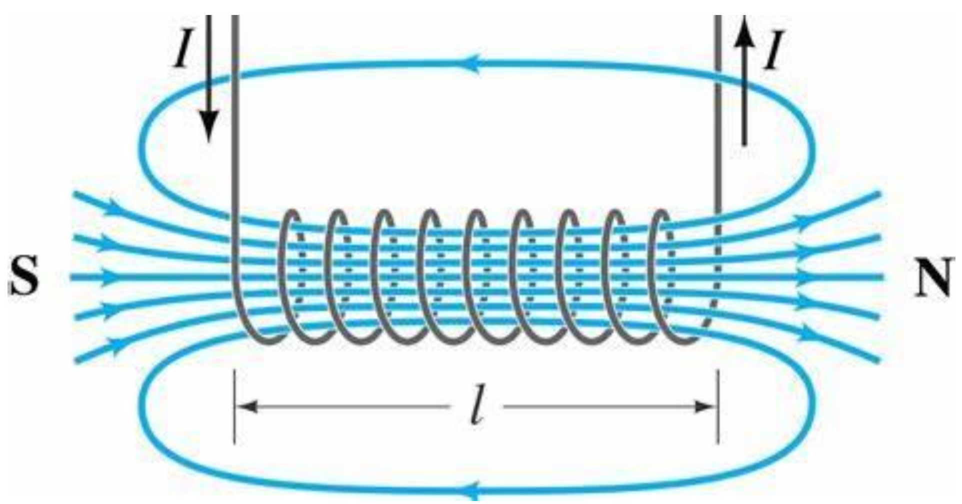
由对称性可知 $B_x=\int\mathrm{d}B_x=0$，

$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta=\frac{\mu_0 j\mathrm{d}y}{2\pi r}\cos\theta$$

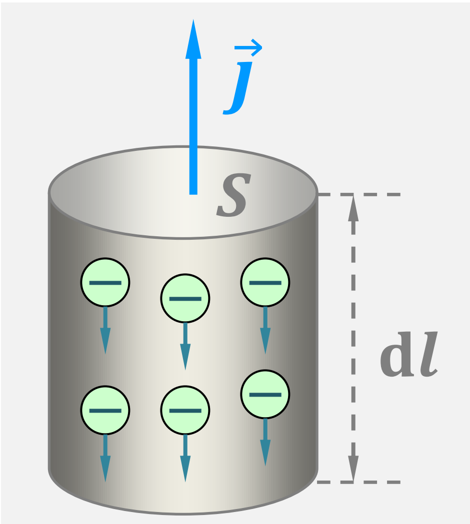
代入上式并积分，则：

$$B=\int\mathrm{d}B_y=\frac{\mu_0 jx}{2\pi r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\mu_0 j$$


I
B
(a)
I
B
(b)
I
B
I
B_{out}
B_{in}
(c)


I
I
S
N
l

□ 运动电荷的磁场

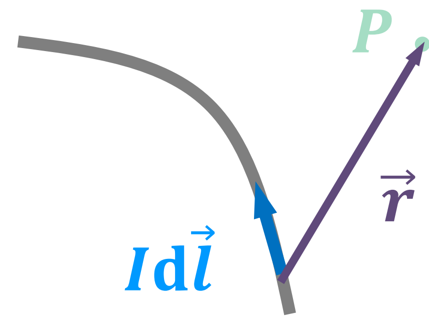


电流元内总电荷数

$$\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$$

毕---萨定律

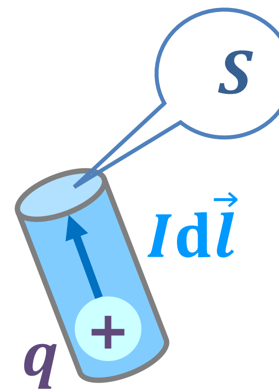
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



$$I\mathrm{d}\vec{l} = \vec{j}S\mathrm{d}l = nq\vec{u}\,S\mathrm{d}l = \mathrm{d}N\, q\vec{u}$$

电荷密度

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{n \cdot S\mathrm{d}l \cdot q}{\mathrm{d}t} = nSqu$$



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(nSqu)\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

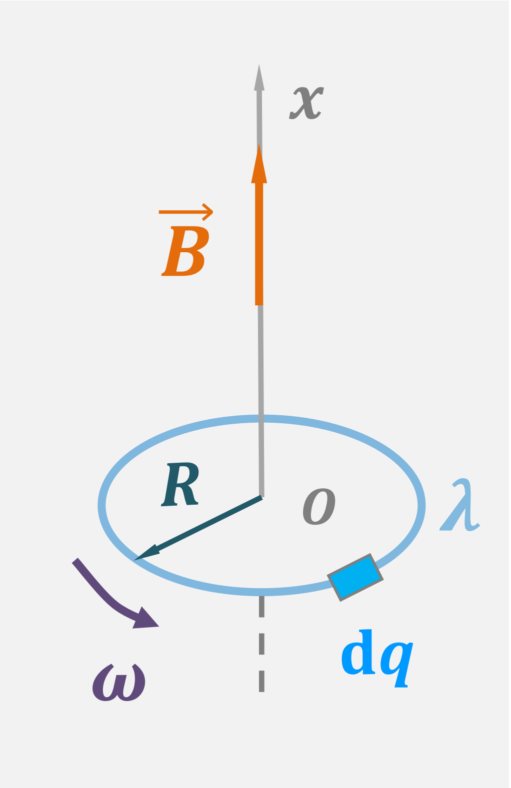
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}N\, q\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}$$

运动电荷产生的磁场

$$\vec{B}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}$$

半径为R，电荷线密度为$\lambda\ (\lambda>0)$的均匀带电的圆线圈，绕过圆心与圆平面垂直的轴以角速度ω转动，求圆线圈轴线上任一点的$\vec{B}$的大小及其方向。

（要求：图上画出坐标和所取微元）



解：建立坐标如图所示。

则绕过圆心且与圆平面垂直的轴以角速度ω转动均匀带电的圆线圈形成圆形电流，其电流强度为

$$I=\frac{q}{T}=\frac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega}=R\lambda\omega$$

由典型电流：圆形电流圆环轴线上任一点磁感应强度公式

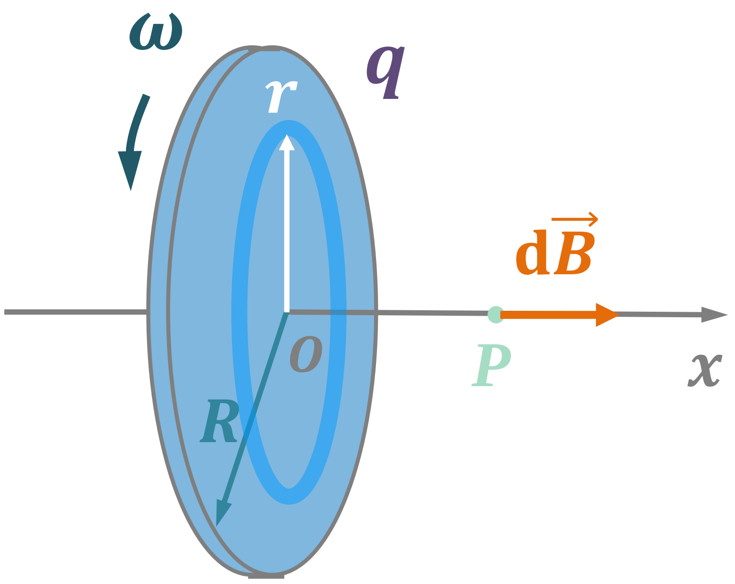
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

则圆线轴线上任一点x处的$\vec{B}$的大小为

$$B=B_x=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 R^3\lambda\omega}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$\vec{B}$的方向与x轴正向一致。

求绕轴旋转的带电圆盘（σ、R、ω）轴线上的磁场。



解： $\sigma = q/\pi R^2$

$$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma\, 2\pi r \mathrm{d}r}{2\pi/\omega} = \omega\sigma r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I r^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma\omega r^3 \mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

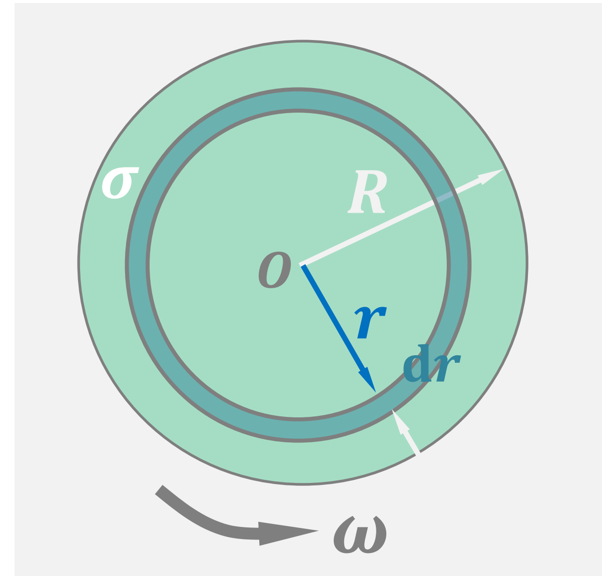
$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{x^2+R^2}} - 2x\right]$$

点电荷作匀速率圆周运动，形成**圆形电流**，其电流强度为

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi R/v} = \frac{qv}{2\pi R}$$

$x = 0$ **圆盘圆心处** $B = \dfrac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$ **方向沿x轴正向**

半径为R的带电薄圆盘的电荷面密度为σ，并以角速度ω绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度。



解法一：运动电荷的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\,\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}B_O=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\,u}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q=\sigma\,2\pi r\mathrm{d}r$$

$$u=\omega r$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

解法二：圆电流的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

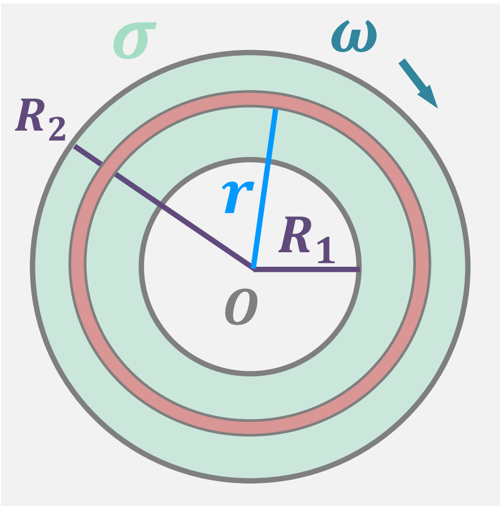
$$\Rightarrow\quad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

$\sigma>0$，$\vec{B}$ $\odot$

$\sigma<0$，$\vec{B}$ $\otimes$

带电圆环（R_1，R_2，σ）顺时针旋转（ω），求$\vec{P}_m$



解： $$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi} = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}I = \int_{R_1}^{R_2} \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

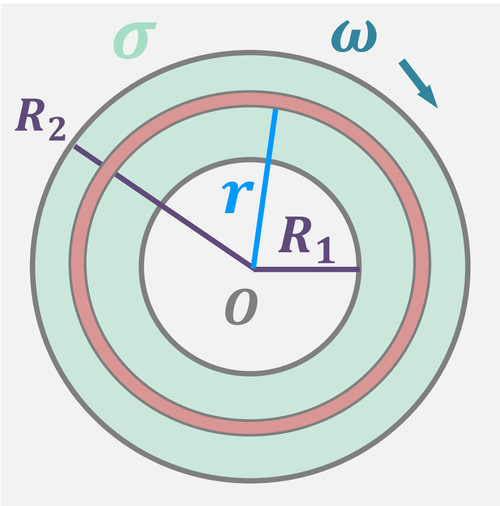
$$= \frac{1}{2}\sigma\omega\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$P_m = IS = \frac{1}{2}\sigma\omega\left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$= \frac{\pi\sigma\omega}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2$$

$$\vec{P}_m = \frac{q\vec{\omega}}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

带电圆环（R_1，R_2，σ）顺时针旋转（ω），求$\vec{P}_m$



解： $\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi} = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}P_m = \pi r^2 \mathrm{d}I = \sigma\pi\omega r^3 \mathrm{d}r$$

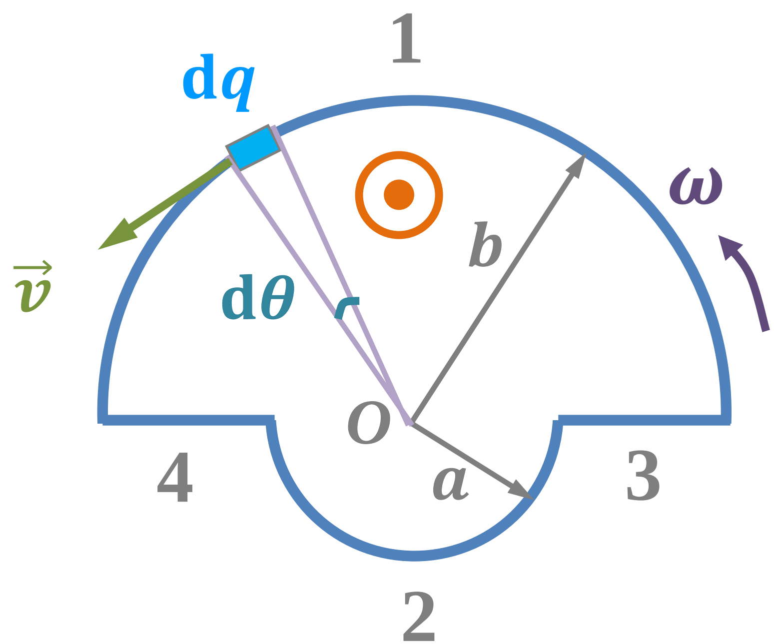
$$P_m = \int \mathrm{d}P_m = \int_{R_1}^{R_2} \sigma\pi\omega r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{4}\sigma\omega\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

$$= \frac{\omega\sigma\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)\left(R_2^2+R_1^2\right)}{4}$$

$$\vec{P}_m = \frac{q\vec{\omega}}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

如图的导线，已知电荷线密度为λ，当绕O点以ω转动时，求O点的磁感应强度。



解：线段1：

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l=\lambda b\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\cdot\omega b}{b^2}$$

$$=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\mathrm{d}\theta$$

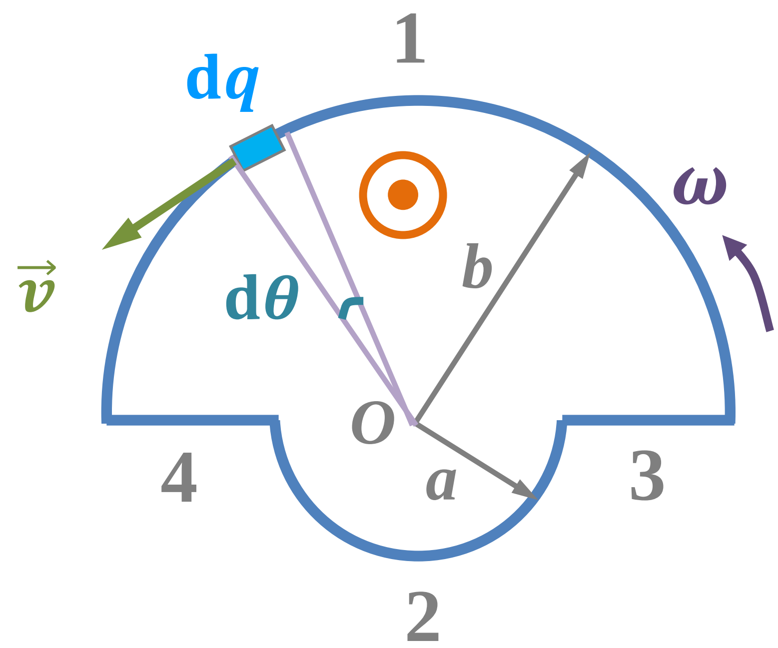
$$B_1=\int\mathrm{d}B=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\mu_0\lambda\omega$$

运动电荷产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

线段2：同理 $B_2=\frac{1}{4}\mu_0\lambda\omega$

如图的导线，已知电荷线密度为λ，当绕O点以ω转动时，求O点的磁感应强度。



解： 线段3： $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}B_3=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\mathrm{d}r\cdot\omega r}{r^2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi r}\mathrm{d}r$$

$$B_3=\int\mathrm{d}B=\int_a^b\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

线段4：同理 $B_4=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$

运动电荷产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

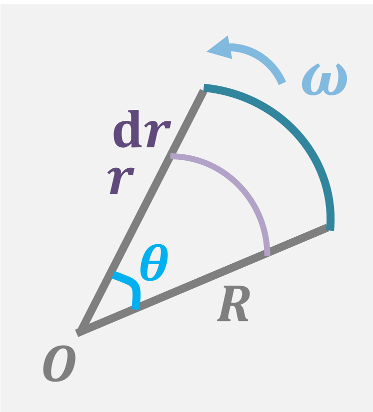
$$B=B_1+B_2+B_3+B_4$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pi}\ln\frac{b}{a}\right)\mu_0\lambda\omega$$

半径为R的扇形薄片，张角为θ，已知电荷面密度为σ，当绕O点以ω转动时，求O点的磁感应强度。

圆形电流圆心处磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$



解：坐标r处取宽度为$\mathrm{d}r$的窄条电荷元$\mathrm{d}q$

电荷元带电量

$$\mathrm{d}q=\sigma\, r\theta\, \mathrm{d}r$$

电荷元$\mathrm{d}q$ 旋转对应的圆形电流强度为

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\frac{\omega}{2\pi}\sigma r\theta \mathrm{d}r$$

电流元 $\mathrm{d}I$ 在O点产生的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\sigma\theta \mathrm{d}r$$

由磁场叠加原理，O点磁感应强度大小为

$$B_O=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\sigma\theta\int_0^R \mathrm{d}r=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\sigma\theta R$$

写成矢量式：$\vec{B}_O=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\sigma\theta R\vec{\omega}$

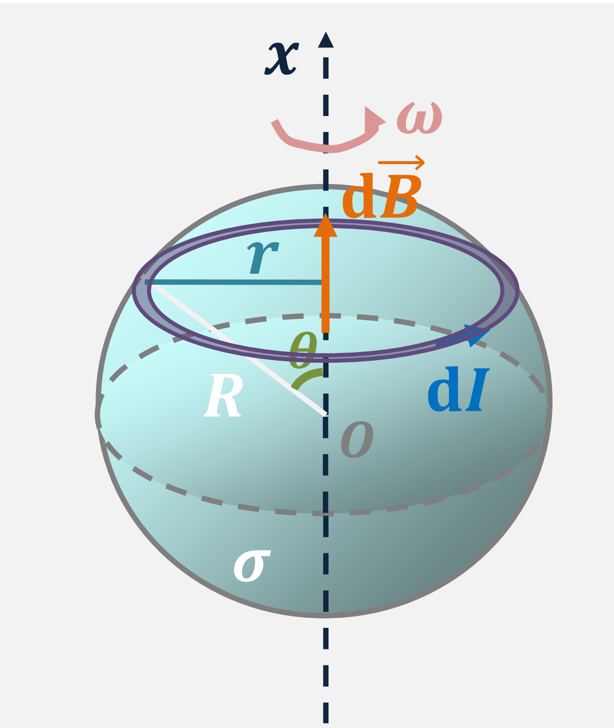
$\mathrm{d}q=?$ ➡

$\mathrm{d}I=?$ ➡

$\mathrm{d}B=?$ ➡

$$B=\int \mathrm{d}B$$

均匀带电球面(R,σ)，绕直径以ω匀速旋转，求球心处$\vec{B}_O$。



解：旋转带电球面 $\xrightarrow{\text{等效}}$ 许多环形电流

取半径r的环带

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma\cdot 2\pi rR\mathrm{d}\theta$$

等效圆电流：

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega\mathrm{d}q}{2\pi}=\sigma R^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 r^2\mathrm{d}I}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\sigma R^2\omega\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot R^2\sin^2\theta}{2R^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{2}R\sigma\omega\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}R\sigma\omega\int_0^\pi\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\mu_0R\sigma\omega$$

写成矢量式：

$$\vec{B}=\frac{2}{3}\mu_0R\sigma\vec{\omega}$$

容易混淆的静电场与稳恒磁场公式比较	
均匀带电圆环轴线上电场	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$
圆电流轴线上磁场	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$
带电圆环圆心处电场	$\vec{E} = 0$
圆电流圆心处磁场	$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

容易混淆的静电场与稳恒磁场公式比较	
点电荷电场	$\vec{E}=\dfrac{q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
相对于观察者以 $\vec{u}$ 匀速直线运动的点电荷的磁场	$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$
电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 的磁场	$\mathrm{d}\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$
圆电流圆心处磁场	$B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$
无限长均匀带电直线的电场	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ （垂直带电直线）
无限长直电流的磁场	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ （环绕电流）

静电场： $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$ 静电场是有源场

磁　场： $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = ?$

切向：该点$\vec{B}$方向

疏密：正比于该点$\vec{B}$的大小

磁场线　（磁感应线）

- 方向：磁感应线切线方向为磁感应强度$\vec{B}$的方向
- 大小：垂直$\vec{B}$的方向的单位面积上穿过的磁力线条数为磁感应强度$\vec{B}$的大小

$$B = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

磁感应线的特征

- 无头无尾的闭合曲线；或两端伸向无穷远。
- 与电流相互套连，服从右手螺旋定则。
- 任意两条磁感应线不相交。

磁通量

在磁场中穿过任意曲面的磁感应线条数称为穿过该面的磁通量。 Φ_m

$$B = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_\perp} \Rightarrow \mathrm{d}\Phi_m = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = B\cos\theta\,\mathrm{d}S = B\,\mathrm{d}S_\perp$$

单位：韦伯 Wb

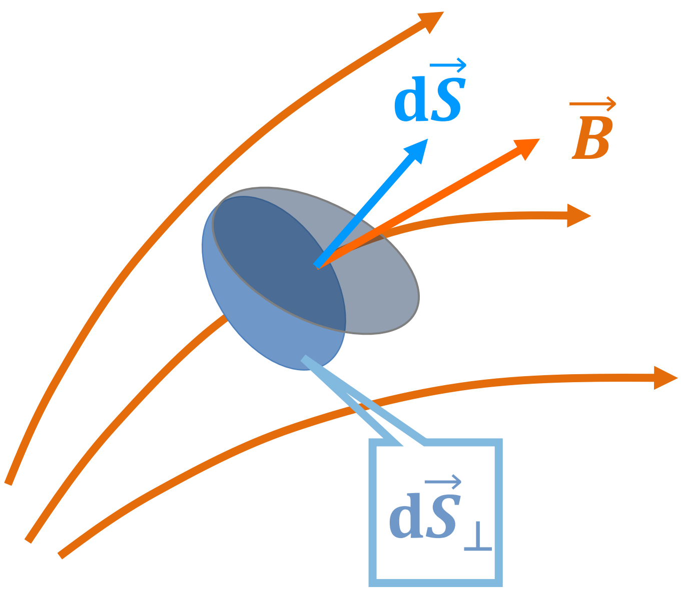
$$1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{T}\times 1\mathrm{m}^2$$

定义面积元矢量： $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_n$

面积元范围内$\vec{B}$视为均匀

对于有限曲面

$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

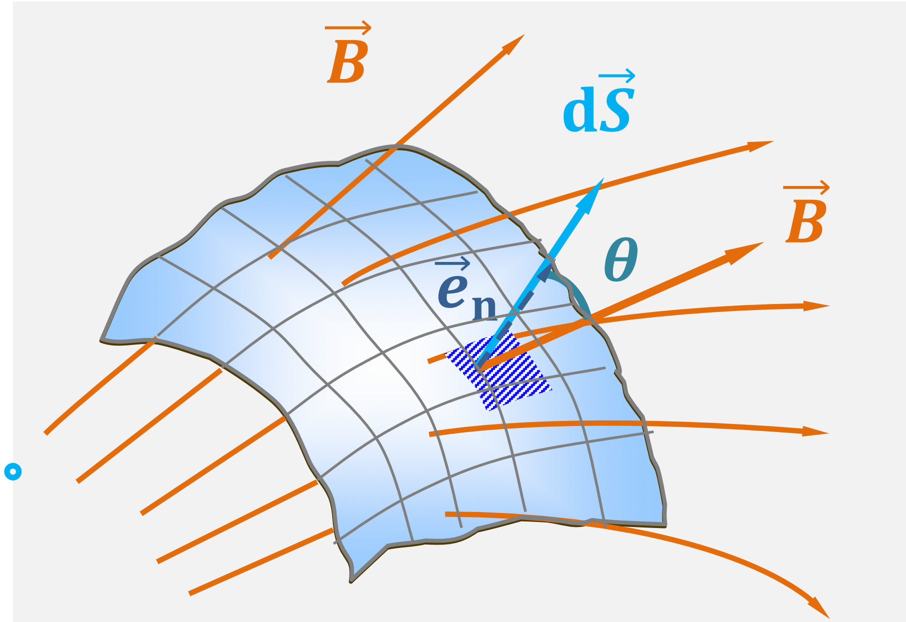


微元分析法（以平代曲，以恒代变）

◆ 任意曲面的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_m = \int \mathrm{d}\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



对封闭曲面，规定外法向为正方向。

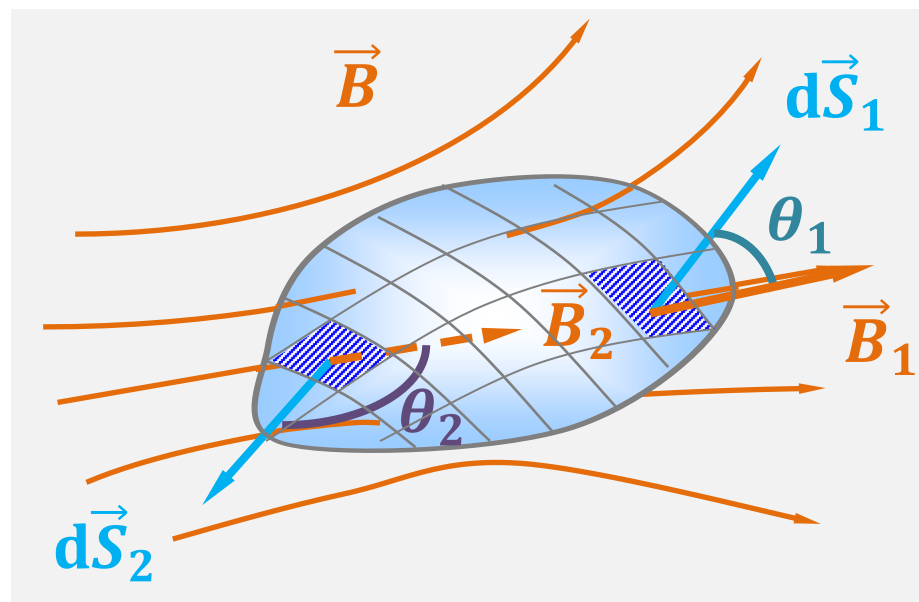
磁力线穿入 $\Phi_m < 0$

磁力线穿出 $\Phi_m > 0$

◆ S 为封闭曲面

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{m1} > 0$$

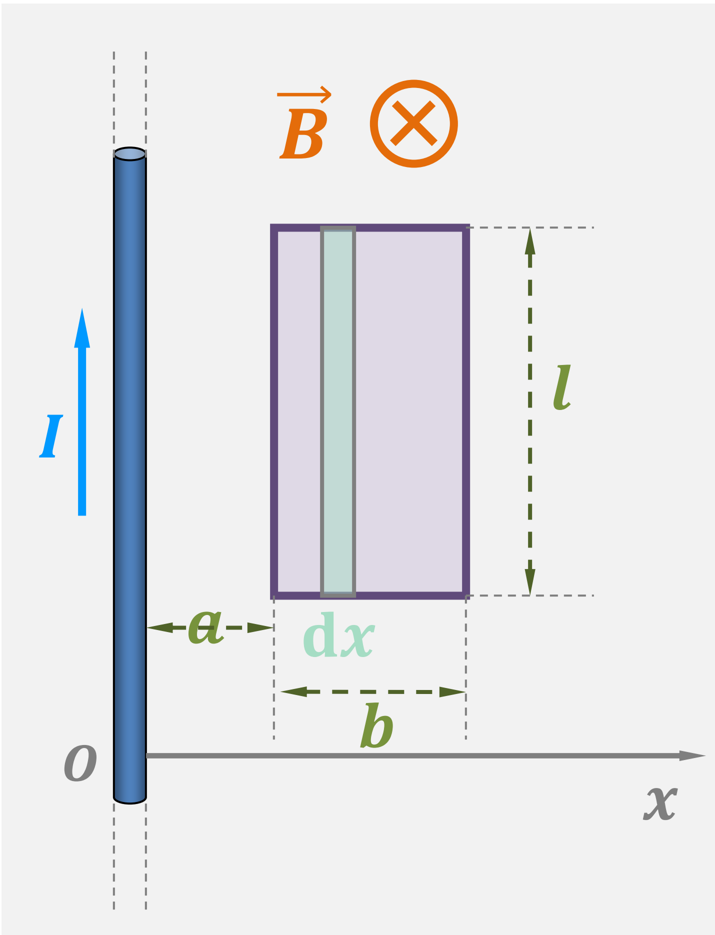
$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{m2} < 0$$



◆ 闭合曲面的磁通量

$$\Phi_m = \oint \mathrm{d}\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

如图载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量。



解：无限长直电流的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \otimes$$

对于有限曲面的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_m=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{B}//\vec{S}$$

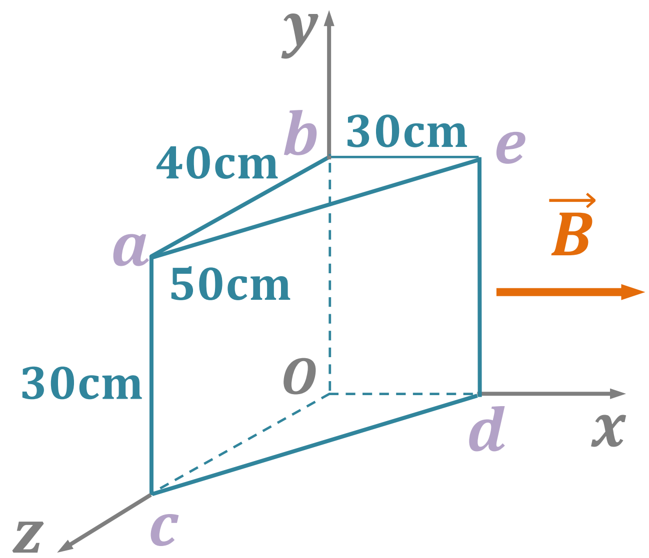
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\Phi_m=B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$

$$\Phi_m=\int\mathrm{d}\Phi_m=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

已知一均匀磁场，其磁感应强度 $B=2.0\ \mathrm{wb}\cdot\mathrm{m}^{-2}$，方向沿 x 轴方向，试求：

（1）通过图中$aboc$面的磁通量；
（2）通过图中$bedo$面的磁通量；
（3）通过图中$acde$面的磁通量；



解：在均匀磁场中，

磁通量 $\Phi=BS\cos\theta$，

设各面外法线为正方向，则

（1）$\Phi_{aboc}=BS_{aboc}\cos\pi$

$=-2\times0.4\times0.3=-0.24\ (\mathrm{Wb})$

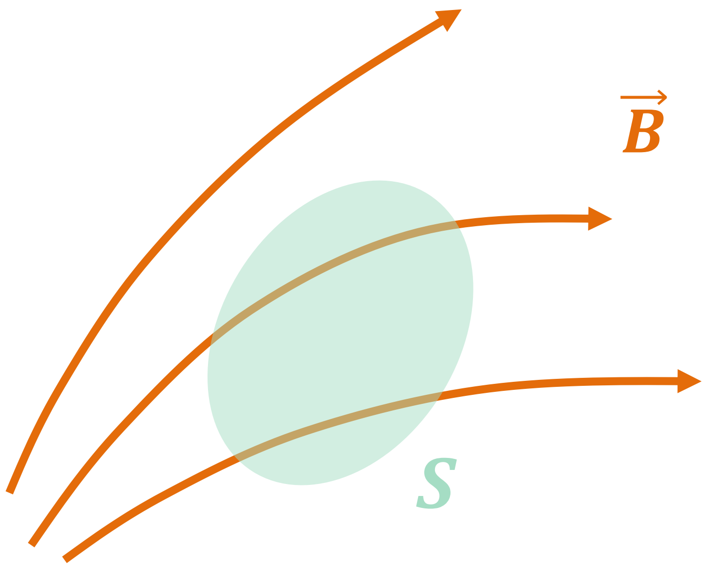
（2）$\Phi_{bedo}=BS_{bedo}\cos\frac{\pi}{2}=0$

（3）$\Phi_{acde}=BS_{acde}\cos\theta$

$=-BS_{aboc}=0.24\ (\mathrm{Wb})$

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

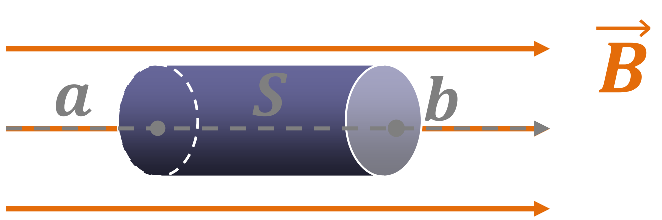
穿过磁场中任意封闭曲面的磁通量为零---**磁场的高斯定理**



磁场是无源场（涡旋场）

- 磁感应线闭合成环，无头无尾；或两端伸向∞
- 不存在磁单极。

证明在磁力线为平行直线的空间中，同一根磁力线上各点的磁感应强度值相等。



解：

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= -B_a \Delta S + B_b \Delta S = 0$$

$$\Rightarrow B_a = B_b$$

介绍：寻求磁单极问题

□ 理论需要

- **对称性需要**

产生电场 { 电荷 / 运动磁荷? / 变化磁场

产生磁场 { 磁荷? / 运动电荷 / 变化电场

麦克斯韦方程尚不对称，暗示对电磁现象认识不完全。

- **解释电荷量子化要求（狄拉克理论）**

$$e = n\left(\frac{hc}{2g}\right)$$ （n为整数）

基本电荷　　基本磁荷

基本磁荷　大统一能量尺度

$$m = \frac{g\varepsilon}{c^2\sqrt{hc}} \sim 10^{16}\,\frac{\mathrm{GeV}}{c^2}$$

- **大统一理论要求**

大爆炸初期形成。至今含量如何?

带有自发对称破缺的规范场理论得出磁单极质量。

介绍：寻求磁单极问题

□ 实验探求（1931年 ---今）

1975 年，美国加州大学，休斯敦大学联合小组报告。
用装有宇宙射线探测器气球在40 km 高空记录到电离特强离子踪迹，认为是磁单极。
后来被证实为一次虚报。

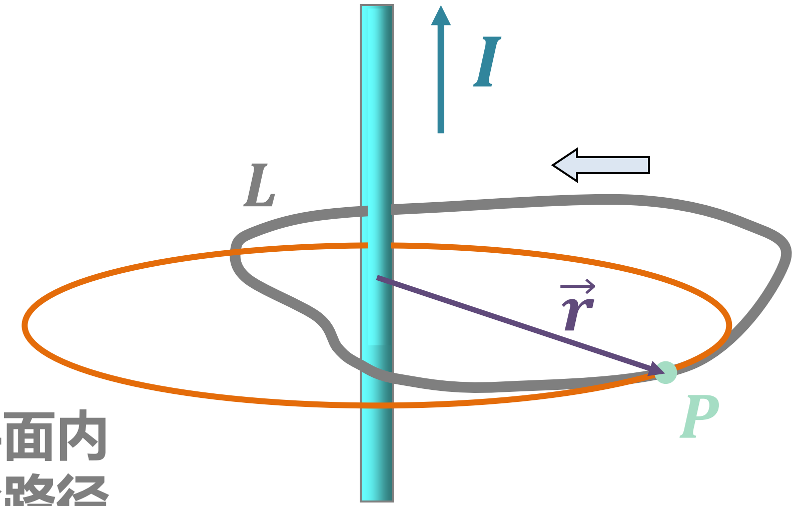
1982 年，美国斯坦福大学报告。
用$d = 5\mathrm{cm}$的超导线圈放入$D = 20\mathrm{cm}$超导铅筒。由于迈斯纳效应屏蔽外磁场干扰，只有磁单极进入会引起磁通变化，运行151 天，记录到一次磁通突变。改变量与狄拉克理论相符。
但未能重复，为一悬案。

人类对磁单极的探寻从未停止，一旦发现磁单极，将改写电磁理论。根据对应原理，旧理论将成为新理论在极限条件下的特例。

稳恒磁场的安培环路定理

可由毕---萨定律出发严格推证

◆ 以无限长载流直导线为例



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

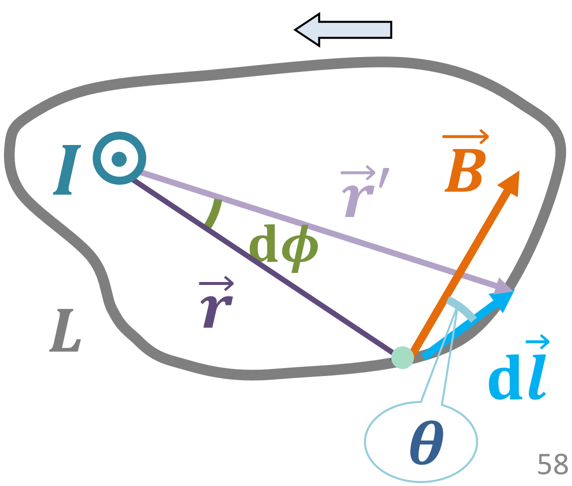
选择在垂直于导线平面内围绕电流的任意闭合路径

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$=\mu_0 I$$

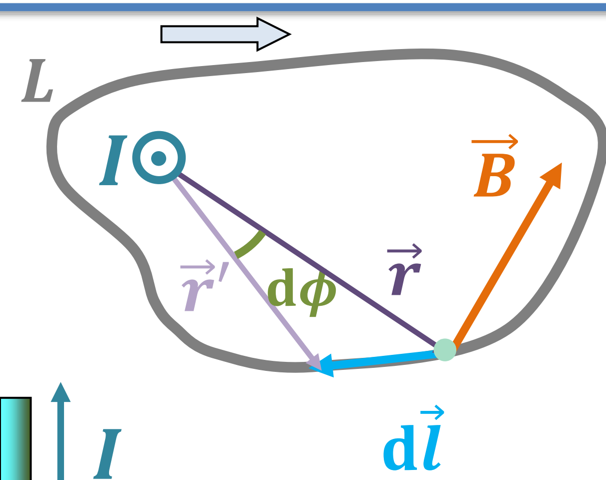
□ 磁场的环流与环路中所包围的电流有关。

与环路绕行方向成右旋关系的电流对环流的贡献为正，反之为负。



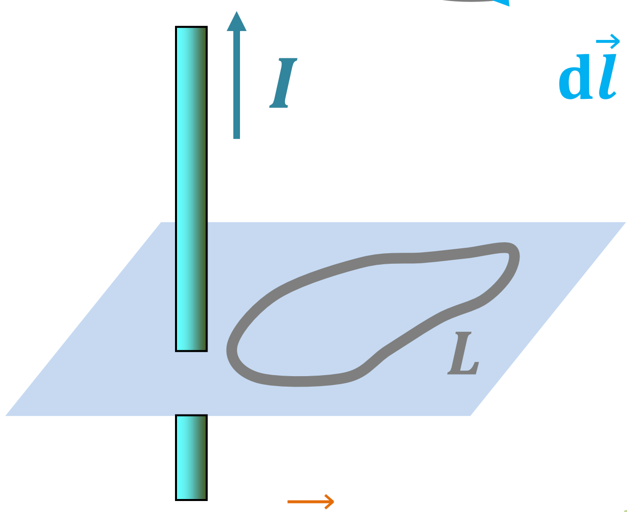
◆ 若环路方向反向，情况如何?

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{-\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = -\mu_0 I$$



◆ 若环路中不包围电流的情况?

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

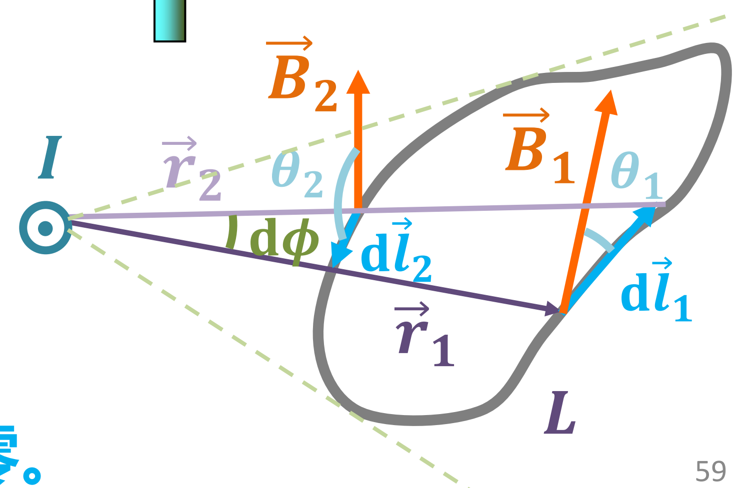


对一对线元来说

$$\vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \vec{B}_2\cdot d\vec{l}$$

$$= B_1 dl\cos\theta_1 + B_2 dl\cos\theta_2$$

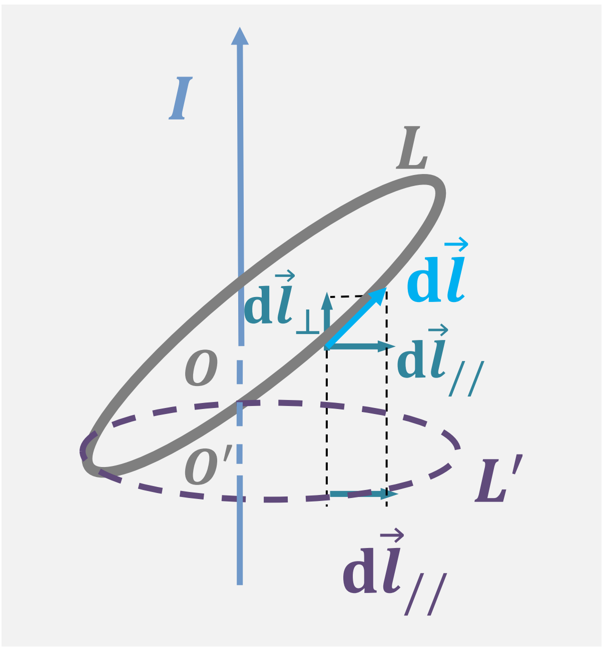
$$= \frac{\mu_0 I r_1 d\phi}{2\pi r_1} - \frac{\mu_0 I r_2 d\phi}{2\pi r_2} = 0$$



$$\Rightarrow \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

□ 环路不包围电流，则磁场环流为零。

□ 闭合路径不在垂直于电流的平面内



$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot\left(\mathrm{d}\vec{l}_{//}+\mathrm{d}\vec{l}_{\perp}\right)$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$$

$\cos\theta = 0$

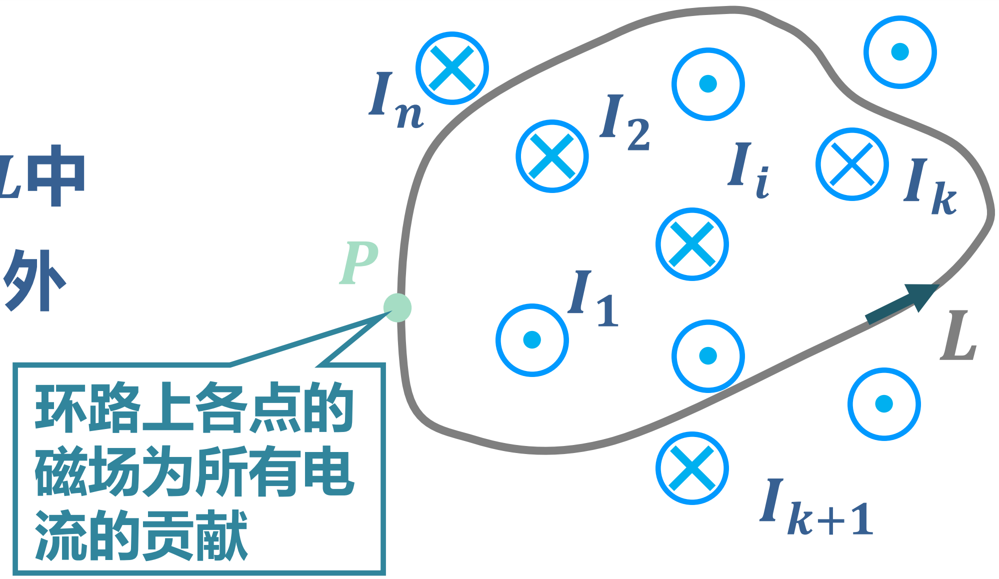
$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} + 0$$

$$= \begin{cases} \mu_0 I & (I\text{穿过}L) \\ 0 & (I\text{不穿过}L) \end{cases}$$

◆一般情况

$I_1 \sim I_k$ --- 在环路L中

$I_{k+1} \sim I_n$ ---在环路L外



则磁场环流为

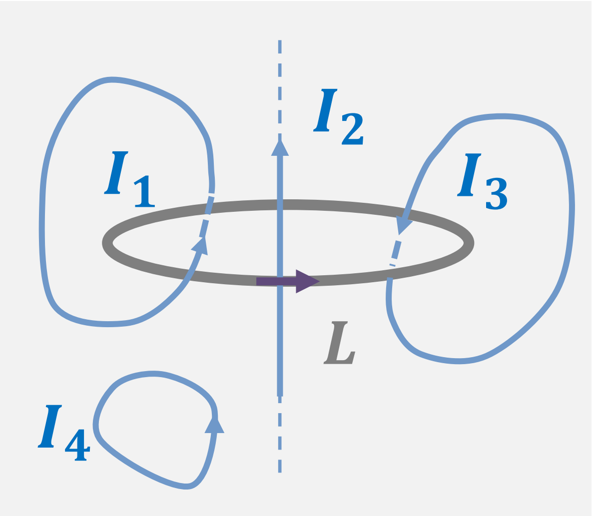
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \sum \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum \oint_L \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 + \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_i = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_i\,(L\text{内})$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$ --- 安培环路定律

恒定电流的磁场中，磁感应强度沿一闭合路径L的线积分等于路径L 包围的电流强度的代数和的μ_0倍。

□ 空间存在多个任意形状的电流



由磁场叠加原理

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

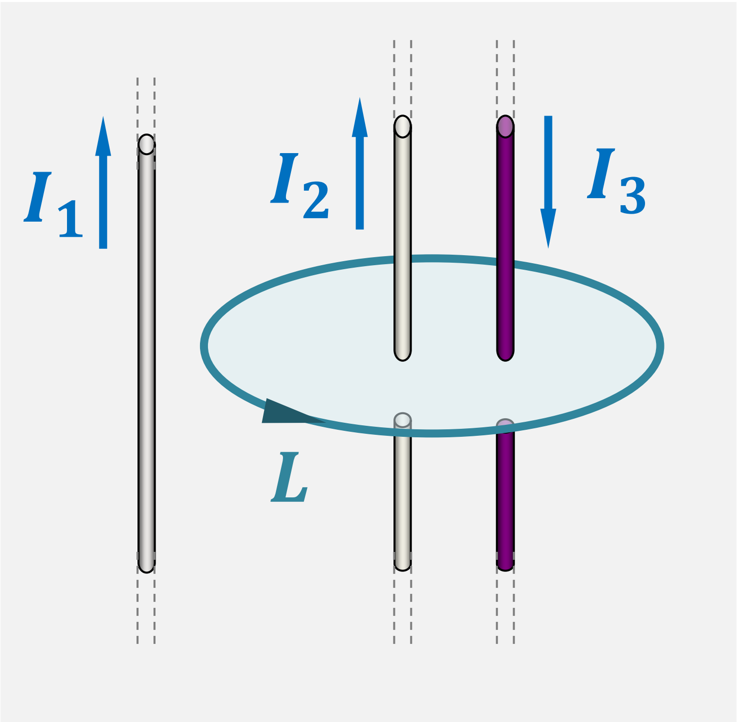
$$\sum_{\text{穿过}L} I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

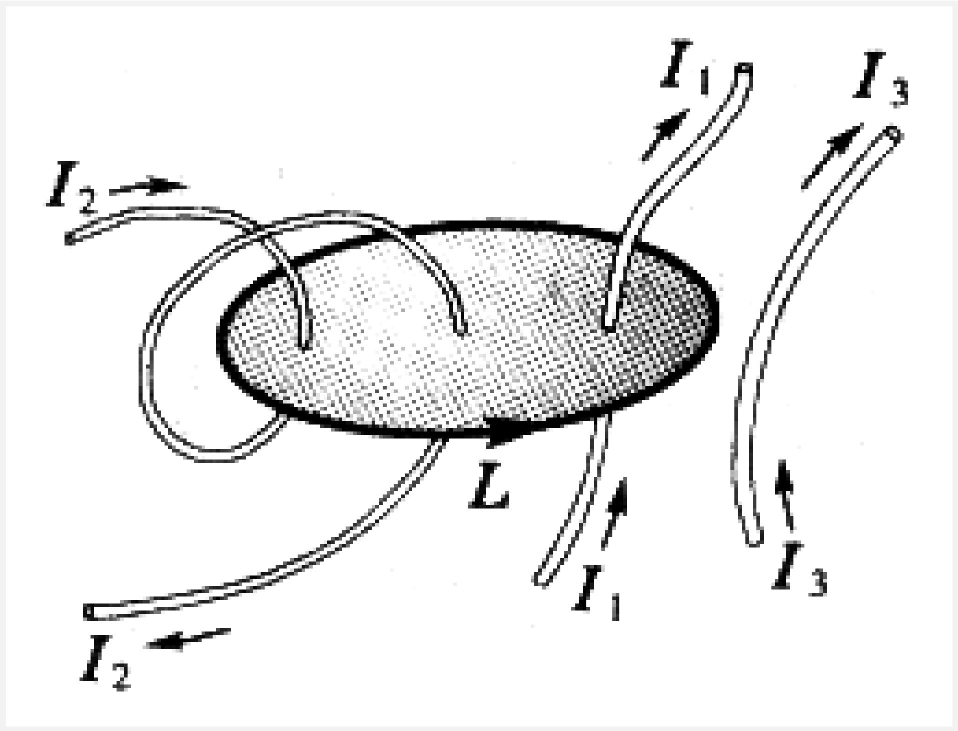
$$= \mu_0 \sum_{\text{穿过}L} I_i$$

◆**被包围的电流是与L套合的电流。**

□ 多电流情况



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_2 - I_3)$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_1 - 2I_2$$

◆电流与L多次套合，则套合一次就被包围一次。

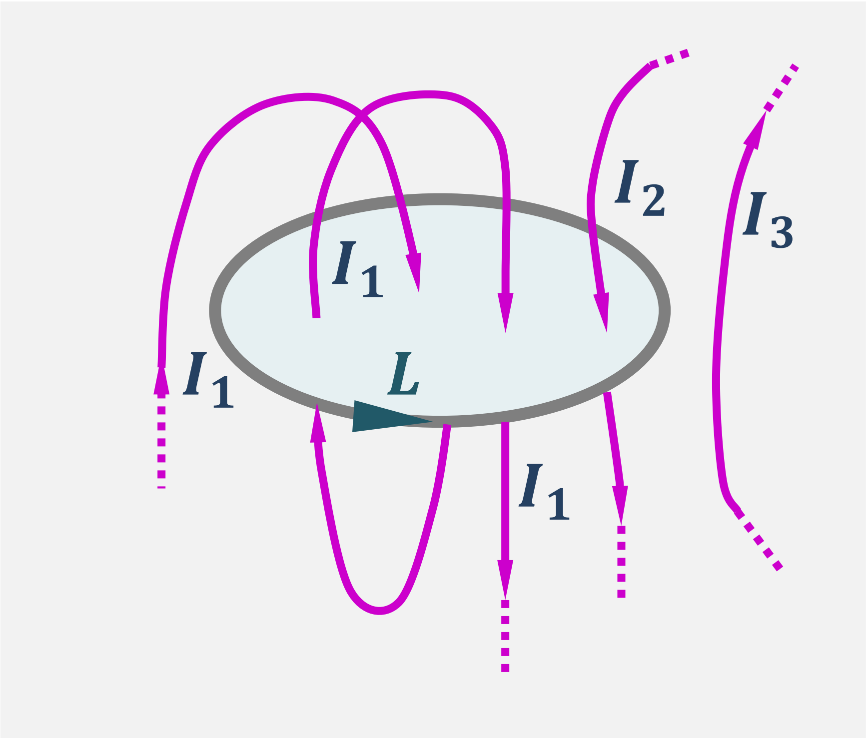
□ 多电流情况

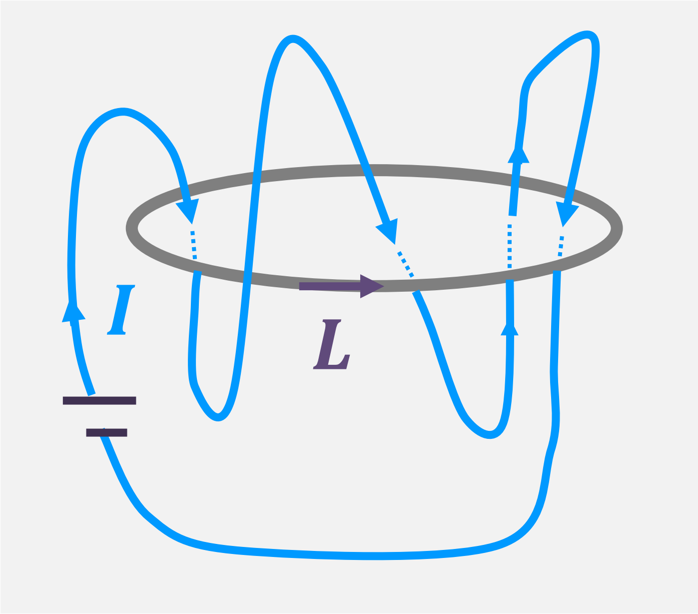
◆ $\vec{B}$是否与回路L外电流有关?

◆ 若 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$,

是否回路L上各处$\vec{B} = 0$?

是否回路L内无电流穿过?





$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$
$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I - 3I = -2I$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$$

恒定电流的磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿一闭合路径L的线积分（环流）等于路径L包围的电流强度的代数和与真空磁导率μ_0的乘积。

--- 恒定电流的安培环路定理

L --- 安培环路，任意封闭曲线（规定绕向）

μ_0---真空磁导率

$\vec{B}$ --- L上各点的总磁感应强度，L内外所有电流均有贡献。

$\sum I_{内}$---穿过以L为边界的任意曲面的净电流（代数和）

揭示磁场是非保守场（无势场，涡旋场）

与环路绕行方向成右旋关系的电流对环流的贡献为正，反之为负。

与L绕向成右旋关系 $I_i > 0$

与L绕向成左旋关系 $I_i < 0$

- 安培环路上的$\vec{B}$与那些电流有关？
- 哪些电流对环路积分 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 有贡献？

毕奥---萨伐尔定律
磁场叠加原理

安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$$

恒定电流的磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿一闭合路径L的线积分（环流）等于路径L包围的电流强度的代数和与真空磁导率μ_0的乘积。

--- 恒定电流的安培环路定理

$\vec{B}$ 与空间所有电流有关。

$\vec{B}$ 的环流 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 只与穿过环路的电流代数和有关。

穿过L的电流：对$\vec{B}$和$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 均有贡献。

不穿过L的电流：对L上各点$\vec{B}$有贡献；

对 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$无贡献。

- 被包围的电流是与L套合的电流。
- 电流与L多次套合，则套合一次就被包围一次。

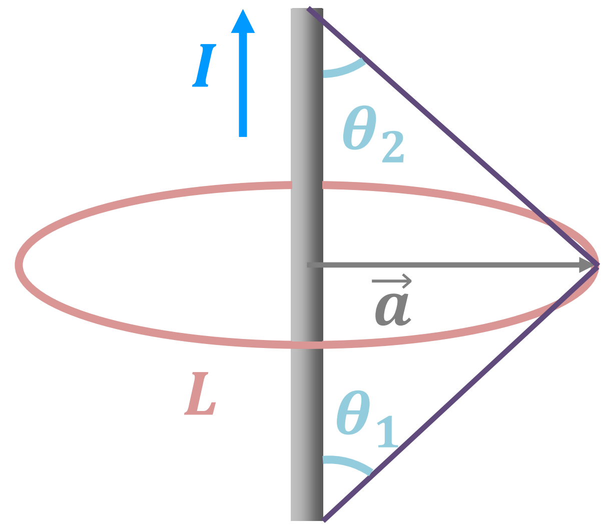
图中载流直导线，设$\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$

则L的环流为：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2}$$

$$\neq \mu_0 I$$



- 磁场是有旋场 ---电流是磁场涡旋的轴心
- 安培环路定理中的电流必须是闭合稳恒电流，对于一段稳恒电流的磁场不可以用安培环路定理求解。

□ 磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{u} \times \vec{E}$$

□磁场的叠加原理

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$$

□ 相对于观察者以$\vec{u}$匀速直线运动的点电荷的磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{u}\times\vec{r}}{r^3}$$

□ 毕奥---萨法尔定律

电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

部分典型电流磁场公式

◆ 无限长直电流：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$ 环绕电流

◆ 圆电流轴线上磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$ 平行于轴线

◆ 圆电流圆心处磁场：

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

◆无限长载流直螺线管内的磁场

$$B = \mu_0 n I$$

□ 电流的磁矩 $\vec{P}_m = I\vec{S} = IS\vec{e}_n$

用场线描述场的分布
用高斯定理和环路定理描述空间矢量场的性质。

	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$	$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
	有源场	保守场、有势场
稳恒磁场	$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$	$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\sum I_{内}$
	无源场	非保守场、无势场（涡旋场）

- **高斯定理揭示出磁场是无源场，这里的源指的是什么？是无本之源的意思吗？**

  高斯定理揭示出磁场是无源场，这里的源是指“磁单极子”或者“磁荷”这样的物理客体源，并非是无本之源的意思。

  产生磁场的源就是运动的电荷，即 $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E}$。

- **能否用安培环路定理求解一有限长载流导线的的磁感应强度，为什么？**

  不能用安培环路定理求解一有限长载流导线的的磁感应强度。

  因为有限长的载流导线的磁感应强度分布不具有对称性。

  不能找到一个积分路径：在这个路径上$\vec{B}$的大小是一个常数，使得环量$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$积分时，能将$B$提到积分号外。

- **在磁场中同一点，任何运动电荷在此受力的方向都是相同的。**

  因为磁力的方向还随电荷运动速度方向而不同，因而在磁场中同一点运动电荷受力的方向是不确定的。

- **电流元的磁场在它的延长线上的各点磁感强度均为零。**

- **$\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ 在任何情况下都可以用来求载流直导线附近的磁感应强度的大小（R为场点与长直电流之间的间距）。**

  该公式只对忽略导线粗细的理想线电流适用，当$R \longrightarrow 0$，导线的尺寸不能忽略。此电流就不能称为线电流，此公式不适用。

- **电流产生的磁场和磁铁产生的磁场性质不同。**

  磁铁的磁场和电流的磁场性质一样，都是由电荷的运动产生的，属于无源场，非保守场。

- **磁场是一种特殊形态的物质，具有能量、动量和质量等物质的基本属性。**