

西南交通大学 2019—2020 学年第一学期考试

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	总成绩
得分				

阅卷教师签字：_____

一、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 已知矩阵 A 可逆，则 $(A^*)^* = ()$

- A. $|A|^n A$ B. $|A|^{n-2} A$ C. $|A|^n A^{-1}$ D. $|A|^{n-2} A^{-1}$

2. 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 2A - 15E = 0$ ，则下列矩阵不一定可逆的是 $()$

- A. A B. $A + 2E$ C. $A - 3E$ D. $A + 3E$

3. 若把可逆阵 A 的第一行的 3 倍加到第二行，得到矩阵 B ，则 $()$

- A. 把 A^{-1} 的第一行的 -3 倍加到第二行得到矩阵 B^{-1} ；
 B. 把 A^{-1} 的第二行的 -3 倍加到第一行得到矩阵 B^{-1} ；
 C. 把 A^{-1} 的第一列的 -3 倍加到第二列得到矩阵 B^{-1} ；
 D. 把 A^{-1} 的第二列的 -3 倍加到第一列得到矩阵 B^{-1} 。

4. 已知 3 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$ ，且 $a_{11} = a_{12} = a_{13} > 0$ ，则 $a_{11} = ()$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

5. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 4 & 2x \\ 1 & 3x & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -x & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4x \end{vmatrix}$ ，则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为_____。

6. 行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \text{—————}.$

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩 $R(A^3) = \text{—————}.$

8. 已知三维列向量 α 满足 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(\alpha\alpha^T)^{2019} = \text{—————}.$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

9. 已知 $xy \neq 0$, 计算行列 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}.$

10. 已知 $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$, 计算

(1) $A_{12} + 2A_{22} + 3A_{32} + A_{42} + 4A_{52}$; (2) $A_{41} + A_{42} + A_{43}$ 和 $A_{44} + A_{45}$.

11. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩.

12. 设 4 阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且矩阵 A 满足关系式

$$A(E - C^{-1}B)^T C^T = E, \text{ 求}$$

(1) $C(E - C^{-1}B)$; (2) 矩阵 A .

13. 问 a 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$
 有 (1) 无解? (2) 有无穷解?

(3) 有唯一解? 并求该唯一解.

14. 设 A 为 n 阶方阵, $A + E$ 可逆, 且 $f(A) = (E - A)(E + A)^{-1}$. 试证明:

(1) $(E + f(A))(E + A) = 2E$;

(2) $f(f(A)) = A$.