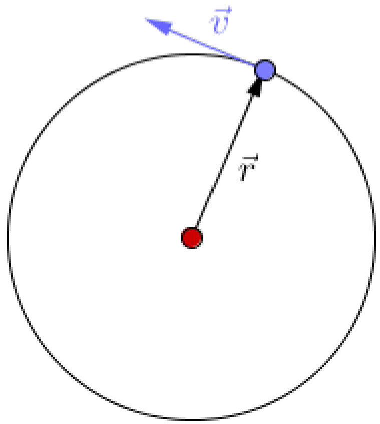
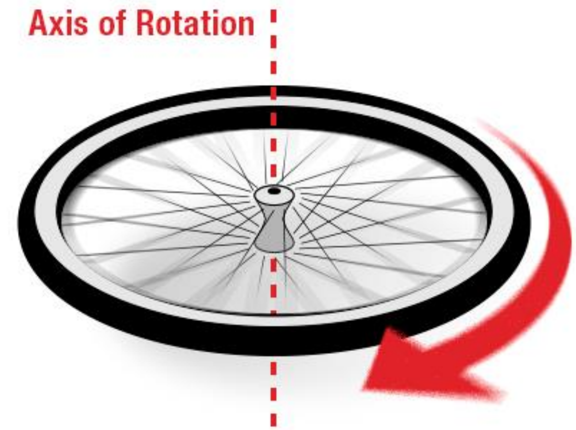
- 质点、质点系和刚体的角动量、转动惯量
- 质点、质点系和刚体角动量的时间变化率 、力矩
- 刚体定轴转动定律
- 质点、质点系和刚体的角冲量、角动量定理
- 角动量守恒定律





力 ⟶ 改变质点的运动状态 ⟶ 质点获得加速度

? ⟶ 改变刚体的转动状态 ⟶ 刚体获得角加速度

将一绕通过质心的固定轴转动的圆盘视为一个质点系，系统总动量为多少?

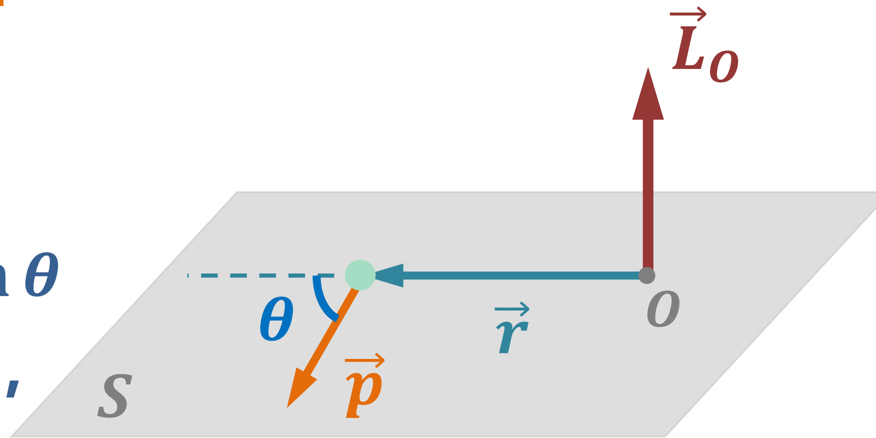
$$\vec{p}_{总} = M\vec{v}_C = 0$$

由于该系统质心速度为零，所以系统总**动量**为零，但系统显然有机械运动。

采用角动量来量度转动物体的机械运动量。

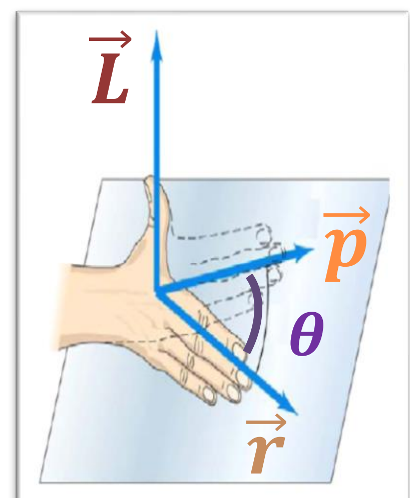
惯性系中具有动量$\vec{p}$的质点对某一固定点的角动量为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



惯性参照系

- ◆大小：$L = rp\sin\theta = rmv\sin\theta$
- ◆方向：垂直于$\vec{r}$和$\vec{p}$组成的平面，服从右手螺旋法则。
- ◆单位：$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$



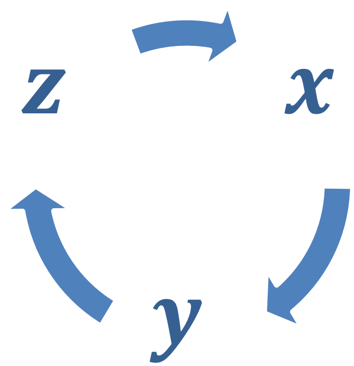
在直角坐标系中 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

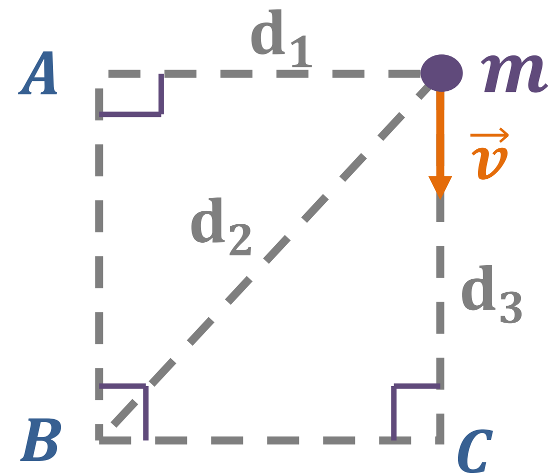
$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

$$\vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$



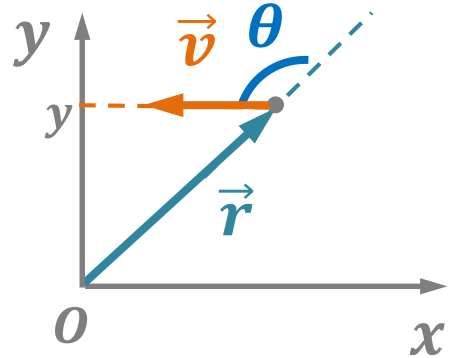
一质点m，速度为v，如图所示，A、B、C分别为三个参考点，此时m相对三个点的距离分别为d_1、d_2、d_3。求此时刻质点对三个参考点的角动量。



$L_A = d_1 mv$ $\otimes$

$L_B = d_1 mv$ $\otimes$

$L_C = 0$



一质点质量为1200kg，沿 $y = 20\text{m}$的直线以15m/s的速率在xOy平面内运动，方向沿x轴负向。求它对坐标系原点O的角动量。

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
&= m(x\vec{i} + y\vec{j}) \times (v\vec{i}) \\
&= -myv\vec{k} \\
&= -1200 \times 20 \times (-15)\vec{k} \\
&= 3.6 \times 10^5\, \vec{k}\,(\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= rp\sin\theta = rmv\sin\theta \\
&= mvy \\
&= 3.6 \times 10^5 (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})
\end{aligned}
$$

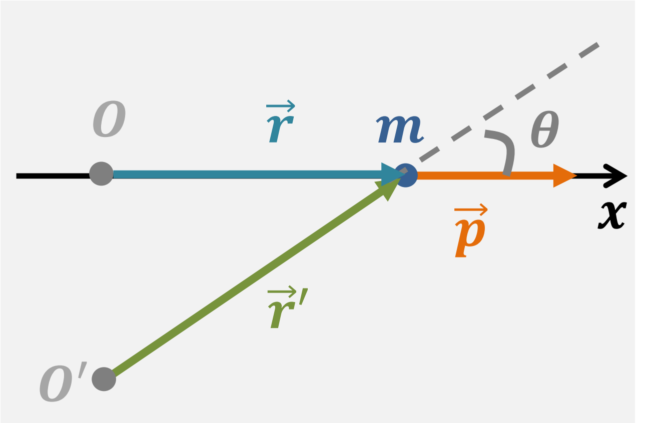
$$\vec{L} = 3.6 \times 10^5\, \vec{k}\,(\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$$

◻ 质点作直线运动时也可以具有角动量。

判断直线运动质点有无角动量的方法：

观察质点的$\vec{v}$ 是否与$\vec{r}$平行，

若 $\vec{v}//\vec{r}$，则$|\vec{L}| = 0$，否则有角动量。



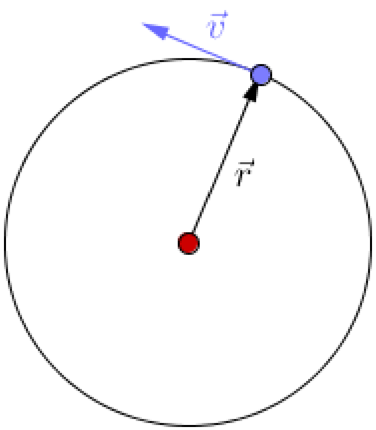
以O为参考点，$|\vec{L}| = 0$

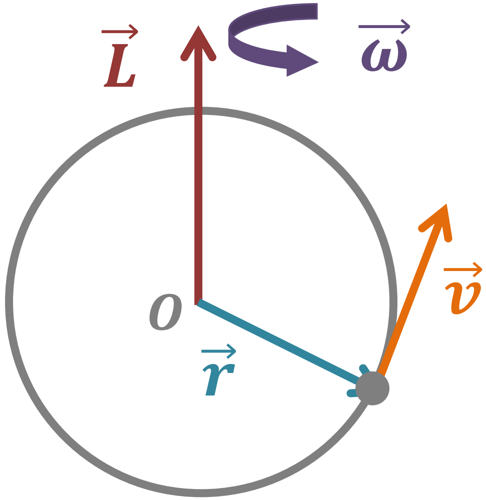
以O'为参考点，$|\vec{L}| \neq 0$

◻ 质点作曲线运动时具有角动量。

若 $\vec{v} \perp \vec{r}$，则$|\vec{L}| = mvr$

特例：质点作圆周运动





质点绕圆心O点做圆周运动，角速度 $\vec{\omega}$

质点m对O的角动量：$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

- 大小：$L_O = rp = mrv = mr^2\omega = J\omega$
- 方向：沿$\vec{\omega}$
- 即 $\vec{L}_O = mr^2\vec{\omega} = J\vec{\omega}$

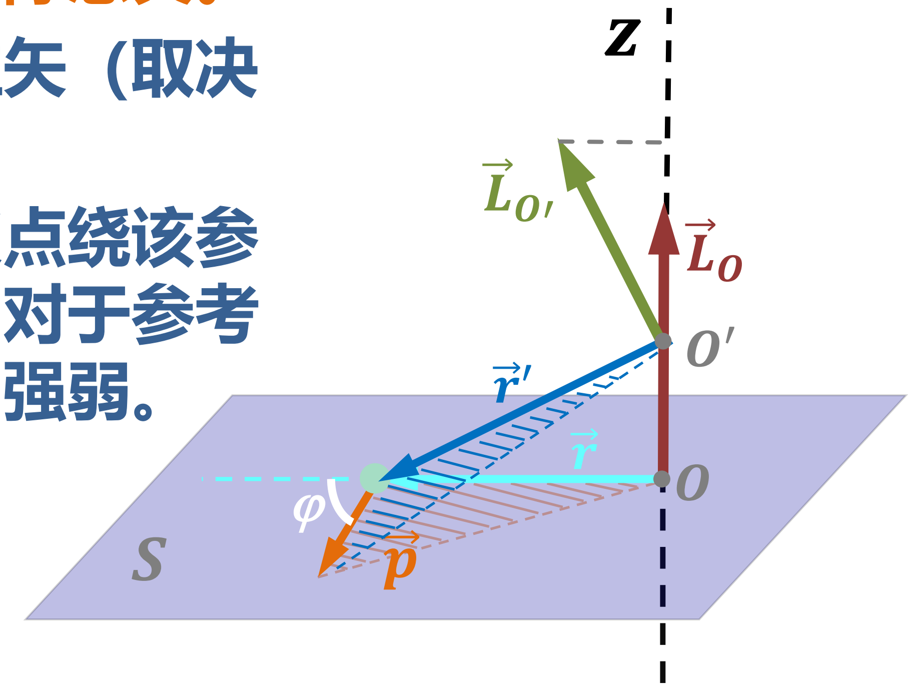
◆ 必须指明参考点，角动量才有实际意义。

◆ 质点的角动量与质点的动量及位矢（取决于固定点的选择）有关。

◆ 质点对某参考点的角动量反映质点绕该参考点旋转运动的强弱。即质点相对于参考点位置矢量的方向（位）变化的强弱。

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L_z = |\vec{L}_O|$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{p} \qquad L_z = ?$$

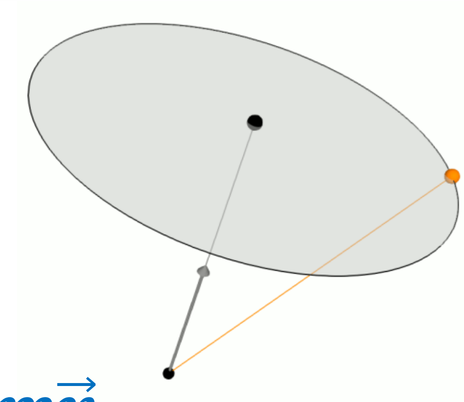


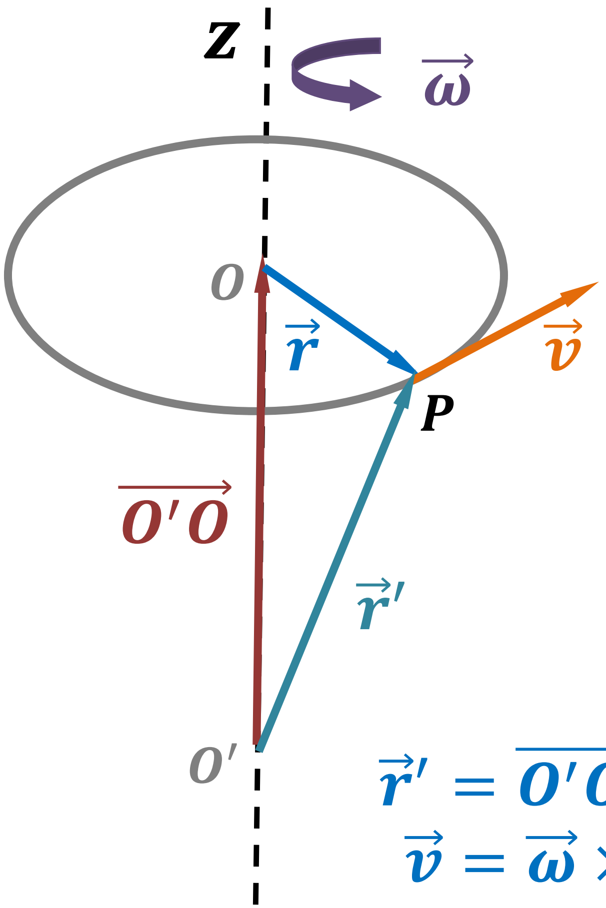
□ 当质点作平面运动时，质点对运动平面内某参考点O的角动量也称为质点对过O垂直于运动平面的轴的角动量。$L_z = |\vec{L}_O|$

□ 质点对某点的角动量，在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的角动量。L_x、L_y、L_z

- 质点相对于z轴上的各个点的角动量不同
- 质点相对于z轴上的各点的角动量沿z轴的分量相同

一质量为m的质点在xOy平面内以角速度ω沿圆心位于O点、半径为r的圆周运动，方向如图所示。求该质点相对于O点正下方O'点的角动量在z轴上的分量L_z。





$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

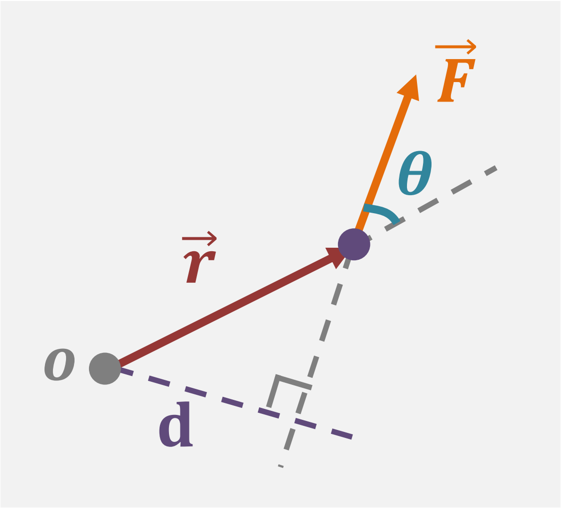
$$\begin{aligned}
\vec{L}_{O'} &= \vec{r}' \times \vec{p} = \vec{r}' \times m\vec{v} \\
&= m\left(\overrightarrow{O'O} + \vec{r}\right) \times \vec{v} \\
&= m\,\vec{r} \times \vec{v} + m\,\overrightarrow{O'O} \times \vec{v} \\
&= mrv\vec{k} - m\left|\overrightarrow{O'O}\right| v\hat{r} \\
&= mr^2\omega\vec{k} - m\left|\overrightarrow{O'O}\right|\omega\vec{r}
\end{aligned}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\Longrightarrow L_z = mr^2\omega$$

- 质点相对于z轴上的各个点的**角动量（$\vec{L}$）不同**
- 质点相对于z轴上的各点的**角动量沿z轴的分量（L_z）相同**

力对固定点的力矩



定义： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

◆大小： $M = Fr\sin\theta = F\mathrm{d}$

力矩的大小等于力乘以力臂。

d ---力臂

$\vec{r}$---是力的作用点的位置矢量。

◆方向：垂直于 $\vec{r}$和$\vec{F}$组成的平面，服从右手螺旋定则。

◆单位： $\mathrm{N\cdot m}$

在直角坐标系中

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_z \end{cases}$$

特例：

□ 若 $\vec{r} \perp \vec{F}$，则$|\vec{M}| = Fr$

□ 若 $\vec{r} // \vec{F}$，则$|\vec{M}| = 0$

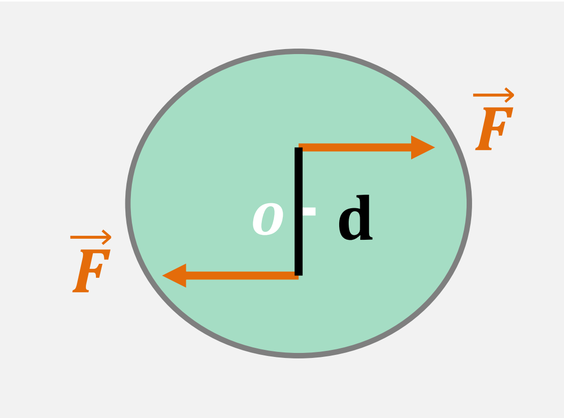
力作用于参考点或其作用线通过参考点时，力对参考点的力矩为零。

力对固定点的力矩

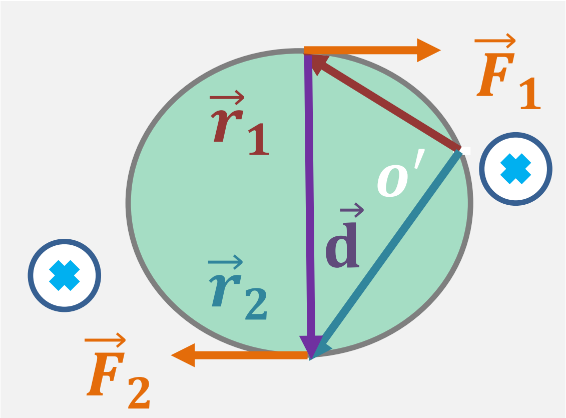
力偶：大小相等、方向相反、彼此平行的一对力。

力偶对于O点的合力矩

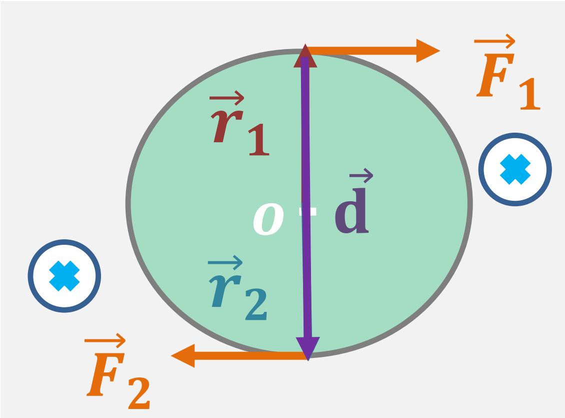
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{\mathrm{d}} \times \vec{F}_2$$
$$\Longrightarrow \left|\vec{M}\right| = F\mathrm{d}$$



$$\sum \vec{F} = 0, \quad \sum \vec{M}_O \neq 0$$

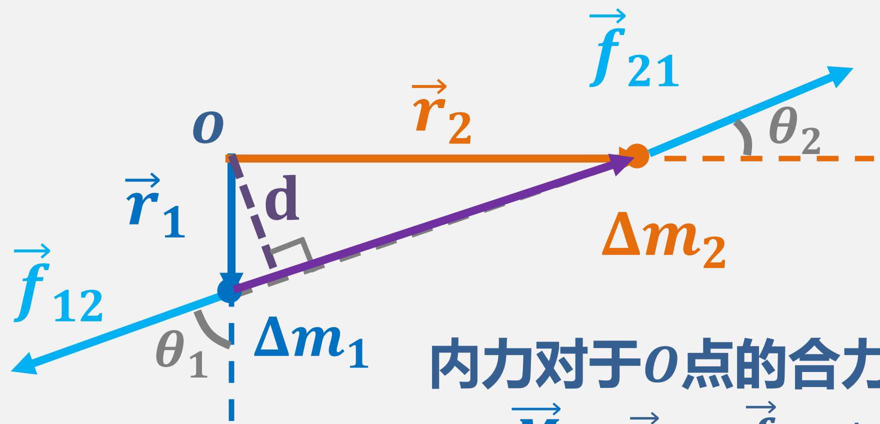


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



◆一对力偶的力矩对于空间所有的点均相同。

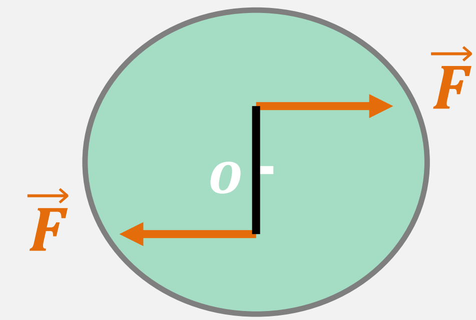
力对固定点的力矩



内力对于o点的合力矩

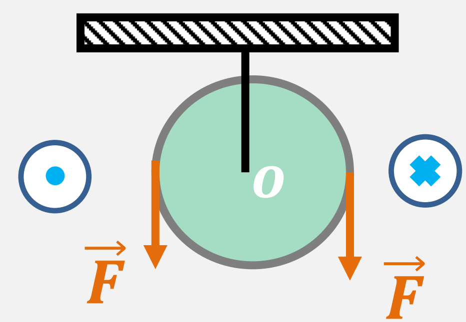
$$\vec{M}=\vec{r}_1\times\vec{f}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{f}_{21}$$
$$=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times\vec{f}_{21}=0$$

$$\sum_i \vec{M}_{i内}\equiv 0$$



$$\sum\vec{F}=0,\quad \sum\vec{M}_O\neq 0$$

- ◆ 质点系所有内力矩之和为零。
- ◆ 合力为零时，其合力矩不一定为零。
- ◆ 合力矩为零时，合力不一定为零。



$$\sum\vec{F}\neq 0,\quad \sum\vec{M}_O=0$$

□ 力矩求和只能对同一参考点（或轴）进行。

$$\vec{M}_o=\vec{M}_{1o}+\vec{M}_{2o}+\cdots \qquad 矢量和$$
$$M_z=M_{1z}+M_{2z}+\cdots \qquad 代数和$$

力对固定轴的力矩

力对O点的力矩：

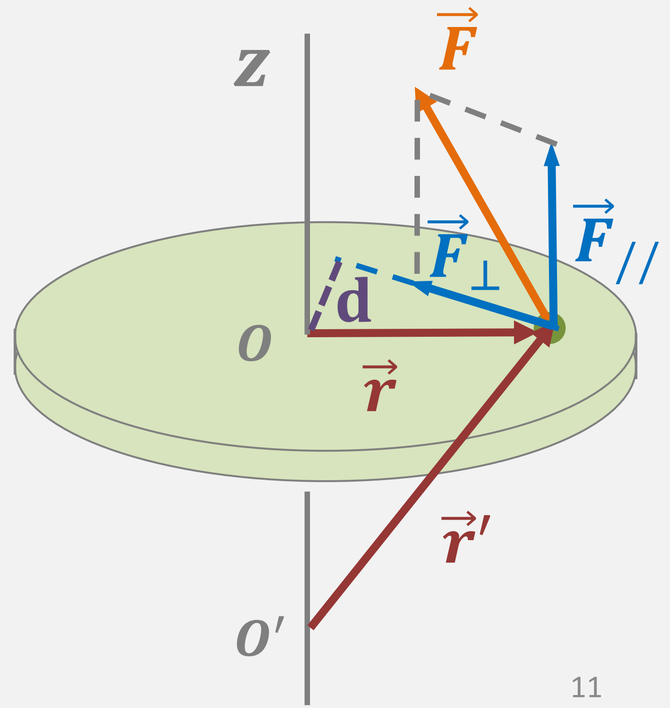
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{r}\times(\vec{F}_{//}+\vec{F}_{\perp})=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}+\vec{r}\times\vec{F}_{//}$$

方向垂直于轴，其效果是企图改变轴的方位，在定轴问题中，与轴承约束力矩平衡。

$$\vec{M}_z=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

- 方向平行于轴，其效果是改变绕轴的转动状态，称为**力对转轴 z 的力矩**。
- 力对O点的力矩在z轴方向的分量。
- **大小**：$M_z=\pm|\vec{M}_z|=\pm|\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}|$
  $=\pm F_{\perp}r\sin\theta=\pm F_{\perp}\mathrm{d}$
- **方向**：$\vec{M}_z$沿规定的正方向，取“+”；反之取“−”。



质量为m，长为L的细杆在水平粗糙桌面上绕过其一端的竖直轴旋转，杆与桌面间的动摩擦系数为μ，求摩擦力矩。分下列两种情况求解。(1) 杆的质量均匀分布；(2) 杆的密度与离轴距离成正比。

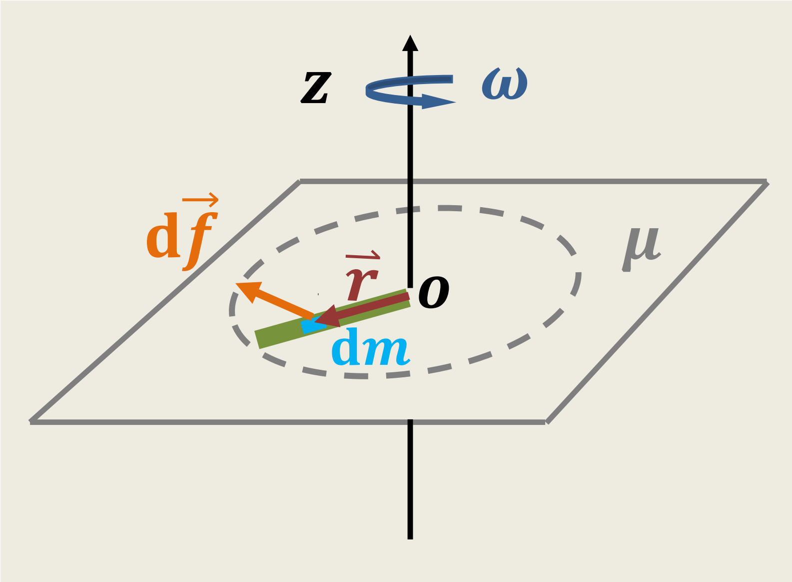
（1）质量元 $\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\mathrm{d}r$

摩擦力 $\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N = \mu \mathrm{d}mg$

摩擦力矩 $\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L r\mu\frac{m}{L}g\,\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{1}{2}\mu mgL$$



（2）设杆的线密度 $\lambda = kr$

质量元 $\mathrm{d}m = \lambda\mathrm{d}r = kr\mathrm{d}r$

由 $m = \int \mathrm{d}m$

$$= \int_0^L kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kL^2$$

得 $k = \frac{2m}{L^2}$

摩擦力 $\mathrm{d}f = \mu\mathrm{d}N = \mu\mathrm{d}mg = \frac{2\mu mg}{L^2}r\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f = -\frac{2\mu mg}{L^2}r^2\mathrm{d}r$$

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^L \frac{2\mu mg}{L^2}r^2\,\mathrm{d}r$$

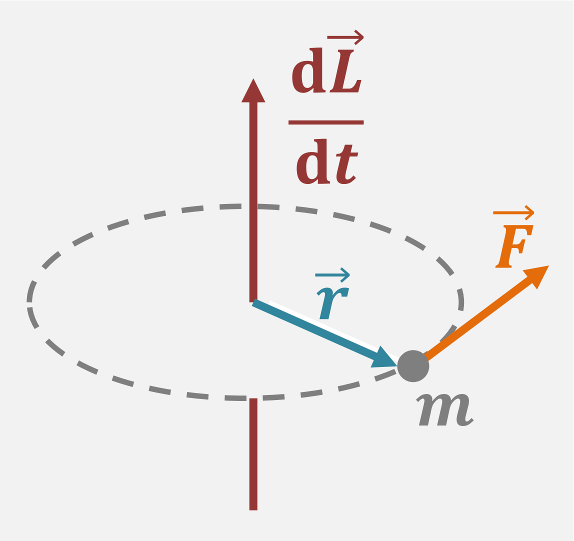
$$= -\frac{2}{3}\mu mgL$$

角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点受到的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率---质点角动量定理

- 力矩和角动量均对惯性系中同一个固定点

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$ 质点角动量定理的微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\,t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$ 质点角动量定理的积分形式

◆质点所受合力矩的冲量矩等于质点的角动量的增量

◆冲量矩是质点角动量变化的原因

◆质点角动量的变化是力矩对时间的积累结果

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$ 常矢量

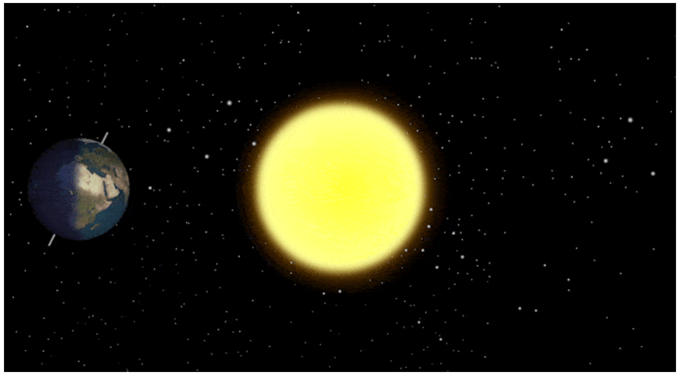
如果对于某一固定点，质点所受的合外力矩为零，则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变---质点角动量守恒定律

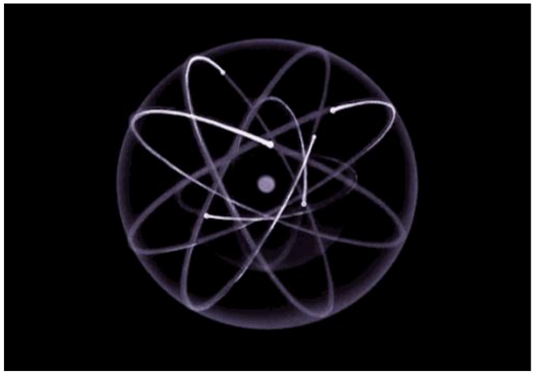
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，且在高速低速范围均适用。

力矩为零的两种可能

- 合外力为零，质点不受外力作用
- 合外力不为零，合外力是有心力



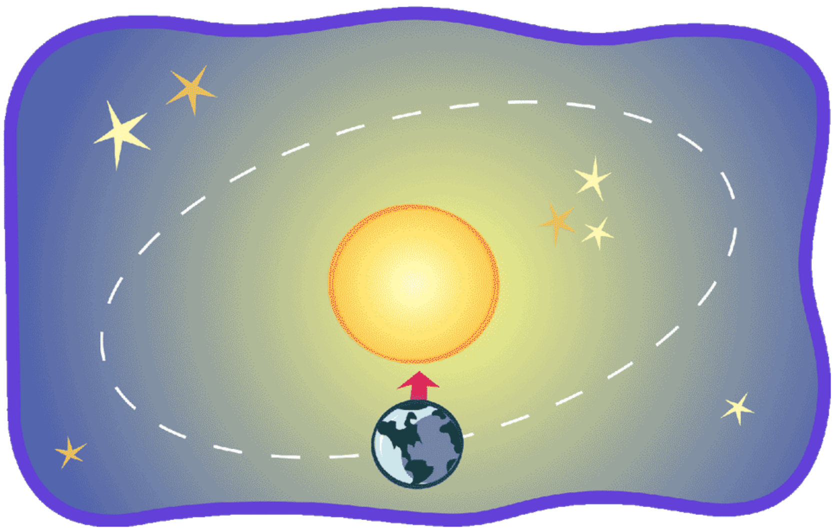
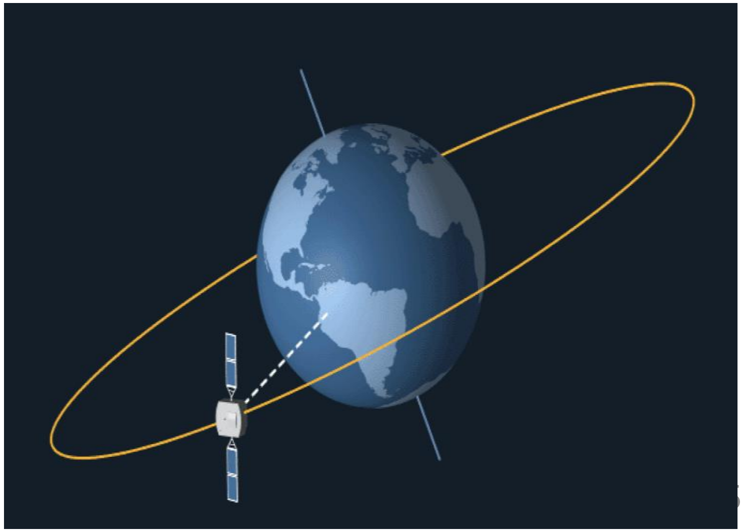


有心力场中运动的质点

有心力：力的作用线始终通过某**定点**（**力心**）的力。

有心力场中的运动：物体在有心力作用下的运动。
有心力对力心的力矩为零，**只受有心力作用的物体对力心的角动量守恒**。

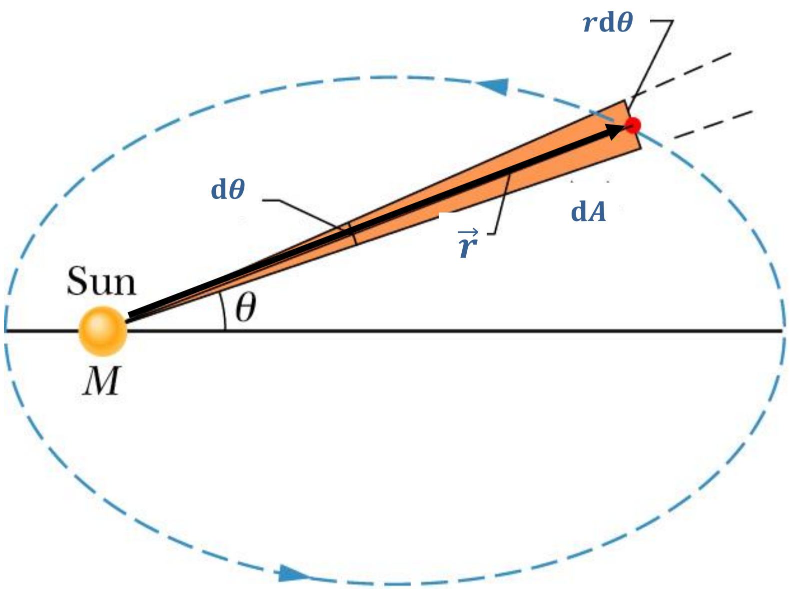
天体运动：行星绕恒星、卫星绕行星…
微观粒子运动：电子绕核运动；原子核中质子、中子的运动一级近似；加速器中粒子与靶核散射…

开普勒第二定律与角动量守恒

行星绕太阳轨道运动中，太阳到行星连线（位矢）在相等时间内在行星轨道平面内扫过的面积相等。

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{dt}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}=\frac{\vec{L}}{2m}$$



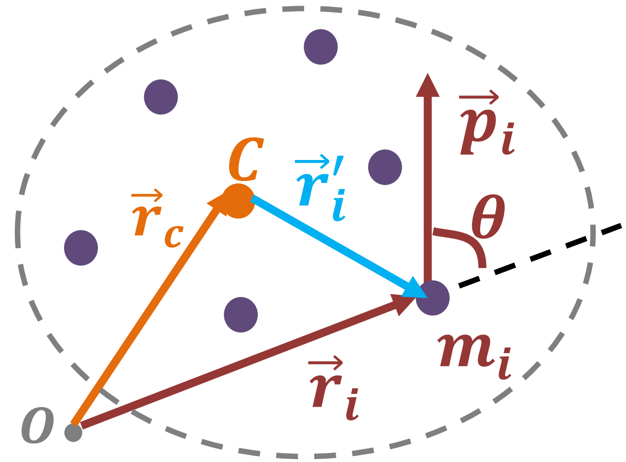
由于 $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=0$

所以 $\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\vec{L}}{2m}=$ 恒量

$$L=mvr\sin\theta$$
$$=m\frac{ds}{dt}r\sin\theta$$
$$=2m\frac{\frac{1}{2}ds\,r\sin\theta}{dt}=2m\frac{dS}{dt}$$

质点系的角动量

系统内所有质点对同一参考点角动量的矢量和



$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{L}=\sum_i(\vec{r}_C+\vec{r}'_i)\times m_i(\vec{v}_C+\vec{v}'_i)$$

$$=\vec{r}_C\times\sum_i m_i\vec{v}_C+\vec{r}_C\times\underbrace{\sum_i m_i\vec{v}'_i}_{=0}+\underbrace{\sum_i m_i\vec{r}'_i}_{=0}\times\vec{v}_C+\sum_i\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}'_i$$
$$\vec{v}_i=\vec{v}_C+\vec{v}'_i$$

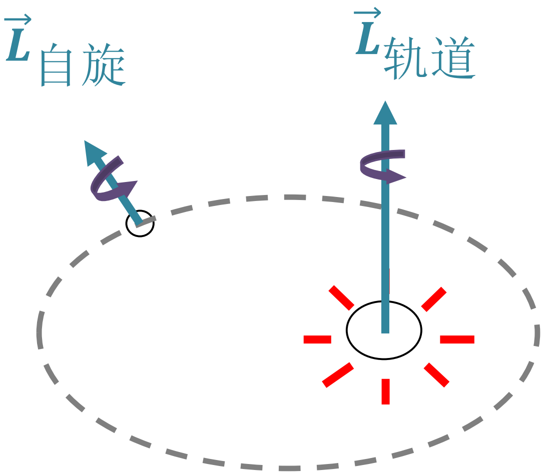
$$m=\sum_i m_i$$
$$\vec{r}_C=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$
$$\vec{v}_C=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{L}=\vec{L}_{轨道}+\vec{L}_{自旋}$$
$$=\vec{r}_C\times m\vec{v}_C+\sum_i\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i$$

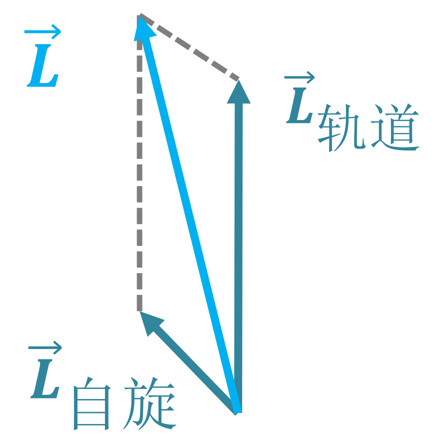
$$\vec{r}'_C=\frac{\sum_i m_i\vec{r}'_i}{m}=0$$
$$\vec{v}'_C=\frac{\sum_i m_i\vec{v}'_i}{m}=0$$

质点系对于惯性系中某点的角动量等于质心对该点的角动量加上质点系对质心的角动量。

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



- 以质心为代表，描述质点系整体绕参考点的旋转运动，称为质点系的**轨道角动量**。表示将质点系全部质量集中于质心处的一个质点上，该质点对参考点O的角动量。
- 各质点相对于质心角动量的矢量和，反映质点系绕质心的旋转运动，与参考点 O 的选择无关，描述系统的内禀性质，为**自旋角动量**。



$$m = \sum_i m_i$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

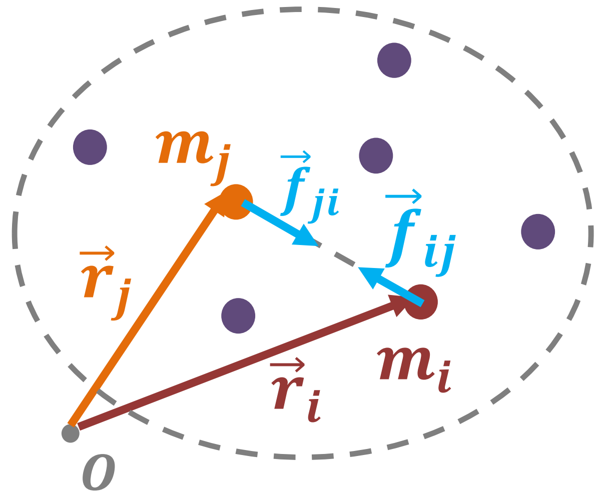
$$\vec{L} = \vec{L}_{轨道} + \vec{L}_{自旋}$$

$$= \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

质点系对于惯性系中某点的角动量等于质心对该点的角动量加上质点系对质心的角动量。

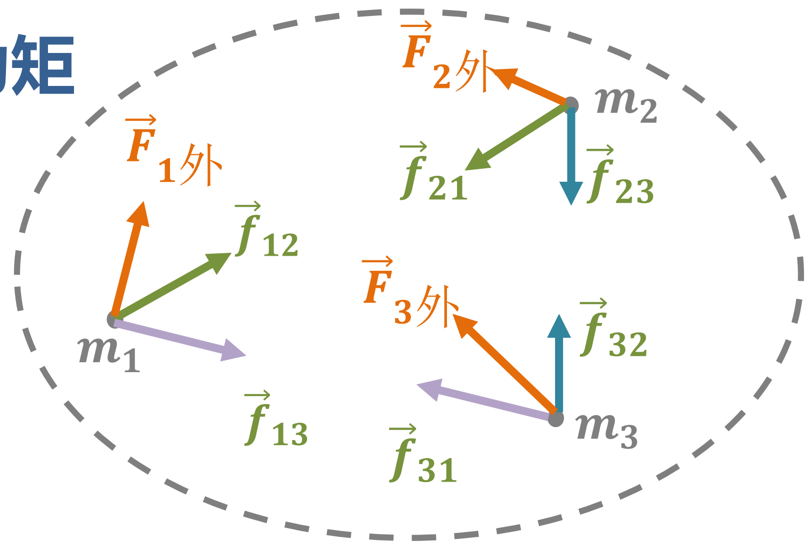
一对内力对于O点的内力矩

$$\vec{M}_{i内} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$
$$= \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \left(-\vec{f}_{ji}\right)$$
$$= \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{f}_{ij}$$
$$= 0$$



质点系中所有内力对于O点的合内力矩

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内}$$
$$= \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij内} \equiv 0$$



在所选定的参考系中，N个质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_N$，角动量分别为$\vec{L}_1, \vec{L}_2, \cdots, \vec{L}_N$的质点组成一个质点系。由质点角动量定理，每个质点所受的合力矩分别为:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_{1外} + \vec{M}_{1内} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_{2外} + \vec{M}_{2内} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_2}{\mathrm{d}t}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\vec{M}_N = \vec{M}_{N外} + \vec{M}_{N内} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t}$$

将以上各式相加，得:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i外} + \vec{r}_i \times \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij内} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内} = \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij内} \equiv 0$$

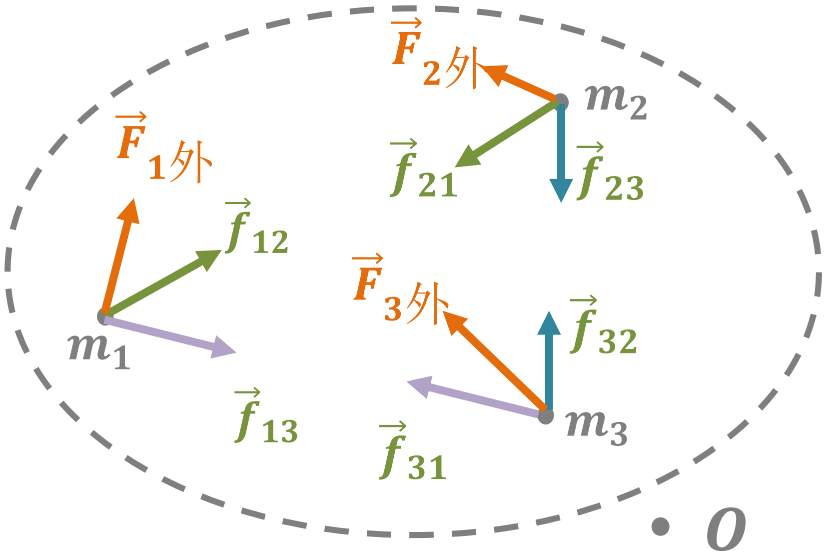
$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{L}_i$$

- $\vec{M}_{外}$ 合外力矩
- $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ 质点系总角动量

$$\vec{M}_{外} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点系受到的合外力矩的矢量和等于该质点系的角动量对时间的变化率。---质点系角动量定理

- 力矩和角动量均对惯性系中同一个固定点



◆ 对质点：

合力矩$\vec{M}_{合}$是质点所受各力力矩的矢量和，也是合力 $\vec{F}_{合}$ 的力矩。

◆ 对质点系：

合外力矩$\vec{M}_{外}$是质点系所受各外力矩的矢量和，而非合力的力矩。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\vec{L} = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

$$\vec{M}_{外} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点系受到的合外力矩的矢量和等于该质点系的角动量对时间的变化率。---质点系角动量定理

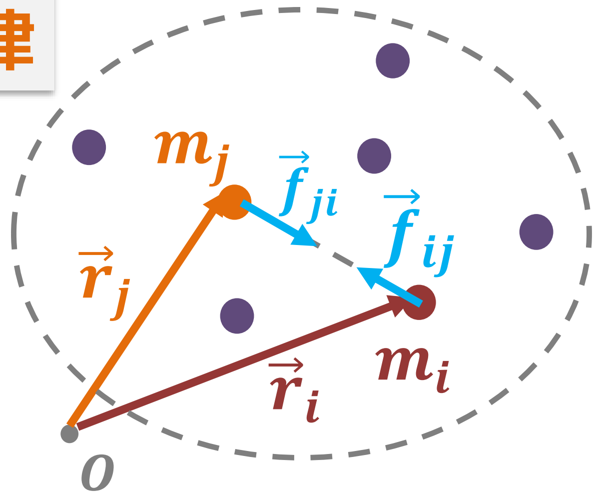
- 力矩和角动量均对惯性系中同一个固定点

若 $\vec{M}_{外} = 0$，则 $\vec{L} =$ 常矢量

质点系所受外力对某参考点的力矩的矢量和为零时，质点系对该参考点的角动量守恒。

---质点角动量守恒定律

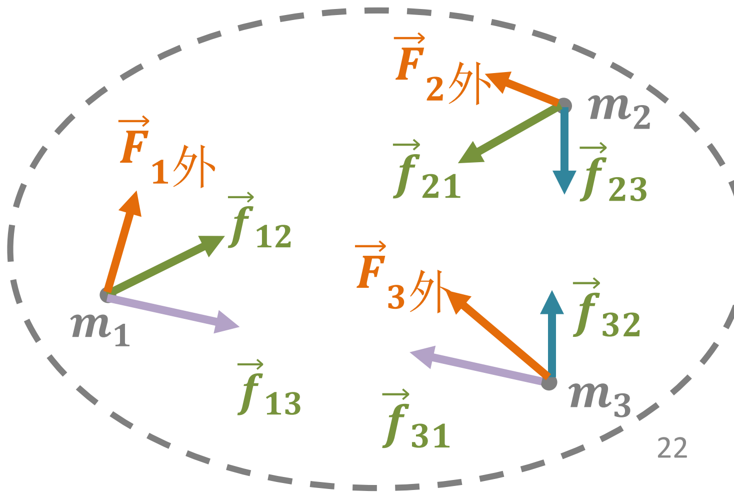
$$\vec{M}_{外} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$



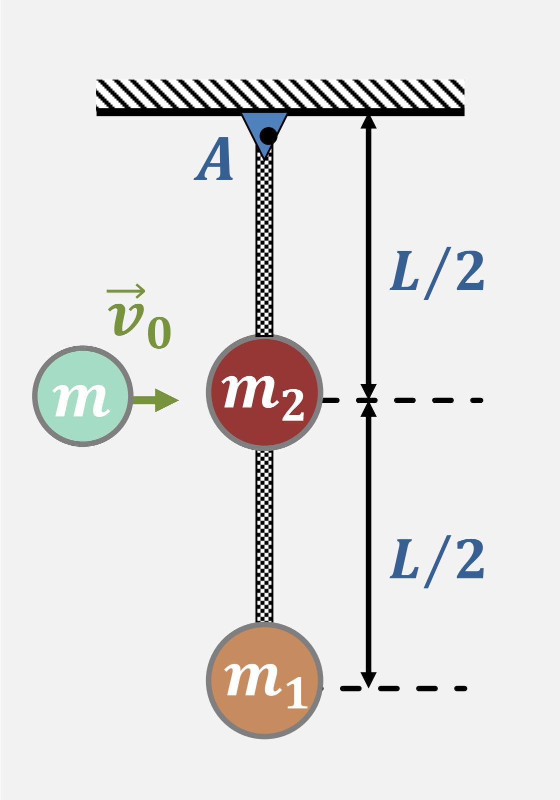
分量式

$$\begin{cases} M_x = 0, & L_x = \text{恒量} \\ M_y = 0, & L_y = \text{恒量} \\ M_z = 0, & L_z = \text{恒量} \end{cases}$$

- 如可夫斯基凳实验
- 跳水运动员、花样滑冰
- 猫从高处落下时，总能四脚着地
- 宇宙中许多星系为盘形旋臂结构
- 太空飞行器如何进行方向调整?



已知：轻杆， $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, 油灰球m，油灰球m以速度$\vec{v}_0$撞击m_2，发生完全非弹性碰撞。求碰撞后m_2的速率v。



解：m和m_2系统动量守恒

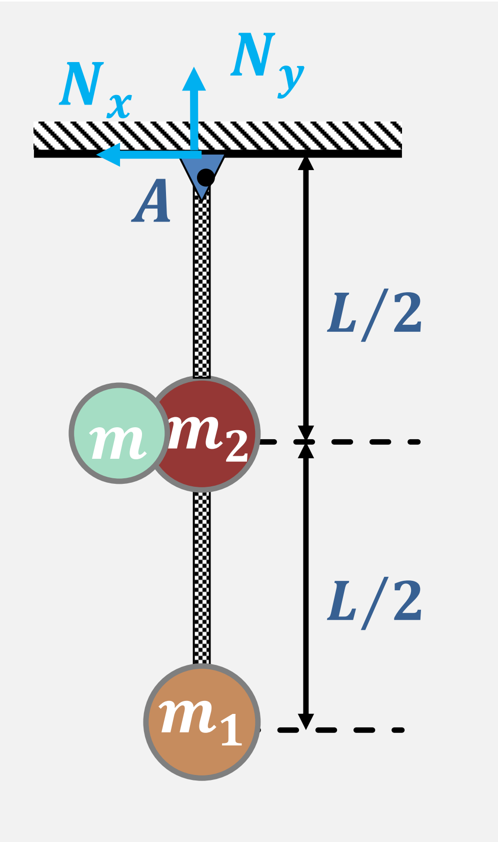
$$mv_0 = (m + m_2)v$$

解：m和$(m + m_2)$系统动量守恒

$$mv_0 = (m + m_1 + m_2)v$$

解：$mv_0 = (m + m_2)v + m_1 \cdot 2v$

因为相撞时轴A对杆的作用力不能忽略不计，故系统动量不守恒。上面三种方法均不对！



正确的解法：因为碰撞前后重力、轴作用力过轴，对轴的力矩为零，故系统角动量守恒。由此列出以下方程：

$$mv_0 \cdot \frac{L}{2} = (m+m_2)v \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot 2v \cdot L$$

由 $\omega_0 \cdot \frac{L}{2} = v_0$， $\omega \cdot \frac{L}{2} = v$

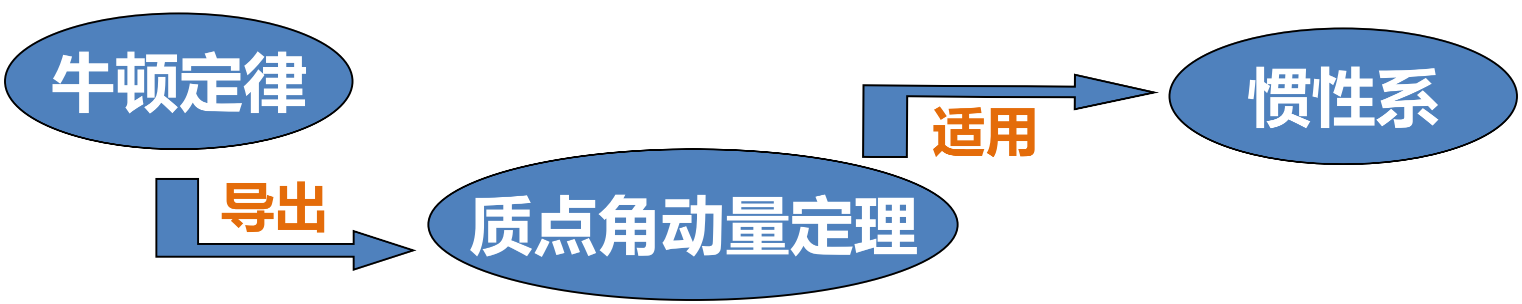
得 $v = \frac{v_0}{9}$

- 质点对惯性系中某参考点的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$
- 质点系对惯性系中某参考点的角动量 $\vec{L}=\vec{L}_{\text{轨道}}+\vec{L}_{\text{自旋}}$
- 力对于某固定点的力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
- 角动量定理 $\vec{M}_{\text{外}}=\vec{r}\times\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

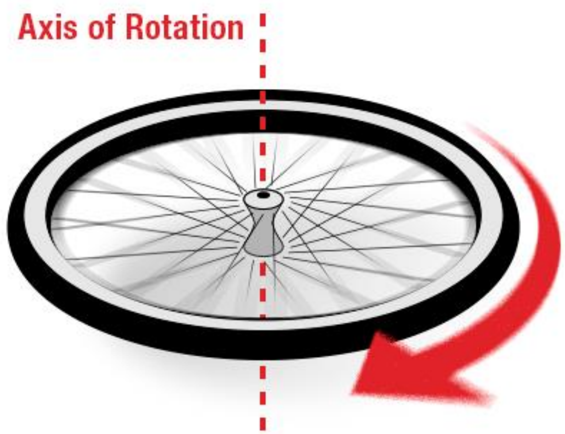
$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}_{\text{外}}\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{L}=\Delta\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

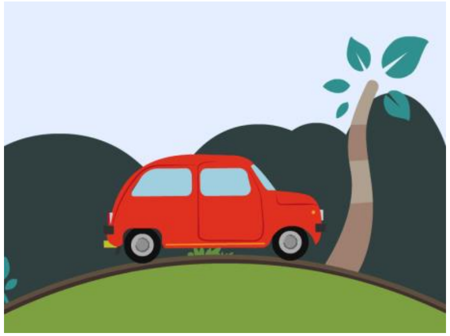
- 角动量守恒定律
  若合外力矩为零，质点或质点系的角动量守恒。

  $\vec{M}_{\text{外}}=0$，则 $\vec{L}=$ 常矢量



刚体： 在外力作用下形状和大小都保持不变的物体。即任意两质点间距离保持不变的质点系。





刚体运动基本形式

刚体平动： 刚体运动时内部任意直线均保持平行。

刚体转动： 刚体转动时内部任意点均作圆周运动。

转动轴线： 刚体转动时各点圆周运动的圆心联线。

定轴转动： 转动轴线的位置、方向均不变的转动。

刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行---刚体平动

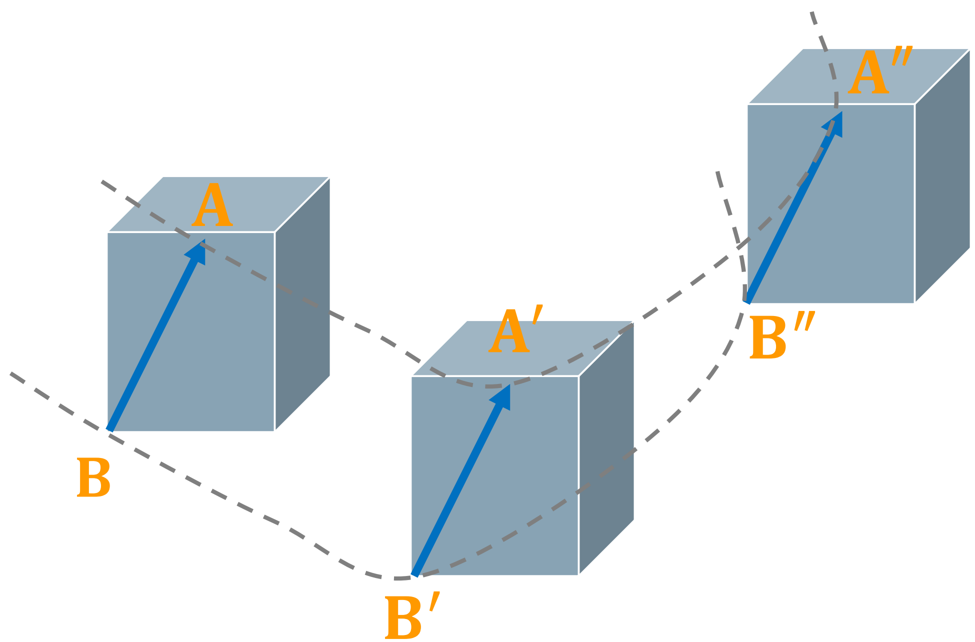
◆ 刚体中各质点的运动情况相同

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{AB}$$

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

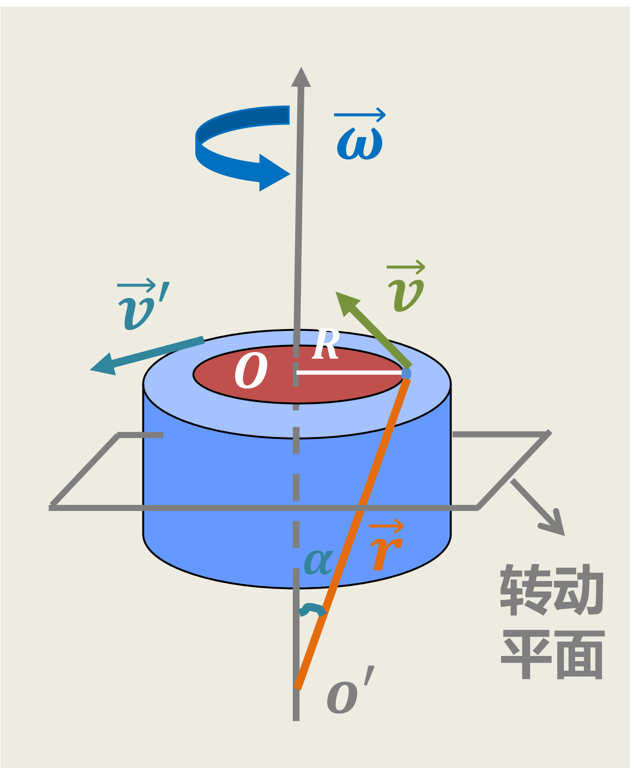
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$



◆ 刚体的平动可归结为质点运动

刚体的运动基本形式

- □ **平动**：刚体运动时，其上任意两点连线的方位始终不变的刚体运动。
  刚体可视为质点，对质点运动的描述方法对平动刚体适用。
- □ **转动**：刚体上各质点都绕同一直线所做的圆周运动，该直线叫刚体的转轴。
- □ 一般运动：平动与转动的叠加。

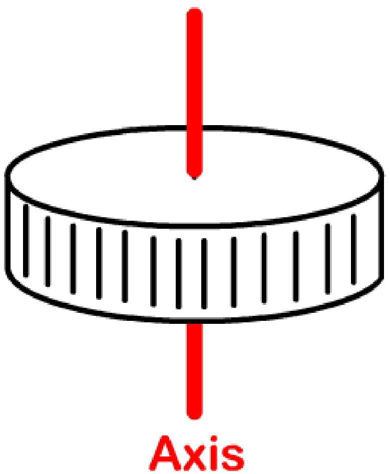


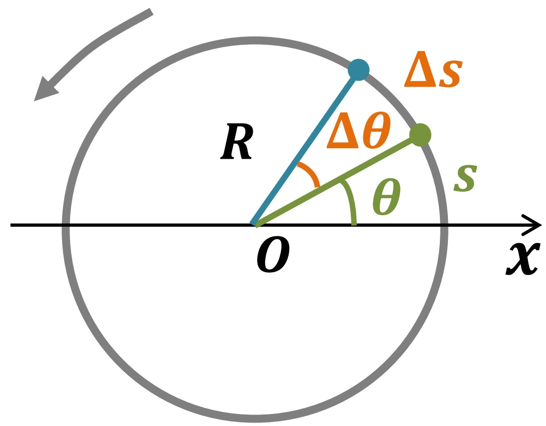
刚体定轴转动：转轴为固定直线的转动。

- □ 可简化为研究刚体在它的某个转动平面内的运动。
- □ 可用角量作整体描述。
- □ 在轴上选定正方向后，各角量均表示为代数量：θ，$\Delta\theta$，ω，β

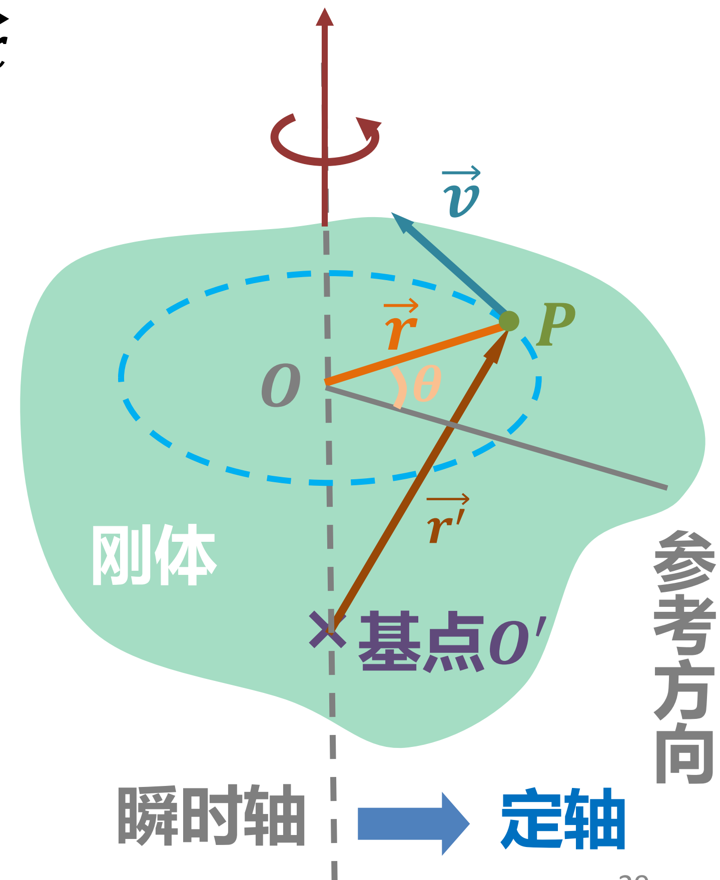
◆ 描述刚体绕定轴转动的角量

Rotation





- ◆ 定轴转动刚体上各点都绕同一轴作圆周运动，且 ω、β都相同
- ◆ 质量元均在各自的转动平面内，作半径不同的圆周运动；
- ◆ 各质量元的角速度$\vec{\omega}$大小相等，且均沿轴向。



角位置 $\theta = \theta(t)$

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

切向加速度 $a_t = \dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\beta$

法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{(r\omega)^2}{R} = r\omega^2$

◆ 质量元Δm_i对z轴的角动量

$$L_{iz} = L_{iO} = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

◆ 定轴转动刚体对z轴的总角动量

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i r_i^2 \omega$$
$$= J\omega$$

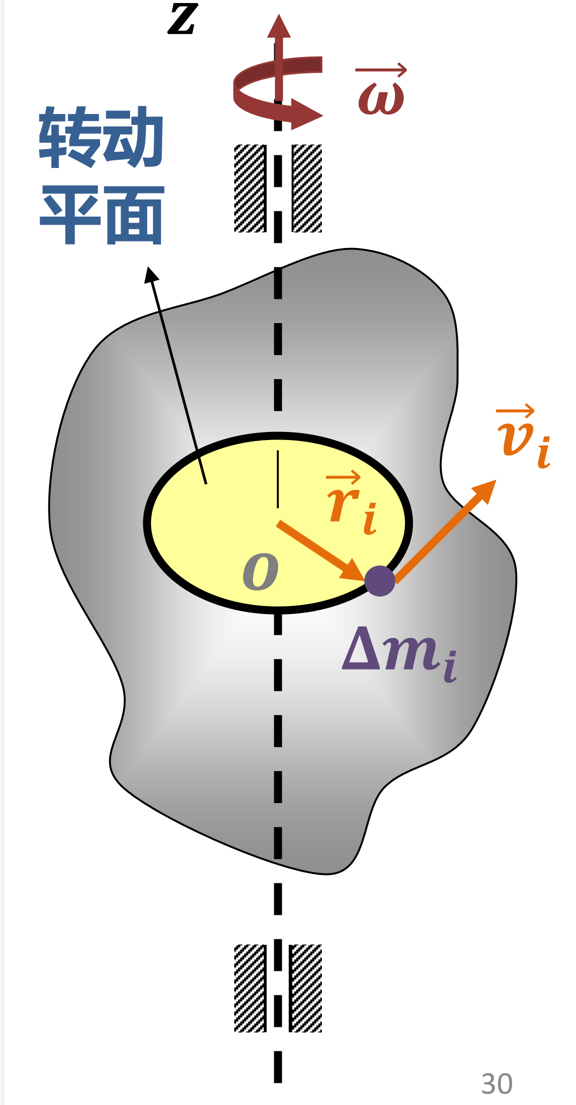
刚体对某定轴的转动惯量J等于其各质点到转轴距离的平方与该质点的质量之积求和。

$J = \sum_i m_i r_i^2$

---刚体对定轴的**转动惯量**

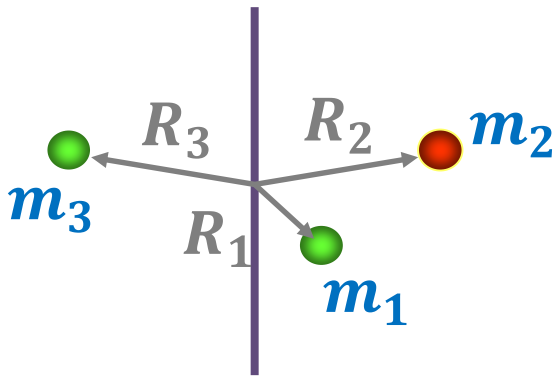
转动惯性的量度，与平动中质量地位相当

单位：$\mathrm{kg \cdot m^2}$

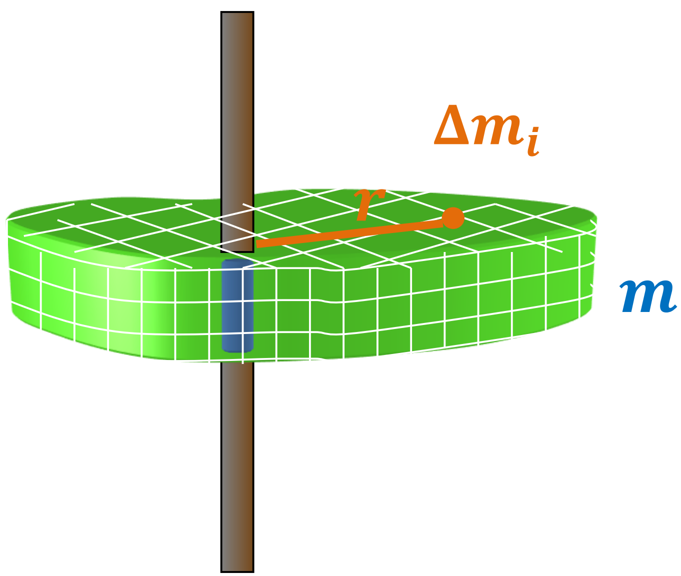


- 质点对一参考点的角动量 $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
- 对质点系 $J = \sum \Delta m_i R_i^2$

  角动量在转轴上的分量 $L_z = J\omega$



$$J_z = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + m_3R_3^2$$



对质量连续的刚体

$$J = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

$$= \int r^2 \mathrm{d}m$$

□ 质量不连续分布刚体

$$J=\sum_i m_i r_i^2$$

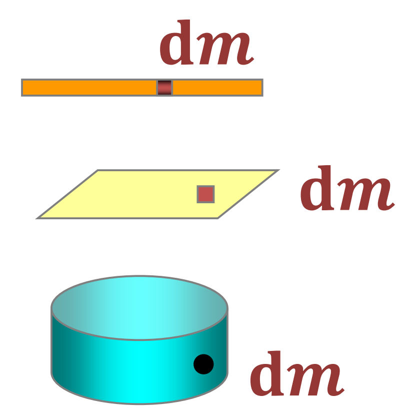
$m_i r_i^2$为刚体中第i个质点相对于转轴的转动惯量，
r_i为质点到转轴的垂直距离。

□ 质量连续分布刚体

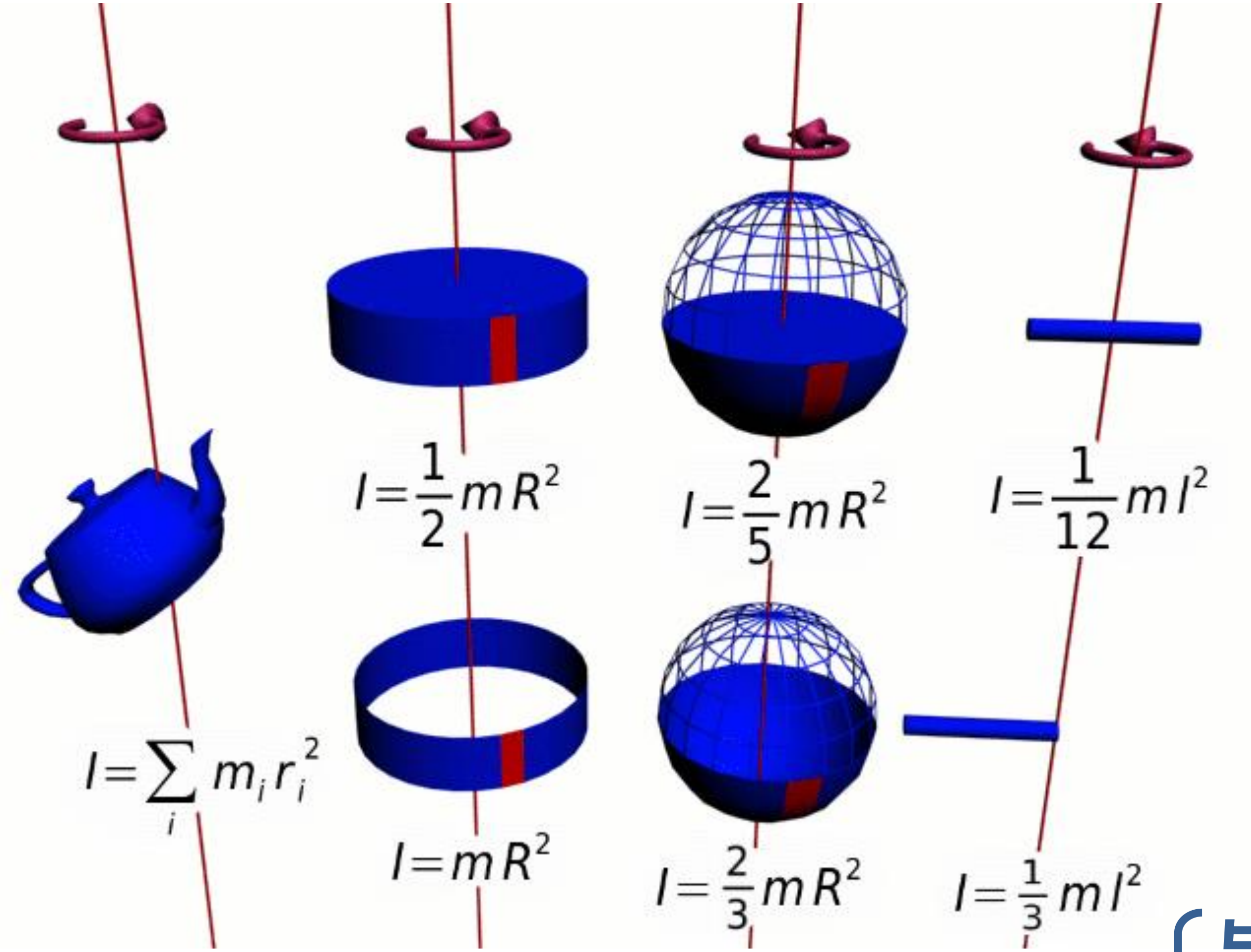
$$J=\int r^2\,\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$是刚体的质量元，r是该质量元到转轴的距离

$$\mathrm{d}m=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{d}l & \text{线密度}\lambda \quad \text{线元}\mathrm{d}l\\ \sigma\,\mathrm{d}S & \text{面密度}\sigma \quad \text{面元}\mathrm{d}S\\ \rho\,\mathrm{d}V & \text{线密度}\rho \quad \text{体元}\mathrm{d}V\end{cases}$$



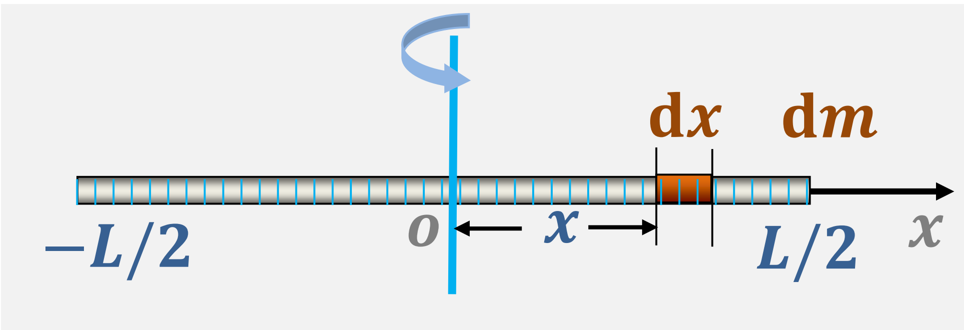
常见刚体转动惯量

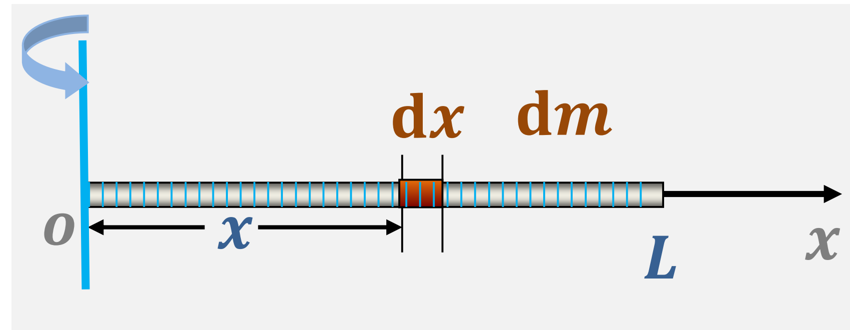


◆ 几何形状不规则的刚体的转动惯量，由实验测定。

刚体对轴的转动惯量 J
- 与刚体总质量有关
- 与刚体质量分布有关
- 与转轴的位置有关

一长为L的细杆，质量m均匀分布，求该杆对垂直于杆，分别过杆的中点、一端端点和距端点$\frac{L}{4}$处的轴的转动惯量。





$$dm = \lambda dx = \frac{m}{L} dx$$

□ 轴过中点（质心）

$$J = \int x^2 dm$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L} dx$$

$$= \frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{1}{12} mL^2$$

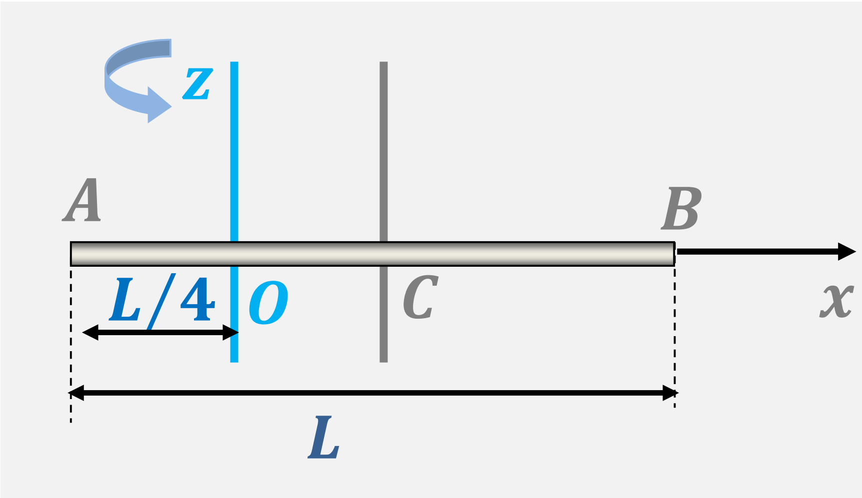
□ 轴过一端端点

$$J = \int x^2 dm$$

$$= \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx$$

$$= \frac{1}{3} mL^2$$

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \frac{m}{L}\mathrm{d}x$$



□ 轴过距端点$\frac{L}{4}$处

解法一： $J_z = \int x^2 \, \mathrm{d}m$

$$= \int_{-L/4}^{3L/4} \frac{m}{L} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{7}{48} mL^2$$

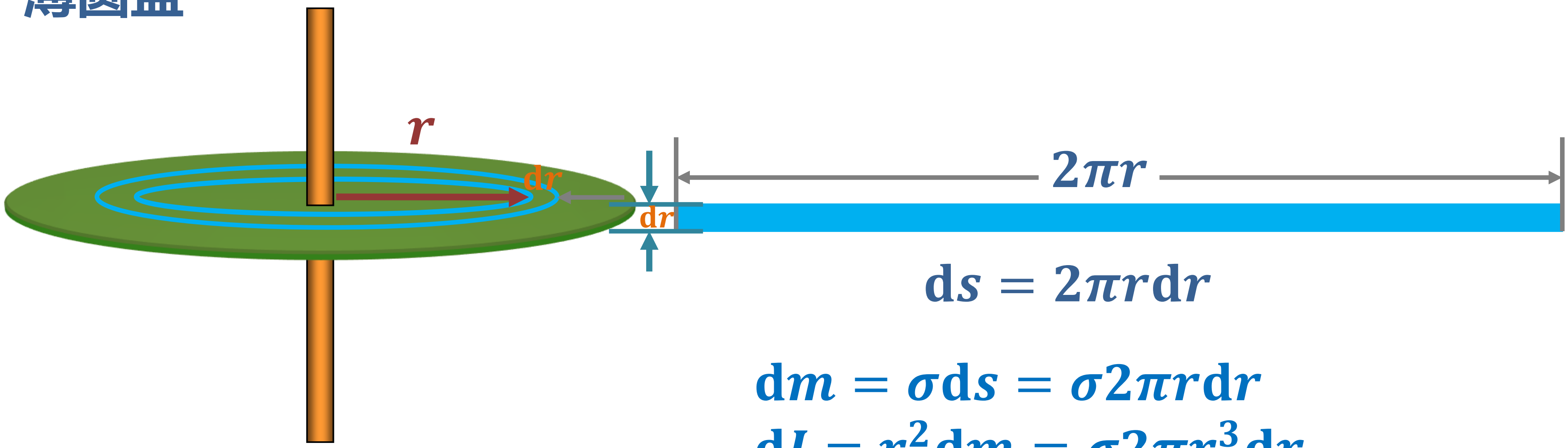
解法二： $J_z = J_{OA} + J_{OB}$

$$= \frac{1}{3}\frac{m}{4}\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{3m}{4}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} mL^2$$

解法三： $J_z = J_C + m\left(\frac{L}{4}\right)^2$

$$= \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} mL^2$$

薄圆盘



$$\mathrm{d}s = 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = \sigma 2\pi r^3 \mathrm{d}r$$

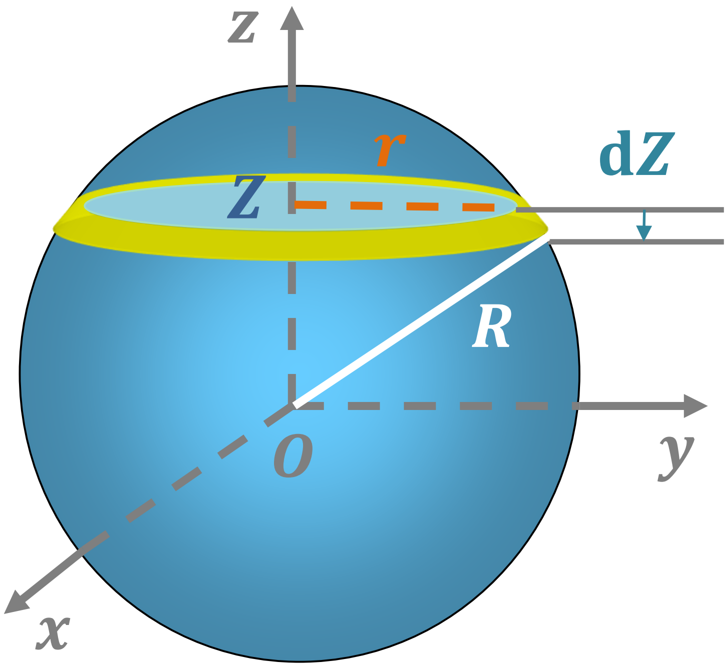
$$J_C = \int \mathrm{d}J$$

$$= \int_0^R \sigma 2\pi r^3 \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2$$

求一质量为m的均匀实心球对其一条直径为轴的转动惯量。



解：一球绕Z轴旋转，离球心Z高处切一厚为$\mathrm{d}Z$的薄圆盘。

其半径为 $r=\sqrt{R^2-Z^2}$

其体积 $\mathrm{d}V=\pi r^2\mathrm{d}Z=\pi\left(R^2-Z^2\right)\mathrm{d}Z$

其质量 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho\pi\left(R^2-Z^2\right)\mathrm{d}Z$

其转动惯量

$$\mathrm{d}J=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}m=\frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2-Z^2\right)^2\mathrm{d}Z$$

$$J=\int\mathrm{d}J$$

$$=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\rho\pi(R^2-Z^2)^2\mathrm{d}Z$$

$$=\frac{8}{15}\rho\pi R^5=\frac{2}{5}mR^2$$

$$m=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

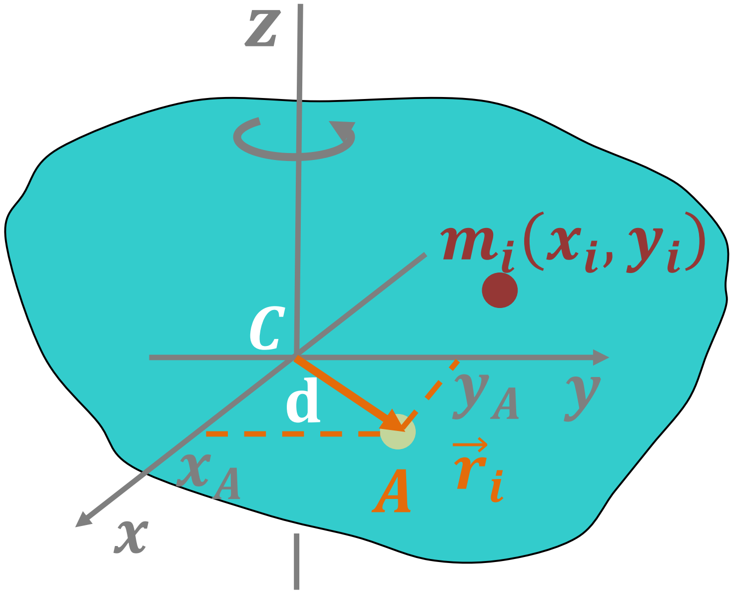
◆ **平行轴定理（转轴不穿过质心）**

$$J_z = J_C + md^2$$

J_z 刚体绕任意轴的转动惯量

J_C 刚体绕通过质心的轴的转动惯量

d 两轴间垂直距离



建立坐标系，原点置于质心处。轴垂直屏幕。对过 A 点且平行于 z 轴的转轴，刚体的转动惯量为

$$J_z = \sum_i m_i\left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2\right]$$

$$= \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2x_A \sum_i m_i x_i - 2y_A \sum_i m_i y_i + \sum_i m_i\left(x_A^2 + y_A^2\right)$$

$$= \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 0 - 0 + \sum_i m_i\left(x_A^2 + y_A^2\right)$$

$$= J_C + md^2$$

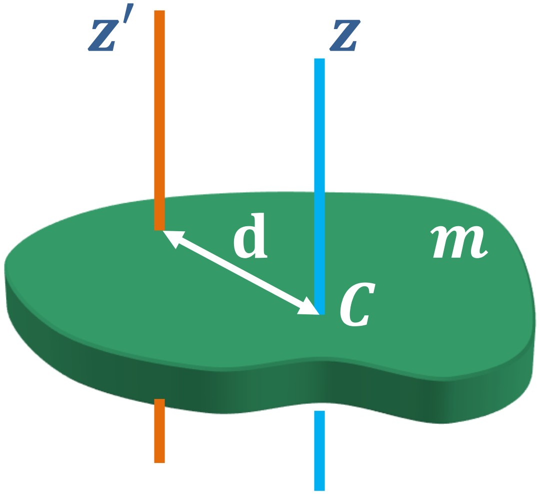
◆ **平行轴定理**（转轴不穿过质心）

$$J_z = J_C + md^2$$

J_z 刚体绕任意轴的转动惯量

J_C 刚体绕通过质心的轴的转动惯量

d 两轴间垂直距离

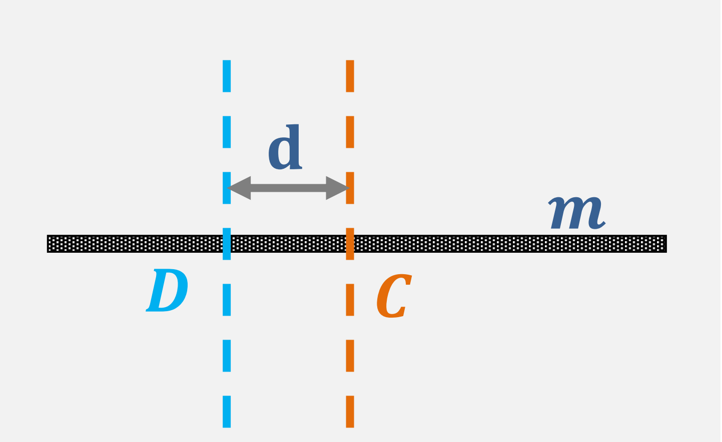


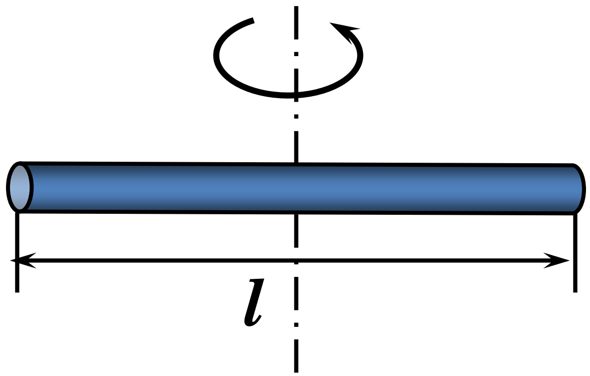
当刚体转轴不穿过质心（同步转动）时，由

$$E_k = \frac{1}{2}md^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}(md^2 + \sum_i m_i r_i^2)\omega^2$$

很容易证明 $J_D = J_C + md^2$

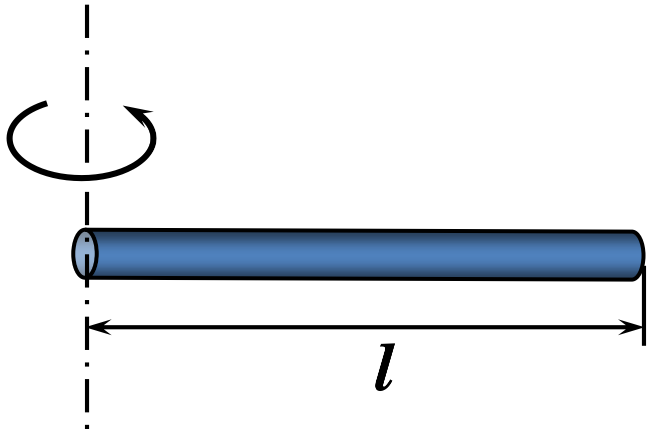
穿过质心轴的转动惯量





细棒转轴通过中心
与棒垂直

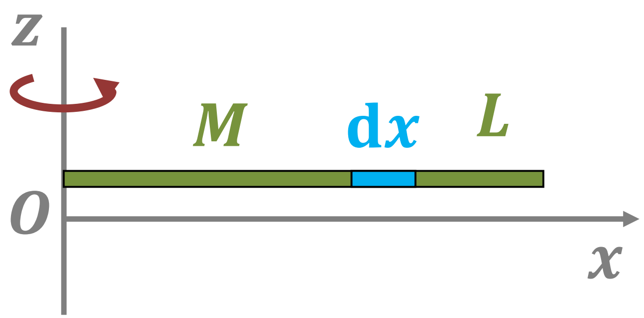
$$J=\frac{ml^2}{12}$$

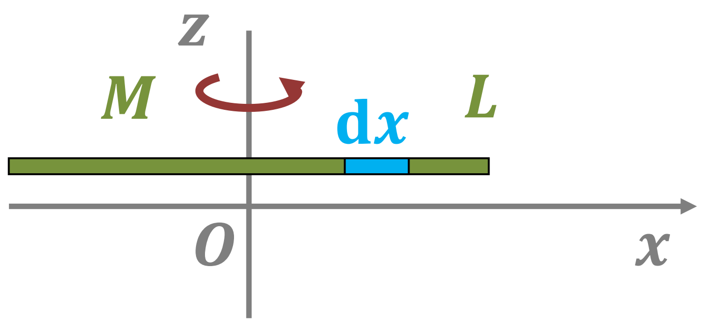


细棒转轴通过端点
与棒垂直

$$J=\frac{ml^2}{3}$$

- J 与转轴的位置有关

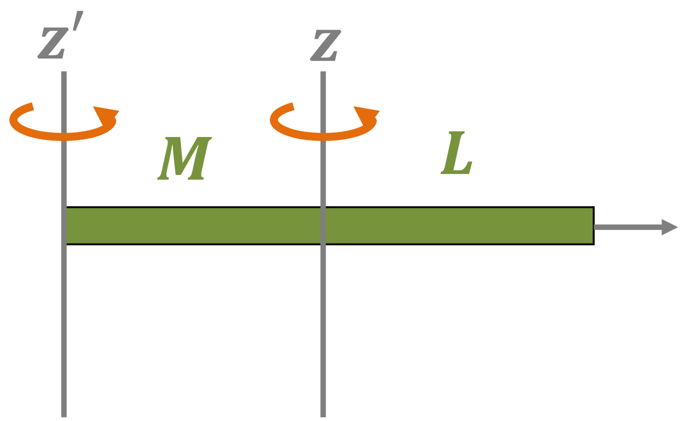




$$J=\int_0^L x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2$$

$$J=\int_{-L/2}^{L/2} x^2\lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{12}ML^2$$

例 均匀细棒的转动惯量



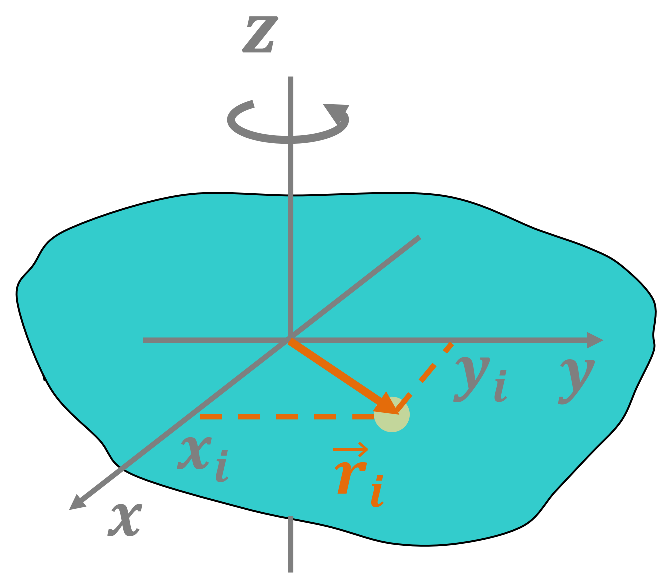
$$J_z=\frac{1}{12}ML^2$$

$$J'_z=J_z+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ML^2$$

☐ 正交轴定理

若刚体为一薄板，则

$$J_z = J_x + J_y$$



x，y轴在薄板内；z 轴垂直薄板。

$J_x = \sum_i y_i^2 m_i$，$J_y = \sum_i x_i^2 m_i$

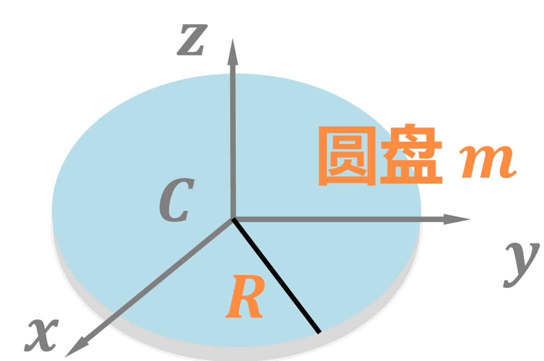
$$\Rightarrow J_x + J_y = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

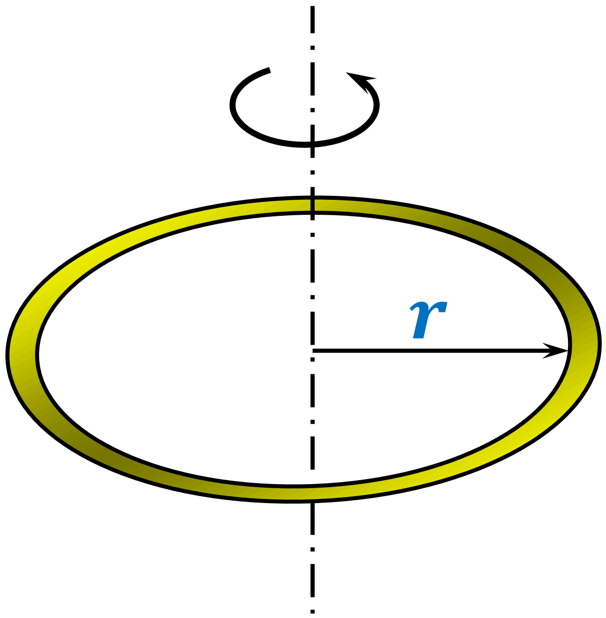
$$\Rightarrow J_z = J_x + J_y$$

例如求对圆盘的一条直径的转动惯量。

已知 $J_z = \frac{1}{2} mR^2$

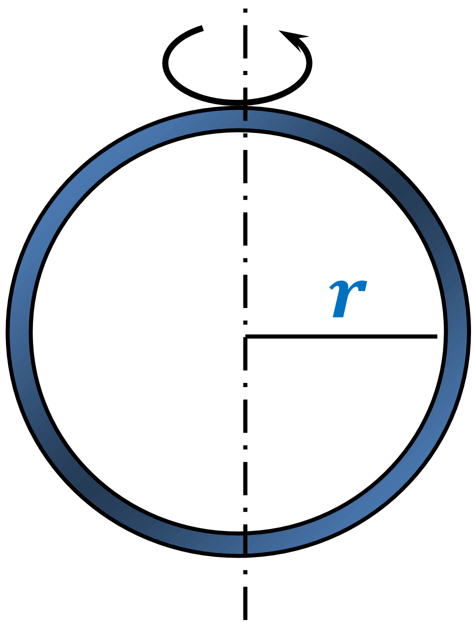
$$\left.\begin{aligned} J_z &= J_x + J_y \\ J_x &= J_y \end{aligned}\right\} J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$$





圆环转轴通过中心与盘面垂直

$$J = mr^2$$



圆环转轴沿直径

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J=\sum_i r_i^2 m_i$$ 质量不连续分布

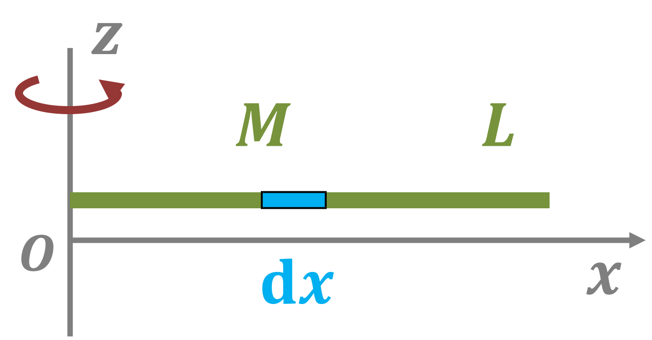
$$J=\int r^2 \mathrm{d}m$$ 质量连续分布

- 由刚体各质元相对于固定轴的分布决定，与刚体的运动及所受的外力无关
- 计算转动惯量的三个要素：(1)总质量 (2)质量分布 (3)转轴的位置

- J与刚体的总质量有关

✓ 两根等长的细木棒和细铁棒绕端点轴转动惯量

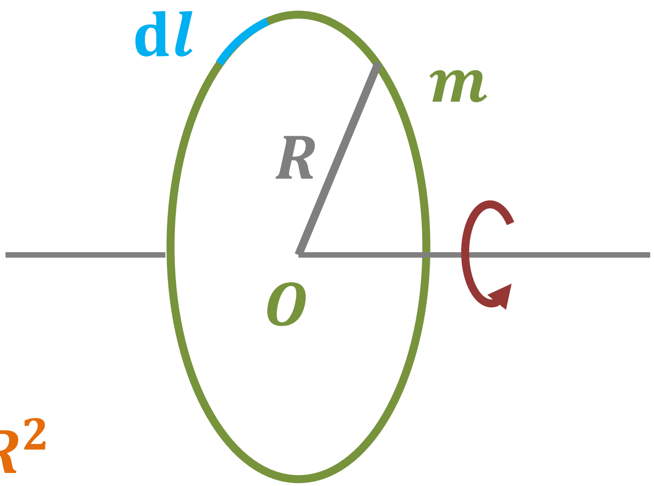
$$J=\int_0^L x^2\lambda \mathrm{d}x=\int_0^L x^2\frac{M}{L}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2$$



$$J_{铁}>J_{木}$$

长度相同，质量越大，J越大
质量相同，长度越大，J越大

- J 与质量分布有关

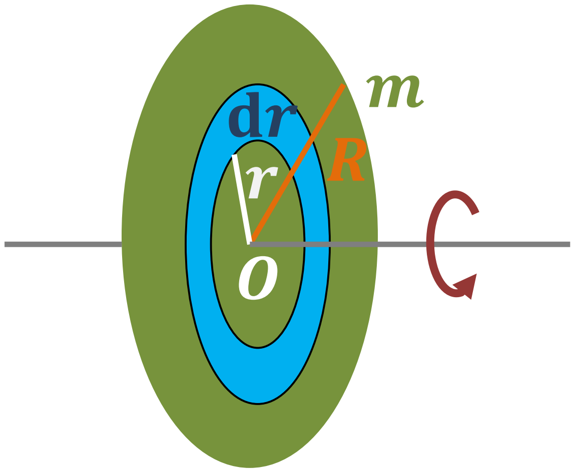


✓ 圆环绕中心轴旋转的转动惯量

$$J=\int_0^L R^2\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi R}R^2\lambda\mathrm{d}l$$

$$=R^2\lambda\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=2\pi R^3\frac{m}{2\pi R}=mR^2$$

✓ 圆盘绕中心轴旋转的转动惯量



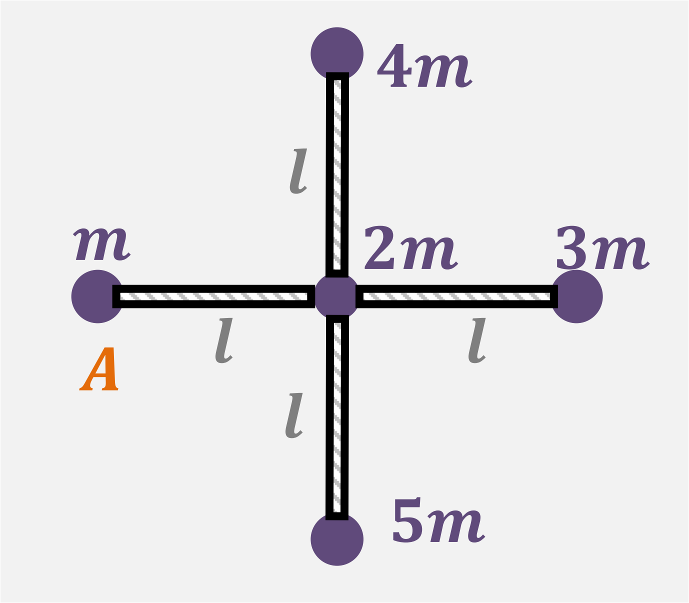
$\mathrm{d}s=2\pi r\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{2mr}{R^2}\mathrm{d}r$$

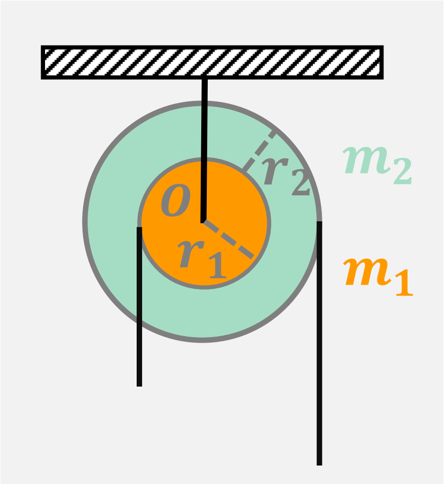
$$J=\int_0^m r^2\mathrm{d}m=\int_0^R\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{m}{2}R^2$$

◆ 对同轴的转动惯量具有可加减性

由长l的轻杆连接的质点如图所示，求质点系对过A垂直于纸面的轴的转动惯量。

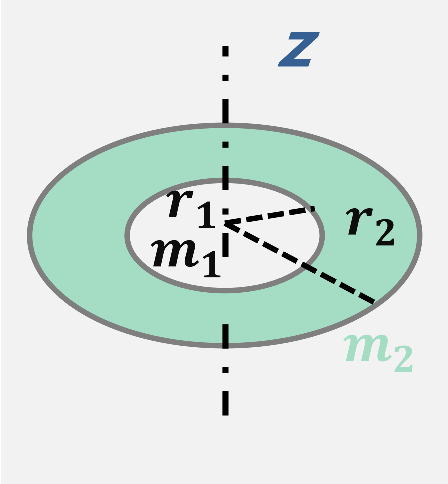


$$J = 2ml^2 + 3m(2l)^2 + (4m + 5m)(\sqrt{2}l)^2 = 32ml^2$$



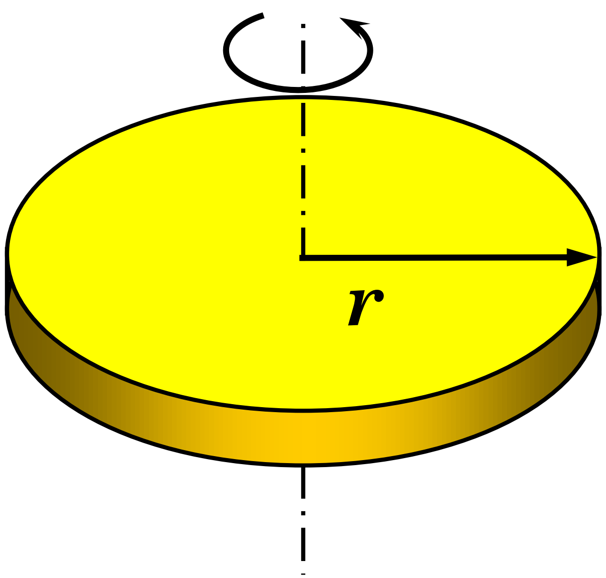
同轴圆柱

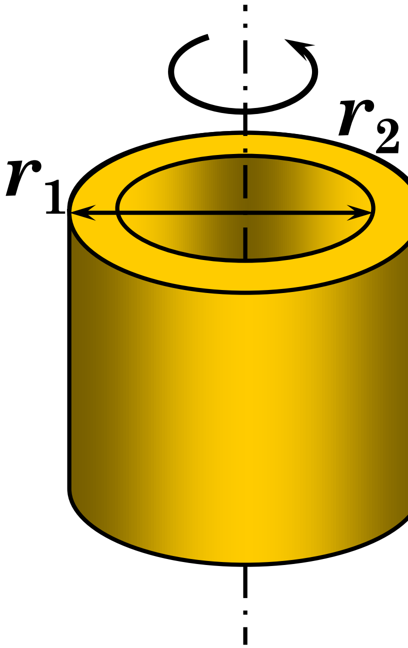
$$J_z = J_2 + J_1 = \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_1 r_1^2}{2}$$



空心圆盘

$$J_z = J_2 - J_1 = \frac{m_2 r_2^2}{2} - \frac{m_1 r_1^2}{2}$$



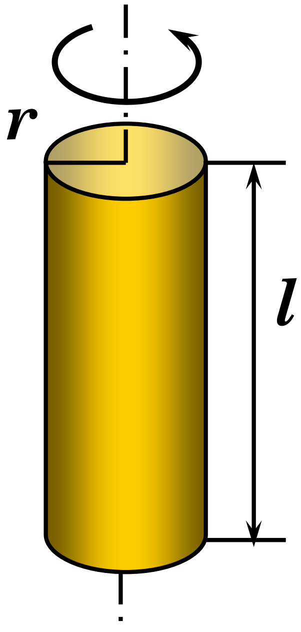


薄圆盘转轴通过中心与盘面垂直

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

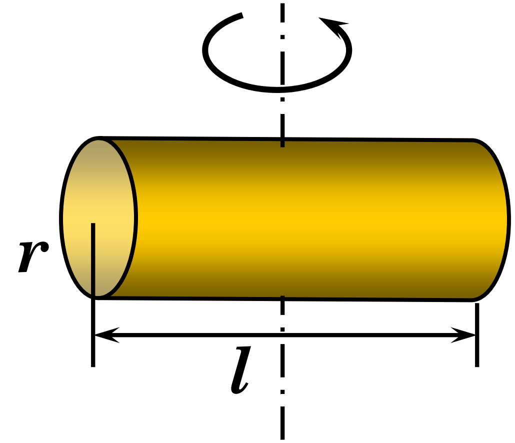
圆筒转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2}m\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$



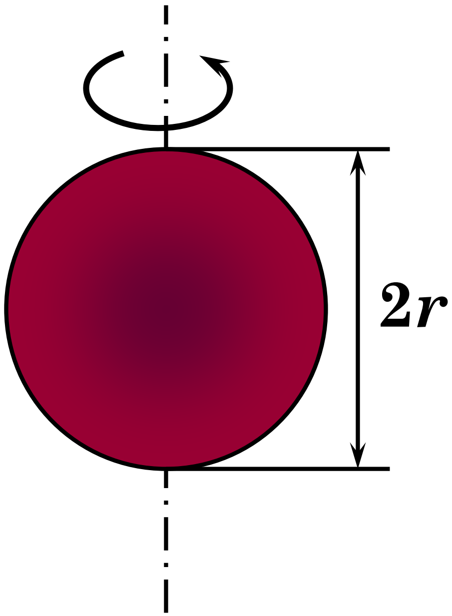
圆柱体转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$



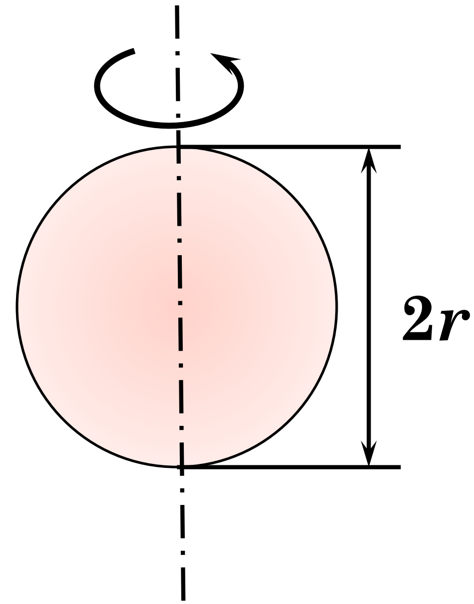
圆柱体转轴通过中心与几何轴垂直

$$J = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$$



球体转轴沿直径

$$J=\frac{2mr^2}{5}$$



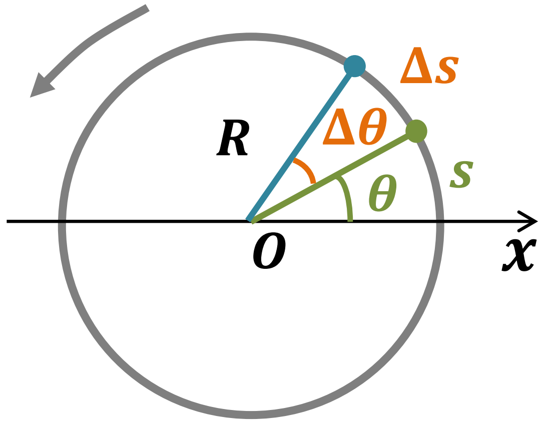
球壳转轴沿直径

$$J=\frac{2mr^2}{3}$$

线量		角量和线量的关系	角量	
位置	$s=s(t)$	$s=r\theta$	角位置	$\theta=\theta(t)$
速度	$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$	$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r\omega$	角速度	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ $=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$	□ 切向 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\beta$ □ 法向 $a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(r\omega)^2}{R}=r\omega^2$	角加速度	$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ $=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

匀变速圆周运动		变速圆周直线运动
$\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$	$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ □ $\beta=\beta(t)$ □ $\beta=\beta(\theta)$ $\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$	$\omega=\omega_0+\int_{t_0}^{t}\beta\mathrm{d}t$ $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\int_{t_0}^{t}\omega\mathrm{d}t$ $\omega^2-\omega_0^2=2\int_{\theta_0}^{\theta}\beta\mathrm{d}\theta$

角量和线量的关系



- $s = R\theta$
- $\Delta s = R\Delta\theta$
- $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta\cdot\vec{k}\times\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

  $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$

  大小 $v = \omega r$

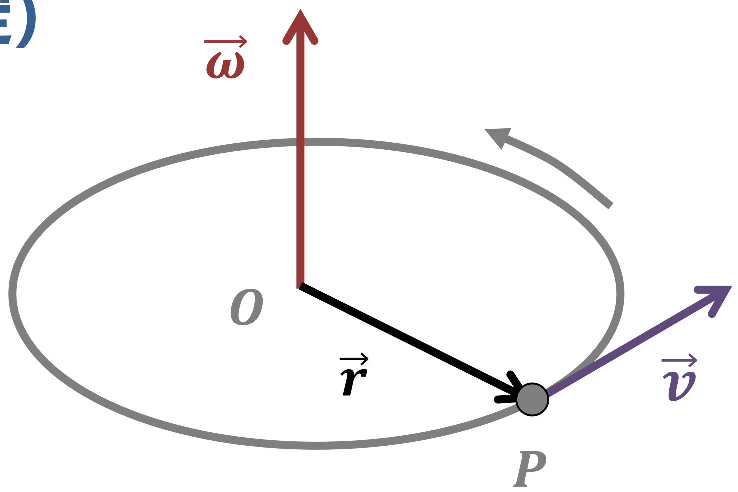
  方向 $\vec{\omega}\times\vec{r}$ （由右手螺旋定则确定）

- $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\vec{\omega}\times\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

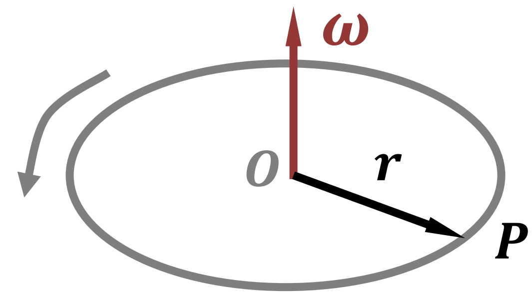
  $= \vec{\beta}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$

  切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta$

  法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$

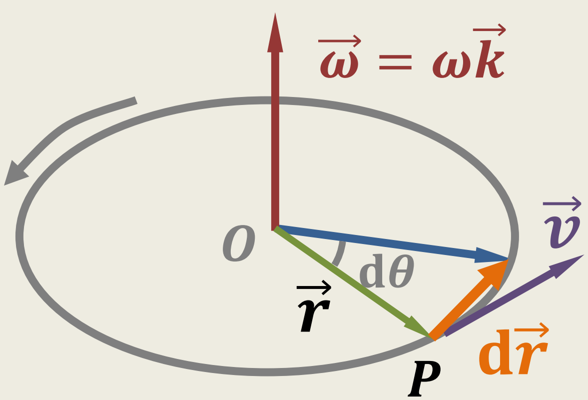


角量和线量的关系



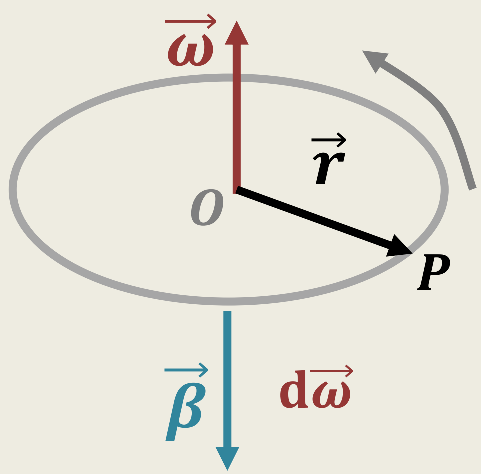
- $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta \cdot \vec{k} \times \vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$$= \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$



$$|\mathrm{d}\vec{r}| = r\,\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\theta\vec{k} \times \vec{r}$$

减速运动



加速运动