层次分析法（AHP）

学习内容

1. 层次分析法主要用于解决何种问题?
2. 层次分析法的大致步骤。
3. 层次分析法通常将决策问题分为哪几个层次，各层次间关系如何?
4. 如何构造判断矩阵?
5. 判断矩阵的一致性问题。
6. 何谓单准则下的排序?
7. 如何用特征根法确定相对权重，其理论

依据是什么?

8. 除了用数学软件计算外，求权重排序向量有什么简便方法?

9. 如何进行一致性检验，如何理解一致性指标CI、平均随机一致性指标RI、一致性比例CR?

10. 何谓层次总排序?

11. 层次总排序的步骤和原理。

12. 如何进行层次总排序的一致性检验?

13. 当一致性检验未通过时，如何对判断矩阵进行调整?

14. 层次分析法的缺陷及解决办法。

15. 模糊层次分析法预研。

人们在日常活动中，常常会面对一些决策问题。例如，大学生选择职业时，往往会从专业对口、发展潜力、待遇收入等方面加以考虑和决策。

许多决策问题是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统，很难用通常的数学模型解决。

层次分析法 (AHP) 是由美国运筹学家T.L.Saaty在20 世纪70年代初提出的对复杂问题作出决策的简单、实用方法，特别适用于难以定量分析的决策问题。

一、层次分析法的基本原理与步骤

层次分析法的基本思路与人们对复杂问题的决策过程大体一致。当决策者在对问题进行分析时，首先要对分析对象的因素建立起彼此相关的层次递阶结构，这种层次递阶结构可以清晰地反映出诸相关因素(目标、准则、对象) 的彼此关系，使得决策者能够把复杂的问题理顺，然后进行逐一比较、判断，从中选出最优方案。

运用层次分析法建模，大体可分为下面四个步骤：

(1) 建立递阶层次结构；

(2) 构造比较判断矩阵；

(3) 在单准则下的排序和一致性检验；

(4) 层次总排序和一致性检验。

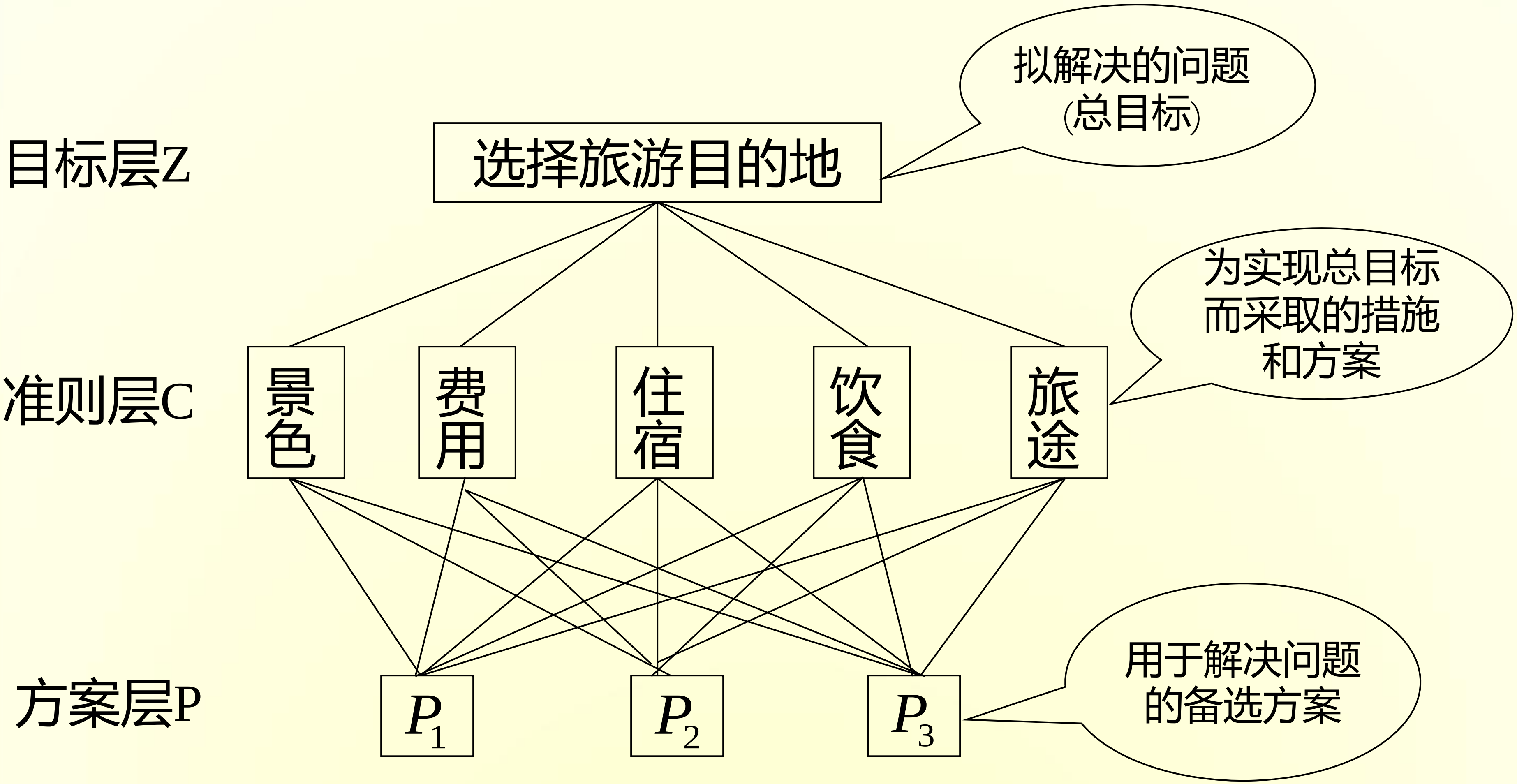
二、递阶层次结构的建立

层次分析法首先把决策问题层次化。所谓层次化就是根据问题的性质以及要达到的目标，将问题分解为不同的因素，并按各因素间的隶属关系和关联程度分组，形成一个不相交的层次。

引例 现有杭州(P1)、北戴河(P2)和桂林(P3)三个旅游地，现从景色、费用、饮食、住宿和旅途5个方面进行选择。

根据问题和通常的决策过程，可以得到问题的分析图。

图中上一层次的元素对相邻的下一层次的全部或部分元素起支配作用，从而形成一个自上而下的逐层支配关系。具有这种性质的结构称为递阶层次结构。



目标层Z
选择旅游目的地
拟解决的问题
(总目标)
准则层C
景色
费用
住宿
饮食
旅途
为实现总目标
而采取的措施
和方案
方案层P
P_1
P_2
P_3
用于解决问题
的备选方案

上述问题的层次结构图

递阶层次结构的最高层称为目标层，这一层只有一个元素，即问题的目标。中间层称为准则层，层中元素是为了实现目标所采用的措施、准则等。最低层称为方案层，层中元素是为实现目标可供选择的方案。

三、比较判断矩阵的构造

由于在决策者的心目中，各准则对目标的影响程度不同，各方案对每个准则的影响程度也不同，所以建立层次结构后的首要任务是确定各准则对目标以及各方案对每个准则的权重。

层次分析法确定上述权重的方法是构造准则层和方案层的比较判断矩阵。

1. 准则层比较判断矩阵的构造

下面介绍准则$C_1,C_2,\ldots,C_n$对目标 Z 的权重的确定方法。

在复杂问题中，准则的权重很难直接获得且不易定量化。Saaty提出可用对准则两两比较的方法来确定权重，即每次取两个准则C_i和C_j，用a_{ij}表示C_i和C_j对Z的影响之比，全部比较结果用矩阵$A=(a_{ij})$表示，称A为准则层的比较判断矩阵。

显然，$a_{ij}=1/a_{ji}$，称A为正互反矩阵。

对于如何确定a_{ij}的值，Saaty提出用数字1～9及其倒数作为标度。

下表中列出了1～9标度的含义：

标度	含义
1	表示两个元素相比，具有同样的重要性。
3	表示两个元素相比，前者比后者稍重要。
5	表示两个元素相比，前者比后者明显重要。
7	表示两个元素相比，前者比后者极其重要。
9	表示两个元素相比，前者比后者强烈重要。
2，4，6，8	表示上述相邻判断的中间值。
倒数：若元素i和元素j的重要性之比为a_{ij}，那么元素j与元素i的重要性之比为$a_{ji}=1/a_{ij}$。	

例如，引例中的准则层比较判断矩阵可以设为

景色	费用	住宿	饮食	旅途

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\
A = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

显然，若C_i和C_j对Z的影响之比为a_{ij}，C_j和C_k对Z的影响之比为a_{jk}，则C_i和C_k对Z的影响之比为a_{ik}，即正互反矩阵A中元素应满足：$a_{ij}\,a_{jk}=a_{ik}$，此时称A为一致矩阵。

单凭经验构造出的比较判断矩阵不一定满足一致性，如引例中的判断矩阵。

比较判断矩阵严格满足一致性是极为困难的，层次分析法要求比较判断矩阵按一定程度满足一致性。

2. 方案层比较判断矩阵的构造

类似地可以构造出各方案对每个准则的比较判断矩阵。

例如，引例中的各方案对每个准则的比较判断矩阵可以设为

相对于不同准则的方案层比较判断矩阵

相对于景色

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ B_1 = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于费用

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ B_2 = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于住宿

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ B_3 = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于饮食

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ B_4 = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于旅途

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ B_5 = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

四、单准则下的排序及一致性检验

1. 单准则下的排序

根据比较判断矩阵确定某层各元素对上层某元素相对权重排序的过程称为单准则下的排序。通常有各方案对某准则的权重排序和各准则对目标的权重排序。

计算权重的方法有多种，比较成熟的是特征根方法。

特征根方法的理论依据是Perron定理，它保证了所得到的排序向量的正值性和唯一性。

Perron定理 设n阶方阵A>0，$\lambda_{\max}$ 为A的模最大特征值，则

(1) $\lambda_{\max}$ 为正特征值，且对应的特征向量为正向量；

(2) 对于A的任何其它特征值 λ，恒有 $|\lambda| < \lambda_{\max}$。

(3) $\lambda_{\max}$为A的单特征值，因而它所对应的特征向量除相差一个常数因子外是唯一的。

下面再给出两个定理，这两个定理分别是权重排序原理和一致性检验原理的理论基础。

定理1 若A为一致矩阵，则

(1) A必为正互反矩阵；

(2) A的任意两行(列)成比例；

(3) A的最大特征值 $\lambda_{\max} = n$，n为A的阶，从而A的其余特征值均为零；

(4) 若A的最大特征值 $\lambda_{\max}$对应的特征向量为 $W = \left(w_1, w_2, \cdots, w_n\right)^T$，则 $a_{ij} = w_i / w_j$，即

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

定理2 若A为n阶正互反矩阵，则

(1) $\lambda_{\max} \geq n$；

(2) A为一致矩阵 $\Leftrightarrow \lambda_{\max} = n$。

根据定理1中的结论 (4)，可以得出确定排序向量的下列方法：

求出比较判断矩阵 A 最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量W，经归一化后即为各准则对目标或各方案对某准则的排序权重向量。

当n较大时，求A的最大特征值绝非易事。除了借助于数学软件外，用下列的所谓和法也可以比较方便地求出A 的最大特征值及对应的特征向量：

(1) 将比较判断矩阵的列向量归一化：

$$A=\left(a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right);$$

(2) 将 A 按行和得：

$$W=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j},\sum_{j=1}^{n}a_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\right)^{T}$$

(3) 将 W 归一化后，得排序向量

$$W=\left(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\right)^T;$$

(4) $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(AW\right)_i}{\omega_i}$ 为最大的特征值。

例1 求比较判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1/3 & 1 & 5\\ 1/7 & 1/5 & 1\end{pmatrix}$ 的最大特征值和权重向量。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1/3 & 1 & 5\\ 1/7 & 1/5 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列归一}}\begin{pmatrix}0.677 & 0.714 & 0.538\\ 0.226 & 0.238 & 0.385\\ 0.097 & 0.048 & 0.077\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行和}} \begin{pmatrix} 1.929 \\ 0.849 \\ 0.222 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{归一化}} \begin{pmatrix} 0.643 \\ 0.283 \\ 0.074 \end{pmatrix}$$

$$W = (0.643, 0.283, 0.074)^T$$

$$AW = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.643 \\ 0.283 \\ 0.074 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.010 \\ 0.867 \\ 0.223 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{3}\left(\frac{2.010}{0.643} + \frac{0.867}{0.283} + \frac{0.223}{0.074} \right) = 3.0677$$

用软件计算出的精确值为3.0649。

2. 比较判断矩阵的一致性检验

虽然在构造比较判断矩阵时，我们不要求具有严格的一致性，但一个混乱、不一致的比较判断矩阵有可能导致决策的失误，所以我们希望在判断时应大体一致，从而对每一层在做单准则排序时，均需要做一致性检验。

根据定理2，$\lambda_{\max} \geq n$，且A为一致矩阵 $\Leftrightarrow \lambda_{\max} = n$，就这意味着$\lambda_{\max}$比$n$大得越多，

A的不一致程度就越严重。因此，可以用

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

作为衡量不一致程度的数量指标，CI称为一致性指标。

CI其实即为除最大特征值以外的其余特征值的负平均值。

究竟CI小到什么程度才算达到我们接受的“满意的一致性”呢？

Lsaaty 按照下列方法给出了衡量是否达到“满意的一致性”的一种数量指标：

随机构造500个n阶正互反矩阵，求出其最大特征值的平均值 $\lambda_{\max}'$，并计算

$$RI = \frac{\lambda_{\max}' - n}{n-1}$$

则RI 可理解为n阶比较判断矩阵的平均一致性指标，称为平均随机一致性指标。

RI的具体数值见下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

显然，当CI 与RI之比较小时，可以认为 A 的不一致性程度很小，达到了所谓的“满意的一致性”。

$CR = \frac{CI}{RI}$ 称为一致性比例。

通常认为，当CR<0.1时，判断矩阵的一致性可以接受，否则应对其适当调整。

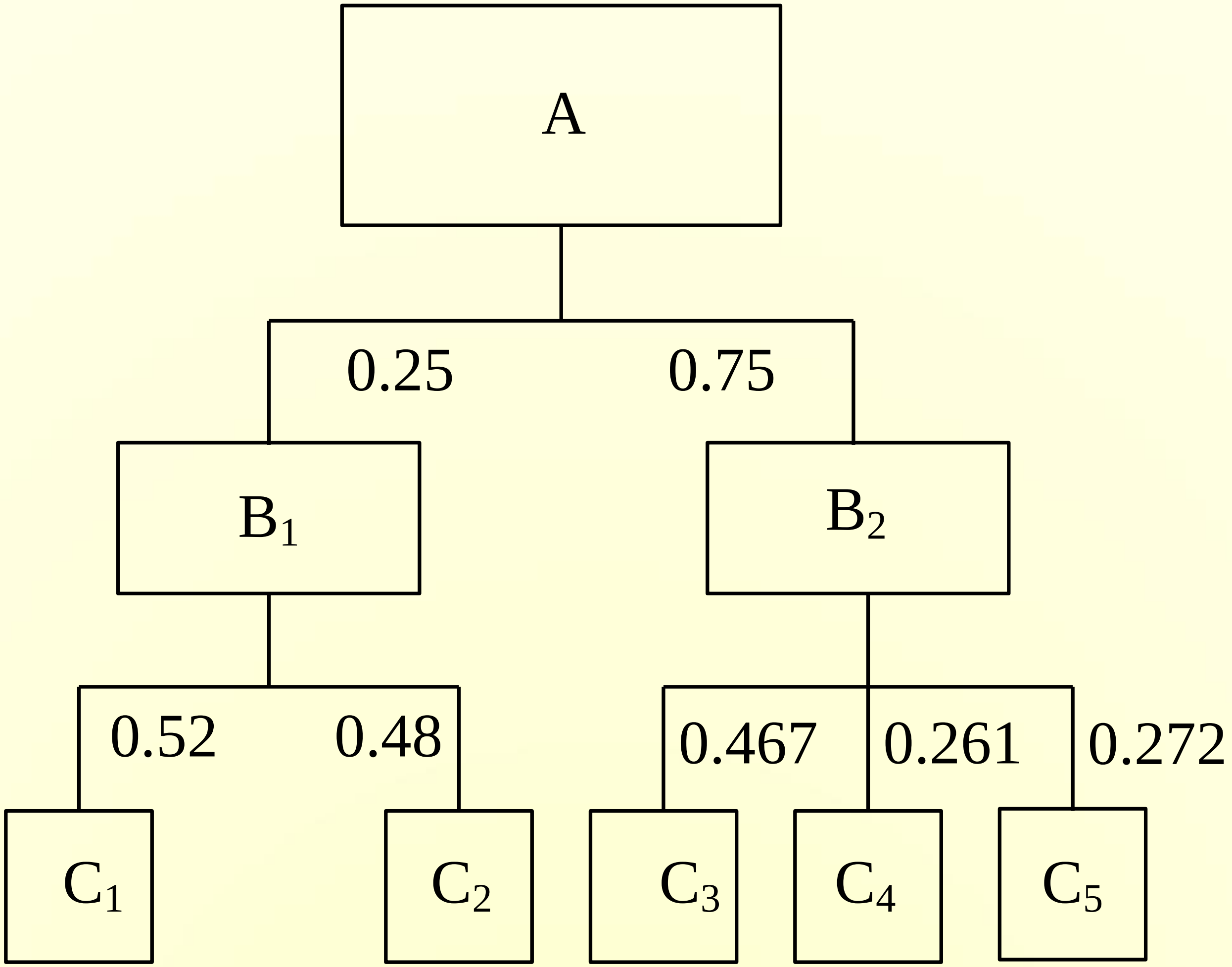
五、层次总排序及一致性检验

1. 层次总排序

计算同一层次中所有元素对总目标的排序权重向量的过程称为层次总排序。

下面通过一个简单的例子来说明这一过程：

先将一块石头A分成两大块B_1和B_2，然后再分别将B_1和B_2各分为两组：C_1, C_2；C_3, C_4, C_5。


A
0.25
0.75
B_1
B_2
0.52
0.48
0.467
0.261
0.272
C_1
C_2
C_3
C_4
C_5

显然，第2层对最高层的排序向量为

$$W^{(2)} = (0.25, 0.75)^T$$

而第3层对第2层单准则下的排序为

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.52 & 0 \\ 0.48 & 0 \\ 0 & 0.476 \\ 0 & 0.261 \\ 0 & 0.272 \end{pmatrix}$$

从而第3层对最高层的排序向量为

$$W=W^{(3)}W^{(2)}=\begin{pmatrix}0.52 & 0\\ 0.48 & 0\\ 0 & 0.476\\ 0 & 0.261\\ 0 & 0.272\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25\\ 0.75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1300\\ 0.1200\\ 0.3503\\ 0.1958\\ 0.2040\end{pmatrix}$$

一般地，若k个层次中第*i*个层次的排序矩阵为$W^{(i)}=(W_j^{(i)})$，其中$W_j^{(i)}$为第*i*层各元素对上一层第 *j* 个元素的排序向量，则第k层的排序向量为 $W^{(k)}W^{(k-1)}\cdots W^{(2)}$

2. 层次总排序的一致性检验

在对各层元素进行比较时，尽管每一层中所用的比较尺度基本一致，但各层之间仍可能有所差异，这种差异将随着层次总排序的逐渐计算而累加起来。因此，需要从模型的总体上来检验这种差异尺度的累积是否显著。这个检验过程称为层次总排序的一致性检验。

设第k层的一致性指标为$CI_1^{(k)},\cdots,CI_n^{(k)}$，n为第$k-1$层因素的个数，相应的随机一致性指标为$RI_1^{(k)},\cdots,RI_n^{(k)}$，$W^{(k-1)}$为第$k-1$层对目标层的排序向量，定义

$$CI^{(k)}=\left(CI_1^{(p)},CI_2^{(p)},\cdots,CI_n^{(p)}\right)W^{(k-1)}$$

$$RI^{(k)}=\left(RI_1^{(p)},RI_2^{(p)},\cdots,RI_n^{(p)}\right)W^{(k-1)}$$

则第k层的组合一致性比率为

$$CR^{(k)} = \frac{CI^{(k)}}{RI^{(k)}}, k = 3, 4, \cdots, s$$

最下层(s层)对最高层的一致性比率为

$$CR^{*} = \sum_{k=2}^{s} CR^{(k)}$$

当 $CR^{*} < 0.1$时，认为整个层次的比较判断通过了一致性检验。

不过，有最新的研究指出，在层次分析法中可不必检验层次总排序的一致性。

六、判断矩阵的调整及AHP的缺陷

当比较判断矩阵过于偏离一致性时，就必须对其调整。调整比较判断矩阵的方法大致分为三类。第一类是由专家凭经验进行调整；第二类是构造一个完全一致的判断矩阵，提取原始判断矩阵与此矩阵的信息，以达到调整的目的；第三类是利用矩阵元素的变化与一致性的关系，确定影响一致性的关键元素并进行调整。

层次分析法把决策过程中的定量和定性因素有机地结合起来，用统一的方法进行处理，简单、直观、易掌握，是一种很好的决策方法。但层次分析法也存在着应用上的局限性：

(1) 层次分析法主要针对方案大体确定的决策问题，即只能从原方案中选优，不能生成新的方案；

(2) 层次分析法的比较判断过程较为粗

糙，不太适用于精度要求较高的决策问题;

(3) 层次分析法在很大程度上依赖于人们的经验，受主观因素的影响很大。它至多只能排除思维过程中的严重非一致性，却无法排除决策者个人可能存在的严重片面性。

克服上述缺陷的常用方法有：利用群组决策；将层次分析法与其它决策方法相结合，如模糊层次分析法。

七、模糊层次分析法

层次分析法作为一种定性与定量相结合的决策工具，近二十年来得到迅速的发展。但由于检验比较判断矩阵一致性时计算上的困难性、调整比较判断矩阵时的复杂性以及比较判断矩阵的一致性与人类思维的一致性差异性等问题，人们将模糊思想和方法引入了层次分析法。

1983年荷兰学者Loargoven提出用模糊数构造比较判断矩阵的思想，之后许多学者加入了FuzzyAHP的研究, 先后提出了不少Fuzzy AHP方法。

下面介绍利用模糊互补判断矩阵进行排序的一种方法。

定义1 若判断矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 满足

$$0 < a_{ij} < 1,\ a_{ij} + a_{ji} = 1$$

则称A为模糊互补判断矩阵。

对模糊互补判断矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，若

$$a_{ij}=a_{ik}-a_{jk}+0.5$$

则称A为模糊一致性判断矩阵。

定义2 设有s个模糊互补判断矩阵

$$A=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n},k=1,2,\cdots,s$$

令

$$\overline{a_{ij}}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k a_{ij}^{(k)},\lambda_k>0,\sum_{k=1}^{s}\lambda_k=1$$

则称 $\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)_{n\times n}$ 为$A_k\ (k=1,2,\cdots,s)$的合成矩阵。

可证：模糊一致性判断矩阵的合成矩阵仍是模糊一致性判断矩阵。

Fuzzy AHP中的模糊标度如下表：

标度可以根据实际问题适当增减。

标度	含义
0.1	表示两个元素相比，后者比前者极端重要。
0.3	表示两个元素相比，后者比前者明显重要。
0.5	表示两个元素相比，后者与前者同等重要。
0.7	表示两个元素相比，前者比后者明显重要。
0.9	表示两个元素相比，前者比后者极端重要。

按上述标度构成的判断矩阵满足：

$$0 < a_{ij} < 1, a_{ij} + a_{ji} = 1, a_{ii} = 0.5$$

定理1 设$W=\left(w_1, w_2, \cdots, w_n\right)^T$为模糊互补判断矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$的排序向量。若$a_{ij}=w_i-w_j+0.5$，则A为模糊一致性判断矩阵。

根据此定理和条件极值，可以得出：

定理2 设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为模糊互补判断矩阵，$W=\left(w_1, w_2, \cdots, w_n\right)^T$为A的排序向量，则

$$w_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + 1 - \frac{n}{2}\right), i = 1, 2, \cdots, n$$

此公式称为排序公式。

(1) 这种导出排序向量的方法称为最小方差法(LVM)；

(2) 可以直接由模糊互补判断矩阵利用排序公式求出排序向量；

(3) 若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < \frac{n}{2} - 1$，则权重会出现负或零值，此时应重新判定。

模糊层次分析法的优点在于：

在进行模糊层次分析的操作中，不必再顾及比较判断矩阵是否满足一致性了，而只需判定$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < \frac{n}{2} - 1$是否出现。若出现，说明模糊判断矩阵不满足一致性，需要调整，否则直接求出权向量。