- 库仑定律
- 电场强度
- 高斯定理
- 环路定理、电势
- 电场强度与电势的关系
- 静电平衡、有导体存在时的电场和电势

点电荷场

$$\vec{E}=\frac{\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{F}=q_0\vec{E}$$

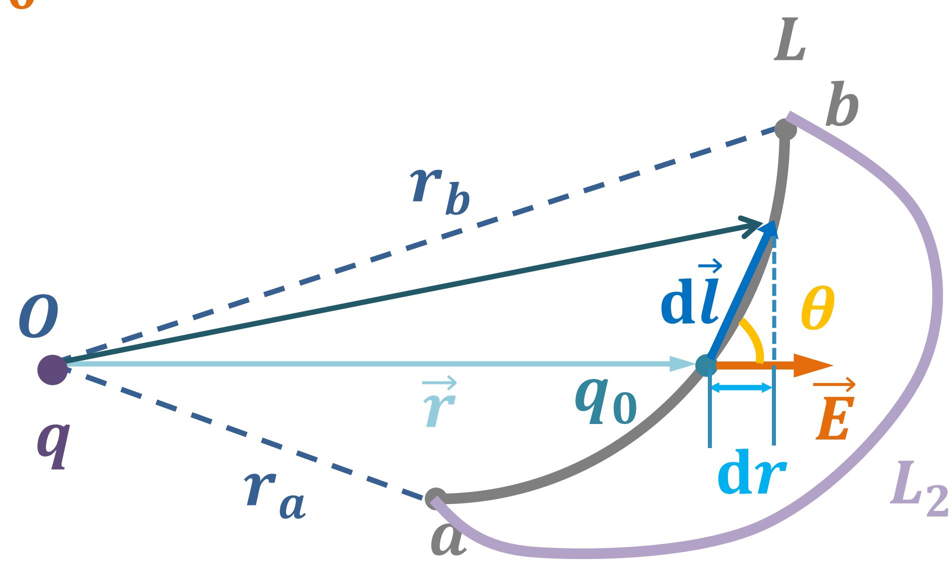
场源电荷：q
检验电荷：q_0

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0 E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



$$\mathrm{d}r=\left|\mathrm{d}\vec{l}\right|\cos\theta$$

- 静电力对电荷作功只与检验电荷移动的起点、终点位置有关，与所通过的路径无关。说明静电力是保守力，静电场是保守场。

任意点电荷系或带电体产生的静电场

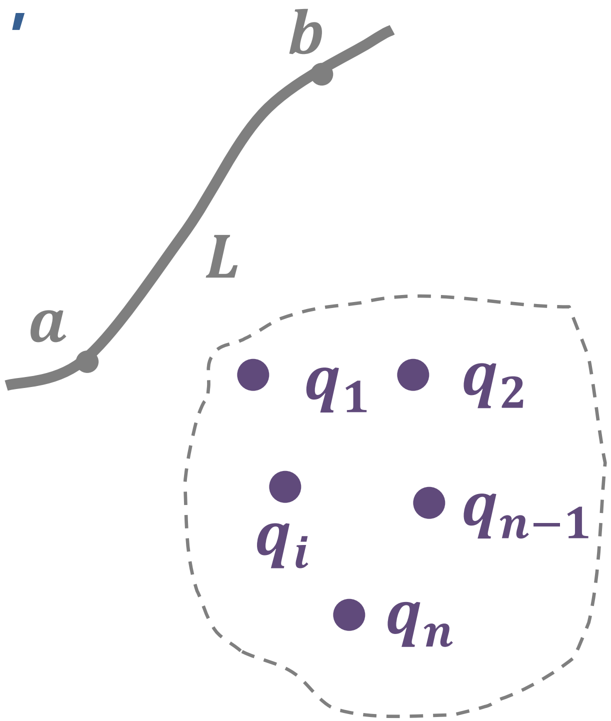
电荷系q_1、q_1、…的电场中，移动q_0，

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i}\frac{q_iq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$



- 静电力对电荷作功只与电荷移动的始末位置有关，与路径无关。说明静电力是保守力，静电场是保守场。

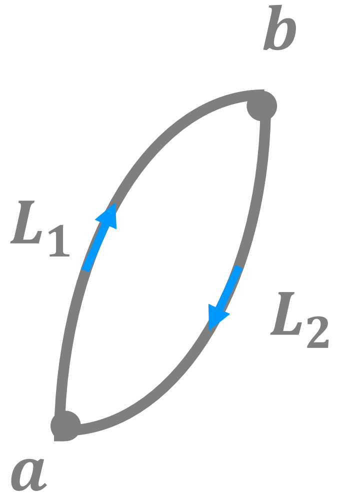
在静电场中，沿闭合路径移动q_0，电场力作功

$$A=\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{b(L_2)}^{a} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_{a(L_2)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0$$



$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

- 静电场的基本方程
- 静电场是保守场（无旋场）

静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（环路积分）恒为零。

---静电场的环路定理 (circuital theorem of electrostatic field)

路径上各点的总场强

$$A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场中任意闭合路径

◆ 静电力做功只与检验电荷起点、终点的位置有关，与所通过的路径无关 --- 静电力是保守力

◆ 静电场强沿任意闭合路径的线积分为零，反映了静电场是保守场。

凡保守力都有与其相关的势能，静电场是有势场。

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

□ 静电场的基本方程

□ 静电场是保守场（无旋场）

静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（环路积分）恒为零。

---静电场的环路定理 (circuital theorem of electrostatic field)

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$\vec{E}$的旋度

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

静电场是无旋场

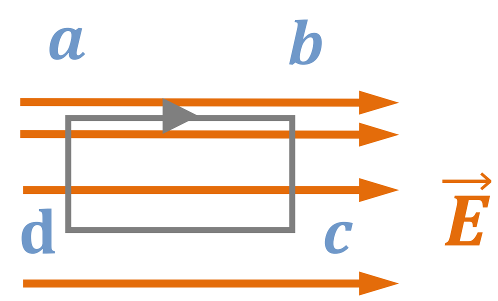
- 环路定理是静电场的另一重要定理，可用环路定理检验一个电场是不是静电场。

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^\mathrm{d} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_\mathrm{d}^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_a^b E_1 \mathrm{d}l + \int_c^\mathrm{d} -E_2 \mathrm{d}l$$

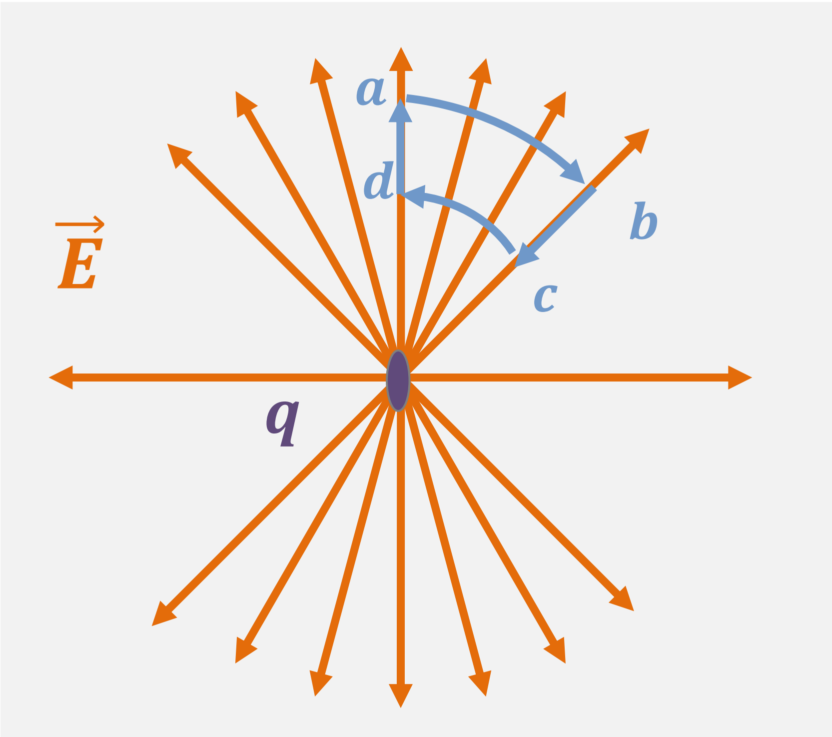
$$\neq 0$$

不是静电场



- 环路定理要求电场线不能闭合。
- 静电场是有源、无旋场，可引进电势能。

证明如图分布的电场不可能是静电场。



静电场特性：

$\begin{cases} \text{有源} & \text{高斯定理} \\ \text{保守} & \text{环路定理} \end{cases}$

作如图环路：$abcd$

曲线 ab、cd上 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$，所以

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_c^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

曲线 da、bc上路径相等，而 $\vec{E}$大小不等

$$\left| \int_b^c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right| < \int_d^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（电场线密度不同）

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

违反静电场环路定理，如图所示电场不是静电场。

$$A_{保} = -\Delta W$$

力学 ⟶ 保守力场 ⟶ 引入势能

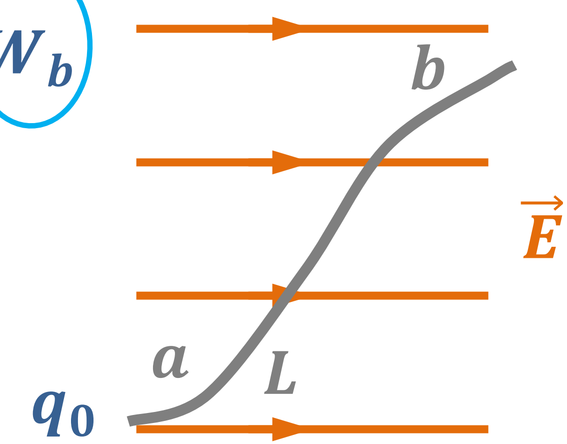
静电场 ⟶ 保守场 ⟶ 引入静电势能

电势能 (Electric potential energy)

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(W_b - W_a) = W_a - W_b$$

a点电势能

b点电势能



电场力所做的功等于电势能增量的负值(或电势能的减少)。

令 $W_b = 0$ --- 电势能的零点

$$W_a = q_0 \int_a^{零势点} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电荷q_0在电场中某点的电势能等于把电荷从该场点沿任意路径移动到电势能零点过程中静电场力所做的功。

$$W_a = q_0 \int_a^{零势点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电势能应属于q_0和产生电场的源电荷系统共有。
- 电势能和试验电荷有关，不能用来描述电场。
- 电场力所做的功有正(例如在斥力场中)有负(例如在引力场中)，所以电势能有正有负。
- 电荷在某点电势能的值与零点选取有关，而两点的差值与零点选取无关。

$$W_a - W_b = A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势能差

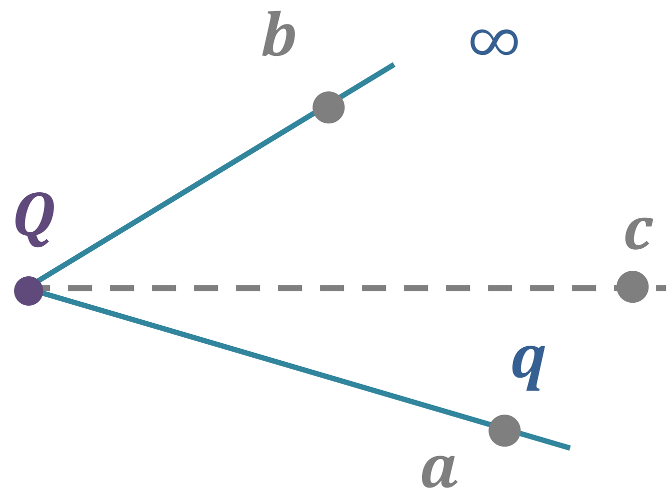
电势能零点的选择原则上是任意的：

◆ (源)电荷分布在有限范围内时，势能零点一般选在无穷远处。

◆ 无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。

◆ 实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。

如图所示，在带电量为Q的点电荷所产生的静电场中，有一带电量为q的点电荷。求q在a点和b点的电势能。



解：选无穷远为电势能零点

$$W_a=\int_a^{\infty} q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_a}$$

$$W_b=\int_b^{\infty} q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_b}$$

选c点为电势能零点

$$W_a=\int_a^{c} q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_c}\right)$$

$$W_b=\int_b^{c} q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)$$

电势（Electric potential） U

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{零势点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{零势点} E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

- 静电场中某点电势等于单位正电荷在该点具有的电势能；
- 等于把单位正电荷由该点沿任意路径移动到电势零点的过程中电场力所做的功；
- 等于场强从该点沿任意路径到电势零点的线积分。

◆ 若路径上各段$\vec{E}$的表达式不同，应分段积分。

◆ 选取零势点的原则：使场中电势分布有确定值。

一般，场源电荷有限分布，选 $U_\infty = 0$

场源电荷无限分布，不选$U_\infty = 0$

许多实际问题中，选 $U_{地球} = 0$

电势（Electric potential） U

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

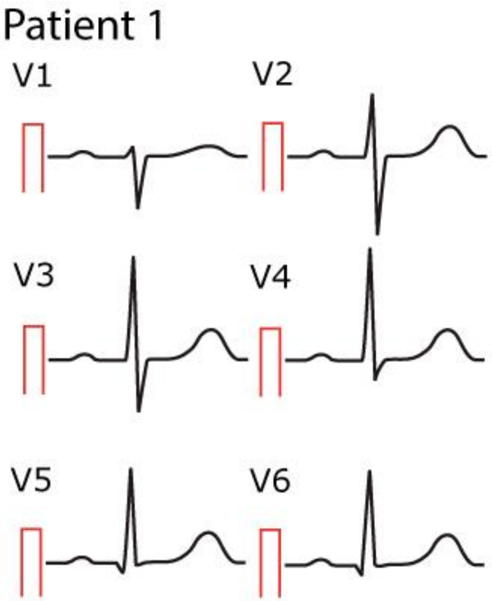
- 电势零点即电势能零点
  - 点电荷q_0在电场中的电势能为 $W = q_0 U$
  - 任意带电体在电场中的电势能为

$$W = \int U \mathrm{d}q$$

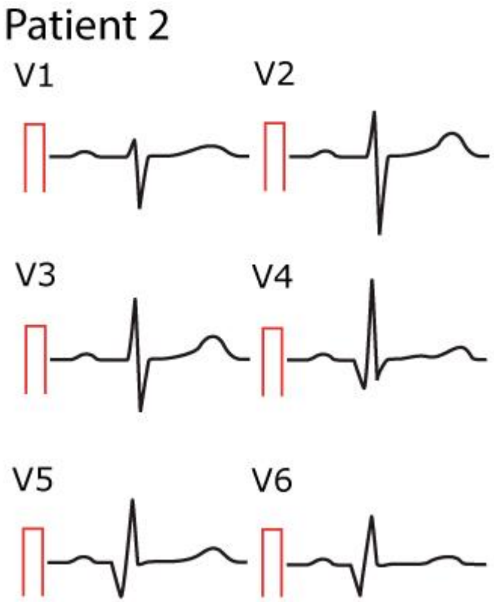
- 把电荷q_0从a沿任意路径移动到b静电场力所做的功为

$$A_{ab} = q_0(U_a - U_b)$$

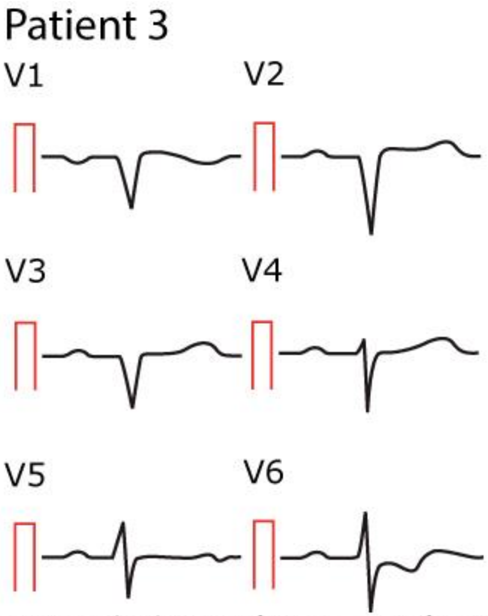
- 电势是描述电场能量性质的物理量，与检验电荷无关；电势能和检验电荷有关，不能用来描述电场。



Normal waveforms.
Adequate R-wave progression.
Small (septal) q-waves in V5 and V6.



Patient with STEMI 5 days earlier. Suboptimal R-wave progression, pathological Q-waves in V4–V6.



Patient with a history of STEMI. Loss of R-waves in V1–V3, which has left QS-complexes in these leads.

脑电图仪(EEG)
心电图仪(ECG)
视网膜电图仪(ERG)

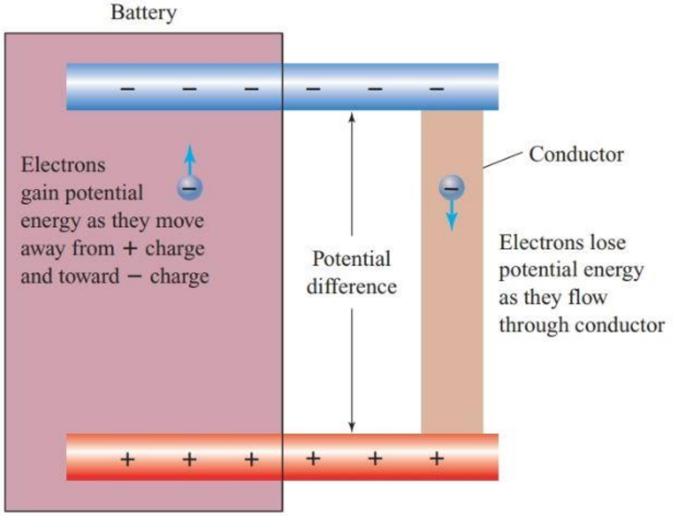
电势差(Electric potential difference)

$$U_{ab}=U_a-U_b=\frac{W_a-W_b}{q_0}=\frac{A_{ab}}{q_0}=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

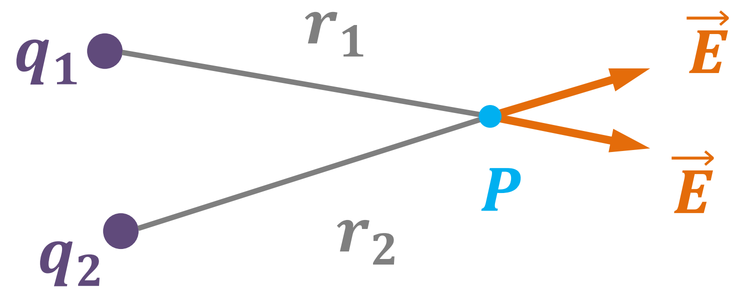
- 静电场中a、b两点的**电势差等于**将单位正电荷由a点沿任意路径移至b点过程中静电力做的功。
- **等于**场强沿任意路径从a点到b点的线积分。

◆ U为场源电荷和空间位置的函数。

◆ U具有相对意义，电场中某点的电势与零势点选取有关，但电势差U_{ab}与零势点选取无关。



□点电荷系的电势



$$U_P = \int_P^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_P^{\text{零势点}} \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_P^{\text{零势点}} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_i U_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

□ 连续分布的带电体

$$U = \int \mathrm{d}U$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

有限大带电体且选 $U_\infty = 0$

在点电荷系产生的电场中，某点的电势是各个点电荷单独存在时，在该点产生的电势的代数和。

---电势叠加原理

□ 电势的计算（两种基本方法）

- 场强积分法（由定义求）
- 叠加法

① 确定$\vec{E}$分布

② 选零势点和便于计算的积分路径

选取零势点的原则：使场中电势分布有确定值

③ 由电势定义，积分(计算)。

计算 U_a

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

路径上各点的总场强，若路径上各段的表达式不同，应分段积分

□ 电势的计算（两种基本方法）

- 场强积分法（由定义求）
- 叠加法

① 将带电体划分为电荷元$\mathrm{d}q$

② 选零势点，写出$\mathrm{d}q$在场点的电势$\mathrm{d}U$

③ 由叠加原理：

$$U = \sum \mathrm{d}U$$

或

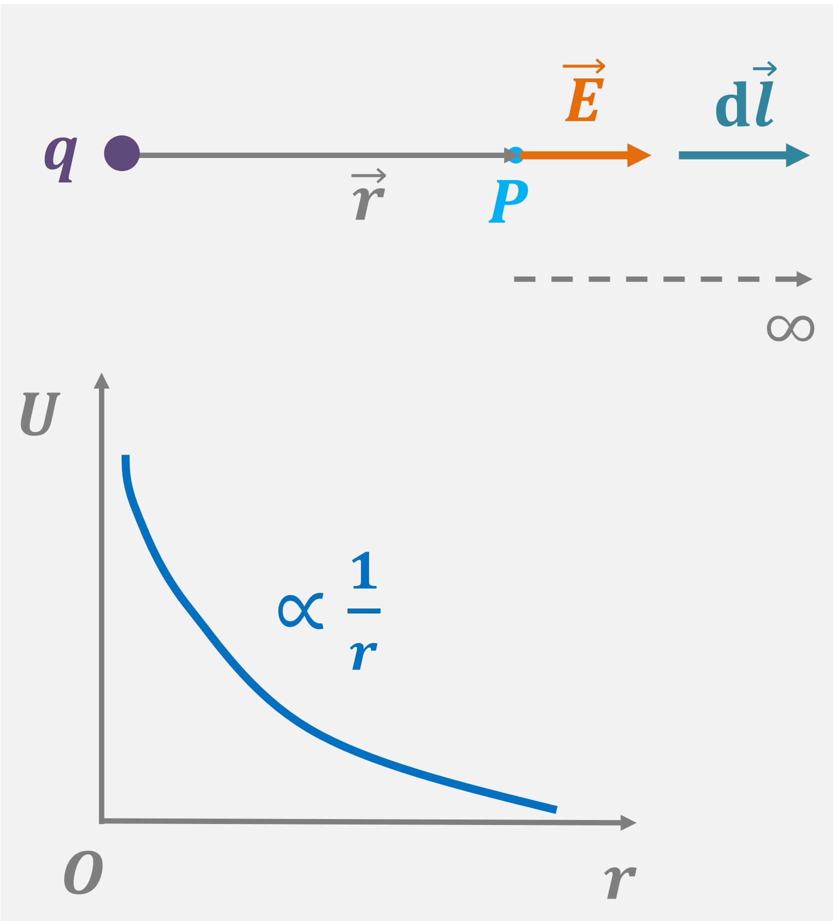
$$U = \int \mathrm{d}U$$

思路：$\mathrm{d}q \rightarrow \mathrm{d}U \rightarrow$

$$U = \int \mathrm{d}U$$

注意：应用典型带电体的电势公式，选取相同的零势点。

点电荷q电场中的电势分布。



解： $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

令 $U_\infty = 0$

沿径向积分

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$= \int_r^\infty \frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

◆ 球对称

◆ 标量：正负 $q > 0$， $U > 0$

$q < 0$， $U < 0$

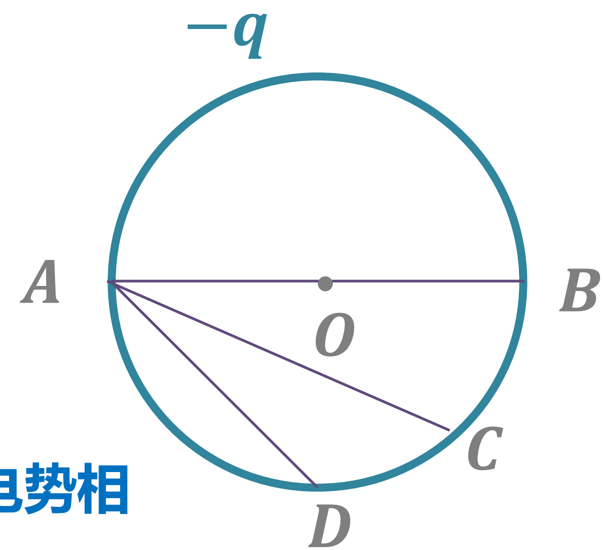
一电量为$-q$的点电荷位于圆心O处，A、B、C、D为同一圆周上的四点，如图所示，现将一试验电荷q_0从A点分别移动到B、C、D各点，则

A. 从A到B，电场力作功最大；

B. 从A到各点，电场力作功相等；

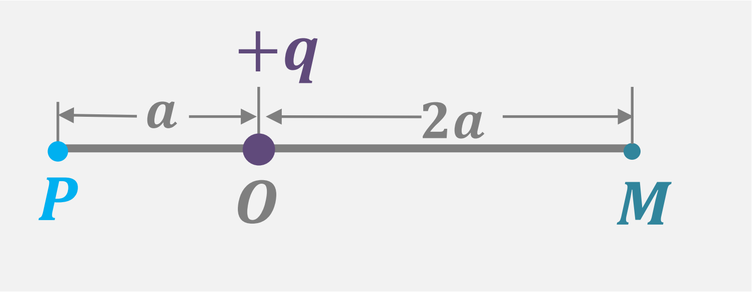
C. 从A到D，电场力作功最大；

D. 从A到C，电场力作功最大。



解：点电荷$-q$的电势分布为$U=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，$r$相同处电势相等，故将试验电荷$q_0$从$A$点分别移动到$B$、$C$、$D$各点后电势未变，所以从$A$到各点，电场力作功皆为零。

在点电荷$+q$的电场中，如果取图中P点的电势为零，求M的电势。



解：点电荷的场强分布为

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

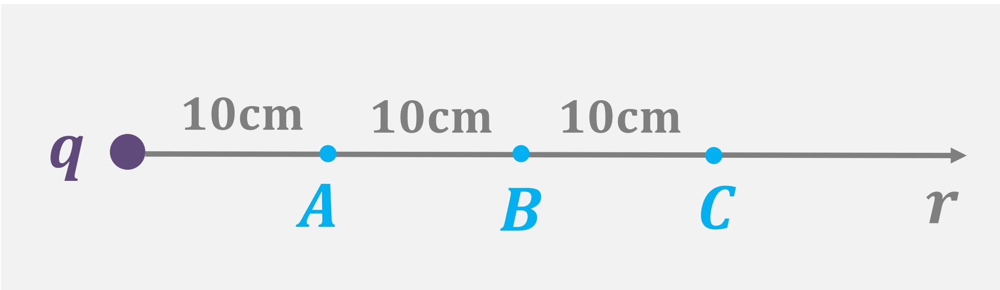
由待求点沿径向积分至零电势点 $U_P=0$

$$U_M=\int_M^P \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_M^P \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_M^P \frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_M}-\frac{1}{r_P}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=-\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

点电荷q带电量为10^{8}C。如果取图中B点的电势为零，求A点和C点的电势。



解：点电荷的场强分布为

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

由待求点沿径向积分至零电势点 $U_B=0$

$$U_A=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_A^B \frac{q\vec{r}\cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$=450(\mathrm{V})$$

$$U_C=\int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_C^B \frac{q\vec{r}\cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_C^B \frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$=-150(\mathrm{V})$$

$$\neq\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\int_C^B \frac{dr}{r^2}$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=r|d\vec{r}|(-1)$$
$$=(-dr)\,(-1)$$

均匀带电球面（q, R）电场中的电势分布。

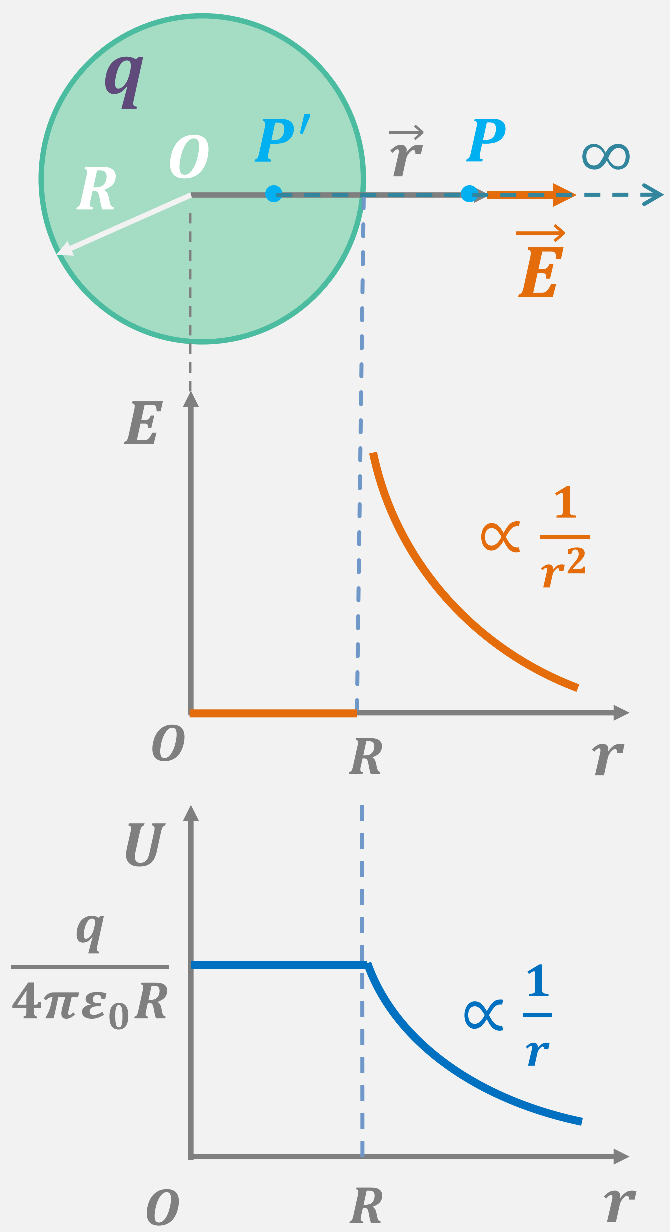
解：由高斯定理 $\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$

令 $U_\infty = 0$，沿径向积分

$$U_{外} = \int_P^\infty \vec{E}_{外} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

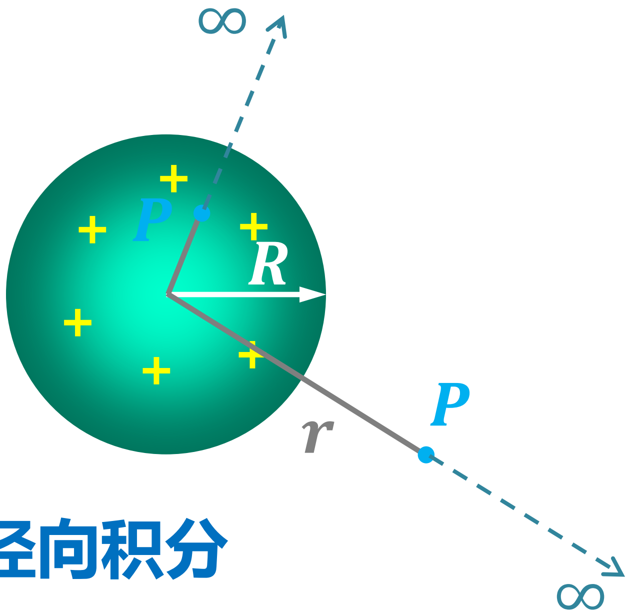
$$U_{内} = \int_{P'}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P'}^R \vec{E}_{内} \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_{外} \cdot d\vec{r}$$

$$= 0 + \int_R^\infty \frac{q\vec{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



均匀带电球面内电势与球面处电势相等，
球面外电势与电量集中于球心的点电荷情况相同。

半径为R，带电量为q的均匀带电球体。求带电球体的电势分布。



解：由高斯定理

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$

令 $U_\infty=0$，沿径向积分

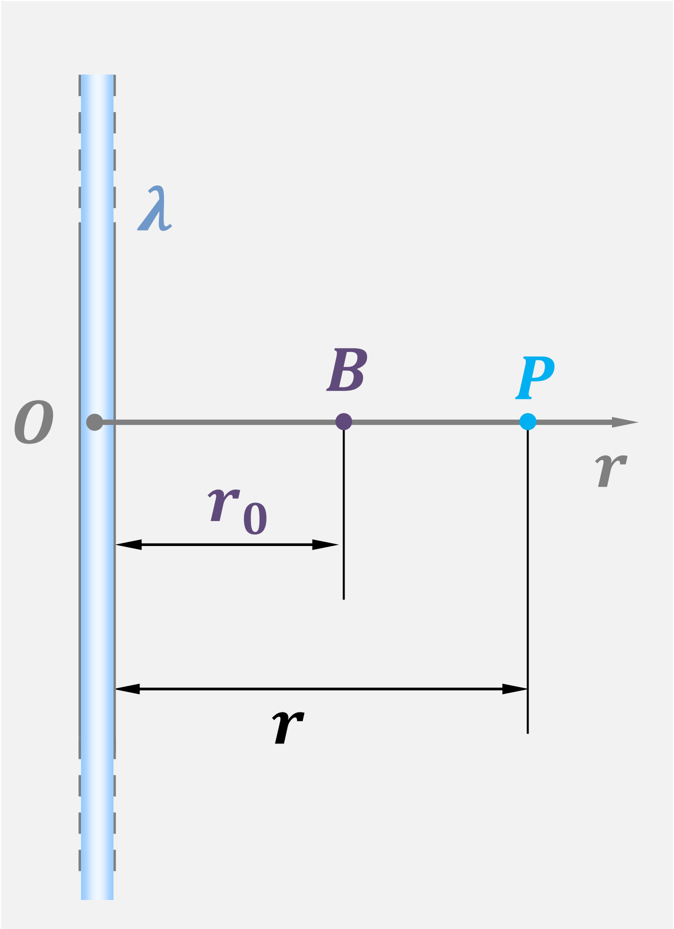
对球外一点P

$$U_{外}=\int_P^\infty \vec{E}_{外}\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

对球内一点P

$$U_{内}=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^R \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2-r^2\right)$$

求电荷线密度为λ的“无限长”均匀带电直线产生的电场的电势分布。



解：无限长均匀带电直线产生的场强

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$ 垂直于带电直线

令 $U_B=0$

$$U_P=\int_P^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{r_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

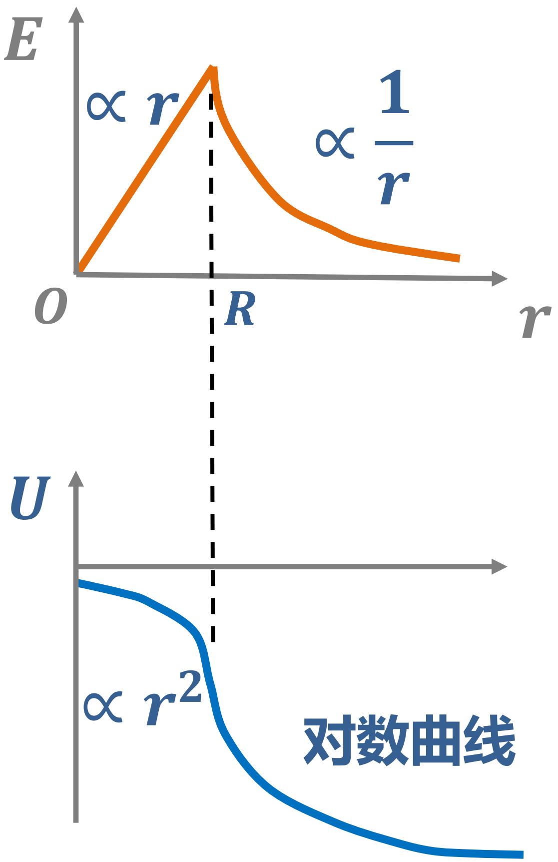
- 不能选 $U_\infty=0$　　不合理

$$U_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty\frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0 r}=\int_r^\infty\frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\infty-\ln r)$$

求无限长均匀带电圆柱体(R,ρ)的电势分布。

$$E_{外}=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$E_{内}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$



令 $r=0$处$U=0$，沿径向积分

$$U_{内}=\int_r^0 \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}$$

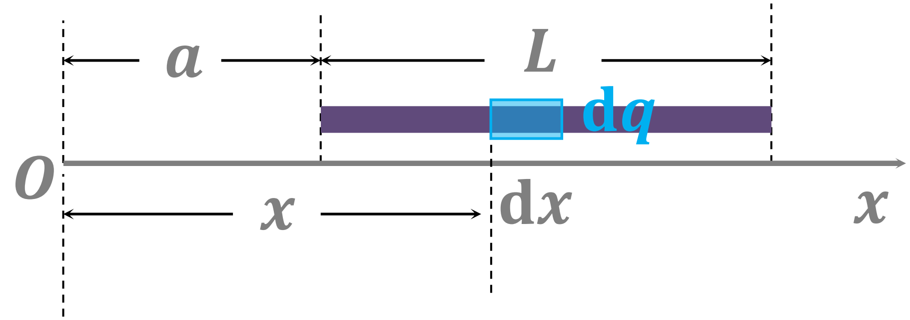
$$=\int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

$$U_{外}=\int_r^R \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}+\int_R^0 \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}dr+\int_R^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr$$

$$=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

图中所示为一沿x轴放置的长度为L的不均匀带电细棒，其电荷线密度为$\lambda_0(x-a)$，λ_0为一常数，取无穷远处为电势零点，求坐标原点O处的电势。



解：在x处取一长为$\mathrm{d}x$的电荷微元$\mathrm{d}q$，

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x=\lambda_0(x-a)\mathrm{d}x$$

由点电荷q的电势分布 $U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

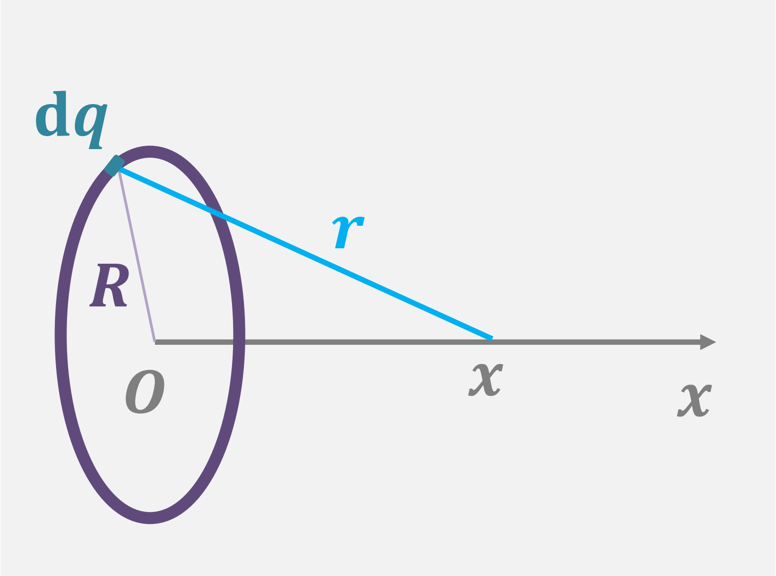
可得电荷微元$\mathrm{d}q$在坐标原点O处的电势

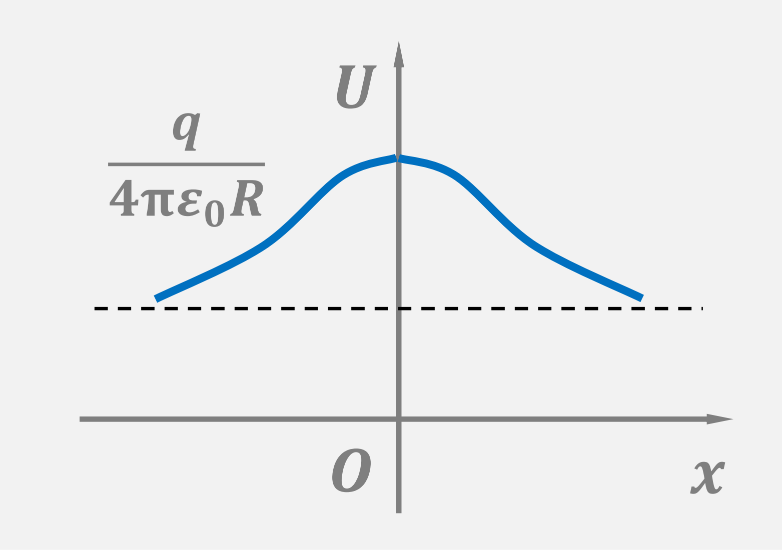
$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda_0(x-a)}{4\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x$$

不均匀带电细棒在坐标原点O处的电势为

$$U_O=\int\mathrm{d}U=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{x-a}{x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(L-a\ln\frac{a+L}{a}\right)$$

求均匀带电圆环（q，R）轴线上的电势分布。





解：在圆环上取点电荷$\mathrm{d}q$，令$U_\infty = 0$

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

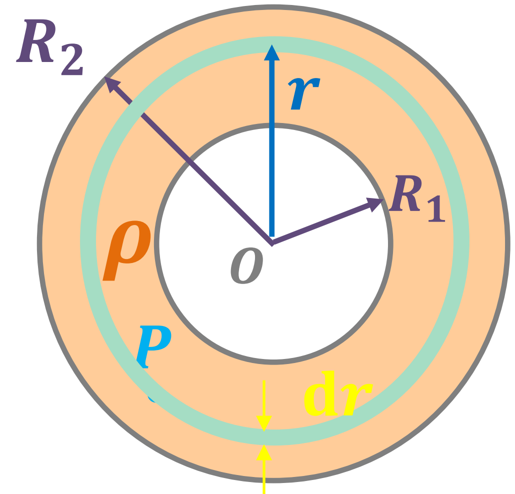
$$U = \int \mathrm{d}U$$

$$= \int_0^q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$\begin{cases} x = 0, \quad U_O = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ x >> R, \quad U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} \end{cases}$$

图示一个均匀带电的球壳，其电荷体密度为ρ，球壳内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求空腔内任一点的电势。（利用电势叠加原理解此题）



解：将带电球壳视为许多均匀带电球面的集合，

取半径r，厚$\mathrm{d}r$的球壳为电荷元：$\mathrm{d}q = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \mathrm{d}r$

令 $U_\infty = 0$，$\mathrm{d}q$在腔内产生的电势

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r \mathrm{d}r}{\varepsilon_0}$$

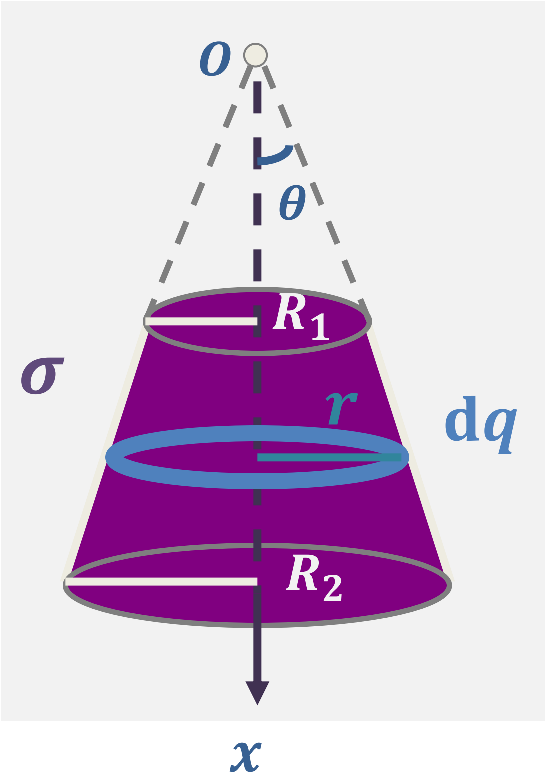
由叠加原理

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left({R_2}^2 - R_1^2\right)$$

即腔内各点等势

一锥顶角为2θ的圆台，上下底面半径分别为R_1和R_2，其侧面均匀带电，电荷面密度为σ，以无穷远处为电势零点，求顶点O的电势。

解：将圆台侧面视为由许多圆环组成，建立如图坐标系，在x处取高$\mathrm{d}x$的圆环。



$$\begin{aligned}\mathrm{d}q &= \sigma\,\mathrm{d}S \\ &= \sigma 2\pi r\cdot \mathrm{d}x/\cos\theta \\ &= \sigma 2\pi x\tan\theta\cdot \mathrm{d}x/\cos\theta\end{aligned}$$

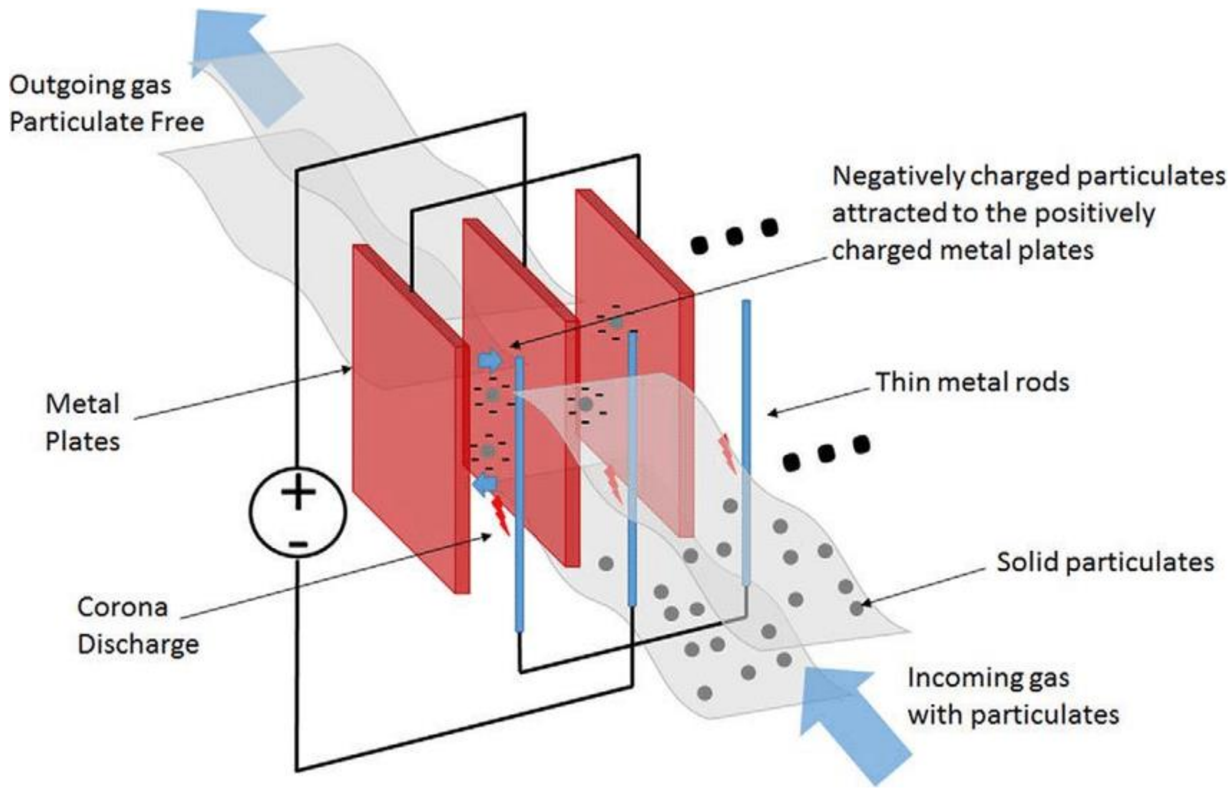
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma\tan\theta}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x$$

由叠加原理：

$$U = \int \mathrm{d}U = \frac{\sigma\tan\theta}{2\varepsilon_0}\int_{R_1/\tan\theta}^{R_2/\tan\theta}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

以R_1和R_2分别表示电晕极与集电极的半径，L表示集电极圆筒高度，通常$L \gg R_2$，已知空气的击穿场强为E_{m}。请计算出管式静电除尘器的除尘电压。



无限长均匀带电圆筒(R_1,R_2)，已知空气的击穿场强为E_m。求两筒面之间的电压。

解：无限长均匀带电直线产生的场强

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$ 垂直于带电直线

内外两极间电压为

$$U=U_{R_1}-U_{R_2}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

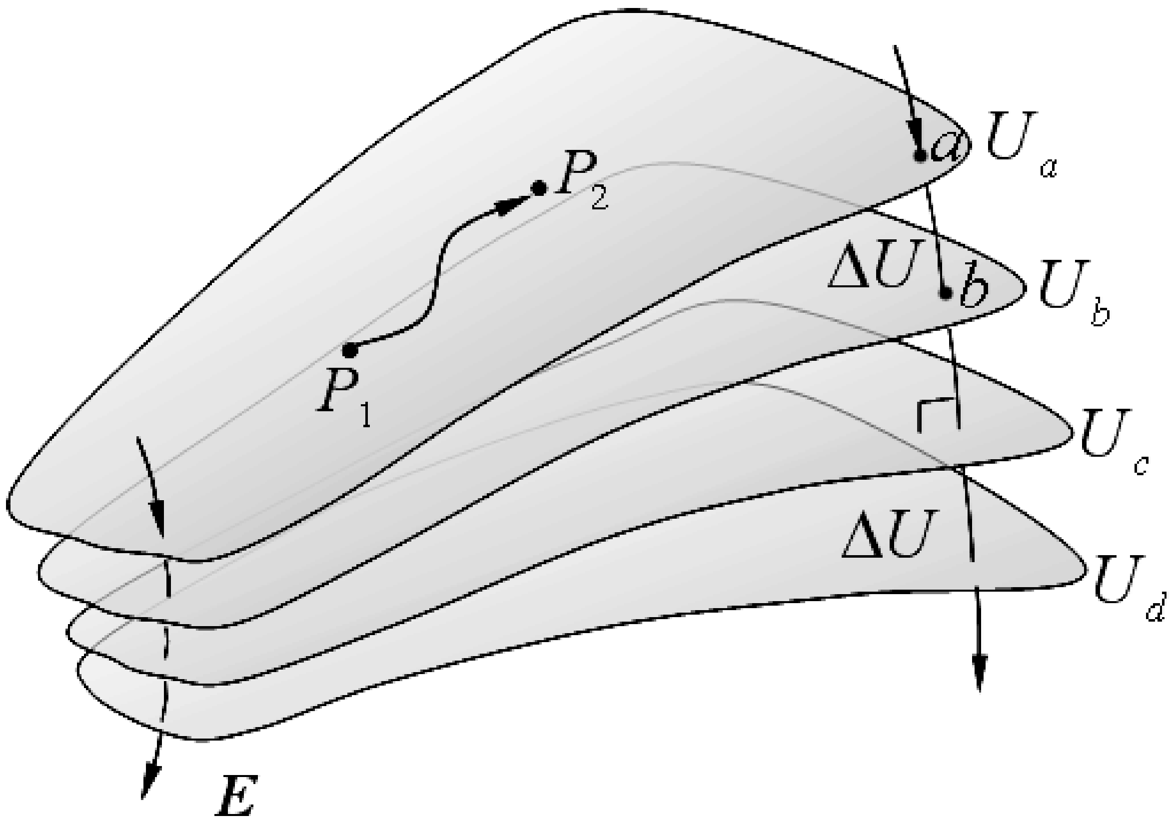
$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$E=\frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

由于电晕线附近的电场强度最大，使它达到空气电离的最大电场强度 E_m 时，就可获得高压电源必备的除尘电压

$$U=E_m R_1\ln\frac{R_2}{R_1}$$



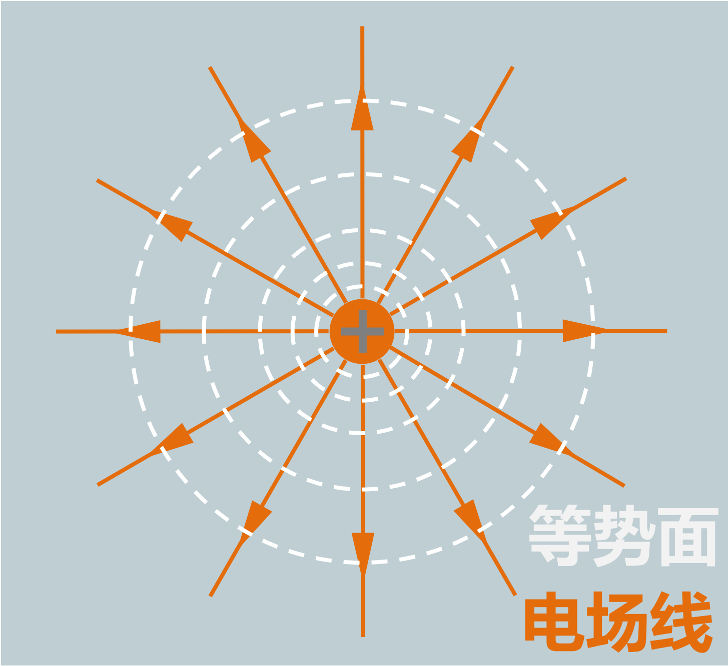
$$\Delta U_{ab} = \Delta U_{bc} = \Delta U_{cd}$$

$$= \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

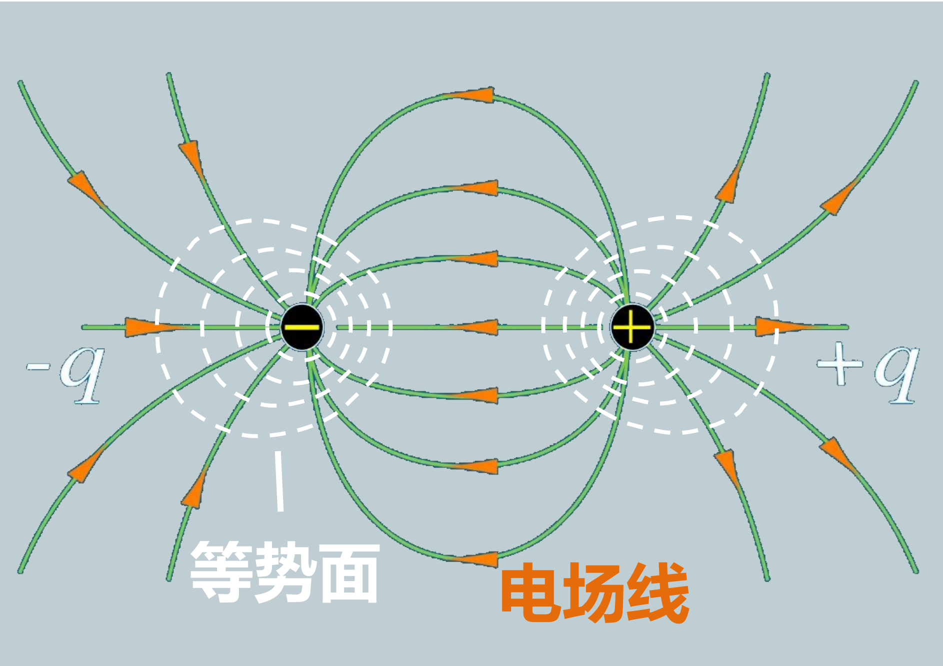
等势面（Equipotential Surface）

电场中电势相等的点连成的面称为等势面。

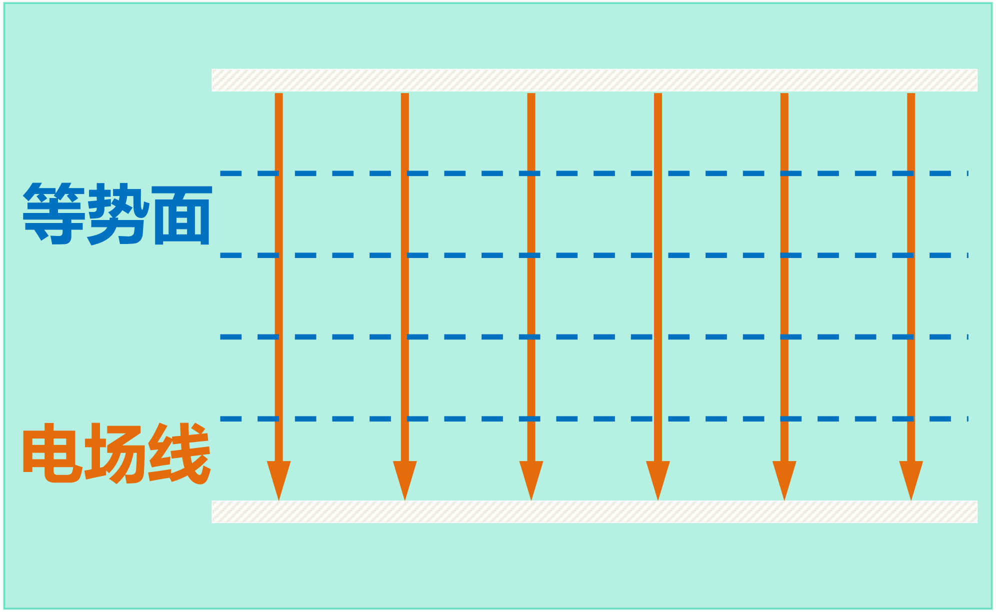
规定：任意两个相邻等势面之间的电势差相等。



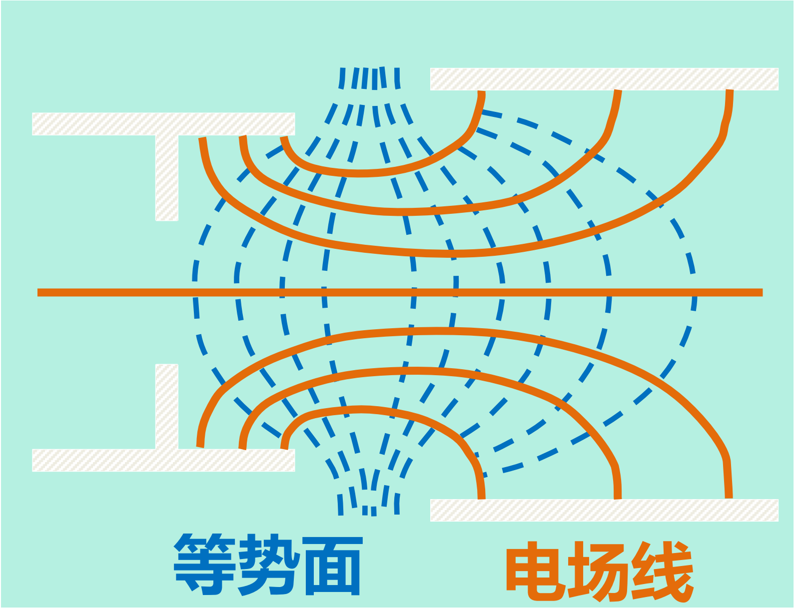
点电荷



电偶极子

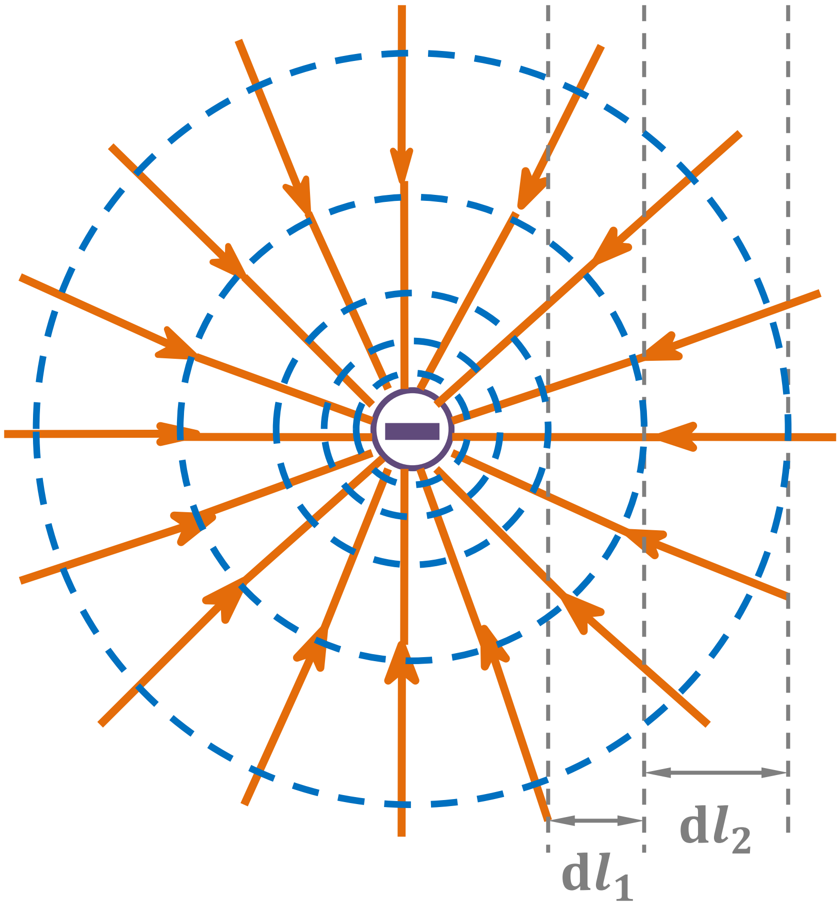


带电平板电容器内部



示波管内部的电场

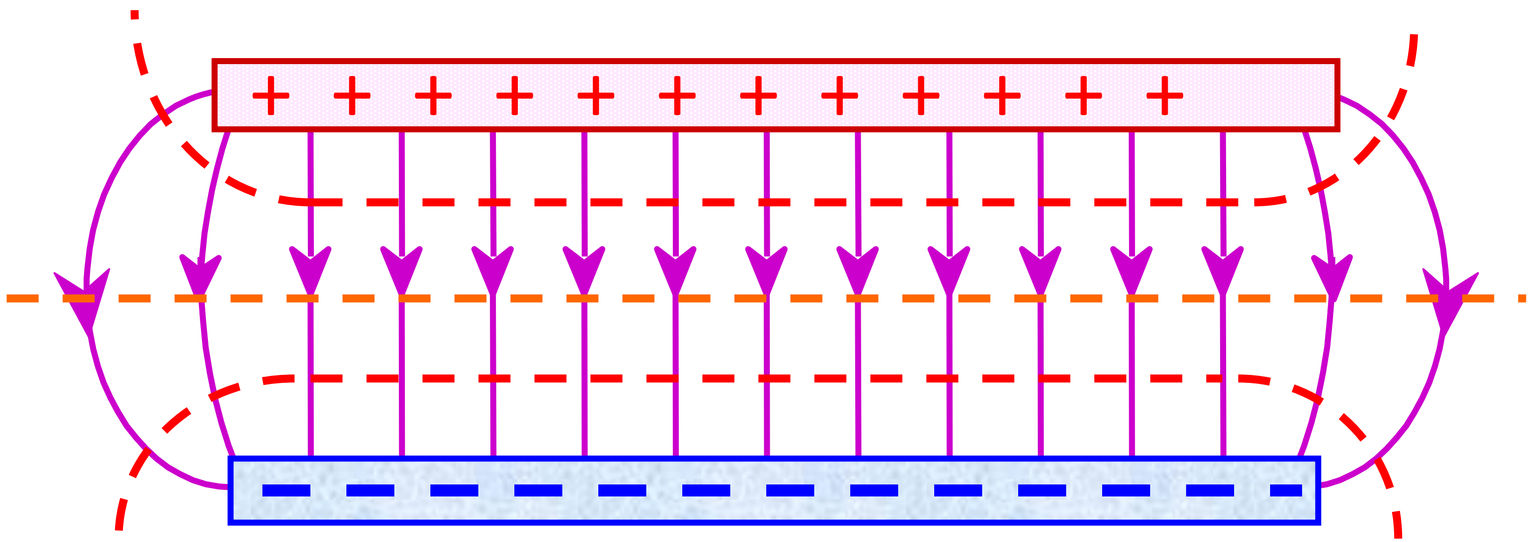
点电荷的等势面



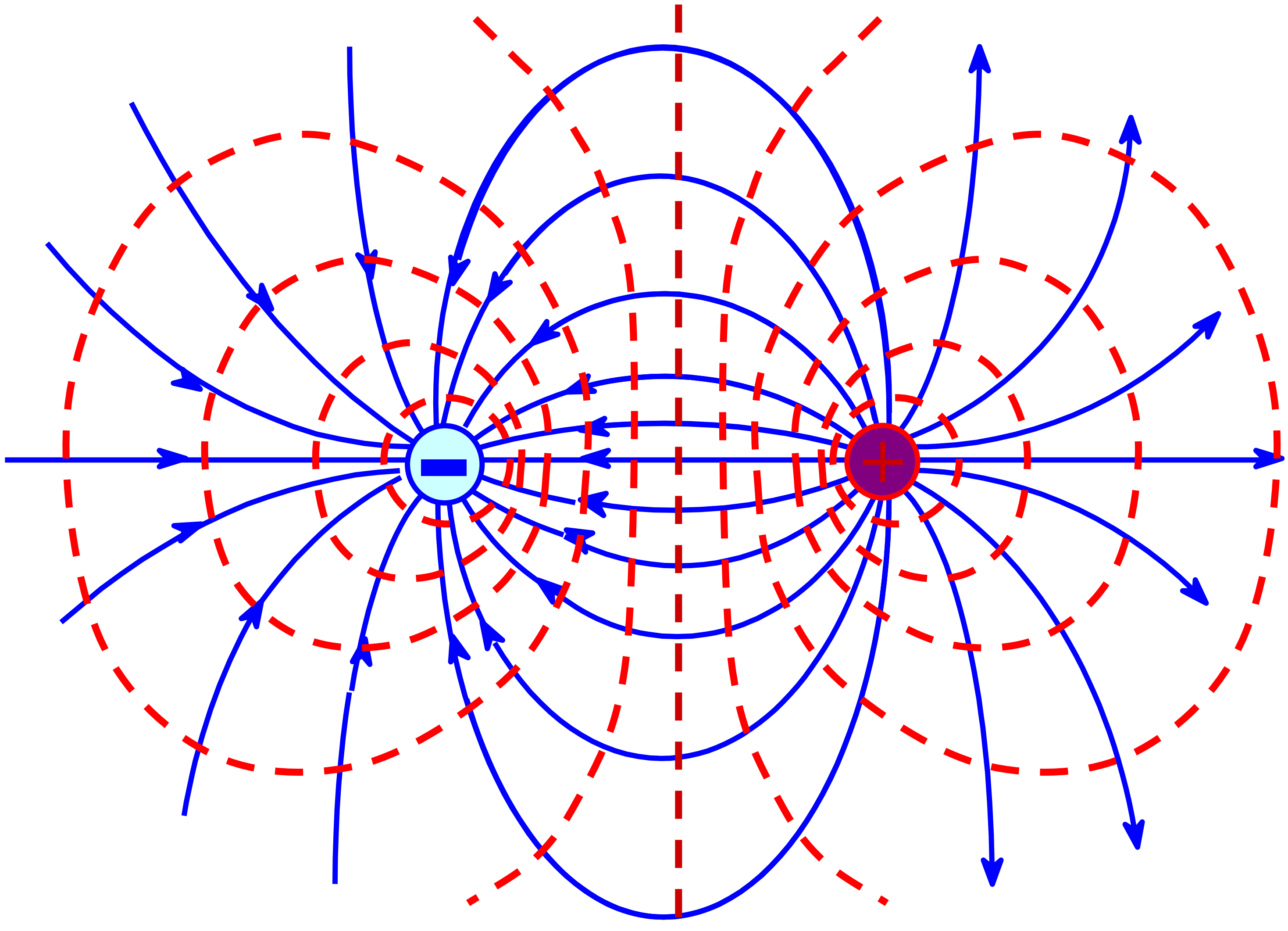
$$dl_2 > dl_1$$

$$E_2 < E_1$$

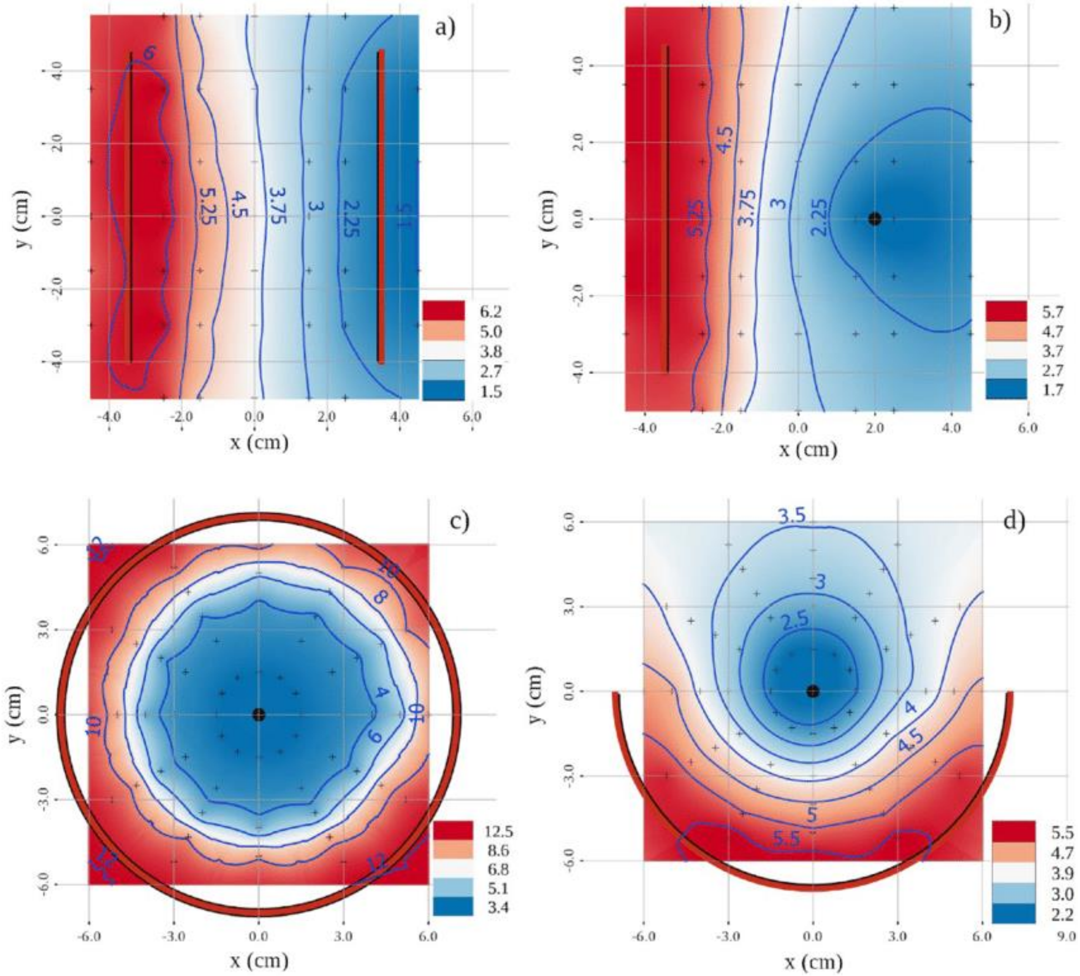
两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面

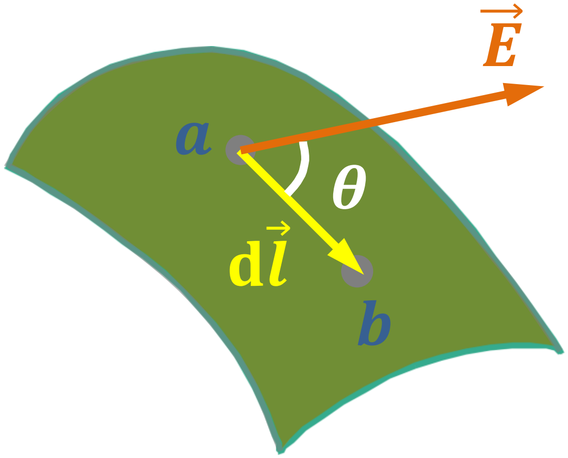


人心脏的等电势线，类似于电偶极子。



Color maps of the **electric potential difference**, for each configuration, obtained from the interpolated experimental data. Brown bars indicate the electrodes location, black dots represent the point charges, laboratory-mapped points are represented by crosses, blue colors indicate regions of low electrical potential and red color regions of high electrical potential.

等势面的性质



- **静电场中电场线与等势面处处正交。**

设一检验电荷q_0沿等势面有一任意元位移$\mathrm{d}\vec{l}$，电场力所做的元功

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}A = q_0(U_a - U_b)$$

$$U_a = U_b \Rightarrow q_0E\cos\theta\,\mathrm{d}l = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- 沿等势面移动电荷时，电场力所作的功为零。

- **规定相邻两等势面间的电势差都相同。**

等势面密集 $\longrightarrow$ $\vec{E}$ 大

等势面稀疏 $\longrightarrow$ $\vec{E}$ 小

- **电场强度的方向总是指向电势降落的方向。**

等势面的法线方向指向电势增高的方向。

□ 电场强度和电势的积分关系

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由保守力与其相关势能的关系

$$\vec{F} = -\nabla W$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla \frac{W}{q_0} = -\nabla U$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

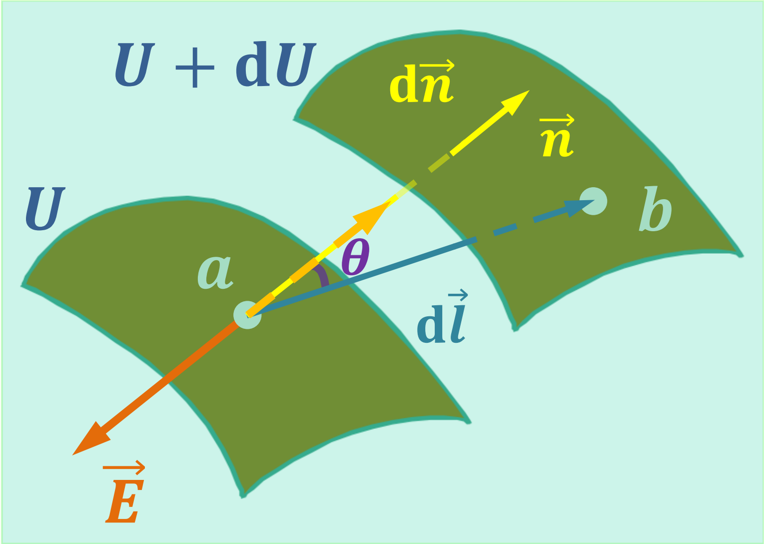
□ 电场强度和电势的微分关系

$$\vec{E} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

电场中某一点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向单位长度上电势变化率的负值。

电势与电场强度的微分关系

取两相邻的等势面



把点电荷q_0从a移到b，电场力作功为

$$\begin{cases} \mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cos\theta\,\mathrm{d}l \\ \qquad\qquad\qquad = q_0 E\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}A = q_0[U-(U+\mathrm{d}U)] = -q_0\mathrm{d}U \end{cases}$$

$$E\cos\theta\,\mathrm{d}l = E\mathrm{d}n = -\mathrm{d}U \Rightarrow E = -\frac{\mathrm{d}U}{dn}$$

◆ **任意一场点处电场强度的大小等于沿过该点等势面法线方向上电势的变化率，负号表示电场强度的方向指向电势减小的方向。**

另一种理解：

$$E\cos\theta\,\mathrm{d}l = E\mathrm{d}n = -\mathrm{d}U$$

$$E_l\mathrm{d}l = -\mathrm{d}U \Rightarrow E_l = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$$

电场强度在l方向的投影等于电势沿该方向变化率的负值

$$\mathrm{d}l \geq \mathrm{d}n \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} \leq \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$

电势沿等势面法线方向的变化率最大

在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla U$$

电场中某点的电场强度等于该点电势梯度的负值

已知 $U=6x-6x^2y-7z^2$
求(2，3，0) 点的电场强度。

解:

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-(6-12xy)=66$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2=24$$

$$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=14z=0$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=66\vec{i}+24\vec{j}$$

静电场环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零。反映了静电场是保守力场，是有势场。

电势、电势能、电势差

电势能： $$W_a = q_0 \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电　势： $$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势差： $$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

典型带电体的电势分布

◆ 点电荷q电场中的电势分布

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

◆ 均匀带电球面场中电势分布

$$U_{内} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 恒量$$

$$U_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

◆ 均匀带电圆环轴线上的电势分布

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

□ 电场强度与电势的关系

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ U$$

给出又一种求$\vec{E}$的方法：

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

1. 静电场中某点电势值的正负取决于产生该电场的电荷的正负。

2. 已知某点的电场E就可以确定该点的电势U。

3. 已知某点的电势U就可以确定该点的电场E。

4. 电场E不变的空间，电势U也一定不变。

5. 电场E值相等的曲面上，电势U值不一定相等。

6. 电势U值相等的曲面上，电场E值不一定相等。

7. 电场力的功等于电势能增量的负值。

8. 电场强度为零的空间点电势一定为零。

9. 负电荷沿电场线运动时，电场力做正功。