班级______ 学号______ 姓名______

密封装订线 密封装订线 密封装订线

西南交通大学 2018 —2019 学年第（ 一 ）学半期考试

课程代码 __6010500__ 课程名称 __线性代数 B__ 考试时间 __90 分钟__

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

阅卷教师签字：________________

一、选填题（每空 5 分，共 25 分）

1. 设 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&2\\3&3&3&0\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式， 则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}=$ __-12__.

2. 设 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为四维列向量，记 $A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4), B=(\gamma_1+2\gamma_2, 3\gamma_1+4\gamma_3, \gamma_2, \gamma_4)$, 如果 $|A|=4$，则 $|B|=$ __-16__.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&7&9\\6&5&4\end{pmatrix}$， $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 则 $P^{2018}AP^{2019}=$ __$\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&9&7\\6&4&5\end{pmatrix}$__.

4. 设 A,B 均为三阶方阵，且 $|A|=2,|B|=3$ 则 $\left|-A^2B^3\right|=$ __-108__.

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1717&1708\\2828&2819\end{vmatrix}=$ __9999__ 。

二、选择题（每空 5 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为三阶方阵，则下述结论正确的是（ C ）

A. A 或 B 可逆，则 AB 可逆　　B. A 且 B 可逆，则 $A+B$ 可逆

C. A 或 B 不可逆，则 AB 不可逆　　D. A 与 B 不可逆，则 $A+B$ 不可逆

2. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则$A^3=$（ D ）

A. $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&3\\0&0&3&3\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&4&4\\0&0&4&4\end{pmatrix}$

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&\lambda&4\\2&3&4&5\\3&5&7&9\end{pmatrix}$，当$A$的秩为 2 时，$\lambda=$（ B ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&0&\cdots&0&0\\a&a+b&b&\cdots&0&0\\0&a&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a+b&b\\0&0&0&\cdots&a&a+b\end{vmatrix}$

解：按第一行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}\text{，}$$ ------------------------------------5

故 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$ (1)----------------------------8

由a,b的对称性知

$$D_n-bD_{n-1}=a^n \quad (2)$$

由 (1)与 (2)得

当$a \neq b$时 $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.**--------------------------10**

当$a = b$时 $D_n = aD_{n-1} + a^n = a^n + a(aD_{n-2} + a^{n-1}) = 2a^n + a^2 D_{n-2} = \cdots = (n+1)a^n$.**---------11**

法二，由 (1)得

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \cdots \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n . \end{aligned}$$ **--11**

2. 设$f(x) = x^2 - x + 1$， $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$[f(A)]^T$.

解：依定义得：

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ **---------------9**

故

$$[f(A)]^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ **-------------11**

3. 已知$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,求解方程$AX + B = X$.

解 因为$AX + B = X$,，所以$(E - A)X = B$,

又 $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且$|E - A| \neq 0$

则$E - A$可逆且$X = (E - A)^{-1} B$ **------------9**

因此， $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。 **------------11**

4.解非齐次线性方程组$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=1\\ x_1+x_2-2x_3=1\end{cases}$.

解 $B=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ **-----------6**

方程组解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **---------11**

四、证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 设三阶方阵A满足$A^2-A-2E=O$,证明A及$A+2E$都可逆,并求A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$.

证明: 由$A^2-A-2E=O$得$A^2-A=2E$,两端同时取行列式: $\left|A^2-A\right|=8$

即 $|A||A-E|=8$,故 $|A|\neq 0$所以A可逆. **--------2**

而$A+2E=A^2$, $|A+2E|=\left|A^2\right|=|A|^2\neq 0$ 故$A+2E$也可逆.**------4**

由$A^2-A-2E=O\Rightarrow A(A-E)=2E\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$ **-------7**

又由$A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$

$\therefore(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$

$\therefore(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$ **------10**

2．设n阶矩阵A的伴随矩阵为A^*，证明：

(1) 若$|A|=0$,则$\left|A^*\right|=0$;

(2) $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$.

证明 (1) 用反证法证明．假设$\left|A^*\right|\neq 0$则有$A^*(A^*)^{-1}=E$ **-----3**

由此得$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O$ $\therefore A^*=O$ **-----5**

这与$\left|A^*\right|\neq 0$矛盾，故当$|A|=0$时有$\left|A^*\right|=0$.

(2) 由于$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 则$AA^*=|A|E$ 取行列式得到: $|A|\left|A^*\right|=|A|^n$ ------8

若$|A|\neq 0$　则$|A^*|=|A|^{n-1}$------9

若$|A|=0$由(1)知$|A^*|=0$此时命题也成立------10 故有$|A^*|=|A|^{n-1}$.