西南交通大学 2019—2020 学年第一学期半期考试

一、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

BCDC

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

5. 6； 6. 18； 7. 1；

8. $3^{2018}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $3^{2018}\cdot\alpha\alpha^T$.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

9．解：$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & -y & 0 \\ -x & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$ ……………………4

$\overset{c_1-c_2-\frac{x}{y}c_3+\frac{x}{y}c_4}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$ ……………………4

$\overset{c_1-c_2-\frac{x}{y}c_3+\frac{x}{y}c_4}{=} x^2y^2$ ……………………2

10．解：（1）0 **……………2**

（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&0&0\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\3&1&2&-1\\1&1&1&0\\4&3&1&5\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&-3&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&3\\1&4\end{vmatrix}=-9.$ **……………4**

$A_{44}+4A_{45}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\0&0&0&1&4\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&11\\2&2&2&3\\3&1&2&11\\4&3&1&20\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1&13\\1&-1&16\\3&2&37\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}3&3\\-1&63\end{vmatrix}=192$ **……………4**

方法不唯一，若答案错误有正确过程，酌情给分.

11.　解： $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&2\\0&2&-2&-2&0\\0&-1&-1&1&1\\1&1&0&1&-1\\2&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-2r_1\\ r_5-r_3}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\ r_2\div 2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&-1&-1&0\\0&-1&-1&1&1\\0&1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\underset{r_4+r_3}{\overset{\substack{r_3+r_2\\ r_4-r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&-1&-1&0\\0&0&-2&0&1\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ **……………8**

所以 $R(A)=4$. **……………2**

12 .解；（1） $C\left(E-C^{-1}B\right)=C-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$； ……………2

（2） $A\left(E-C^{-1}B\right)^{T}C^{T}=E$

$$\boldsymbol{A(E-C^{-1}B)^{T}C^{T}=E\Rightarrow A(C\left(E-C^{-1}B\right))^{T}=E}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A(CE-B)^{T}=E}$$ ……………2

$$\boldsymbol{\Rightarrow A=(CE-B)^{T^{-1}}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$ ……………2

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$ ……………4

13. 解：因为 $B=\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right)\underset{i=2,3,4}{\overset{r_i-r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right)$

$$\underset{r_4-r}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{array}\right)$$ 3

Case1. 当 $a\neq 1,2$ 时，$B\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$

$R(A)=3$，$R(B)=4$，此时方程组 $Ax=b$ 无解; 2

Case2. 当 $a=1$ 时，$B\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$R(A)=R(B)=2<3$，此时方程组 $Ax=b$ 有无穷解; 2

Case1. 当 $a=2$ 时，$B\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$R(A)=R(B)=3$，此时方程组 $Ax=b$ 有唯一解，且解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$ 3

14. 解：（1）$(E+f(A))(E+A)=(E+((E-A)(E+A)^{-1}))(E+A)$
$=(E+A)+(E-A)(E+A)^{-1}(E+A)=2E$ ……………5

（2）
$$f(f(A))=(A-f(A))(E+f(A))^{-1}$$
$$=(A-f(A))\cdot\frac{1}{2}(E+A)$$
$$=(E-2E(E+A)^{-1}+E)\cdot\frac{1}{2}(E+A)$$
$$=(E+A)-E=A$$
……………5