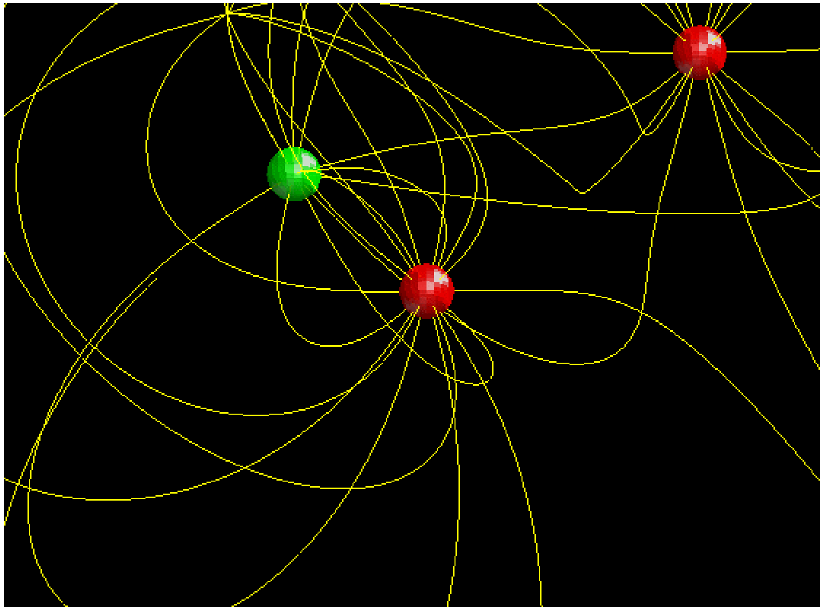
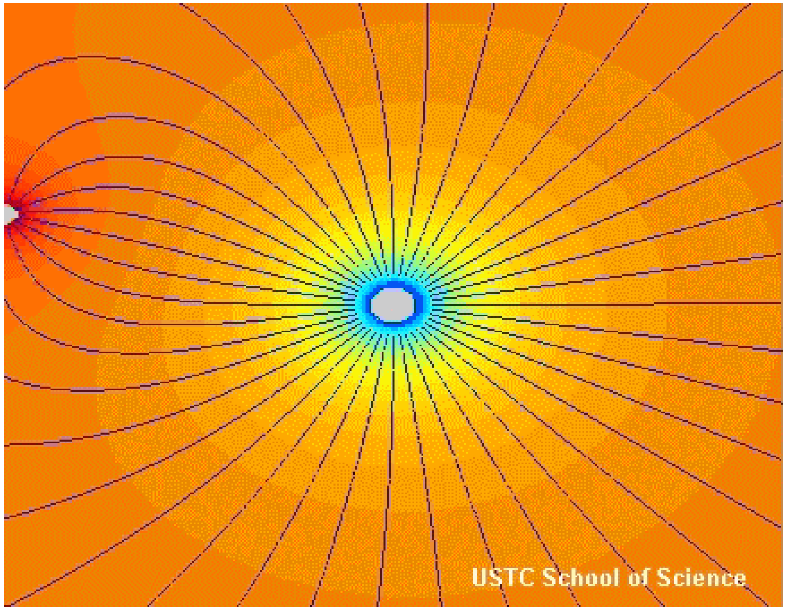
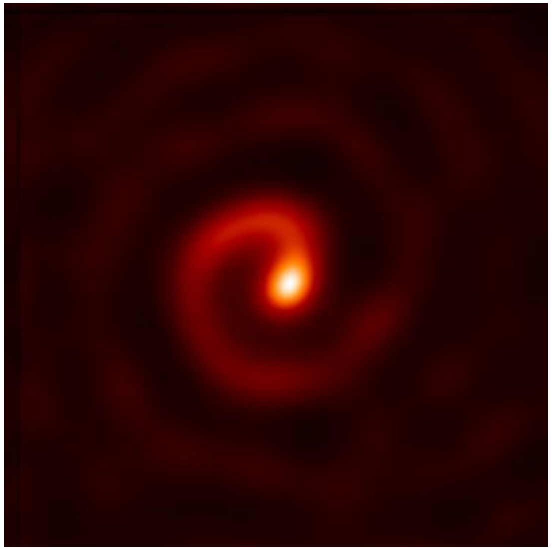
- 库仑定律
- 电场强度
- 高斯定理
- 环路定理、电势
- 电场强度与电势的关系
- 静电平衡、有导体存在时的电场和电势




USTC School of Science



□ 两个物理量 $\vec{E}$ 、U

注重典型场
注重叠加原理

□ 两个基本定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

点电荷
均匀带电球面(体)
无限长的带电线(柱)
无限大的带电面(板)

□ 两种计算思路

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \qquad U = \int dU$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}} \qquad U_P = \int_P^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

□ 库仑定律

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}$$

□ 静电力叠加原理

$$\vec{F}=\sum_i\vec{F}_i$$

$$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int\frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

□ 电场强度 $\vec{E}$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$ 单位：N/C 或 V/m

□ 场强叠加原理

$$\vec{E}=\sum_i\vec{E}_i$$

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

典型带电体$\vec{E}$分布

◆ 点电荷

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

◆ 无限长均匀带电直线

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$ 垂直于带电直线

◆ 均匀带电圆环轴线上：

$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

◆ 无限大均匀带电平面

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 垂直于带电面

◆ 均匀带电球面

$$\vec{E}_{内}=0,\quad \vec{E}_{外}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\vec{E}$ 的计算

- 由定义求
- 由点电荷(或典型电荷分布) $\vec{E}$公式和叠加原理求
- 由高斯定理求
- 由 $\vec{E}$与U的关系求

典型带电体$\vec{E}$分布

- 点电荷

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

- 无限长均匀带电直线

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$ 垂直于带电直线

- 均匀带电圆环轴线上：

$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

- 无限大均匀带电平面

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 垂直于带电面

- 均匀带电球面

$$\vec{E}_{内}=0,\quad \vec{E}_{外}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

- 利用高斯定理求解电场分布时，首先要根据电场分布的对称性选择恰当高斯面。

求解条件：电场分布具有某些对称性

找到恰当的高斯面，使 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 中的$\vec{E}$能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出$\vec{E}$分布。

球对称	轴对称	面对称
点电荷	直线	平面
球面	柱面	平板
球体	柱体	

当场源电荷分布具有某种对称性时，根据对称性的特点，选取适当的高斯面：使得场强都垂直于闭合曲面，且大小处处相等；或者使一部分场强垂直于闭合曲面的一部分，且大小处处相等。而余下的场强则与其余的曲面平行，通过该曲面的电通量为零。

电场分布	高斯面
球对称	同心的球面
轴对称	包含上下底面的同轴圆柱面
面对称	上下底面与带电面平行，轴与带电面垂直的圆柱面

由高斯定理求电场分布的步骤

① 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性。

(球对称、轴对称、面对称三种类型)

② 求出在对称性分析的基础上选取高斯面。目的是使 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 能够积出。

- □ 高斯面必须是闭合曲面
- □ 高斯面必须通过所求的点
- □ 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

③ 求出 $\sum q_{内}$

④ 由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

⑤ 求出电场的大小，并说明其方向。

静电场环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零。反映了静电场是保守力场，是有势场。

电势、电势能、电势差

电势能： $$W_a = q_0 \int_a^{零势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电 势： $$U_a = \int_a^{零势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势差： $$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

□ 电势的计算（两种基本方法）

- 场强积分法（由定义求）
- 叠加法

① 确定$\vec{E}$分布

② 选零势点和便于计算的积分路径

选取零势点的原则：使场中电势分布有确定值

- □ 电荷有限分布 选 $U_{\infty}=0$
- □ 电荷无限分布 选 $U_{有限处}=0$

③ 由电势定义，积分(计算)。

计算 U_a

$$U_a=\int_a^{零势点}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{零势点}E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$\vec{E}$为路径上各点总场强，若各区域$\vec{E}$表达式不同，应分段积分。

□ 电势的计算（两种基本方法）

- 场强积分法（由定义求）
- 叠加法

思路：$\mathrm{d}q \to \mathrm{d}U \to$

$$U = \int \mathrm{d}U$$

注意：应用典型带电体的电势公式，选取相同的零势点。

① 将带电体划分为电荷元$\mathrm{d}q$

② 选零势点，写出$\mathrm{d}q$在场点的电势$\mathrm{d}U$

③ 由叠加原理：

$$U = \sum \mathrm{d}U$$

或

$$U = \int \mathrm{d}U$$

典型带电体的电势分布

◆ 点电荷q电场中的电势分布

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

◆均匀带电球面场中电势分布

$$U_{内}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=恒量$$

$$U_{外}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}$$

◆ 均匀带电圆环轴线上的电势分布

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}$$

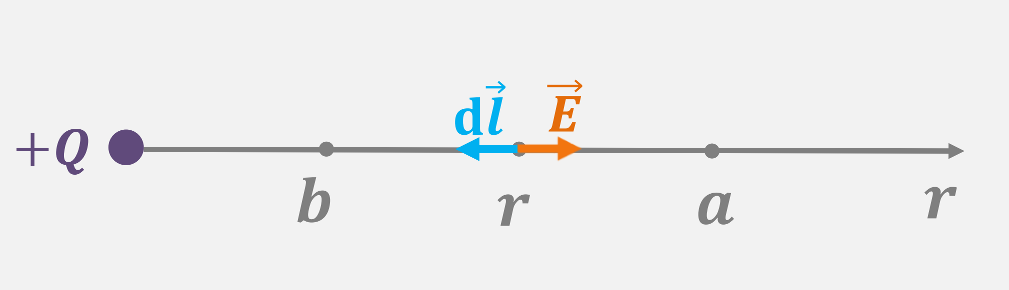
电场强度与电势的关系

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\ U$$

给出又一种求$\vec{E}$的方法:

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

在电荷量为Q的点电荷的静电场中，把电荷为$-q$的点电荷从a点移动到b点，如图所示。



有人这样计算电场力的功：

$$A=\int_a^b -q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-q\int_a^b E\mathrm{d}l\cos\pi=q\int_a^b E\mathrm{d}l$$

$$=q\int_{r_a}^{r_b}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)<0$$

你认为上述计算过程和所得结果是否正确？如有错误请指出并改正。

正确的结果应该是 $A=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)>0$

在计算过程中，认为$\mathrm{d}l=\mathrm{d}r$是错的，应为$\mathrm{d}l=-\mathrm{d}r$

在“孤立”的半径为R的带电导体球外作一个半径为r的同心球面。则下列说法是否正确？如有错误请改正。

- **球面上电场均匀。**

  错，球面上各点场强大小相等，但因方向不相同，所以不能说球面上电场均匀。

- **通过球面上任一单位面积的电场强度通量相等。**

  正确

- **一检验电荷从球面上各个不同点沿着任意路径移动到无穷远处，电场力做功不相等。**

  错，球面是等势面，电场力做功相等。

半径为 R 的带电半圆环，求环心处的电场强度：

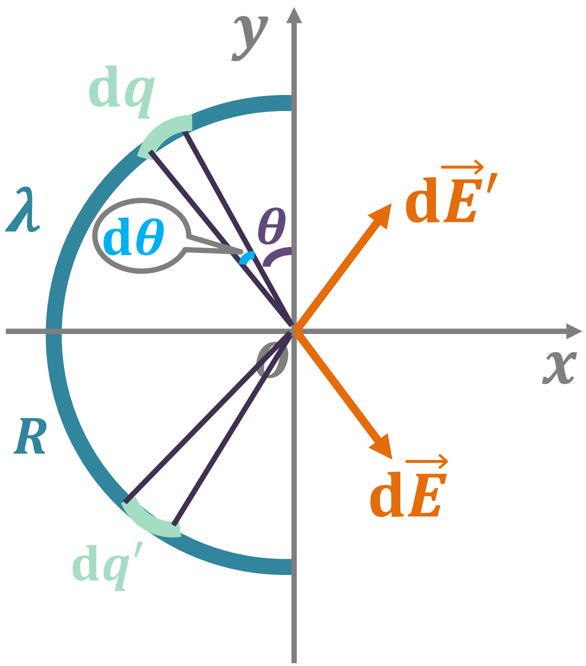
① 均匀带电，线密度为λ。

② 上半部带正电，下半部带负电，线密度为λ。

③ 非均匀带电，线密度为$\lambda=\lambda\sin\theta$。

思路：叠加法

$$\mathrm{d}q \to \mathrm{d}\vec{E} \to \vec{E}$$



① **解：** $\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$ **沿径向**

用分量叠加，由对称性：

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=0$$

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int\mathrm{d}E\sin\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\lambda\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0R}$$

$$\vec{E}_O=\frac{\lambda\vec{i}}{2\pi\varepsilon_0R}$$

沿 x方向

半径为 R 的带电半圆环，求环心处的电场强度：

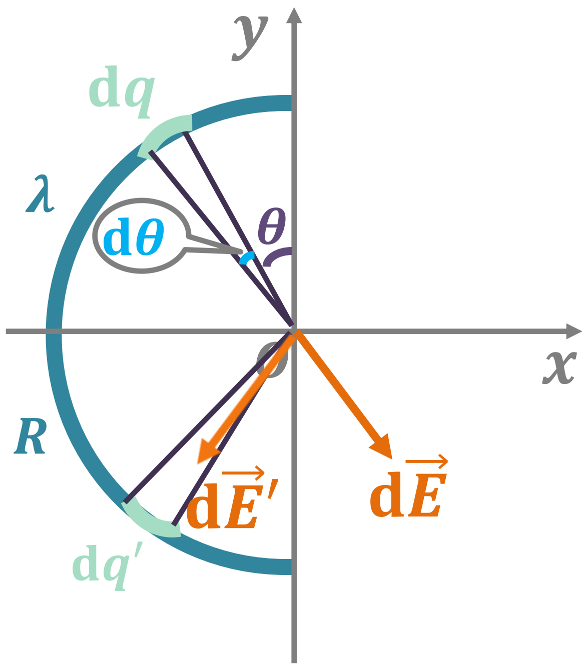
① 均匀带电，线密度为λ。

② 上半部带正电，下半部带负电，线密度为λ。

③ 非均匀带电，线密度为$\lambda=\lambda\sin\theta$。

思路：叠加法

$$\mathrm{d}q \rightarrow \mathrm{d}\vec{E} \rightarrow \vec{E}$$



② 解：$\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$ 沿径向

用分量叠加，由对称性：

$$E_x=\int \mathrm{d}E_x=0$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int \mathrm{d}E\cos\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{\lambda\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E}_O=-\frac{\lambda\vec{j}}{2\pi\varepsilon_0 R}$$ 沿 $-y$方向

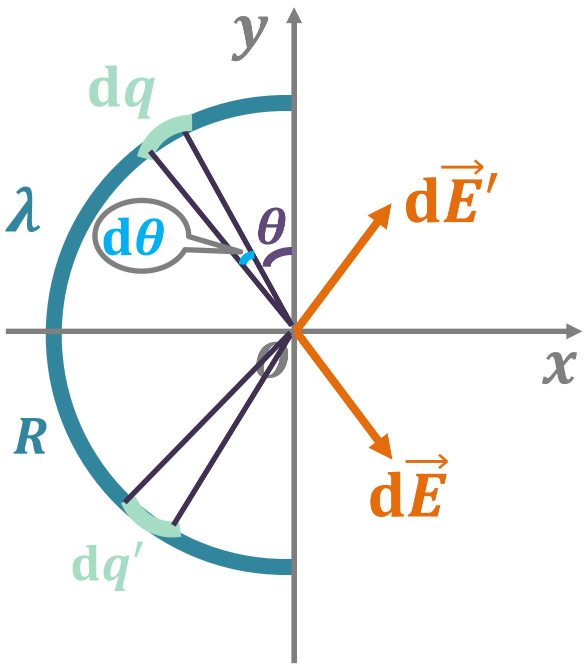
半径为 R 的带电半圆环，求环心处的电场强度：

① 均匀带电，线密度为λ。

② 上半部带正电，下半部带负电，线密度为λ。

③ 非均匀带电，线密度为$\lambda = \lambda_0 \sin\theta$。

思路：叠加法



$\sin\theta = \sin\theta(\pi - \theta)$

$dq \to d\vec{E} \to \vec{E}$

③ 解：$dq = \lambda R d\theta = \lambda_0 \sin\theta R d\theta$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$ 沿径向

用分量叠加，由对称性：

$$E_y = \int dE_y = 0$$

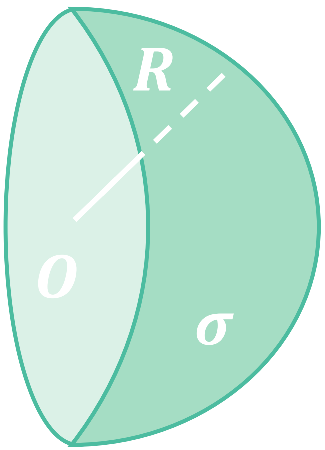
$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\lambda_0 \sin^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{8\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E}_O = \frac{\lambda \vec{i}}{8\varepsilon_0 R}$$

沿 x方向

求均匀带电半球面(已知R,σ) 球心处电场。



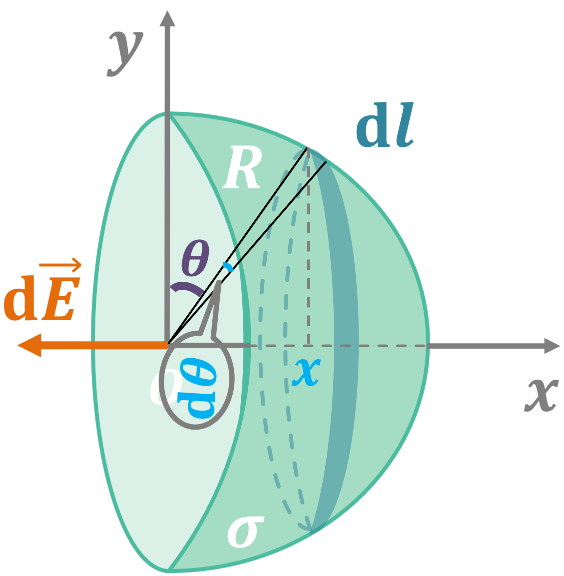
叠加法： $\mathrm{d}q \Rightarrow \mathrm{d}\vec{E} \Rightarrow \int \mathrm{d}\vec{E}$

将半球面视为由许多圆环拼成。

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$$
$$= \sigma 2\pi y \mathrm{d}l = \sigma \cdot 2\pi R\cos\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{R\sin\theta\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta$$

沿 $-x$方向



能不能由$\mathrm{d}E$直接积分？积分限如何确定?

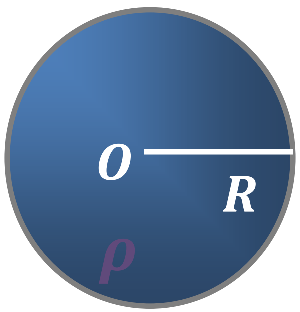
因为各圆环在O点处$\mathrm{d}\vec{E}$同向，可直接积分。

$$E_O = \int \mathrm{d}E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_O = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{i}$$

沿 $-x$方向

带电球体半径为R，电荷体密度 $\rho = k/r$（k为常数，$r \le R$），求带电球体内外的场强。



思考：

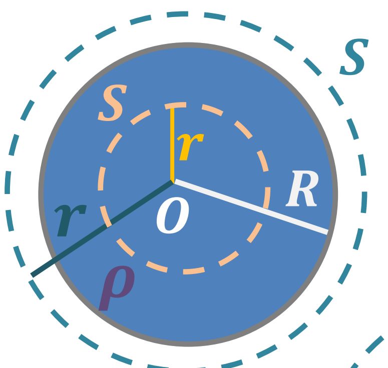
① 选用哪种方法求解更方便?

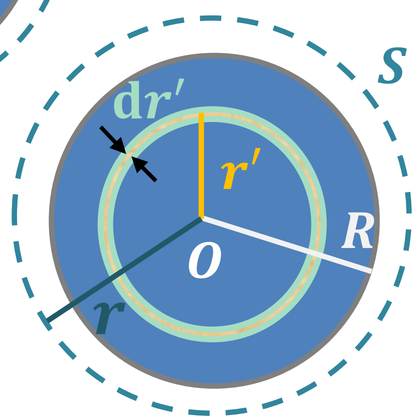
$\rho = k/r$ **未破坏电场分布的球对称性。用高斯定理求解方便。**

②选高斯面 ？

同心球面S (半径 r)

$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\, 4\pi r^2$$





③ $\sum q_{内} = ?$

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = \frac{k}{r}\, 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$

带电球体半径为R，电荷体密度 $\rho = k/r$（k为常数，$r \le R$），求带电球体内外的场强。

$$r > R \qquad \sum q_{内} = \int_0^R \rho \mathrm{d}V = \int_0^R \frac{k}{r'} 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k R^2$$

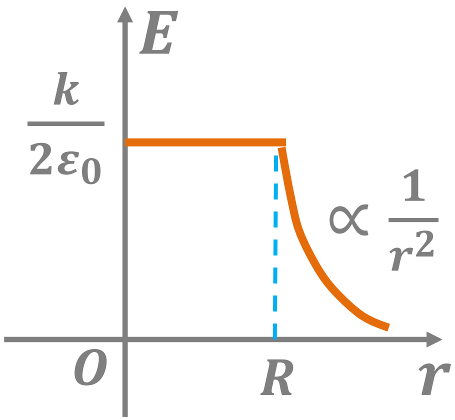
$$r < R \qquad \sum q_{内} = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = \int_0^r \frac{k}{r'} 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k r^2$$

④电场强度的大小，方向？

由高斯定理：

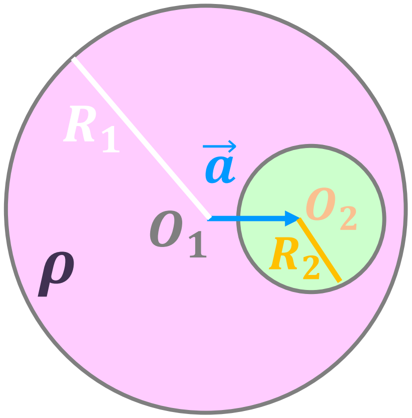
$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{k}{2\varepsilon_0 r} \vec{r} & (r \le R) \\ \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^3} \vec{r} & (r \ge R) \end{cases}$$

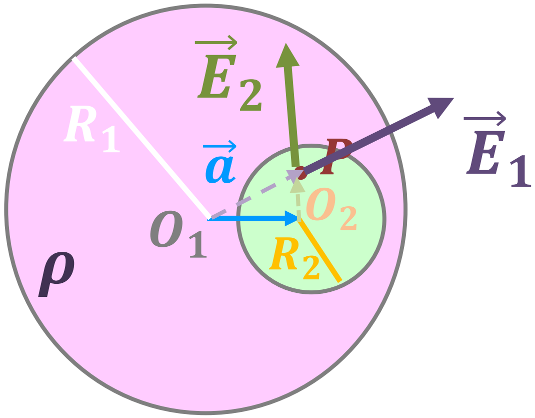
在半径为R_1，电荷体密度ρ的均匀带电球体内挖去一个半径R_2的球形空腔。空腔中心O_1与带电球体中心O_1相距为a $[(R_2+a)<R_1]$，求空腔内任一点电场。



思考：选用何种方法求解?

挖去空腔 ---失去球对称性，

能否恢复对称性？补偿法！



半径R_1的均匀带电实心球体在P点的场强：$\vec{E}_1$

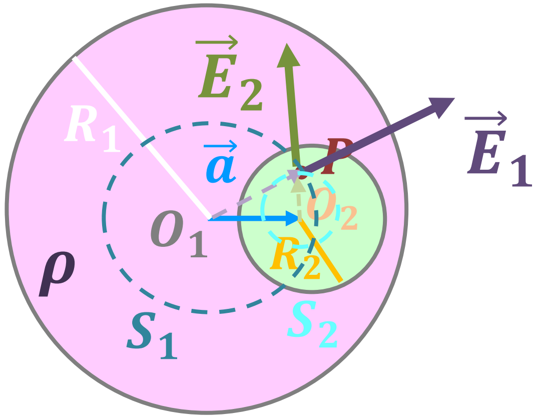
半径R_2的均匀带电实心球体在P点的场强：$\vec{E}_2$

所求场强 $\vec{E}_P=\vec{E}_1-\vec{E}_2$

$\vec{E}_1$ 、$\vec{E}_2$均可由高斯定理求出。

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

在半径为R_1，电荷体密度ρ的均匀带电球体内挖去一个半径R_2的球形空腔。空腔中心O_1与带电球体中心O_1相距为a $[(R_2+a)<R_1]$，求空腔内任一点电场。

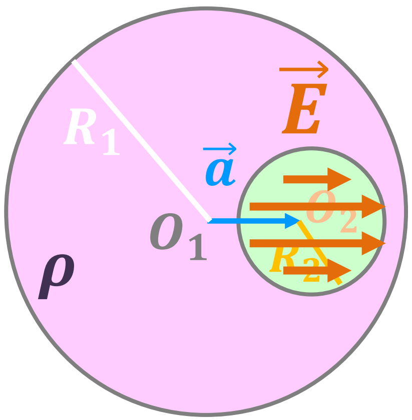


作高斯面 S_1，$\overrightarrow{O_1P}=\vec{r}_1$，$\sum q_{内}=\rho\,\frac{4}{3}\pi r_1^3$

$$E_1\,4\pi r_1^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,\frac{4}{3}\pi r_1^3 \Rightarrow \vec{E}_1=\frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$$

作高斯面 S_2，$\overrightarrow{O_2P}=\vec{r}_2$，$\sum q_{内}=\rho\,\frac{4}{3}\pi r_2^3$

$$E_2\,4\pi r_2^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r_2^3 \Rightarrow \vec{E}_2=\frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

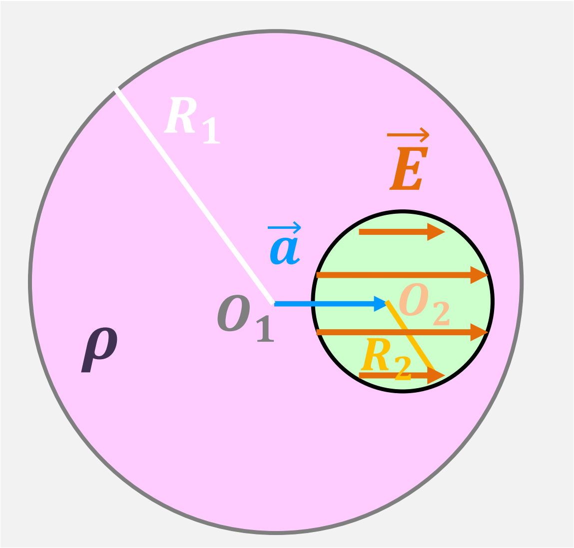


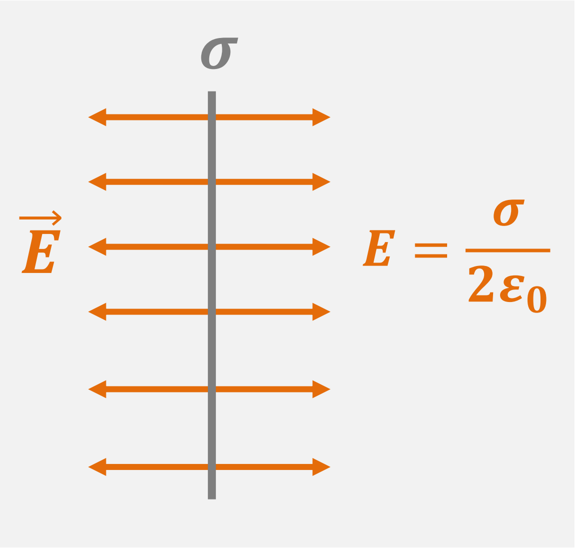
$$\vec{E}_P=\vec{E}_1-\vec{E}_2$$

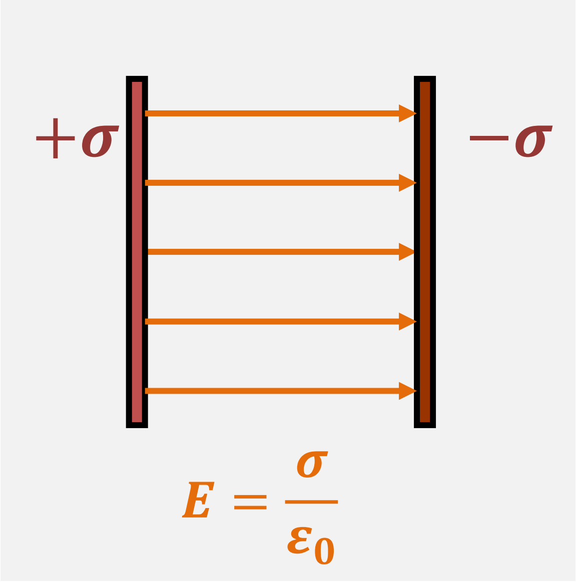
$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

腔内$\vec{E}$为平行于 $\overrightarrow{O_1O_2}=\vec{a}$ 的均匀电场。

获得均匀电场的方法

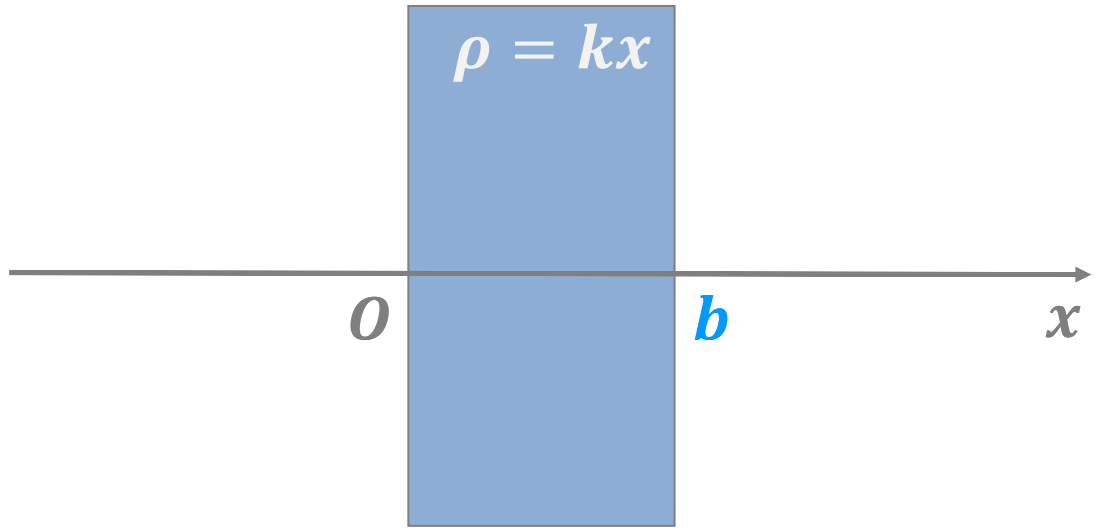

R_1
$\vec{E}$
$\vec{a}$
O_1
O_2
R_2
ρ


σ
$\vec{E}$
$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$


$+\sigma$
$-\sigma$
$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

……

厚度为b的无限大带电平板，电荷面密度分布如图所示。求带电平板内、外的电场强度，以及$\vec{E}=0$的场点位置。



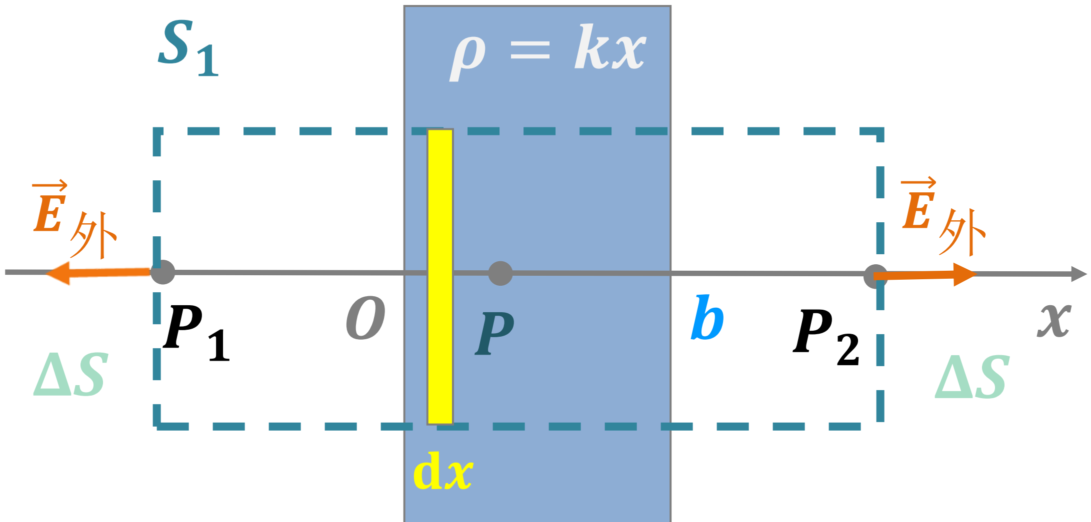
分析：场源电荷分布具有面对称性，可视为由许多无限大带电平面组成，能够用高斯定理求解。

在 $x<0$, $x>b$区域，为均匀电场，

$\vec{E}_{P_1}=\vec{E}_{P_2}=\vec{E}_{外}$，二者方向沿$x$轴，指向相反。

在$0<x<b$区域，电场强度与x相关。

厚度为b的无限大带电平板，电荷面密度分布如图所示。求带电平板内、外的电场强度，以及$\vec{E}=0$的场点位置。



$$\sum q_{内} = \int \rho \mathrm{d}V$$

$$= \int_0^b kx\,\Delta S \mathrm{d}x$$

$$= \frac{kb^2 \Delta S}{2}$$

作高斯面S_1

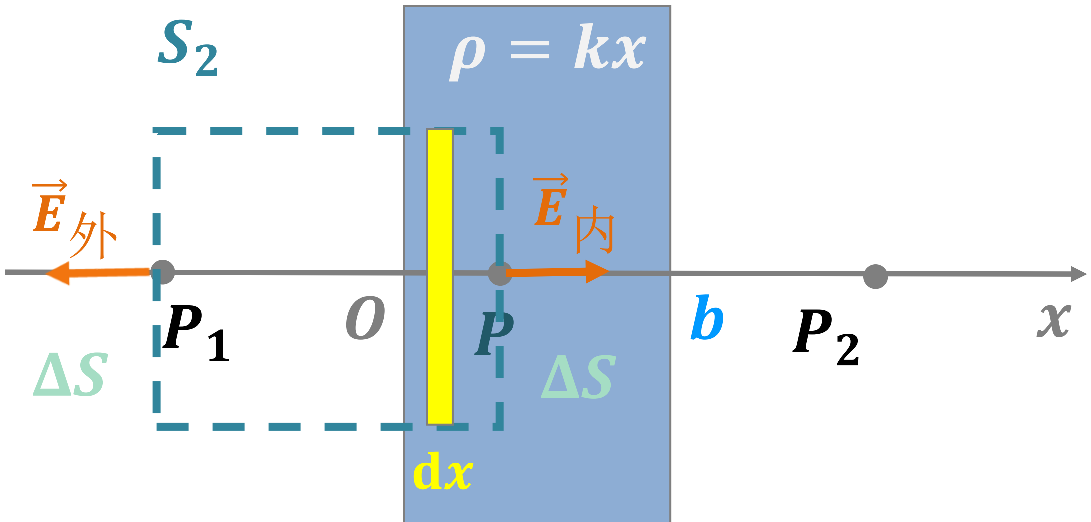
$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2E_{外}\,\Delta S$$

得 $E_{外} = \dfrac{kb^2}{4\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_{外} = \begin{cases} -\dfrac{kb^2}{4\varepsilon_0}\vec{i} & (x<0) \\ \dfrac{kb^2}{4\varepsilon_0}\vec{i} & (x>b) \end{cases}$$

厚度为b的无限大带电平板，电荷面密度分布如图所示。求带电平板内、外的电场强度，以及$\vec{E}=0$的场点位置。



$$\sum q_{内} = \int \rho \mathrm{d}V = \int_0^x kx\,\Delta S\,\mathrm{d}x = \frac{kx^2\Delta S}{2}$$

作高斯面S_2

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

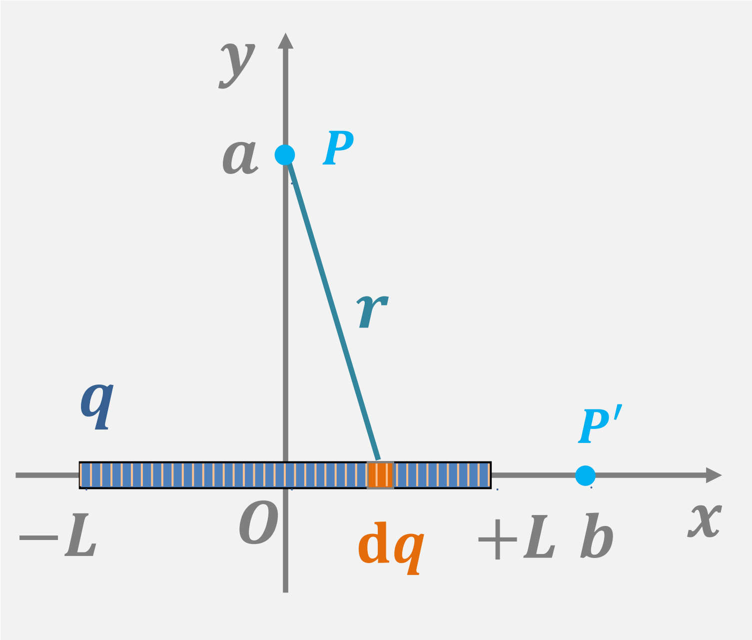
$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left(E_{外} + E_{内}\right)\Delta S$$

得 $$\vec{E}_{内} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right)\vec{i}$$

$$(0 \le x \le b)$$

令 $\vec{E}_{内}=0$，得 $x = \dfrac{\sqrt{2}b}{2}$

电量q均匀分布在长为$2L$的细棒上。求：
(1)细棒中垂面上距细棒中心a处P点的电势。
(2)细棒延长线上距细棒中心b处P'点的电势。



解：电势叠加法
将带电细棒视为点电荷集合

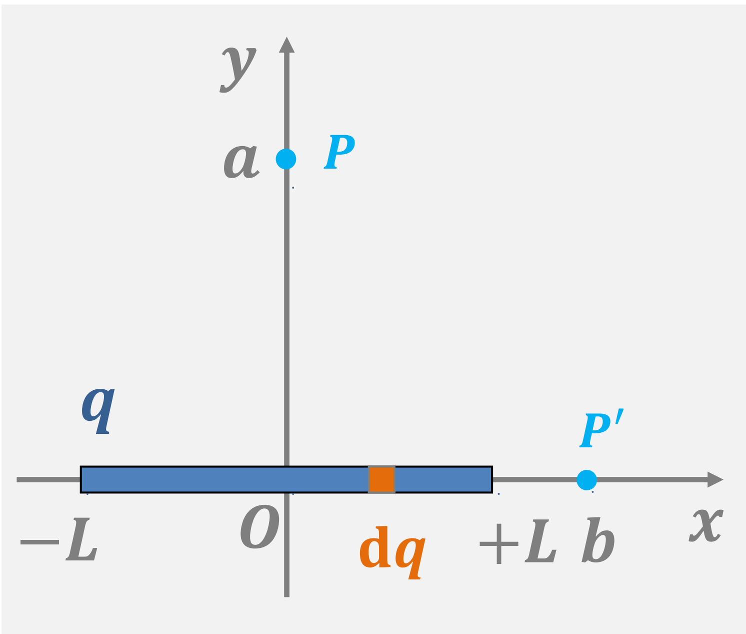
$$\mathrm{d}q=\frac{q}{2L}\mathrm{d}x$$

令 $U_\infty=0$

(1) $$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}$$

$$U_P=\int\mathrm{d}U=\int_{-L}^{L}\frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(x^2+a^2)^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{a}$$

电量q均匀分布在长为$2L$的细棒上。求：
(1)细棒中垂面上距细棒中心a处P点的电势。
(2)细棒延长线上距细棒中心b处P'点的电势。

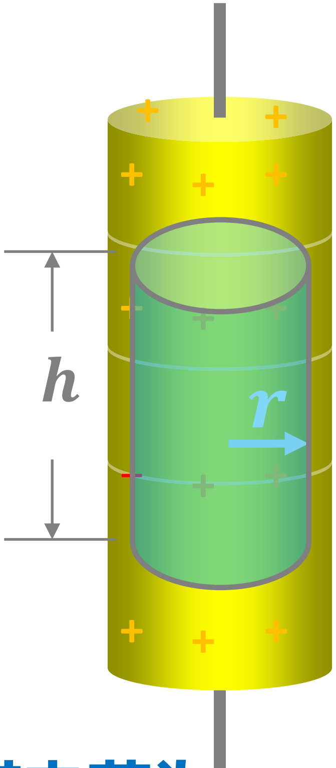


(2) $$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(b-x)}=\frac{q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(b-x)}$$

$$U_{P'}=\int \mathrm{d}U=\int_{-L}^{L}\frac{q\,\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0 L(b-x)}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b+L}{b-L}$$

解：电势叠加法
将带电细棒视为点电荷集合
$$\mathrm{d}q=\frac{q}{2L}\mathrm{d}x$$
令 $U_\infty=0$

一半径为R的“无限长”圆柱形带电体，其电荷体密度为$\rho = Ar$（$r < R$），式中A为正值常量。选圆柱轴线处为电势零点，利用场强积分法计算圆柱体内、外各点的电势分布。



解： 以轴线为中心，取半径为r、高为h的高斯圆柱面。

面上各点场强大小为E并垂直于柱面，则穿过该柱面的电场强度通量为：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$r < R$时，取一半径为r'、厚$\mathrm{d}r'$、高h的薄圆筒，其电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,2\pi r' h = 2\pi A h r'^2 \mathrm{d}r'$$

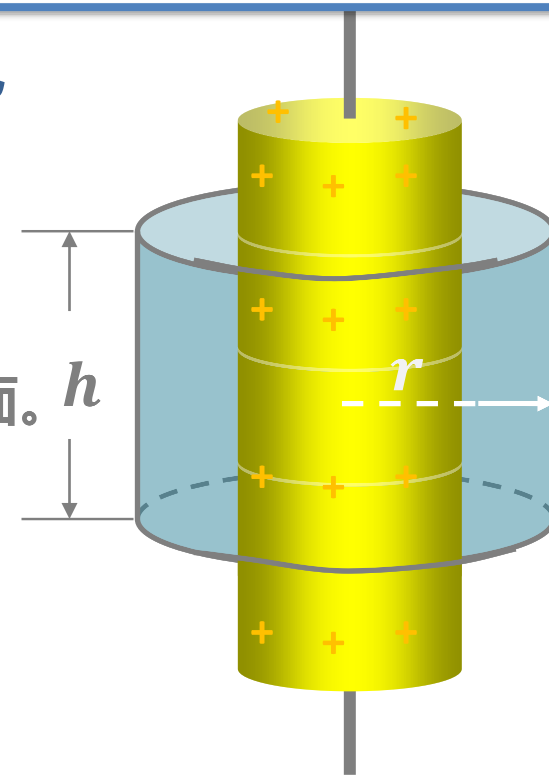
包围在高斯面内的总电荷为

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^r 2\pi A h r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi A h r^3/3$$

由高斯定理得 $E\,2\pi r h = 2\pi A h r^3/(3\varepsilon_0)$

解出 $E = Ar^2/3\varepsilon_0 \qquad (r < R)$

一半径为R的“无限长”圆柱形带电体，其电荷体密度为$\rho = Ar$（$r < R$），式中A为正值常量。选圆柱轴线处为电势零点，利用场强积分法计算圆柱体内、外各点的电势分布。



解： 以轴线为中心，取半径为r、高为h的高斯圆柱面。

面上各点场强大小为E并垂直于柱面，则穿过该柱面的电场强度通量为：

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$r > R$时，包围在高斯面内的总电荷为

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^R 2\pi A h r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi A h R^3/3$$

由高斯定理得 $E\,2\pi r h = 2\pi A h R^3/(3\varepsilon_0)$

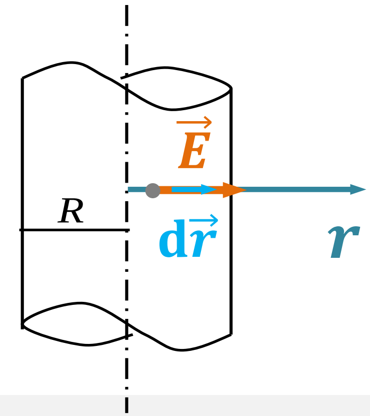
解出

$$E = AR^3/3r\varepsilon_0 \quad (r \geq R)$$

$$E = Ar^2/3\varepsilon_0 \quad (r \leq R)$$

方向：垂直于柱面向外

一半径为R的“无限长”圆柱形带电体，其电荷体密度为$\rho = Ar$（$r < R$），式中A为正值常量。已知圆柱体内、外场强分布$E = \begin{cases} \dfrac{AR^3}{3r\varepsilon_0} & (r > R) \\ \dfrac{Ar^2}{3\varepsilon_0} & (r \leq R) \end{cases}$，且垂直于柱面向外。选圆柱轴线处为电势零点，利用场强积分法计算圆柱体内、外各点的电势分布。



解：先取r轴为积分路径（如图），其上任意位置r处$\vec{E}$和$\mathrm{d}\vec{r}$皆沿r轴正向。

$r \leq R$时，

$$U = \int_r^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^0 \frac{A}{3\varepsilon_0} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{A}{9\varepsilon_0} r^3$$

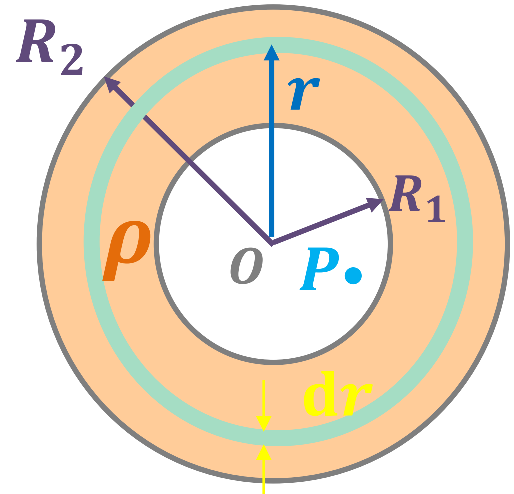
$r \geq R$时，

$$U = \int_r^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^R \frac{AR^3}{3\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}r}{r} + \int_R^0 \frac{Ar^2}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{AR^3}{3\varepsilon_0} \ln\frac{R}{r} - \frac{AR^3}{9\varepsilon_0}$$

图示一个均匀带电的球壳，其电荷体密度为ρ，球壳内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求空腔内任一点的电势。（利用电势叠加原理解此题）



解：将带电球壳视为许多均匀带电球面的集合，

取半径r，厚dr的球壳为电荷元：$\mathrm{d}q=\rho\cdot 4\pi r^2\cdot\mathrm{d}r$

令 $U_\infty=0$，dq在腔内产生的电势

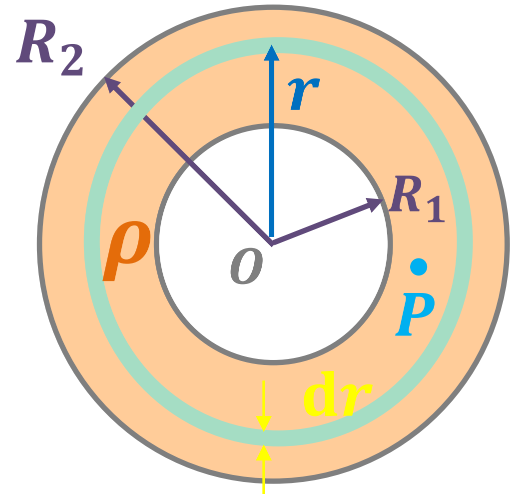
$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho r\mathrm{d}r}{\varepsilon_0}$$

由叠加原理

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\mathrm{d}r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left({R_2}^2-R_1^2\right)$$

即腔内各点等势

图示一个均匀带电的球壳，其电荷体密度为ρ，球壳内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求球层中任一点的电势。（利用电势叠加原理解此题）



解：r处的电势等于以r为半径的球面以内的电荷在该处产生的电势U_1和球面以外的电荷产生的电势U_2之和，即

$$U = U_1 + U_2$$

在球层中半径为r的球面内、外分别取$r' \to r' + \mathrm{d}r'$的薄层，其电荷为 $\mathrm{d}q = \rho \cdot 4\pi {r'}^2 \mathrm{d}r'$

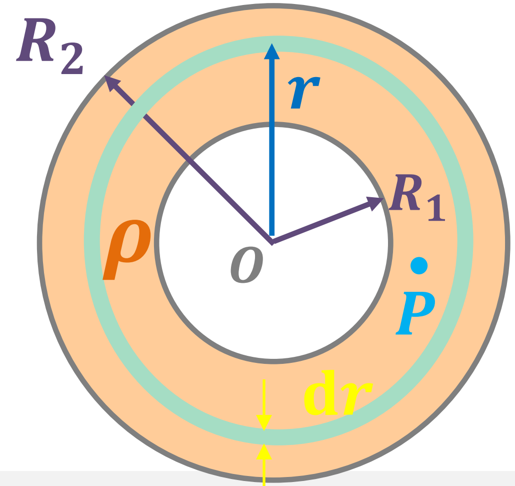
由典型电荷均匀带电球面电势分布规律

$$U = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > R) \end{cases}$$

（R为球面半径）

利用电势叠加原理可得：

图示一个均匀带电的球壳，其电荷体密度为ρ，球壳内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远处为电势零点，求球层中任一点的电势。（利用电势叠加原理解此题）



以r为半径的球面以内的电荷在该处产生的电势

$$U_1=\int \mathrm{d}U_1$$

$$=\frac{\int_{R_1}^{r}\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\int_{R_1}^{r}\rho\cdot 4\pi r'^2\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{R_1^3}{r}\right)$$

以r为半径的球面外电荷产生的电势

$$U_2=\int \mathrm{d}U_2$$

$$=\int_{r}^{R_2}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\int_{r}^{R_2}\frac{\rho\cdot 4\pi r'^2\mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2-r^2\right)$$

于是全部电荷在半径为r处产生的电势为

$$U=U_1+U_2$$

$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{R_1^3}{r}\right)+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2-r^2\right)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r}\right)$$