《大学物理 II》作业　　No.01 机械振动

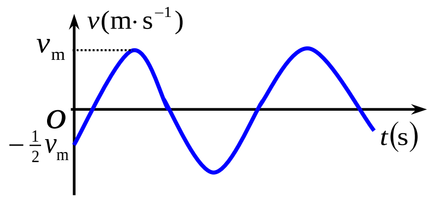
班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 _______

一、选择题

*1、一质点作简谐振动，其运动速度与时间的关系曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相位为：　[　B　]

(A) $-\dfrac{2\pi}{3}$　　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$

(C) $-\dfrac{5\pi}{6}$　　(D) $-\dfrac{\pi}{6}$



解： 设振动方程为：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

则速度方程为：$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$　　(1)

$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$　　(2)

由(1)知初始速度为负，则 $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$,或$\dfrac{5\pi}{6}$，由(2)可知初始加速度为正，则初始位移为负，最终取$\dfrac{5\pi}{6}$。故选 B。

2、 轻弹簧上端固定，下端系一质量为m_1的物体，稳定后在m_1下边又系一质量为m_2的物体，于是弹簧又伸长了Δx。若将m_2移去，并令其振动，则振动周期为：[　B　]

(A) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2\Delta x}{m_1 g}}$　　(B) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$

(C) $T = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$　　(D) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2\Delta x}{(m_1+m_2)g}}$

解： 设弹簧劲度系数为 k，由题意，$m_2 g = k\cdot\Delta x$，所以$k = \dfrac{m_2 g}{\Delta x}$。弹簧

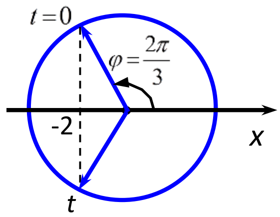
振子由弹簧和m_1组成，振动周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$。故选 B。

3、 一质点在 x 轴上作简谐振动，振幅 $A=4\text{cm}$，周期$T=2\text{s}$，其平衡位置取作坐标原点。若 t = 0 时刻质点第一次通过 x = -2cm 处，且向 x 轴负方向运动，则质点第二次通过 x = -2cm 处的时刻为：[B]

(A) 1s (B) $\frac{2}{3}$s (C) $\frac{4}{3}$s (D) 2s

解： 由旋转矢量图可知，两次通过 x = -2cm 所用时间为$\frac{T}{3}$，所以第二次通过 x = -2cm 处时刻为：

$t=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$ (s)。故选 B。



*4.两个振动方向、振幅、频率均相同的简谐运动相遇叠加，测得某一时刻两个振动的位移都等于零，而运动方向相反．则表明两个振动的：[B]

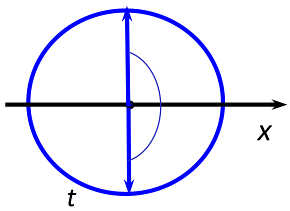
(A) 相位差$\Delta\varphi=\pi$， 合振幅$A'=2A$

(B) 相位差$\Delta\varphi=\pi$， 合振幅$A'=0$

(C) 相位差$\Delta\varphi=0$， 合振幅$A'=0$

(D) 相位差$\Delta\varphi=0$， 合振幅$A'=\sqrt{2}A$

解： 由旋转矢量图即可知：位移为零，两振动都在平衡位置，运动方向相反，即一个振动初相为$\frac{\pi}{2}$，另一振动初相为-$\frac{\pi}{2}$，因此两振动相位差$\Delta\varphi=\pi$，合振动振幅为零。



5、一物体作简谐振动，振动方程为$x=A\cos(\omega t+\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi})$。则该物体在$t=\frac{T}{8}$

（T 为振动周期）时刻的动能与 $t = 0$ 时刻的动能之比为：[　**B**　]

(A)　1:4　　　　(B)　1:2　　　　(C)　2:1　　　　(D)　4:1

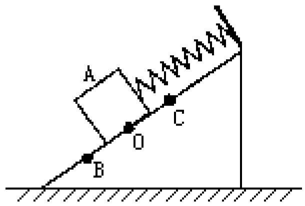
解： 由简谐振动系统的动能公式：$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \frac{1}{2}\pi)$

有 $t = 0$ 时刻的动能为：$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\frac{2\pi}{T}\cdot 0 + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}kA^2$

$t = \frac{T}{8}$ 时刻的动能为：$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8} + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}kA^2$，

则在 $t = \frac{T}{8}$ 时刻的动能与 $t = 0$ 时刻的动能之比为：1:2。

*6.光滑斜面上物块 A 被平行斜面的轻质弹簧拉住静止于 O 点，如图所示，现将 A 沿斜面拉到 B 点无初速释放，物体在 BC 范围内做简谐运动，则下列说法正确的是：[　**C**　]



(A) OB 越长，振动能量越小

(B) 在振动过程中，物体 A 机械能守恒

(C) A 在 C 点时，由物体与弹簧构成的系统势能最大，在 O 点时势能最小

(D) A 在 C 点时，由物体与弹簧构成的系统势能最大，在 B 点势能最小

解： 作简谐运动的能量跟振幅有关，振幅越大机械能就越大，所以 A 错误；在简谐运动中，系统机械能守恒，但物体 A 的重力势能与动能总和不断变化，A 的机械能不守恒，B 错误；在简谐运动中，系统

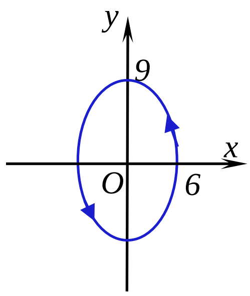
在最大位移处势能最大，在平衡位置动能最大，势能最小，D 错误。故选 C。

*7.已知某音叉与频率为 511Hz 的音叉产生的拍频为每秒一次，而与频率为 512Hz 的音叉产生的拍频为每秒两次，则该音叉的频率为：[A]

(A) 510Hz　　(B) 511Hz　　(C) 512Hz　　(D) 514Hz

解： 根据$\nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|$可知，音叉的频率为 510Hz。故选 A。

*8.图中椭圆是两个互相垂直的同频率谐振动合成的图形，已知x方向的振动方程为$x=6\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，动点在椭圆上沿逆时针方向运动，则$y$方向的振动方程应为：[　B　]



(A) $y=9\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$；

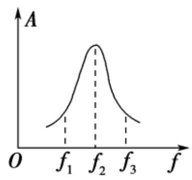
(B) $y=9\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$；

(C) $y=9\cos(\omega t)$；

(D) $y=9\cos(\omega t+\pi)$。

解： 由图可知，两个互相垂直的同频率谐振动的相位差为$\Delta\varphi=\frac{3}{2}\pi$，已知$x$方向谐振动的初相为$\frac{\pi}{2}$，则$y$方向谐振动初相为：$\varphi_2=2\pi$，振动方程为$y=9\cos(\omega t)$。故选 C。

*9.如图所示为一个弹簧振子做受迫振动时振幅与驱动力频率之间的关系图像，由图可知：[　C　]



(A) 让振子自由振动，它的频率可以为 f_1、f_2、f_3

(B) 驱动力频率为 f_2 时，振子所受驱动力最强

(C) 驱动力频率为 f_3 时，振子的振动频率为 f_3

(D) 假如让振子自由振动，它的频率是 f_1

解：假如让振子自由振动，其频率为固有频率，由系统本身决定，应为 f_2，故 AD 错误；由题意可知，当驱动力的频率变化时，做受迫振动的弹簧振子的振幅在变化，当驱动力频率为 f_2 时，受迫振动的振幅最大，即发生共振，B 错误；弹簧振子做受迫振动的频率等于驱动力的频率，C 正确。

*10.在飞机的发展史中有一个阶段，飞机上天后机翼很快就抖动起来，而且越抖越厉害，后来人们经过了艰苦的探索，利用在飞机机翼前缘处装置一个配重杆的方法，解决了这一问题。在飞机机翼前装置配重杆的主要目的是：[　D　]

(A) 加大飞机的惯性　　(B) 使机体更加平衡

(C)使机翼更加牢固　　(D) 改变机翼的固有频率

解：当驱动力的频率与物体的固有频率相等时，发生共振，振幅最大，因此要减弱机翼的振动，必须改变机翼的固有频率。

二、判断题

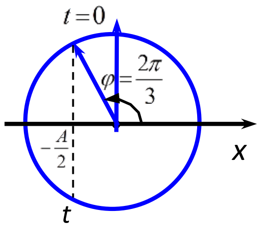
*1.同方向同频率的几个简谐运动合成后的运动一定仍为同方向同频率的简谐运动。

解： 正确。根据旋转矢量，同方向同频率的几个简谐振动对应的旋转矢量，在旋转过程中平行四边形的形状不变，即合矢量的大小不变且以相同的角速度转动，合矢量代表的合振动为与分振动同方向同频率的简谐振动。

*2.同方向同频率的两简谐振动合成后，合振动的振幅不随时间变化。

解： 正确。同方向同频率的两简谐振动合成后，合振动也为简谐振动，振幅可表示为：$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$，不随时间变化。

*3.质点作简谐振动时，从平衡位置运动到最远点需时$\frac{1}{4}$周期，因此走过该距离的一半需时$\frac{1}{8}$周期。

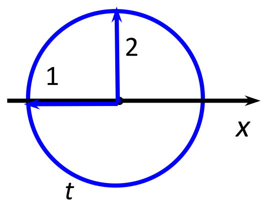


解： 错误。根据题意，从平衡位置运动到最远点需时$\frac{T}{4}$，可得$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$。从平衡位置运动到一半距离时，$-\frac{A}{2}=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，可得$t=\frac{T}{12}$。

*4. 一个作简谐振动的物体，其位移与加速度的相位始终相差 π。

解： 正确。$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0+\pi)$，可以看出位移与加速度的相位始终相差 π。

*5.两个作同频率简谐振动的质点，质点 1 的相位比质点 2 的相位超前$\frac{\pi}{2}$。则当第一个质点在负的最大位移处时，第二个质点恰好在平衡位置处，且向正方向运动。



解： 错误。由旋转量法可知：第一个质点在负的最大位移处时，第二个质点恰好在正的平衡位置处，向着负方向运动。

*6.简谐运动的动能和势能都随时间作周期性的变化，且变化频率与位移变化频率相同。

解： 错误。简谐运动的动能和势能都随时间作周期性的变化，变化频率是位移变化频率的 2 倍。

*7.质点的合振动矢量端点的轨迹一般为圆。

解： 错误。同方向同频率的简谐振动的合振动对应的旋转矢量端点轨迹为圆，其余情况不是。

*8.拍现象是同方向同频率不同振幅的两谐振动合成的结果。

解： 错误。拍现象是同方向不同频率的两简谐振动合成的结果。

三、填空题

*1. 研究简谐振动的理想模型是<u> 弹簧振子 </u>，简谐振动的特点是其运动是<u> 最简单的周期性直线运动   </u>。简谐振动的第一个判据为：

物体所受回复力恒与位移成正比且反相，第二个判据为：物理量对时间的二阶导数与其本身成正比且反号时，该物理量按简谐振动规律变化，第三个判据为：物理量如果是时间的余弦（或正弦）函数，那么该物理量按简谐振动规律变化，研究简谐振动方便而有效的方法是旋转矢量法，在该方法中：旋转矢量的模对应谐振动的振幅，角速度对应谐振动的角频率，t=0 时旋转矢量与 x 轴的夹角对应谐振动的初相。

解： 由教材《大学物理学》（第二版）下册，张晓，王莉，高等教育出版社，P371-P378 可知。

1、一简谐振动的表达式为 $x = A\cos(4t+\varphi)$，已知 $t=0$ 时的初位移为 0.03m，初速度为 0.16m·s^{-1}，则振幅 A = 0.05m，初相位 φ = -53.13°。

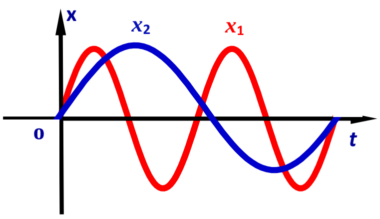
解： 由已知初始条件，得振幅：

$$A=\sqrt{x_0^2+(-\frac{v_0}{\omega})^2}=\sqrt{0.03^2+(-\frac{0.16}{4})^2}=0.05(\mathrm{m})$$

初相： $$\varphi=\tan^{-1}(-\frac{v_0}{\omega x_0})=\tan^{-1}(-\frac{0.16}{4\times 0.03})=-53.13^\circ$$

因为 $x_0>0$，$v_0>0$，应为第四象角，所以 $\varphi=-53.13^\circ$ 或 306.87°

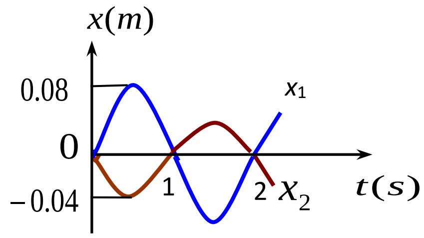
*2. 两个简谐振动曲线如图所示，两个简谐振动的频率之比 $\nu_1:\nu_2$ 2:1，加速度最大值之比 $a_{1m}:a_{2m}$ = 4:1，



初始速率之比$\upsilon_{10}:\upsilon_{20}$ ___2:1___。

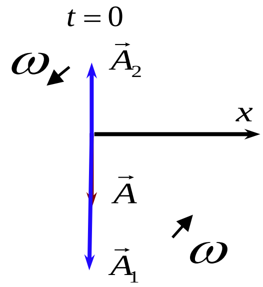
解： 由图可知，$T_1:T_2=1:2$，则$\nu_1:\nu_2=2:1$；加速度最大值为$\omega^2 A$，则$a_{1m}:a_{2m}=4:1$；速度最大值为ωA，则$\upsilon_{10}:\upsilon_{20}=2:1$。

*3.图中所示为两个简谐振动曲线，若以余弦函数表示这两个振动的合成结果，则合振动的频率ν为_0.5 s^{-1}_，振幅A为_0.04 m_，初相φ为_$-\frac{\pi}{2}$ rad_。



解： 由振动曲线可知两振动角频率相同，相位相反。其中角频率为$\omega=2\pi/T=\pi$，故$\nu=\omega/(2\pi)=0.5(\mathrm{s}^{-1})$，

将t=0时两振动的旋转矢量画出来如下图，由图知：



合振动的振幅：$A=A_1-A_2=0.08-0.04=0.04(\mathrm{m})$

合振动的初相：$\varphi=-\frac{\pi}{2}$（或$\frac{3\pi}{2}$）

*4.两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为20 cm，与第一个简谐振动的相位差为$\phi-\phi_1=\frac{\pi}{6}$。若第一个简谐振动的振幅为$10\sqrt{3}\mathrm{cm}=17.3\mathrm{cm}$，则第二个简谐振动的振幅为___10cm___，第一、二两个简谐振动的相位差为：$\phi_2-\phi_1=$___$\frac{\pi}{2}$___。

解： 根据余弦定理$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2A_1A\cos\frac{\pi}{6}}=10\mathrm{cm}$，又根据合振动的振

幅 $A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ 可得相位差 $\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 。

*5.一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的 $\dfrac{1}{4}$ 时，其势能是总能量的___$\dfrac{E}{16}$____（设平衡位置处势能为零）。当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl ,这一振动系统的周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$ ___.

解： 简谐振动总能量： $E=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}kA^2$ ，

当 $x=\dfrac{1}{4}A$ 时，势能： $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}k(\dfrac{A}{4})^2=\dfrac{E}{16}$ 。

物块在平衡位置时，弹簧伸长 Δl ，则 $mg=k\Delta l$ ， $k=\dfrac{mg}{\Delta l}$ ，

振动周期： $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$

*6.一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的__$E_k=\dfrac{3}{4}E$____（设平衡位置处势能为零）。当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl ,这一振动系统的周期为___$T=2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$____，这时将此弹簧截去一半的长度，下端挂一质量减半的物块，则系统的振动周期又为___$T=\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$__________。

解： 简谐振动总能量： $E=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}kA^2$

当 $x=\frac{1}{2}A$ 时：　　$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2=\frac{E}{4}$

所以动能：　　$E_k=E-E_p=\frac{3}{4}E$。

物块在平衡位置时，弹簧伸长 Δl，则 $mg=k\Delta l$，$k=\frac{mg}{\Delta l}$，

振动周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$。

弹簧截去一半后，其劲度系数为 $2k=2\frac{mg}{\Delta l}$，当挂一质量减半的物块时，其质量为 $\frac{1}{2}m$，振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m}{2\frac{mg}{\Delta l}}}=\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$，即为原周期的一半。

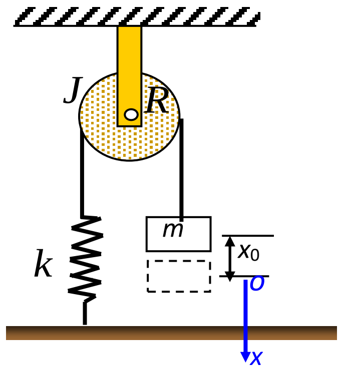
*7.一质点同时参与了两个互相垂直的简谐振动，其表达式分别为：$x=A\cos(\omega t+\phi)$，$y=2A\cos(2\omega t+2\phi)$，其中 A，ω，ϕ 都为常量，则合振动的轨迹方程为___$\frac{x^2}{A^2}+\frac{2A-y}{4A}=1$______。

解： 消去时间参数 t 可得轨迹曲线。即：$\left(\frac{x}{A}\right)^2=\cos^2(\omega t+\phi)$，

$y=2A[1-2\sin^2(\omega t+\phi)]$，两式联立可得：$\frac{x^2}{A^2}+\frac{2A-y}{4A}=1$ 或 $y=\frac{4}{A}x^2-2A$，为抛物线。

四、计算题

*1.一定滑轮的半径为 R，转动惯量为 J，其上挂一轻绳，绳的一端系一质量为 m 的物体，另



一端与一固定的轻弹簧相连，如图所示。设弹簧的劲度系数为 k，绳与滑轮间无滑动，且忽略摩擦力及空气的阻力。现将物体 m 从平衡位置拉下一微小距离后放手，证明物体作简谐振动，并求出其角频率。

解： 取如图 x 坐标，平衡位置为坐标原点，向下为正方向。

m 在平衡位置，弹簧伸长 x_0，则有

$$mg = kx_0 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

现将 m 从平衡位置向下拉一微小距离 x，m 和滑轮 M 受力如图所示。

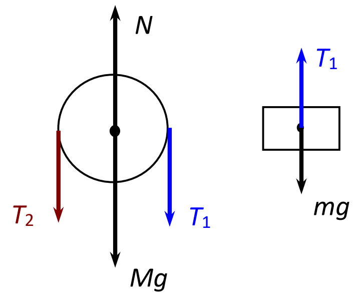
由牛顿定律和定轴转动定律列方程，有：

$$mg - T_1 = ma \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

$$T_1R - T_2R = J\beta \quad \dots\dots\dots\dots(3)$$

$$a = R\beta \quad \dots\dots\dots\dots(4)$$

$$T_2 = k(x + x_0) \quad \dots\dots\dots\dots(5)$$



联立以上各式，可以解出 $a = -\dfrac{k}{\dfrac{J}{R^2}+m}x = -\omega^2 x$，（※）

由判据 2 知（※）式是谐振动方程，

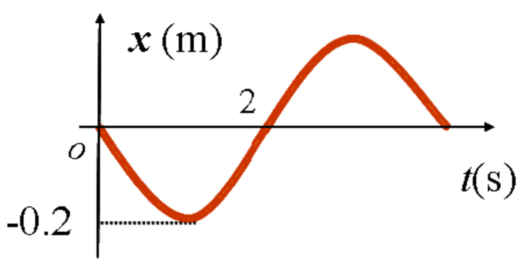
所以物体作简谐振动，角频率为 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\dfrac{J}{R^2}+m}} = \sqrt{\dfrac{kR^2}{J+mR^2}}$

2、一质点作简谐振动，其振动曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，求：

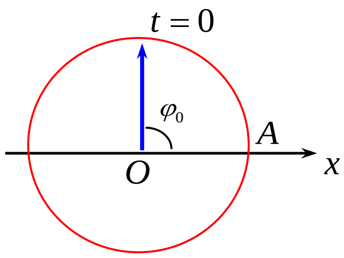
（1）振动方程；

（2）$t = 1.5\,\mathrm{s}$ 时速度大小；

（3）$t = 1\,\mathrm{s}$ 时加速度大小。



解：（1） 由图所知： $A=0.2\text{m}, T=4\text{s}$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$



由旋转矢量图知： $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

故振动方程为：$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.2\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2})(\text{m})$

（2） 速度为： $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)=-\frac{\pi}{10}\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$，将 $t=1.5\,\text{s}$ 代入：

$$v=-\frac{\pi}{10}\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{20}\approx 0.22(\text{m/s})$$

（3） 加速度为： $a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)=-\frac{0.1}{2}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$，将 $t=1\text{s}$

代入得： $a=\frac{0.1}{2}\pi^2=\frac{1}{20}\pi^2\approx 0.49(\text{m/s}^2)$

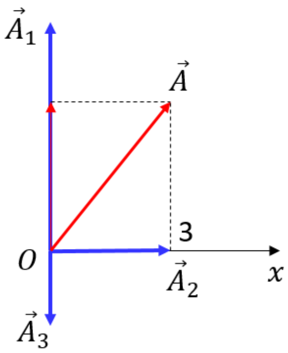
*3. 已知三个简谐振动方程为： $x_1=6\cos(\pi t+\pi/2)$， $x_2=3\sin(\pi t+\pi/2)$，

$x_3=2\cos(\pi t-\pi/2)$， 求这三个简谐振动的合振动。

解：

$$\begin{aligned}
x&=x_1+x_2+x_3\\
&=6\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})+3\sin(\pi t+\frac{\pi}{2})+2\cos(\pi t-\frac{\pi}{2})\\
&=6\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})+3\cos(\pi t)+2\cos(\pi t-\frac{\pi}{2})\\
&=4\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})+3\cos(\pi t)\\
&=5\cos\left[\pi t+\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right]
\end{aligned}$$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ $\qquad$ $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$



五、简答题

*由于地球的自转以及地球不是正球体，重力加速度 g 随着地球上的位置而改变，这最初是在 17 世纪被发现的，当时人们观察到一个经过仔细调节的摆钟，在巴黎能准确计时，而在赤道附近则每天慢将近 90 秒，那么 g 的相对变化量 $\frac{\Delta g}{g}$ 是多少？

解：由于 g 的微小变化会使摆钟的周期 T 产生一个微小变化，

$\because T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$　　$\therefore \mathrm{d}T=-\pi\frac{\sqrt{l}\mathrm{d}g}{g^{3/2}}$　　故$\Delta T\doteq -2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\Delta g}{2g}$　　$\frac{\Delta T}{T}\doteq-\frac{\Delta g}{2g}$

由题意知$t=24\times60\times60s,\ g=9.8m/s^2$

$\Delta t=-90s,$

则$\frac{\Delta g}{g}\doteq-\frac{2\cdot\Delta T}{T}=-\frac{2\cdot\Delta t}{t}=2.08\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$