- 库仑定律
- 电场强度
- 高斯定理
- 环路定理、电势
- 电场强度与电势的关系
- 静电平衡、有导体存在时的电场和电势

□ 电荷正负性

实验证明：物体所带电荷有两种（**正电荷、负电荷**），而且自然界也只存在这两种电荷，电荷之间有相互作用。**同号**电荷相互**排斥**，**异号**电荷相互**吸引**，这种相互作用力称为电性力。

□ 电荷量子化

1906～1917年，密立根（R.A. Millikan）用液滴法测定了电子电荷

$$Q = \pm Ne \qquad e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

盖尔---曼提出夸克模型： $\pm\frac{1}{3}e \qquad \pm\frac{2}{3}e$

□ 电荷守恒

在一个孤立系统中总电荷量不变，即在任何时刻系统中的正电荷与负电荷的代数和保持不变。

近代科学实践证明，电荷守恒定律适用于一切宏观和微观过程（例如核反应和基本粒子过程），是物理学中普遍的基本定律之一。

□ 电荷的相对论不变性

电荷的电量与它的运动状态无关

点电荷 当带电体的大小、形状与带电体间的距离相比可以忽略时，就可把带电体视为一个带电的几何点。 （一种理想模型）

库仑定律 处在静止状态的两个点电荷，在真空（空气）中的相互作用力的大小，与每个点电荷的电量成正比，与两个点电荷间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两个点电荷的连线。

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}$$

$10^{-17}\mathrm{m}\sim10^{7}\mathrm{m}$范围均成立。

ε_0---真空中的电容率（介电常数）

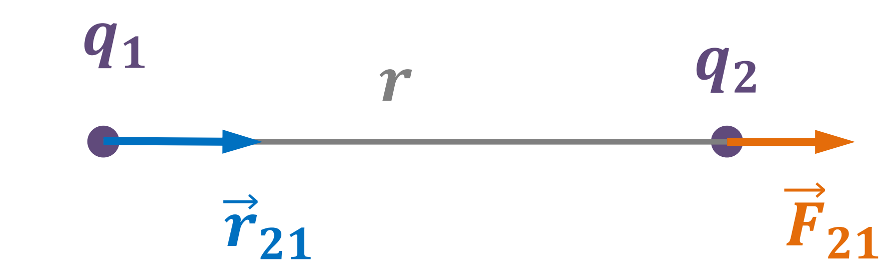
$$\varepsilon_0=8\cdot85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$$

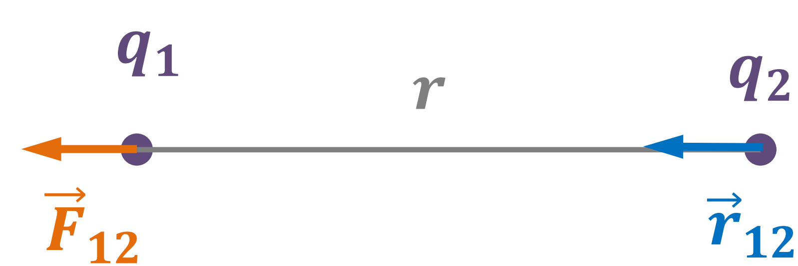
电荷q_1对q_2的作用力$\vec{F}_{21}$

电荷q_2 对q_1的作用力$\vec{F}_{12}$

$$F_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}_{21}=-\vec{F}_{12}$$





- 库仑定律适用于真空中的点电荷；
- 库仑力满足牛顿第三定律；
- 一般$F_{电}>>F_{万}$

电磁学是研究电磁现象的规律的学科。它研究物质间的电磁相互作用，以及电磁场产生、变化和运动的规律。

历史上对于电磁现象的观察与研究

- 观察与记录阶段

“顿牟缀芥，磁石引针”

- 定量研究阶段
  - 1785年，库仑提出静电公式---库仑定律；
  - 1800年，伏打发明电堆，电学由静电走向动电；
  - 1820年，奥斯特发现电流的磁效应；
  - 1820年，安培提出电流元之间的相互作用规律---安培定律；
  - 1831年，法拉第发现了电磁感应现象；
  - 1865年，麦克斯韦建立了完整的电磁场理论。

库仑定律的建立

- 1759年，爱皮努斯（F. U. T. Aepinus)

  假设电荷之间的斥力和吸力随带电物体的距离的减少而增大。
- 1760年，伯努利（Daniel Bernoulli)

  猜测电力会不会也跟万有引力一样，服从平方反比定律。
- 1767年，普利斯特利（Joseph Priestley)

  电的吸引与万有引力服从同一定律，即距离的平方。

空罐实验表明：带电的空腔金属容器对放于其内部的电荷明显地没有作用力。

牛顿力学证明： 如果万有引力服从平方反比定律，则均匀的物质球壳对壳内物体应无作用。

我曾经把库仑的文章拿来看了一看，发现他写出的那个公式同实验的误差达到30%以上，估计他写这个公式，一部分是“猜”出来的。猜测的道理是因为他已知道牛顿的公式。

杨振宁：上海物理学会演讲

---1978年7月6日

杨振宁： “科学是猜想的学问，不是幻想的学问。”

Notes:

实验精确度

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^{2+\delta}}$$

- 1785年，$|\delta| < 4 \times 10^{-2}$ (Coulomb)
- 1873年，$|\delta| < 5 \times 10^{-5}$ (Maxwell)
- 1936年，$|\delta| < 2 \times 10^{-9}$ (Laudon)
- 1971年，$|\delta| < 2 \times 10^{-16}$ (Williams)

真空(Vacuum)

◆作用：为了除去其它电荷的影响，使两个点电荷只受对方作用。

◆如果真空条件破坏会如何?

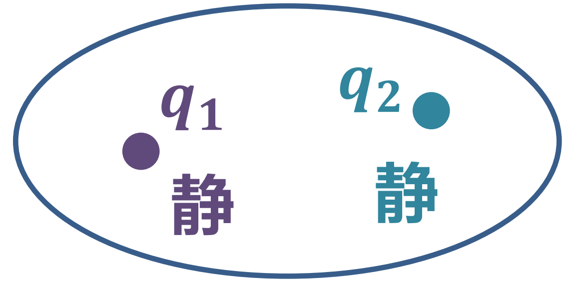
总作用力比真空时复杂些，但由于力的独立作用原理，两个点电荷之间的力仍遵循库仑定律。

◆因此库仑定律可以推广到介质、导体!

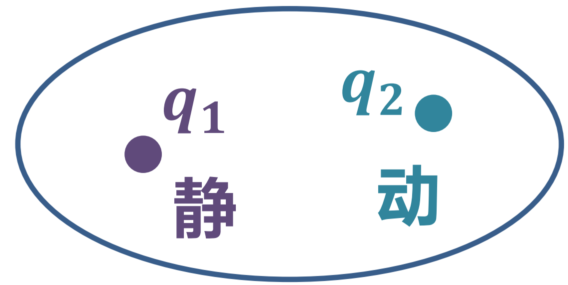
静止(Static)：

点电荷相对静止，且相对于观察者也静止。

- ◆该条件可以拓宽到 **静源---动电荷；**
- ◆该条件不能延拓到 **动源---静电荷(why?)**
  因为作为运动源，有一个推迟效应。
- ◆问题：上述结论是否与牛顿第三定律矛盾?
  结果合理吗?



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



$$\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$$

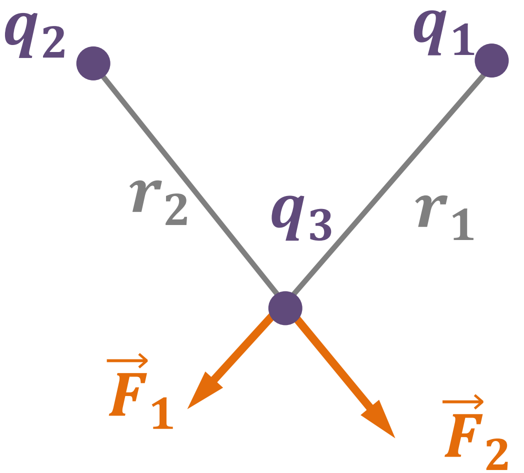
- ■ 看上去与牛顿第三定律矛盾
- ■ 实际上正说明电荷间有第三者---**场**
  两电荷静止，场的动量不变，作用力对等
- ■ 电荷运动时，其场的动量发生变化，作用力不对等
- ■ 将场包含进去，满足动量守恒

两点电荷间相互作用力不因其它电荷的存在而改变。
点电荷系对某点电荷的作用等于系内各点电荷单独存在时对该电荷作用的矢量和。---静电力叠加原理

◆ 点电荷系

q_3受的力：

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$



对n个点电荷：

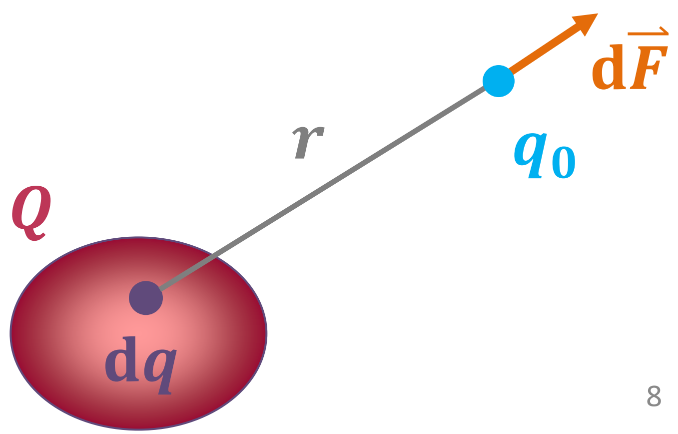
$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$$

$$=\sum_i \vec{F}_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$$

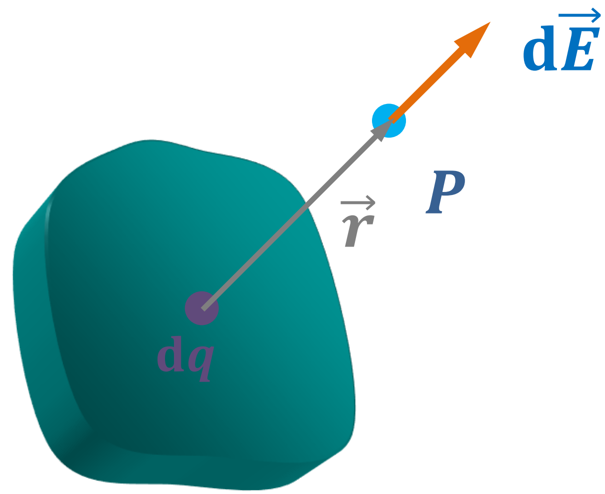
◆ 电荷连续分布的带电体

$$\mathrm{d}\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F}=\int\frac{q_0\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$



◆ 连续分布带电体



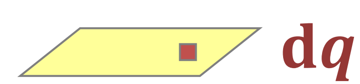
$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

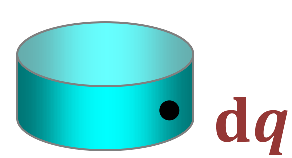
$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int \frac{q_0\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\begin{cases} F_x = \int \mathrm{d}F_x \\ F_y = \int \mathrm{d}F_y \\ F_z = \int \mathrm{d}F_z \end{cases}$$

$$\mathrm{d}q = \begin{cases} \lambda\mathrm{d}l \\ \sigma\mathrm{d}S \\ \rho\mathrm{d}V \end{cases}$$

$\lambda\mathrm{d}l$	线分布	线密度λ	线元dl
$\sigma\mathrm{d}S$	面分布	面密度σ	面元dS
$\rho\mathrm{d}V$	体分布	线密度ρ	体元dV





已知两杆电荷线密度为λ，长度为L，相距L。
求两带电直杆间的电场力。

解：$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}q' = \lambda \mathrm{d}x'$$

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}q'}{r^2} = \frac{\lambda\mathrm{d}x\lambda\mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}$$

$$F = \int_{2L}^{3L}\mathrm{d}x'\int_0^L \frac{\lambda^2\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x'-x)^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{3}$$

电场 (Electric field)

电荷周围存在电场。

◆ 电场的基本性质

- □ 对置于其中的任何电荷都有作用力（电场力）；
- □ 电场力对移动电荷做功。

● 静电场

相对于观察者静止的电荷产生的电场，
是电磁场的一种特殊形式。

静电场

- ●早期：电磁理论是超距作用理论
- ●后来：法拉第提出力线和场的概念

- ◆场中任何带电体都受电场力作用
  ---场与带电体之间的**动量**传递
- ◆带电体在电场中移动时，场对带电体做功
  ---场与带电体之间的**能量**传递

- □ 场是空间位置的函数
- □ 物理学中的场具有实在性
- □ 物理学中的场依附于物质而存在，场是物质存在的一种形式

$\vec{E}$ 空间矢量函数
研究静电场即对各种场源电荷求其$\vec{E}$分布

电场是一种物质。它具有能量、动量、质量。场与实物粒子的不同在于：

- ◆具有可入性
- ◆场具有叠加性

场源电荷 —— 产生电场的点电荷、点电荷系、或带电体。

检验电荷 $\begin{cases} \text{带电量足够小} \\ \text{点电荷} \end{cases}$ 略去对场源电荷分布的影响；与场点对应

电场强度 $\vec{E}$ 在电场中任一位置处： $\dfrac{\vec{F}_1}{q_1} = \dfrac{\vec{F}_2}{q_2} = \vec{E}$

电场中某点的电场强度

大小：等于单位检验电荷在该点受力的大小，

方向：为正电荷在该点受力的方向。

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

单位： $\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

点电荷系在某点P产生的电场强度等于各点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和---电场强度叠加原理

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

◆ 点电荷的电场

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^3}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

◆ 点电荷系的电场

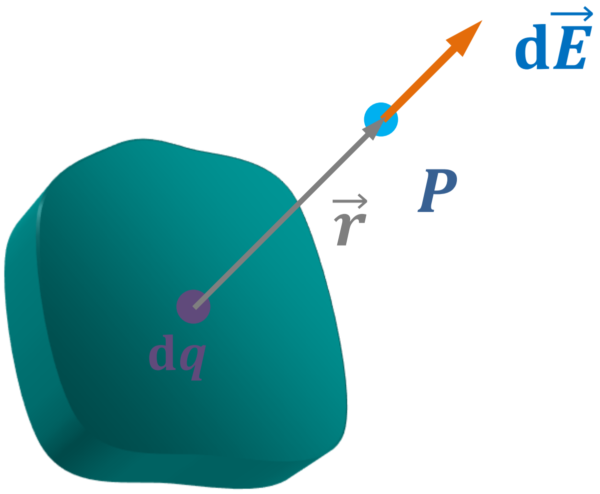
$$\vec{E}=\frac{\sum_k \vec{F}_k}{q_0}=\sum_k \vec{E}_k=\sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_k^3}\vec{r}_k$$

◆ 连续分布带电体

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$$

$$=\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$



$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\vec{r}\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

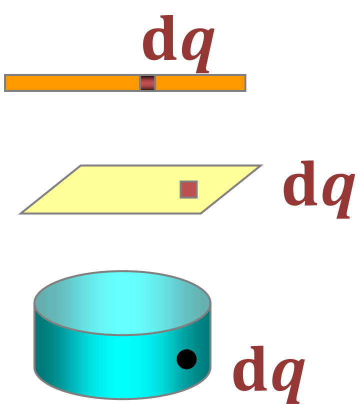
$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$$

$$\begin{cases} E_x=\int \mathrm{d}E_x \\ E_y=\int \mathrm{d}E_y \\ E_z=\int \mathrm{d}E_z \end{cases}$$

◆ 连续分布带电体

$$\mathrm{d}q=\begin{cases} \lambda \mathrm{d}l \\ \sigma \mathrm{d}S \\ \rho \mathrm{d}V \end{cases}$$

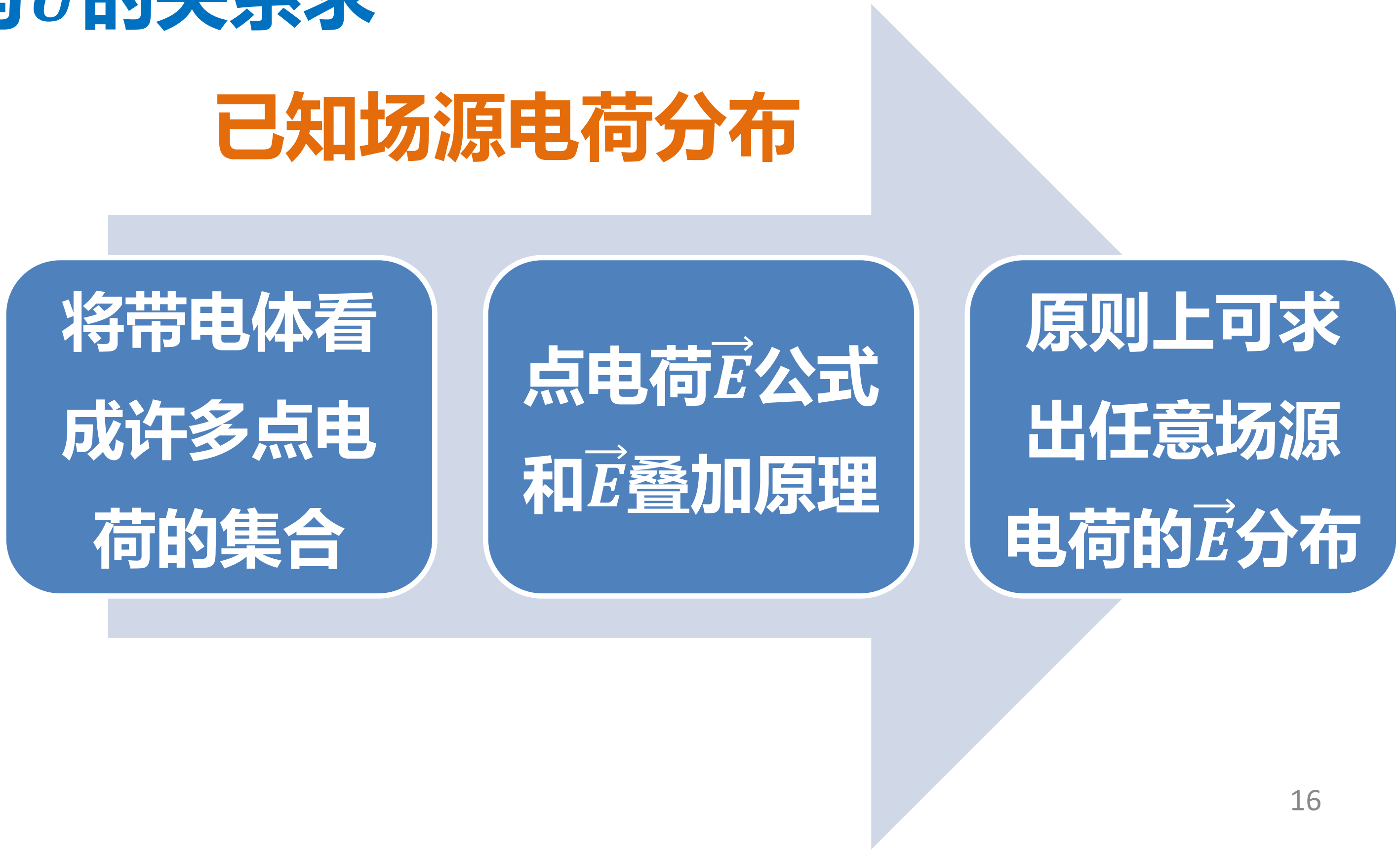
$\lambda \mathrm{d}l$	线分布	线密度λ	线元$\mathrm{d}l$
$\sigma \mathrm{d}S$	面分布	面密度σ	面元$\mathrm{d}S$
$\rho \mathrm{d}V$	体分布	线密度ρ	体元$\mathrm{d}V$



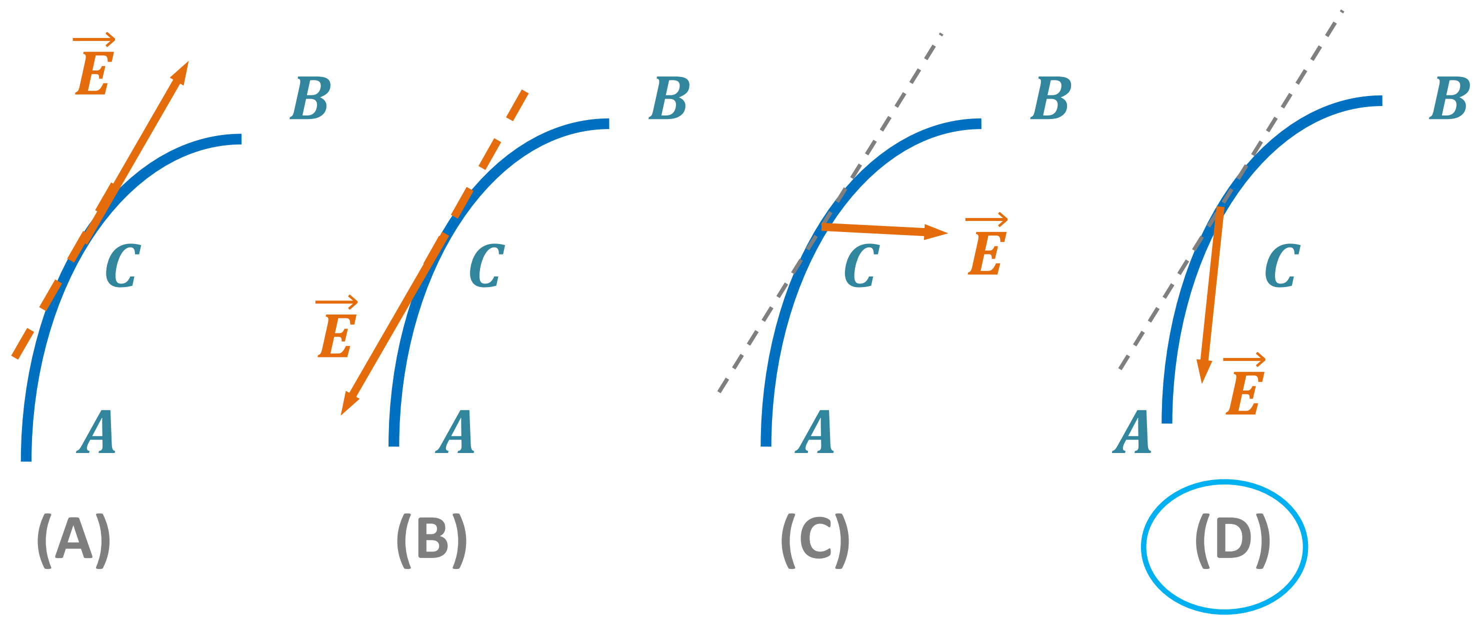
计算场强$\vec{E}$分布的基本方法

- 由定义求
- 由点电荷$\vec{E}$公式和$\vec{E}$叠加原理求
- 由高斯定理求
- 由$\vec{E}$与U的关系求

已知场源电荷分布



一个带正电荷的质点，在电场力作用下从A点出发经C点运动到B点，其运动轨迹如图所示。已知质点运动的速率是递减的，下面关于C点场强方向的四个图示中正确的是：

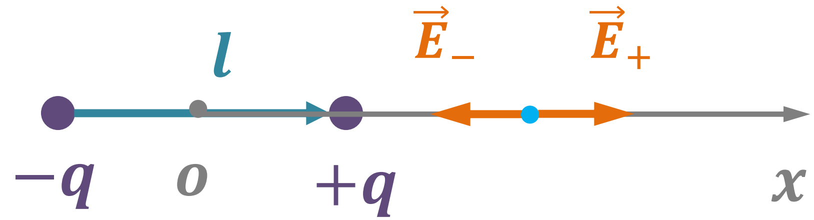


点电荷受电场力$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$，

质点作曲线运动，法向加速度为a_n不为零，则$\vec{F}$、$\vec{E}$不可能沿切向；又因质点速率递减，a_t一定与运动方向相反。

求电偶极子（electric dipole）在延长线上和中垂线上一点产生的电场强度。

解：在延长线上



$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-l/2)^2}\vec{i}$$

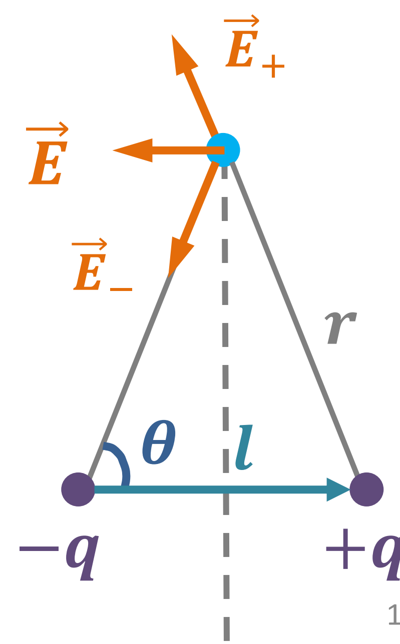
$$\vec{E}_- = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+l/2)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q\cdot 2xl}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2-l^2/4\right)^2}\vec{i}$$

令：电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$

$$= \frac{2x\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2-l^2/4\right)^2}$$

在中垂线上



$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = 2E_+\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

长为L的均匀带电直杆，电荷线密度为λ。求它在空间一点P产生的电场强度（P点到杆的垂直距离为a）

解：$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$$

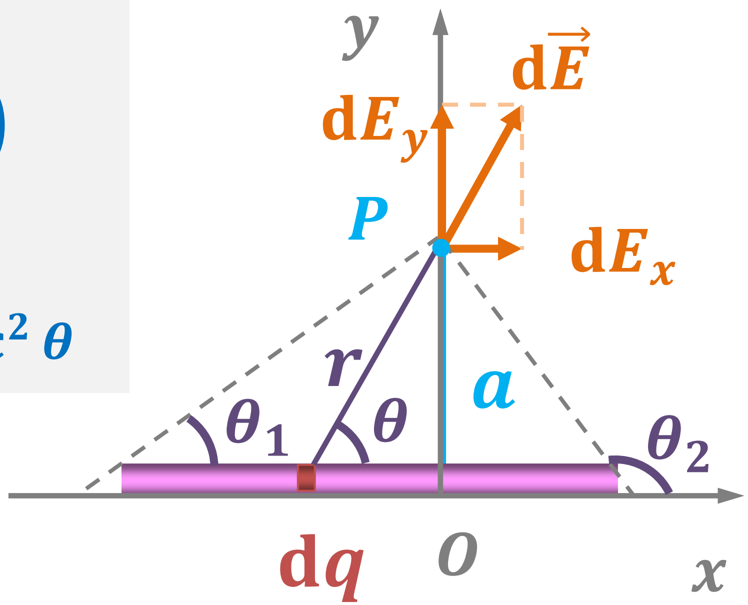
由图上的几何关系

$$x=a\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-a\cot\theta$$

$$\mathrm{d}x=a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$r^2=a^2+x^2=a^2\csc^2\theta$$



$$\mathrm{d}E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

长为L的均匀带电直杆，电荷线密度为λ。求它在空间一点P产生的电场强度（P点到杆的垂直距离为a）

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

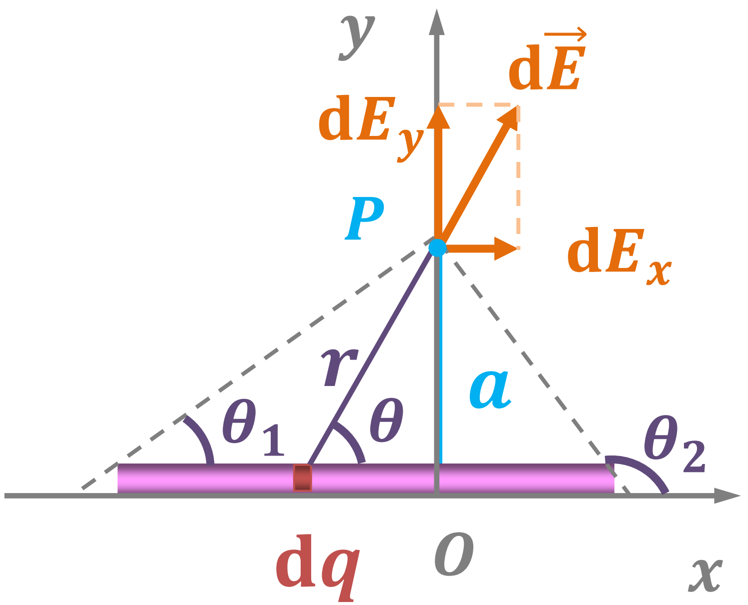
- $a \gg L$ 杆可以看成点电荷

$$E_x=0 \qquad E_y=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

- 棒延长线上一点

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 b(b+l)}\vec{i}$$



$$E_x=\int \mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

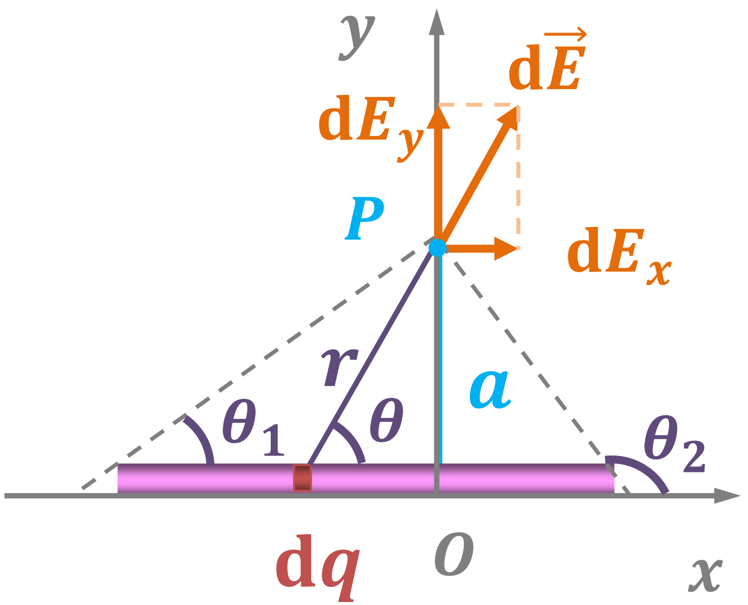
长为L的均匀带电直杆，电荷线密度为λ。求它在空间一点P产生的电场强度（P点到杆的垂直距离为a）

◆ 半无限长带电直线

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=\frac{\pi}{2}\\ \theta_2&=\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}E_x&=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\\ E_y&=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\end{aligned}\right.$$

◆ 无限长带电直导线（靠近直线场点）

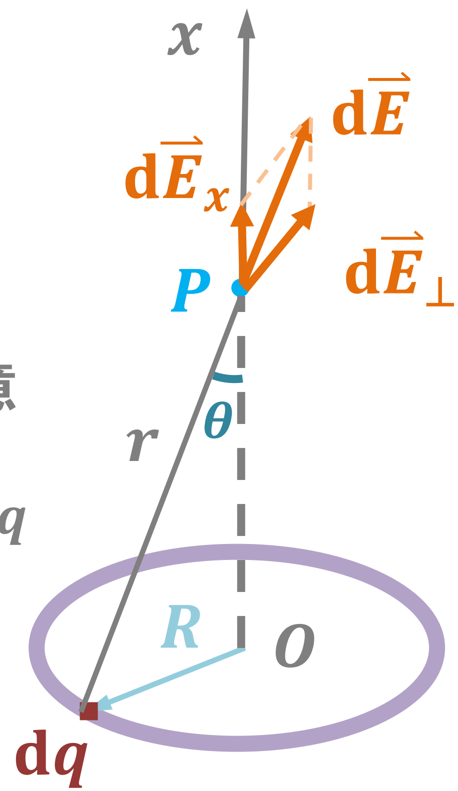
$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=0\\ \theta_2&=\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}E_x&=0\\ E_y&=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\end{aligned}\right.$$



$$E_x=\int \mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

半径为 R 的均匀带电细圆环，带电量为 q 。求圆环轴线上任一点P的电场强度。



解： $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$ $\qquad$ $\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$$

在圆环上任意取一线元$\mathrm{d}l$，其带电量为$\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}E_\perp = \mathrm{d}E\sin\theta \qquad \mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$

圆环上电荷分布关于x轴对称 $\quad E_\perp = 0$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\int\mathrm{d}q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

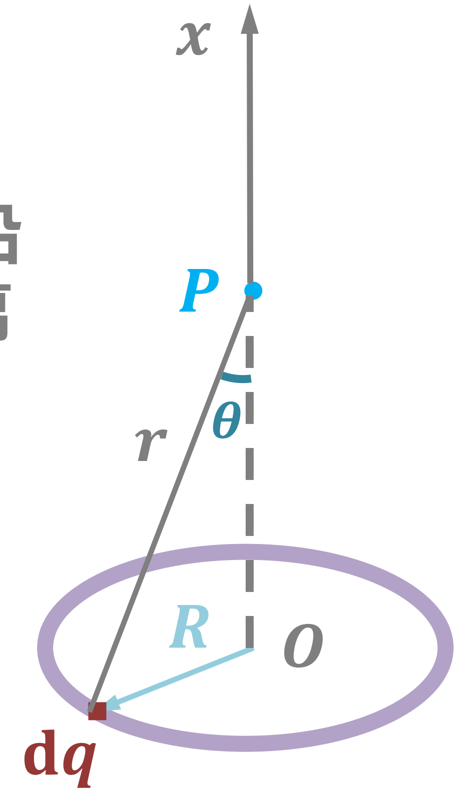
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \left(R^2+x^2\right)^{1/2}$$

半径为 R 的均匀带电细圆环，带电量为 q。求圆环轴线上任一点P的电场强度。

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$q>0$时，$\vec{E}$沿轴线指向远离轴线的方向



- **当 $x=0$（即P点在圆环中心处）时，**

$$E=0$$

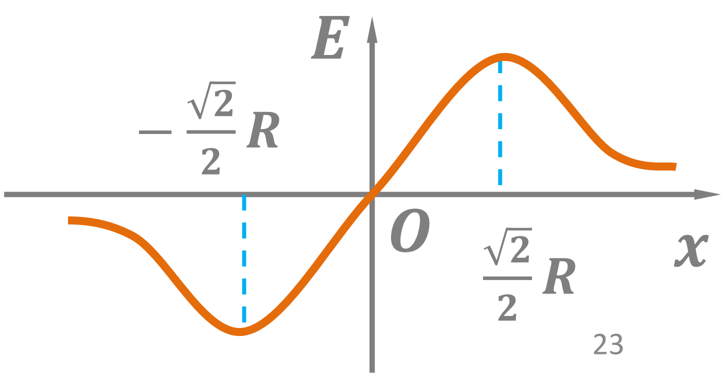
- **当 $x \gg R$时，**

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

可以把带电圆环视为一个点电荷

- $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0$ **时，** $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$

E **取极大值**



面密度为σ的圆板在轴线上任一点的电场强度。

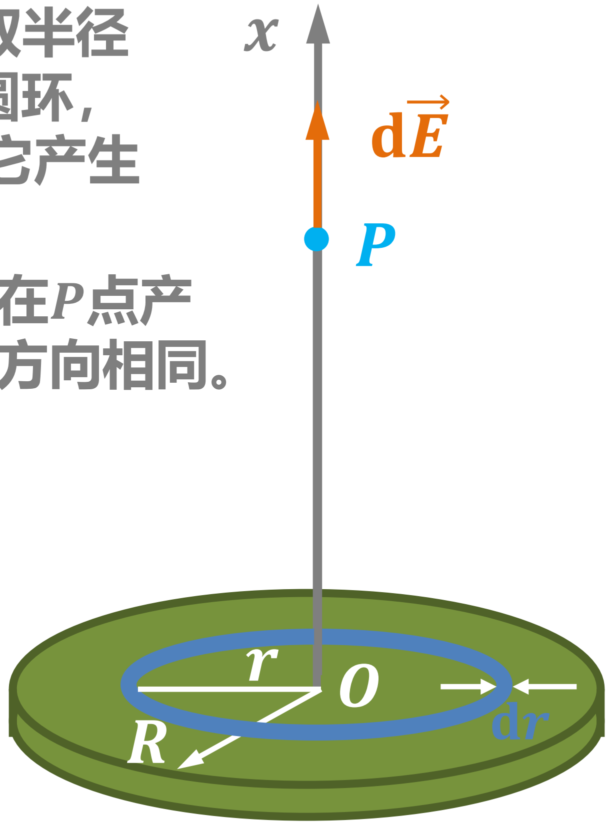
解：$\mathrm{d}q=2\pi r\mathrm{d}r\sigma$

带电圆盘可分割成许多同心圆环，取半径为r,宽度$\mathrm{d}r$的圆环，其电量为$\mathrm{d}q$，它产生的场强为$\mathrm{d}E$。

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

不同圆环在P点产生的场强方向相同。



$$E=\int\mathrm{d}E=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

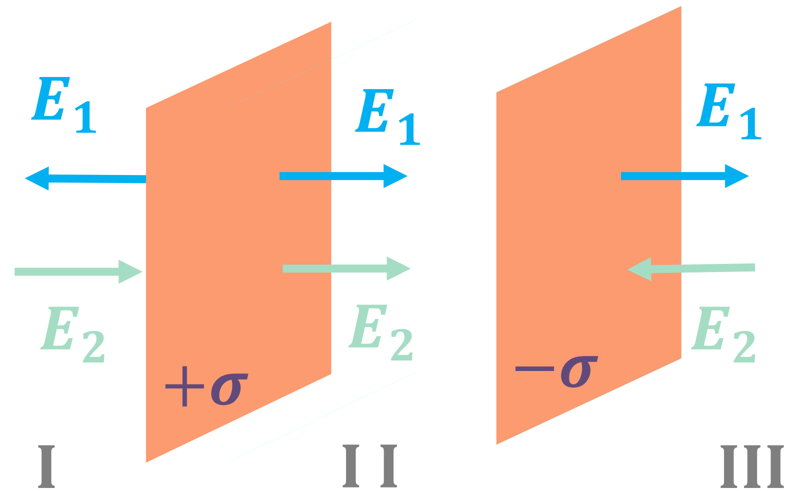
$$\vec{E}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0R^2}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]\vec{i}$$

◆ 当$R\ll x$时，$\left(R^2+x^2\right)^{-1/2}=x^{-1}\left(1+R^2/x^2\right)^{-1/2}\approx\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}\right)$

$E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0x^2}$ 说明在远离圆盘处的电场也相当于点电荷的电场。

◆ 当$R \gg x$时，圆板可视为无限大带电平面，产生均匀电场

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

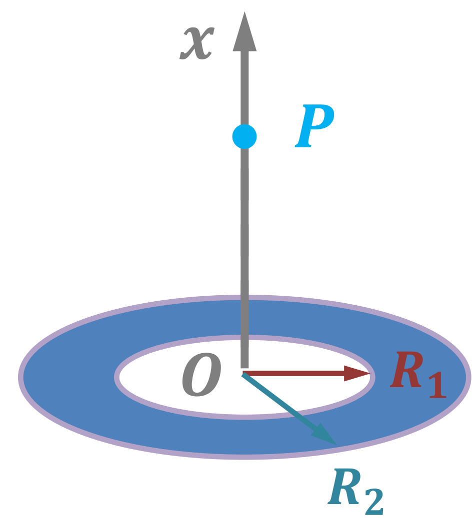


◆

$$E_{\mathrm{I}}=E_1-E_2=0$$

$$E_{\mathrm{II}}=E_1+E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{III}}=E_1-E_2=0$$

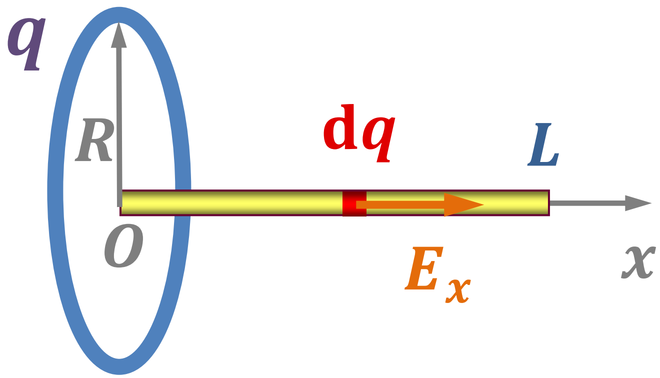


◆ 补偿法

$$\vec{E}=\vec{E}_{R2}+\vec{E}_{R1}$$

$$=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(R_1^2+x^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left(R_2^2+x^2\right)^{1/2}}\right]\vec{i}$$

已知圆环带电量为q，杆的线密度为λ，长为L。
求杆对圆环的作用力。



解：$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

圆环在dq处产生的电场

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F=E_x\mathrm{d}q=E_x\lambda\mathrm{d}x$$

$$F=\int_0^L\frac{q\lambda\,x\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2}}\right)$$

求电偶极子在均匀电场中受到的力偶矩。

解：$\vec{F}_+ = q\vec{E}$

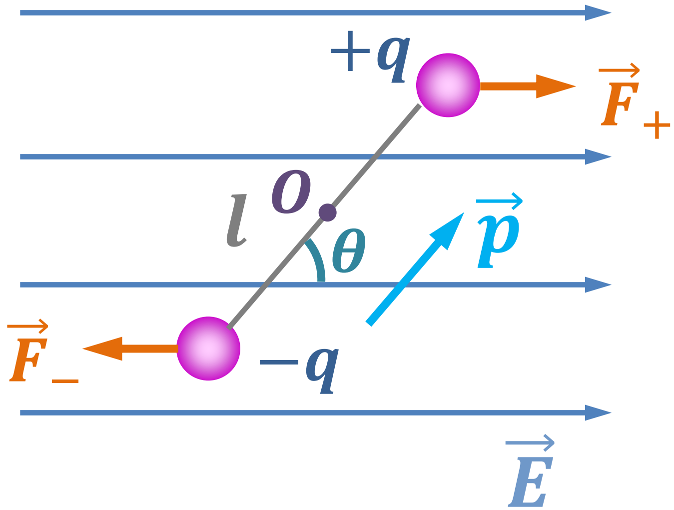
$\vec{F}_- = -q\vec{E}$

相对于O点的力矩

$$M = F_+ \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta + F_- \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta$$

$$= qlE\sin\theta$$

$$\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$



$\theta = \frac{\pi}{2}$ 力偶矩最大

$\theta = 0$ 力偶矩为零 (电偶极子处于稳定平衡)

$\theta = \pi$ 力偶矩为零 (电偶极子处于非稳定平衡)

□ 库仑定律

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}$$

□ 静电力叠加原理

$$\vec{F}=\sum_i\vec{F}_i$$

$$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int\frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

□ 电场强度 $\vec{E}$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$ 单位： N/C 或 V/m

□ 场强叠加原理

$$\vec{E}=\sum_i\vec{E}_i$$

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

典型带电体$\vec{E}$分布

◆ 点电荷

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

◆ 无限长均匀带电直线

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$ 垂直于带电直线

◆ 均匀带电圆环轴线上：

$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

◆无限大均匀带电平面

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 垂直于带电平面

积分法求场强的步骤

理想模型

① 选好微元，画出$\mathrm{d}\vec{E}$

② 引入密度，写出$\mathrm{d}\vec{E}$

③ 建立坐标，写出分量式

④ 统一变量，写出积分式

⑤ 定好上下限，注意对称性

⑥ 积分求结果，代数求数值

⑦ 进行讨论，加深理解。

求均匀带电圆盘轴线上一点的场强，如何取微元?

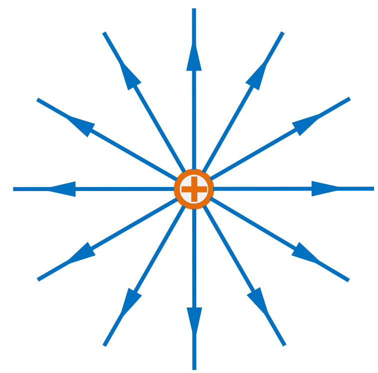
- 正方形带电线框中垂线上一点的场强?
- 长方形带电板中垂线上一点的场强?

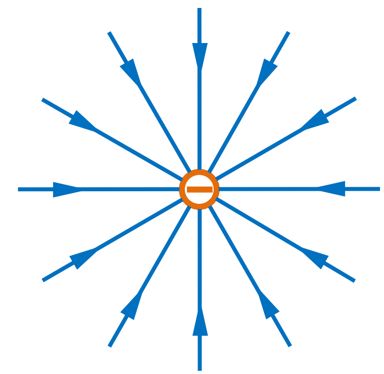
电场线（Electric field line）

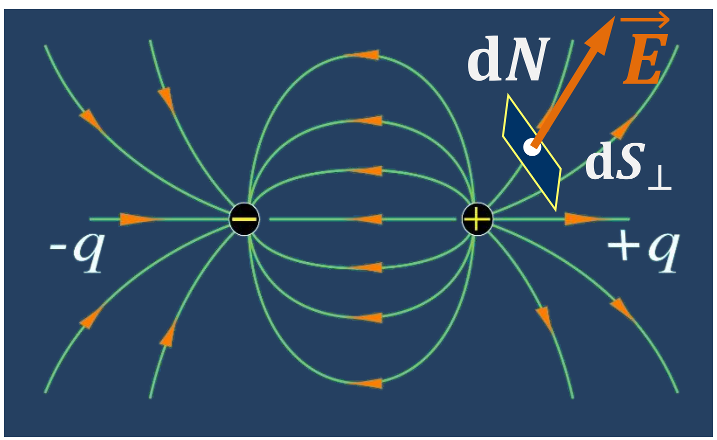
- 起始于正电荷(或无穷远处)，终止于负电荷(或无穷远处)。
- 场强方向沿电力线**切线方向**，场强大小决定电力线的**疏密**。

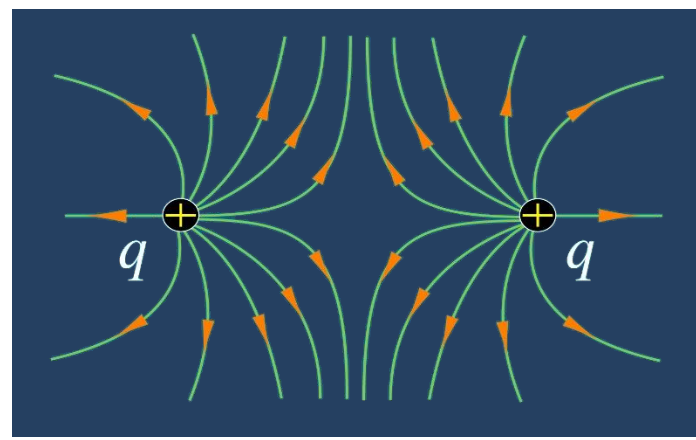
$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小。

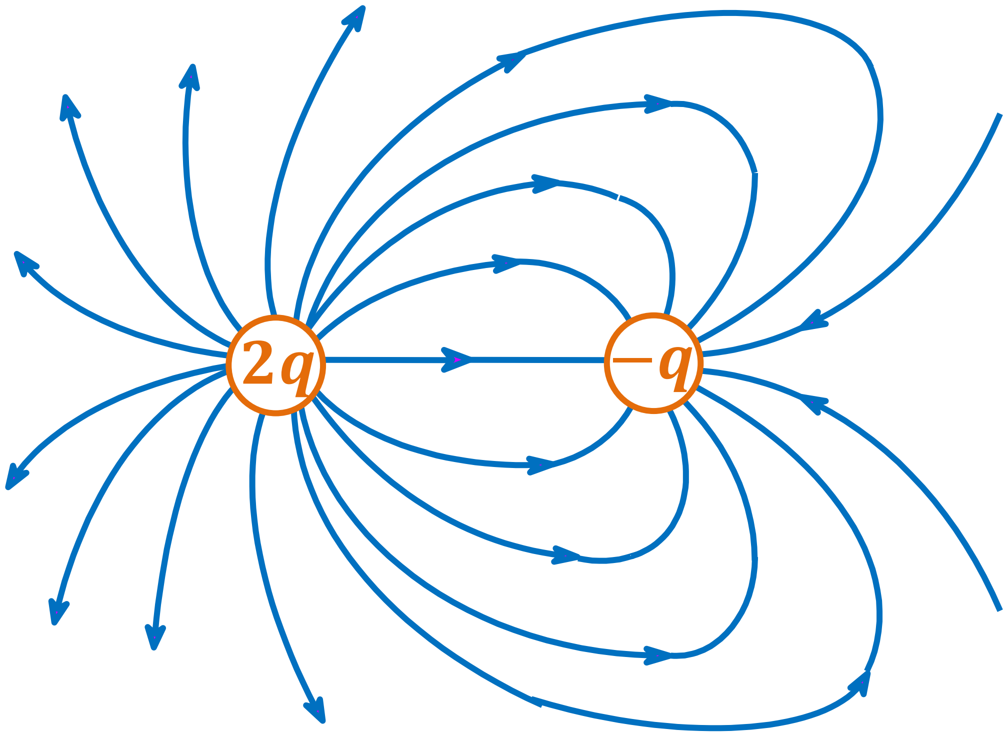




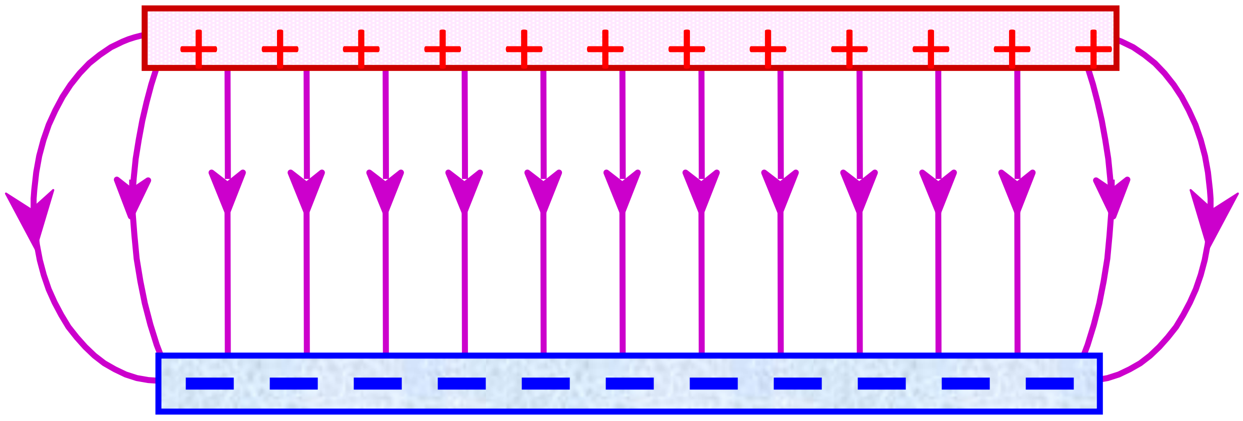




- 静电场电场线是非闭合曲线，不相交。



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线

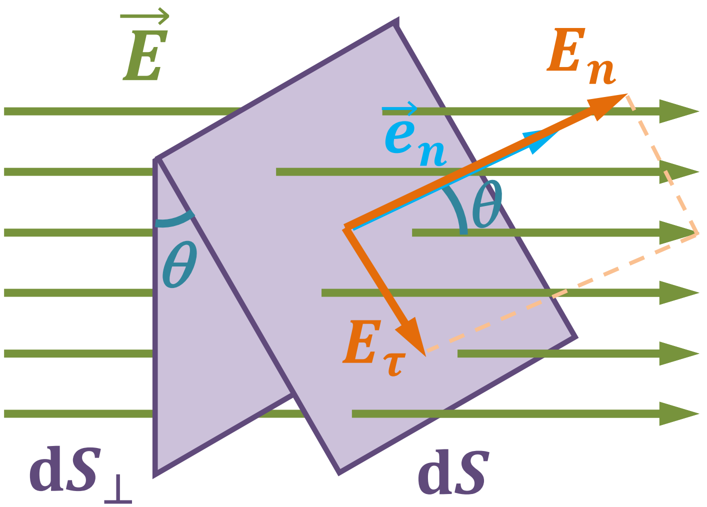
电场强度通量

在电场中穿过任意曲面的电场线条数称为穿过该面的电场强度通量。Φ_e

◆ 均匀电场

$$\mathrm{d}\Phi_e = E_n \mathrm{d}S = E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$$= E\mathrm{d}S_{\perp}$$



定义面积元矢量： $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_n$

面积元范围内$\vec{E}$视为均匀

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

◆ 非均匀电场

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

◆ 闭合曲面的电场强度通量

$$\Phi_e = \oint \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

- 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

$$\Phi_\mathrm{e} = ES$$

- 均匀电场，$\vec{E}$与平面夹角θ

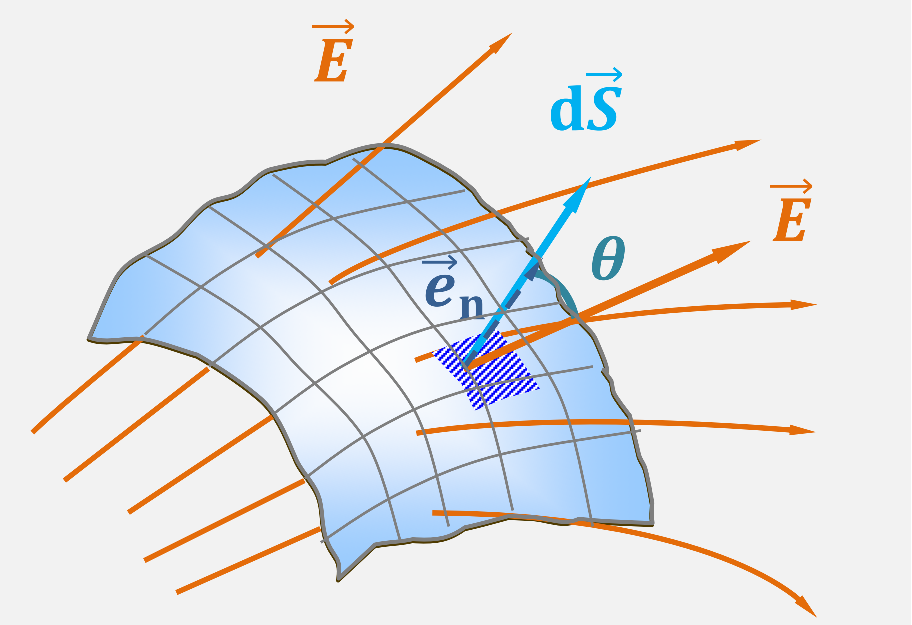
$$\Phi_\mathrm{e} = ES\cos\theta$$

$$\Phi_\mathrm{e} = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

◆ 任意曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

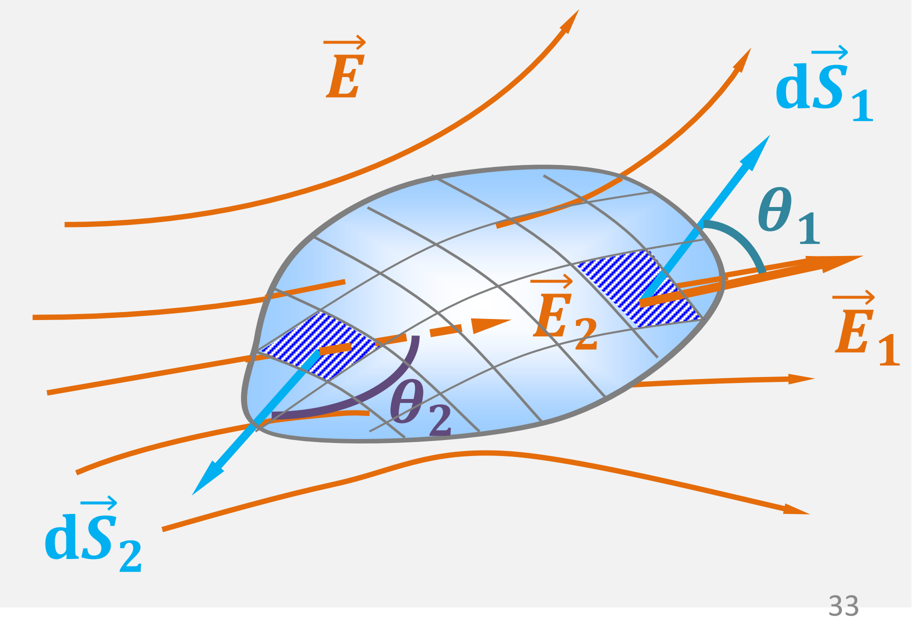
$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



◆ S 为封闭曲面

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{e1} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\Phi_{e2} < 0$$



◆ 闭合曲面的电场强度通量

$$\Phi_e = \oint \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

□ 任意曲面的电场强度通量

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

□ 闭合曲面的电场强度通量

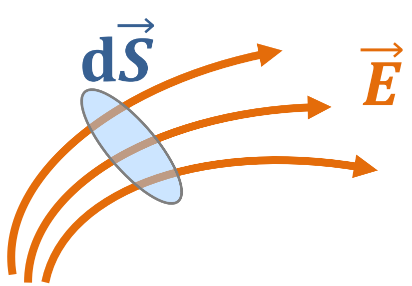
$$\Phi_e = \oint \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

◆ $\vec{S}$ 方向的规定：
- 非闭合曲面 —— 凸为正，凹为负
- 闭合曲面 —— 向外为正，向内为负

通过整个闭合曲面的电通量就等于**净穿出封闭面**的电场线的总条数。

◆ 电通量是代数量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



$$\begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \text{ —— } \mathrm{d}\Phi_e \text{ 为正} \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \text{ —— } \mathrm{d}\Phi_e \text{ 为负} \end{cases}$$

高斯
(Carl Friedrich Gauss)
1777-1855

德国数学家和物理学家。1777年4月30日生于德国布伦瑞克，幼时家境贫困，聪敏异常，受一贵族资助才进学校受教育。1795~1789年在哥廷根大学学习，1799年获博士学位。1870年任哥廷根大学数学教授和哥廷根天文台台长，一直到逝世。1833年和物理学家W.E.韦伯共同建立地磁观测台，组织磁学学会以联系全世界的地磁台站网。1855年2月23日在哥廷根逝世。**高斯长期从事于数学并将数学应用于物理学、天文学和大地测量学等领域的研究，著述丰富，成就甚多。他一生中共发表323篇（种）著作，提出404项科学创见（发表178项），主要成就有：**

- **物理学和地磁学**：关于静电学、温差电和摩擦电的研究、利用绝对单位（长度、质量和时间）法则量度非力学量以及地磁分布的理论研究。
- **光学**：利用几何学知识研究光学系统近轴光线行为和成像，建立高斯光学。
- **天文学和大地测量学中**：如小行星轨道的计算，地球大小和形状的理论研究等。
- **试验数据处理**：结合试验数据的测算，发展了概率统计理论和误差理论，发明了最小二乘法，引入高斯误差曲线。此外，在纯数学方面，对数论、代数、几何学的若干基本定理作出严格证明。
- **高斯还创立了电磁量的绝对单位制。**

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0。

---静电场中高斯定理(Gauss theorem)

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

S --- 高斯面，任意封闭曲面

$\vec{E}$ --- S上各点的场强，S内外所有电荷均有贡献。

ε_0---真空电容率

$\sum q_{内}$---S内的净电荷（代数和）

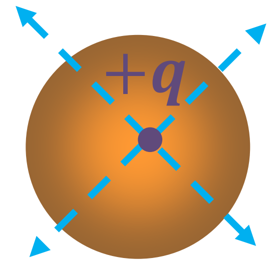
Φ_e---通过S的电通量，向外为正。只有S内电荷有贡献。

1）高斯面上的$\vec{E}$与那些电荷有关？

2）哪些电荷对闭合曲面 S 的 Φ_e 有贡献？

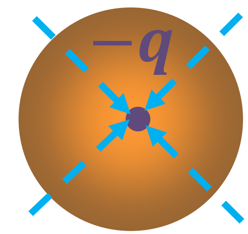
高斯定理的导出 { 库仑定律 / 电场强度叠加原理 } → 高斯定理

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \begin{cases} > 0 \text{ ---- } +q \\ < 0 \text{ ---- } -q \end{cases}$$



以点电荷为例建立Φ_e ---q关系:

□ 取球对称闭合曲面

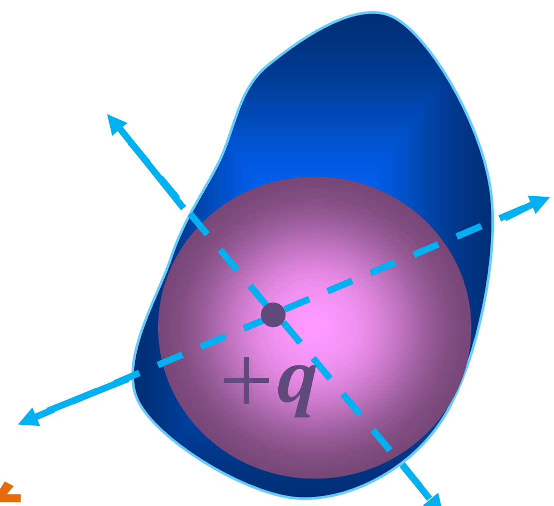


$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \oint_S \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

□ 取任意闭合曲面时

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$



◆ **Φ_e与曲面的形状及q在曲面内的位置无关。**

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0。

---静电场中高斯定理（Gauss Theorem）

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

S --- 高斯面，封闭曲面

$\vec{E}$ --- S上各点的总场，S内外所有电荷均有贡献。

ε_0---真空电容率

$\sum q_{内}$---S内的净电荷（代数和）

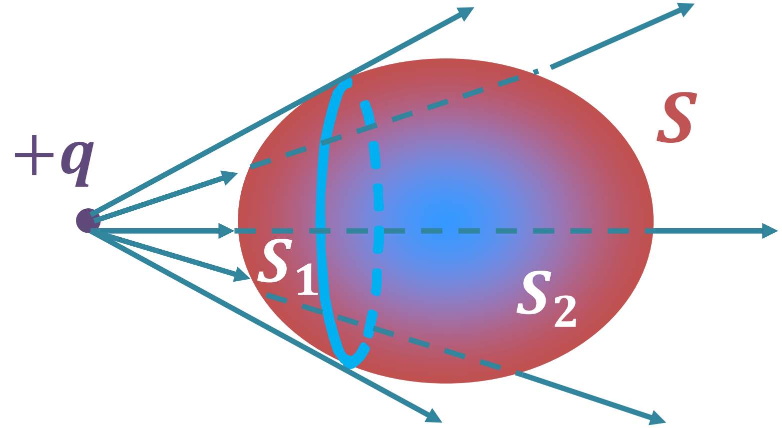
Φ_e---通过S的电通量，向外为正。只有S内电荷有贡献。

- 穿进高斯面的电场强度通量为正，穿出为负。
- 静电场是有源场。 $+q$，发出q/ε_0条电场线，是电场线的“头”
  $-q$，吸收q/ε_0条电场线，是电场线的“尾”

高斯定理可从库仑定律严格导出，它是平方反比规律的必然结果。
它源于库仑定律，高于库仑定律 (适用运动电荷的电场)。

□ q在曲面外时：

$$\Phi_e=\Phi_{e1}+\Phi_{e2}=0$$



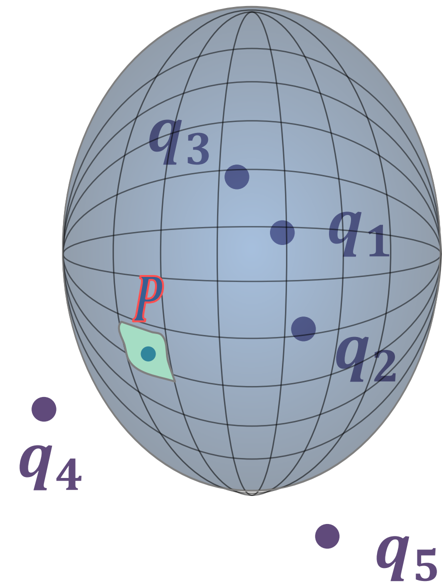
□ 当存在多个电荷时：

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots+\vec{E}_5$$

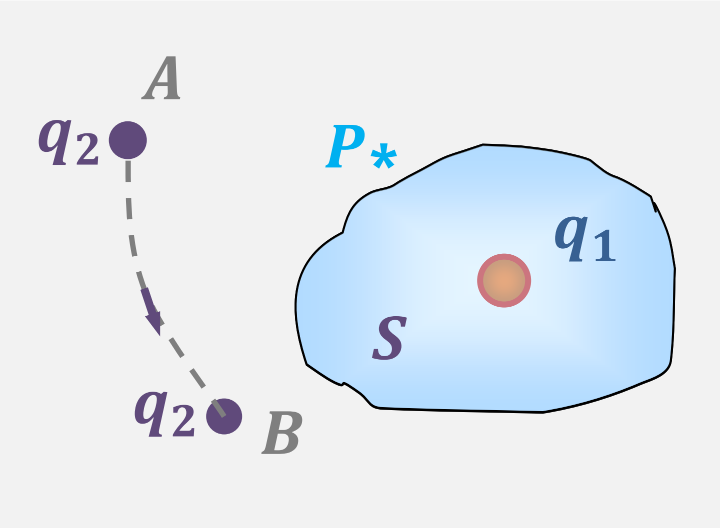
$$\Phi_e=\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots+\vec{E}_5)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\oint\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\oint\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\ldots+\oint\vec{E}_5\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\frac{q_1}{\varepsilon_0}+\frac{q_2}{\varepsilon_0}+\frac{q_3}{\varepsilon_0}$$



◆ $\vec{E}$是所有电荷产生，Φ_e只与内部电荷有关。



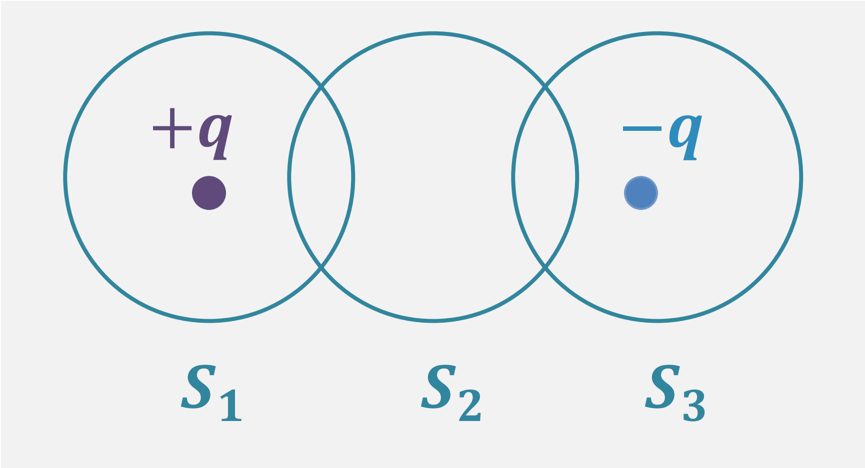
- 将q_2从A移到B，场点P的电场强度是否变化？ **变化**
- 穿过高斯面S的Φ_e有否变化? **不变**

- 在点电荷$+q$和$-q$的静电场中，做如下的三个闭合面S_1、S_2、S_3，求通过各闭合面的电通量。

$$\Phi_{e1}=\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2}=0$$

$$\Phi_{e3}=\frac{-q}{\varepsilon_0}$$



有一点电荷Q置于半径为R的球面的中心，试求通过该球面的电场强度通量 Φ_e ，并讨论在下列情况下 Φ_e 有无变化。

(1) Q偏离球心，仍在球面内；

(2) 球面外再放一个q；

(3) 球面内再放一个q；

(4) 将球面半径增至$2R$。

- **由高斯定理 $\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$**

(1) $\Phi_e = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$，无变化；

(2) 无变化，Φ_e与球外电荷无关；

(3) 有变化，$\Phi_e = \dfrac{Q+q}{\varepsilon_0}$；

(4) 无变化。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i(\text{内})$$

- 是否存在q恰好在S面上的情况?

  高斯面是无厚度的数学面。在其附近，任何实际的带电体均不能简化为点电荷。所以只可能存在q在S外、在S内，或一部分在S外，一部分在S内的情况，而没有q恰好在S上的情况。

- 高斯定理与库仑定律$F \propto 1/r^2$有何关系?

  正是由于库仑定律的平方反比关系，才能得到穿过高斯面的电通量计算结果与r无关，所以高斯定理是库仑定律平方反比关系的反映。

- 若高斯面上场强处处为零，能否认为高斯面内一定无电荷？ 否
- 若高斯面上场强处处不为零，能否说明高斯面内一定有电荷？ （场强的通量与场强是两个不同的概念） 否
- 若穿过高斯面的电通量不为零，高斯面上的场强是否一定处处不为零？ 否
- 一点电荷q位于一立方体的中心，立方体边长为L，试问通过立方体一面的电通量是多少？ $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

若此电荷移动到立方体的一个顶角上，这时通过立方体每一面上的电通量是多少？ 0 或 $\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

① 点电荷的电场线是径向分布。因此包含点电荷所在的顶点的三个面上各点的$\vec{E}$均平行于各自的平面，故通过这三个面的电通量Φ_e为零。

② 为了能应用高斯定理方便地求出电通量，必须使 q 位于一高斯面内。在q周围再联接 7 个大小相同的立方体，使q位于中心，这时通过边长为L的立方体的另外三个面的电通量各为$\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i(内)$$

(不连续分布的源电荷)

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho \mathrm{d}V$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint \sigma \mathrm{d}S$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \lambda \mathrm{d}L$$

(连续分布的源电荷)

球对称	轴对称	面对称
点电荷	直线	平面
球面	柱面	平板
球体	柱体	

□ 用高斯定理求特殊带电体的电场强度

由高斯定理求电场分布的步骤

① 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性。

(球对称、轴对称、面对称三种类型)

② 求出在对称性分析的基础上选取高斯面。目的是使 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$能够积出。

- □ 高斯面必须是闭合曲面
- □ 高斯面必须通过所求的点
- □ 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

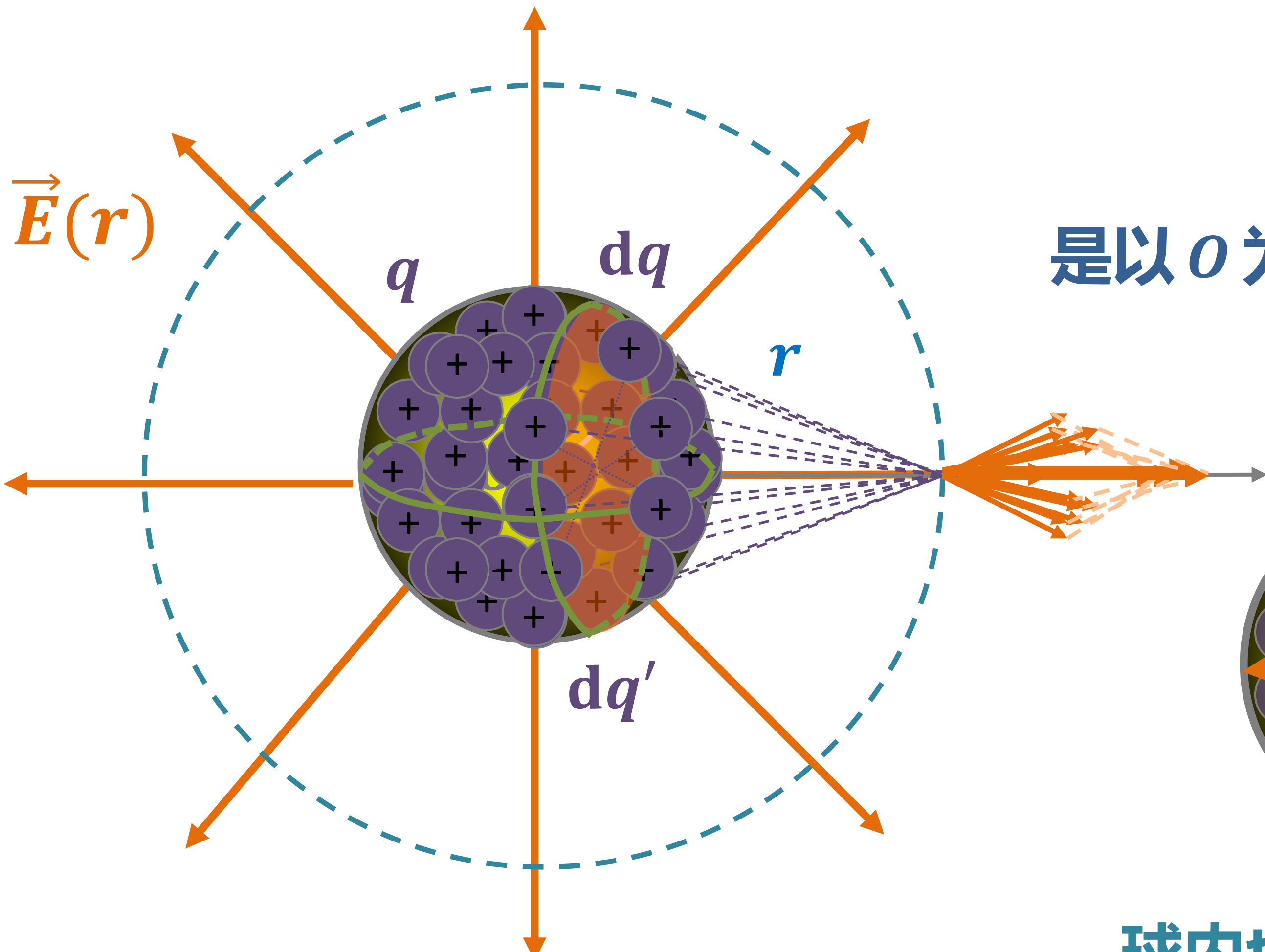
③ 求出 $\sum q_{内}$

④ 由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

⑤ 求出电场的大小，并说明其方向。

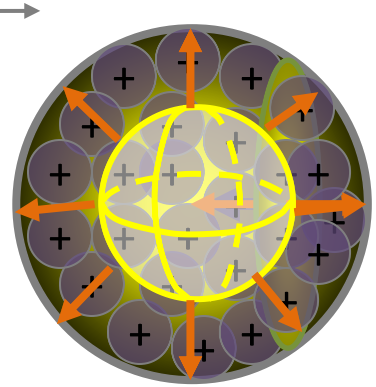
均匀带电球面（壳），总电量为q，半径为R。
求均匀带电球面（壳）的电场强度分布。



◆ **对称性分析**

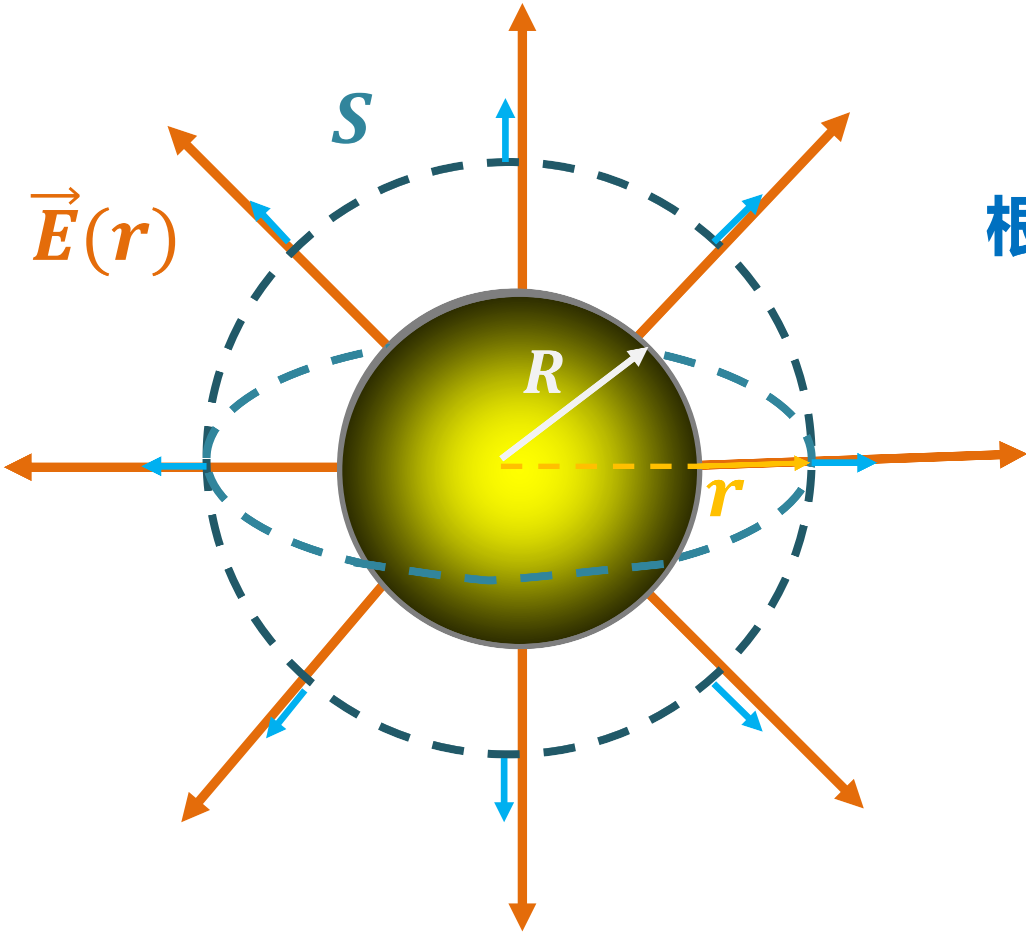
将电荷看成许多成对的点电荷的集合

是以 O 为中心的球对称电场。



球内也一样。

均匀带电球面（壳），总电量为q，半径为R。
求均匀带电球面（壳）的电场强度分布。



作半径为r的高斯球面

$(r > R)$

根据高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

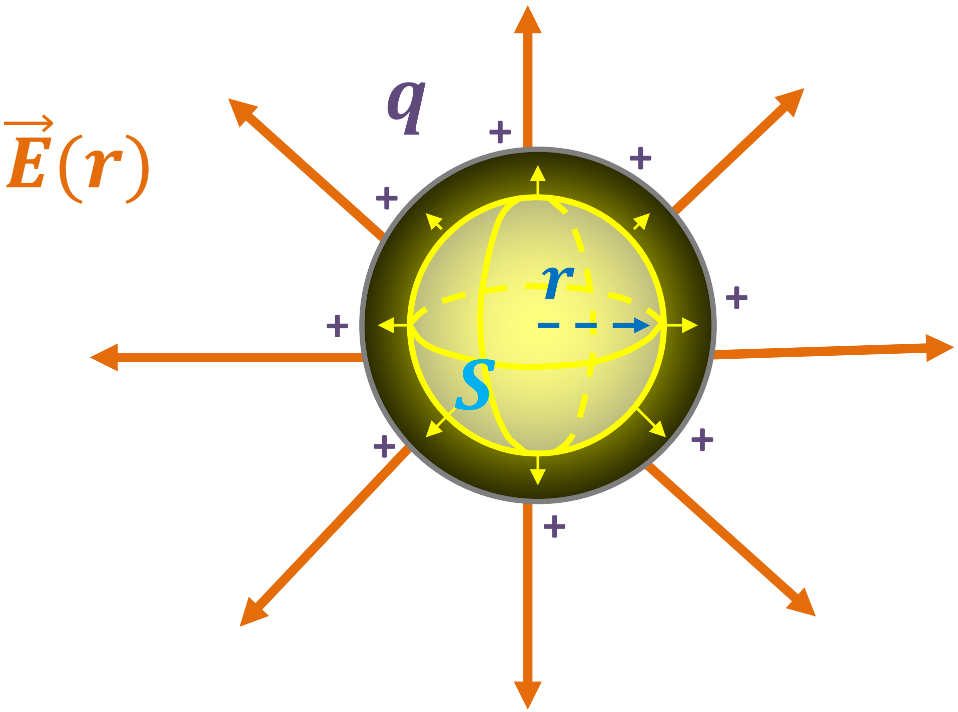
$$\oint_S E\cos 0^\circ\, \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E \oint_S \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

均匀带电球面（壳），总电量为q，半径为R。
求均匀带电球面（壳）的电场强度分布。



作半径为r的高斯球面

$$(0 \le r < R)$$

根据高斯定理：

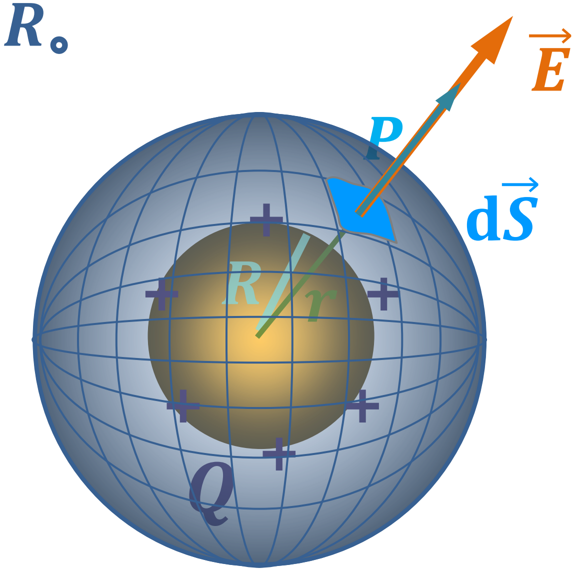
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{s内} q_i$$

$$\oint_S E \cos 0^\circ \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{s内} q_i$$

$$\sum_i q_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad E = 0$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (0 \le r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} & (r > R) \end{cases}$$

均匀带电球面（壳），总电量为Q，半径为R。
求均匀带电球面（壳）的电场强度分布。



对球面外一点P（$r > R$）

取过场点P的同心球面为高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E\,4\pi r^2$$

根据高斯定理

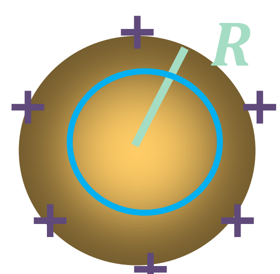
$$E\,4\pi r = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

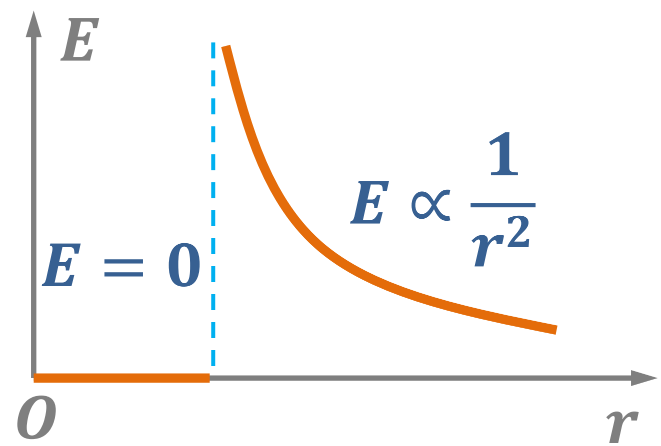
$$r > R,\ \sum_i q_i = Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

对球面内一点（$0 < r < R$）

$\sum_i q_i = 0$，$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

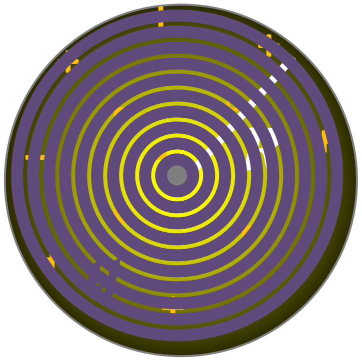
$E = 0$





电场分布曲线

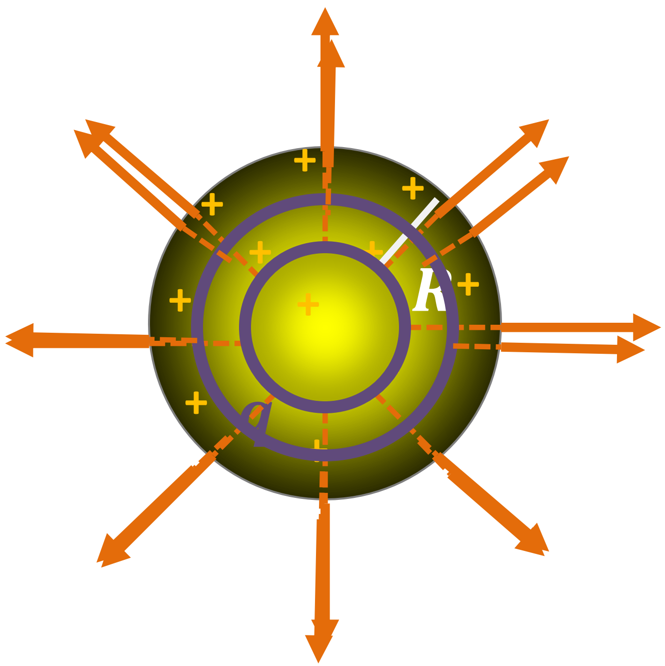
已知均匀带电球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ），求均匀带电球体内外的电场强度分布。

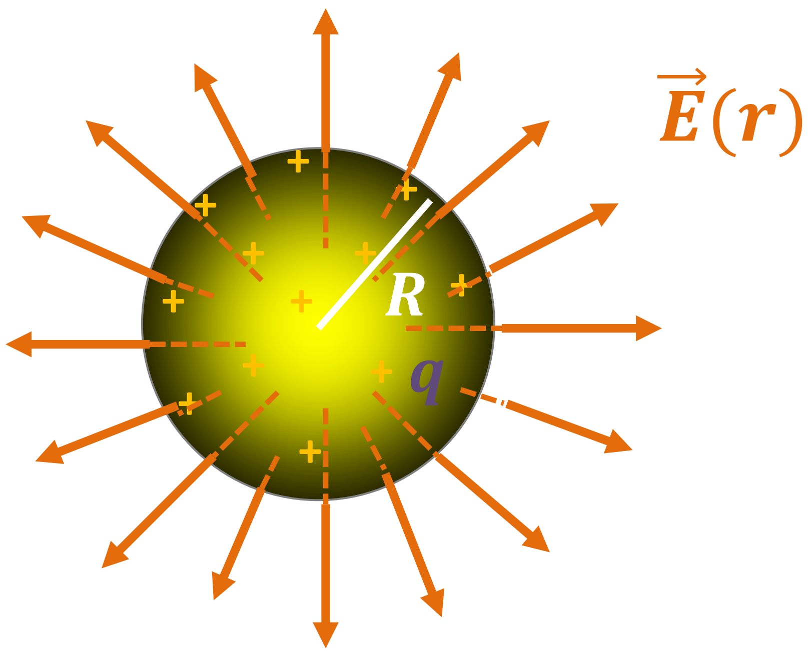


◆**对称性分析**

将球体看成许多薄球壳组成。

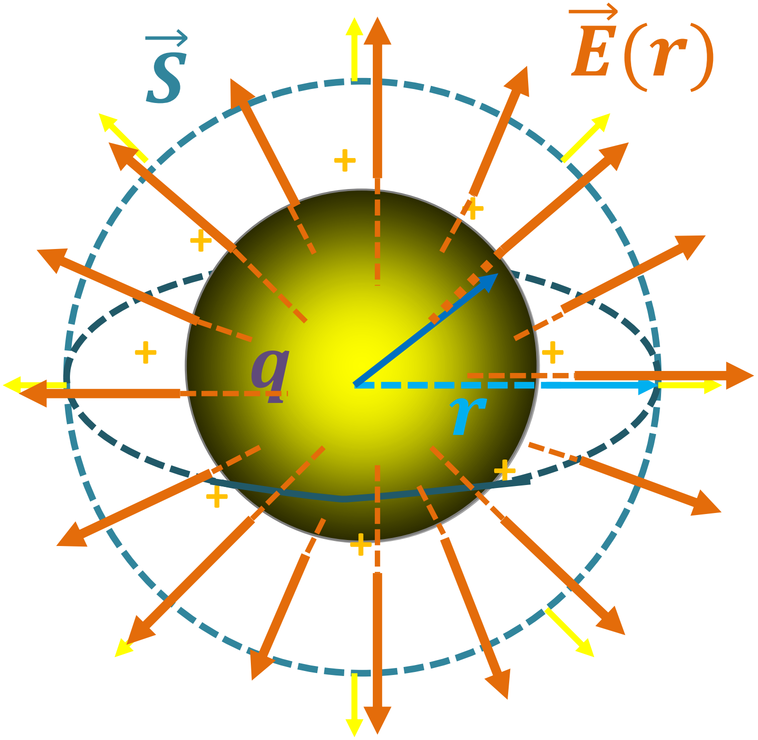
球内外场强都是球对称分布。



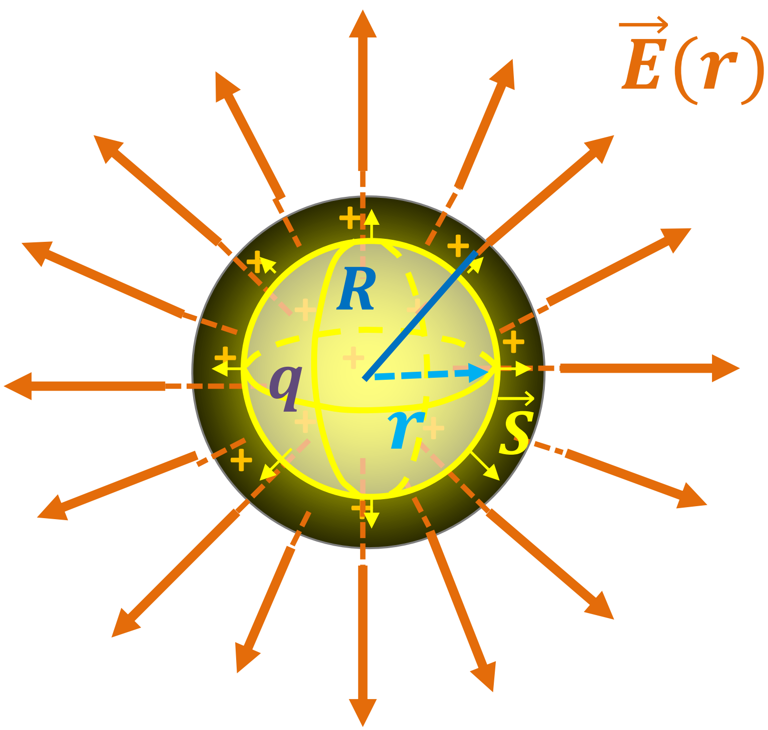


已知均匀带电球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ），求均匀带电球体内外的电场强度分布。

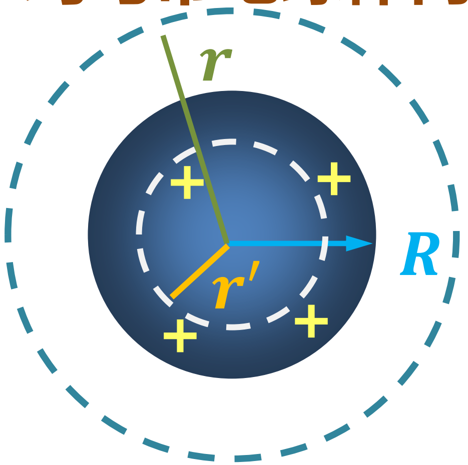
- 作半径为r球面$(r \geq R)$

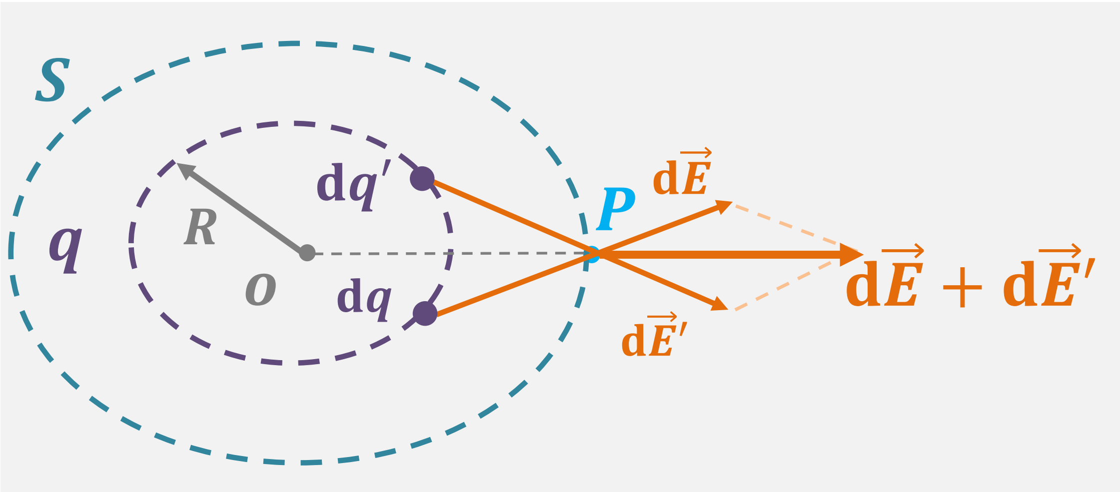


- 作半径为r的球面$(0 \leq r < R)$



已知均匀带电球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ），求均匀带电球体内外的电场强度分布。





以S为高斯面：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos 0^\circ\,\mathrm{d}S = E\,4\pi r^2$$

由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$E = \sum q_{内}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

◆ **对称性分析**

作以O为中心，r为半径的球形面S

S 面上各场点彼此等价

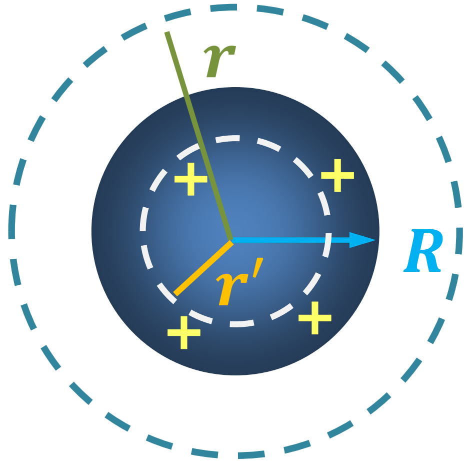
$$\begin{cases}\vec{E}\ \text{方向沿径向}\\ \vec{E}\ \text{大小相等}\end{cases}$$

已知均匀带电球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ），求均匀带电球体的电场强度分布。

解：

$r \geq R$，$\sum q_{内} = q$

$r \leq R$，$\sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{R^3} r^3$



球外（$r \geq R$）

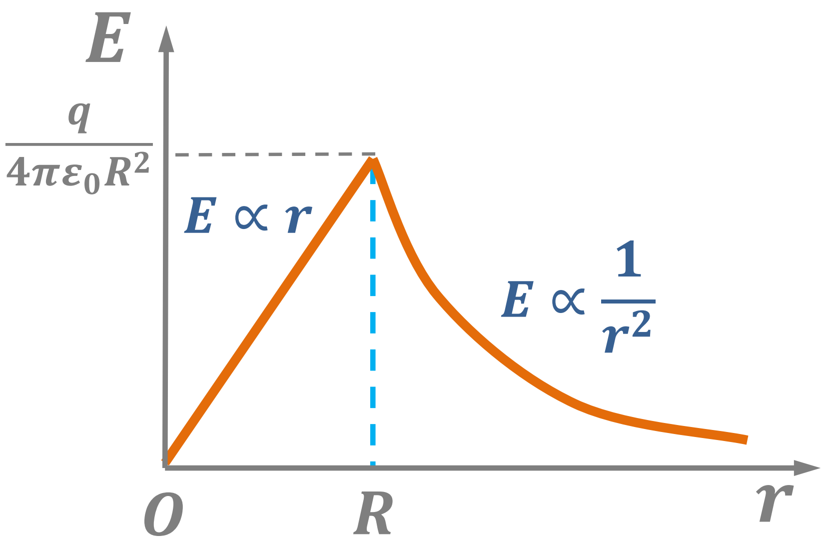
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\vec{r}$$

球内（$r \leq R$）

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,4\pi r'^2$$

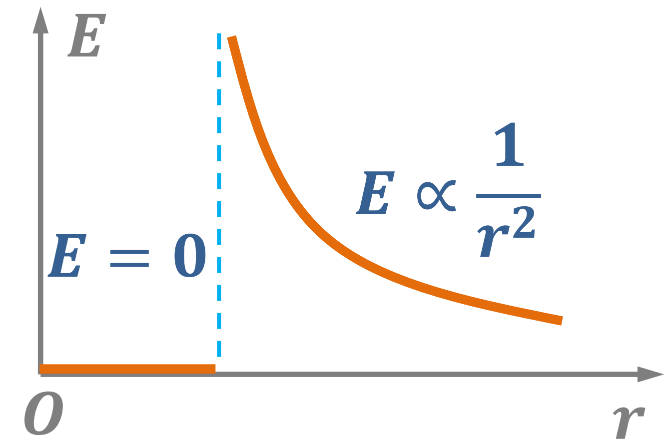
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho = \frac{1}{\varepsilon_0} q'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$



电场分布曲线

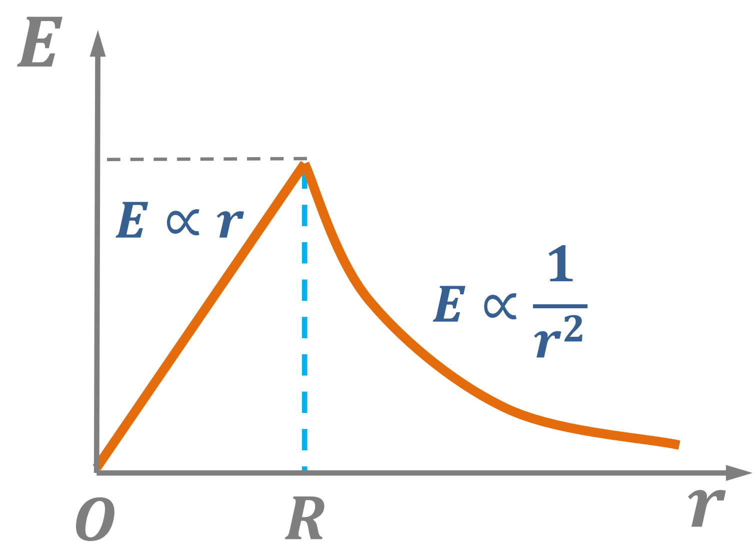
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$



电场分布曲线

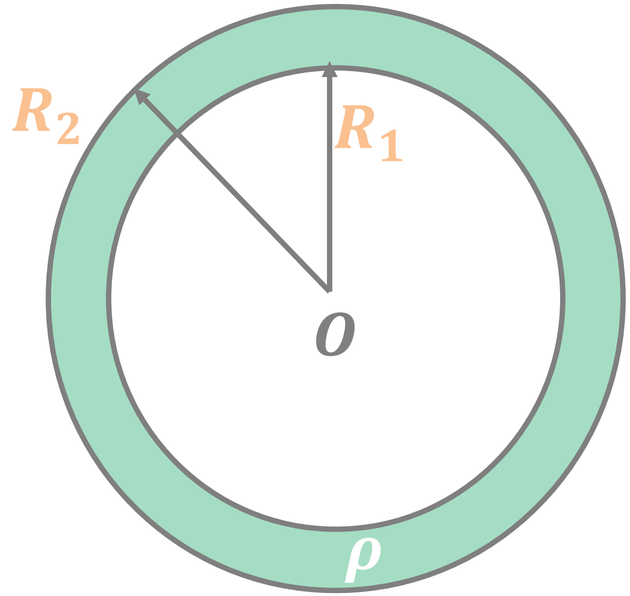
- 如何理解带电球面$r = R$处E值突变?
- 球体所带电荷非均匀分布，电荷体密度$\rho = Ar$或$\rho = A/r$

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \le R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r \ge R) \end{cases}$$



电场分布曲线

已知内外半径分别为R_1和R_2的均匀带电球层，电荷体密度为ρ，求均匀带电球层的电场分布。



解：由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$\Rightarrow \quad E = \sum q_{内}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

$$r \le R_1,\quad \sum q_{内} = 0$$

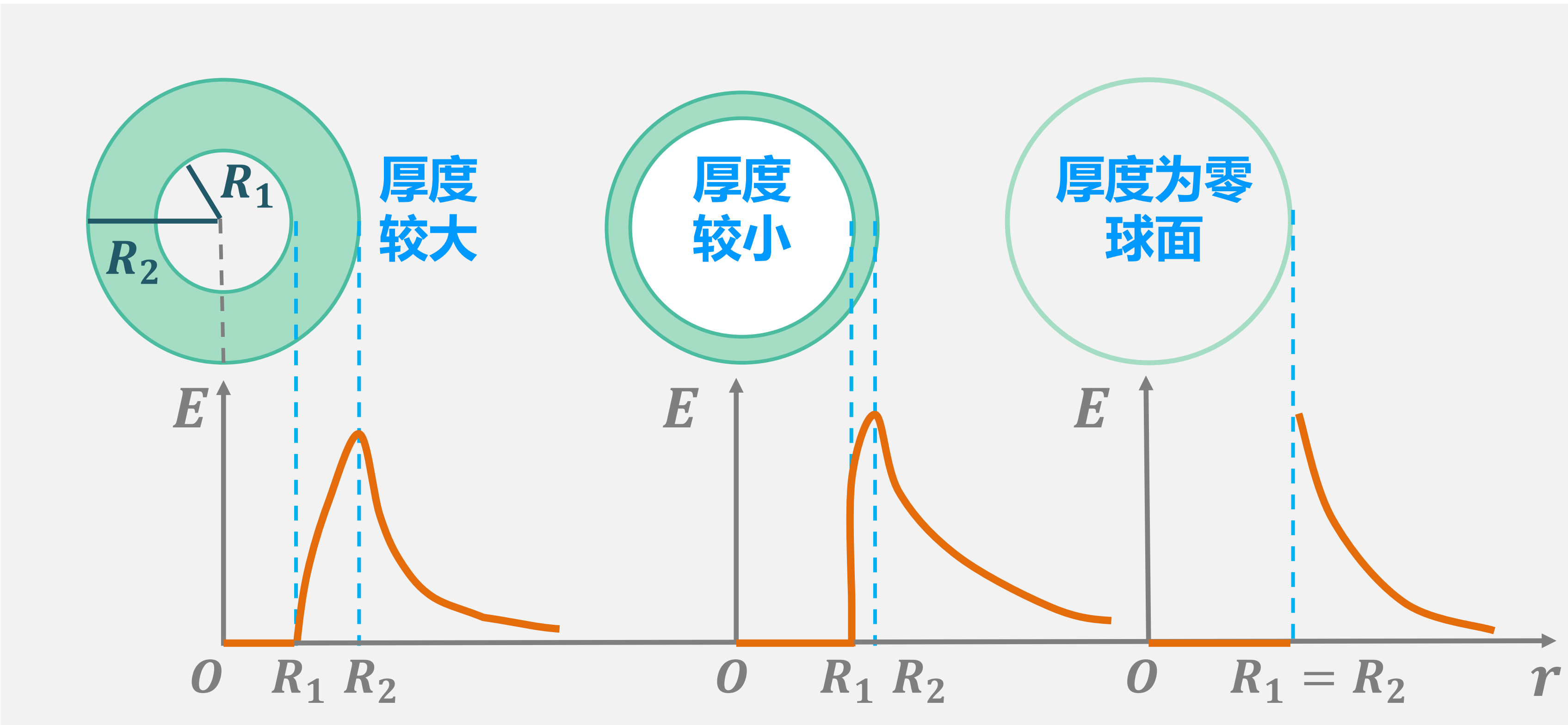
$$R_1 \le r \le R_2,\quad \sum q_{内} = \rho\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3) = \frac{q}{(R_2^3 - R_1^3)}(r^3 - R_1^3)$$

$$r \ge R_2,\quad \sum q_{内} = \rho\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) = q$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r \le R_1) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{R_1^3}{r^3}\right)\vec{r} & (R_1 \le r \le R_2) \\ \dfrac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r} & (r \ge R_2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3 - R_1^3)}\left(1 - \dfrac{R_1^3}{r^3}\right)\vec{r} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \end{matrix}\right\}$$

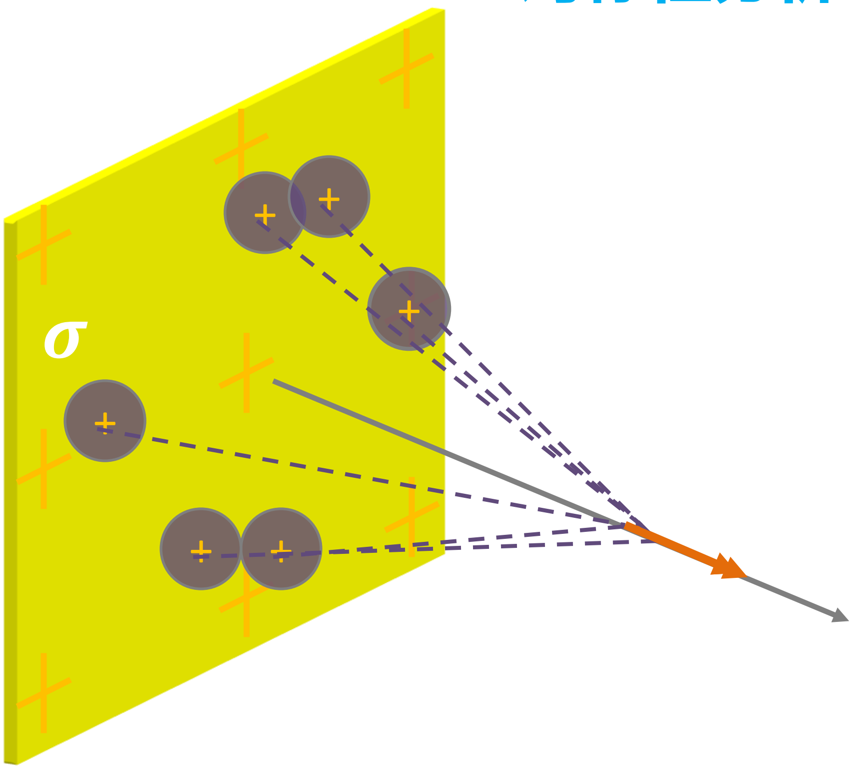
带电球层的电场分布

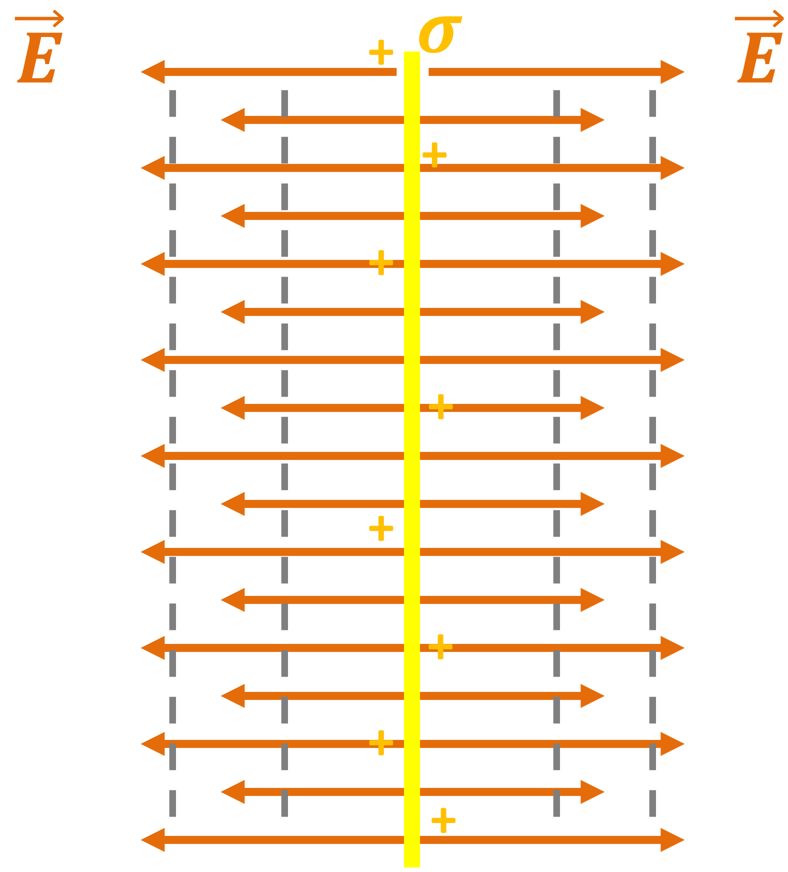


带电面上场强E突变是采用面模型的结果，实际问题中计算带电层内及其附近的准确场强时，应放弃面模型而还其体密度分布的本来面目。

已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ，求无限大均匀带电平面的电场强度。

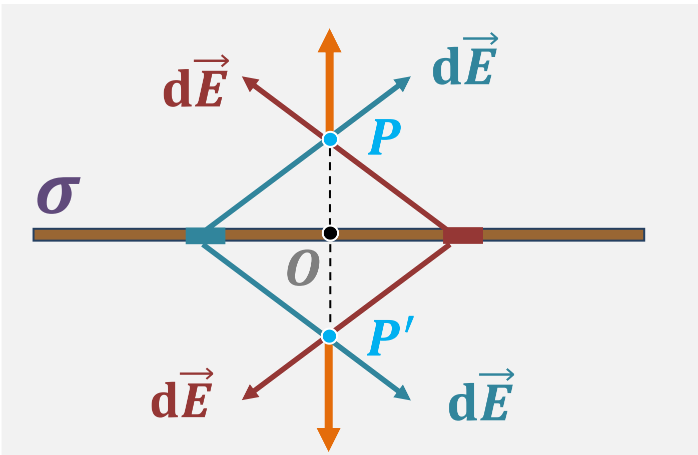
对称性分析

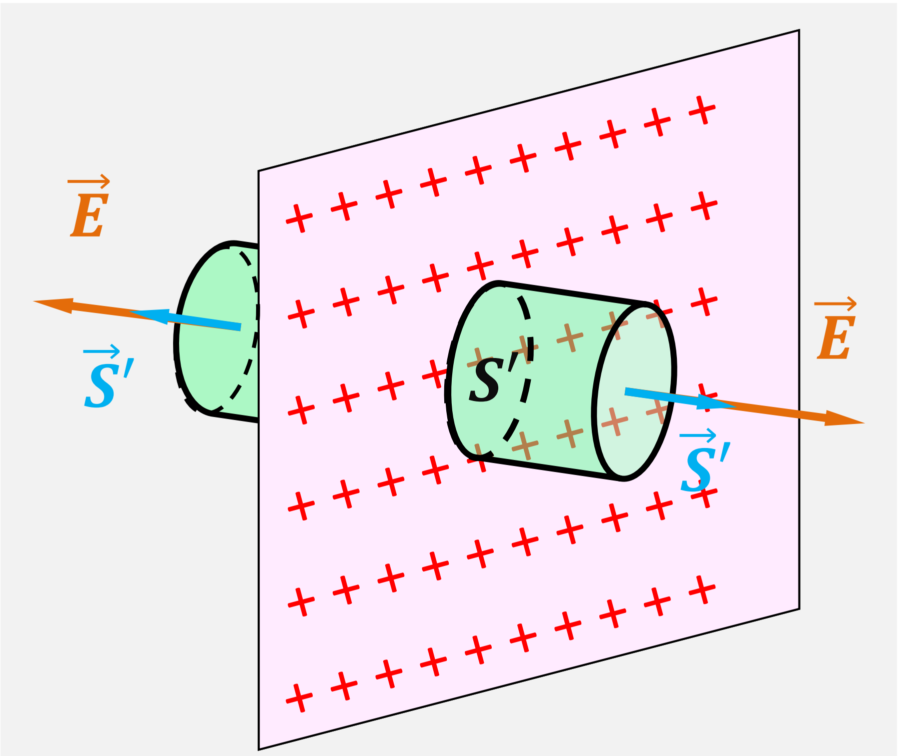




- 以面为对称的场。与带电面等距离的两平行平面处场强值相等。

已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ，
求无限大均匀带电平面的电场强度。





对称性分析：

$\vec{E}$方向垂直于带电平面，离带电平面距离相等的场点彼此等价。

如何构成封闭的高斯面？

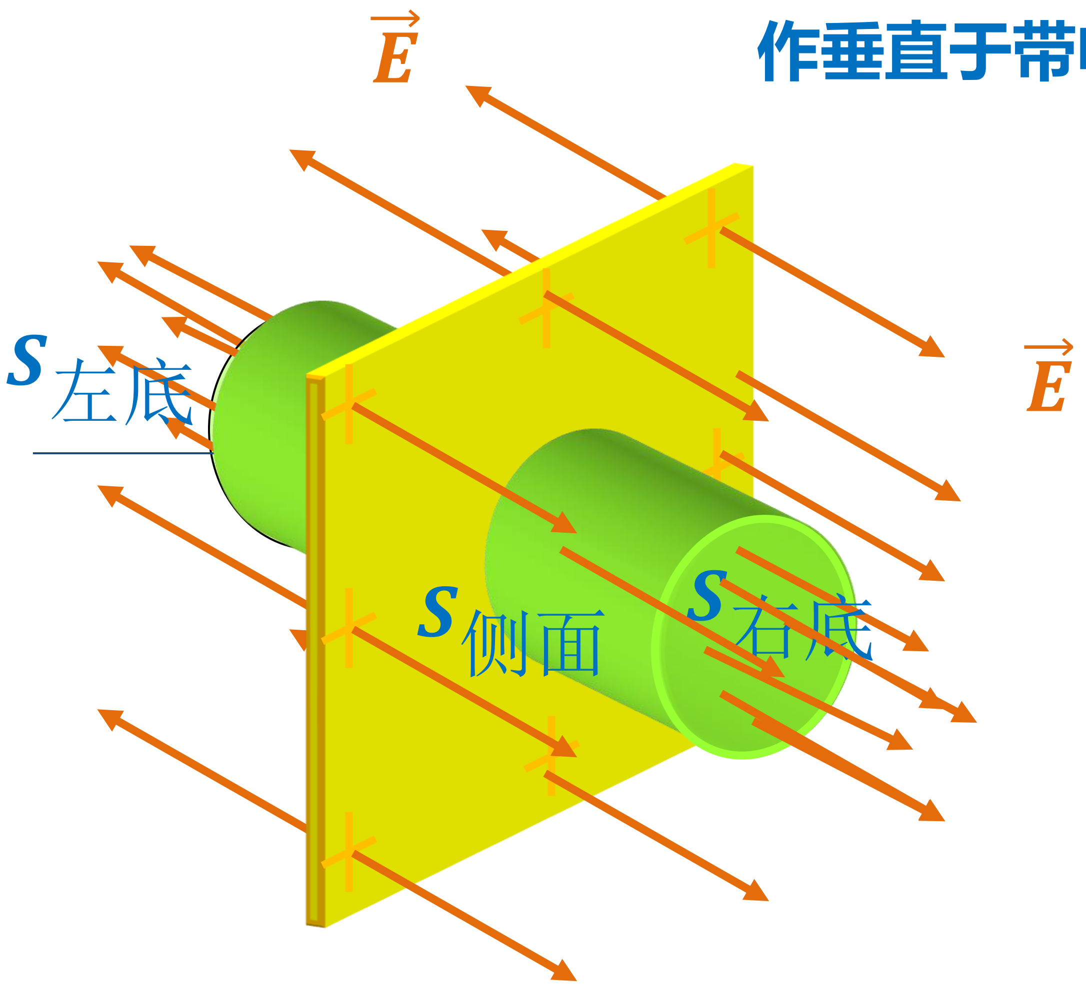
解：电场强度分布具有面对称性

$\vec{E}$垂直平面

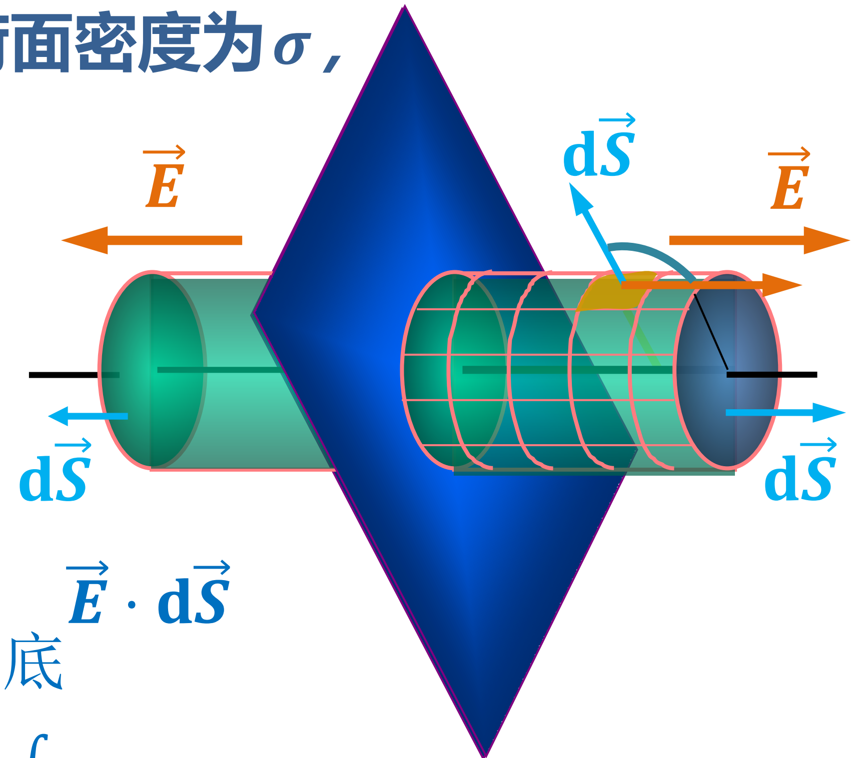
选取封闭的圆柱形高斯面

已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ，求无限大均匀带电平面的电场强度。

作垂直于带电面的高斯圆柱面



已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ，
求无限大均匀带电平面的电场强度。



解：电场强度分布具有面对称性

选取封闭的圆柱形高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\text{侧}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{左底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{右底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

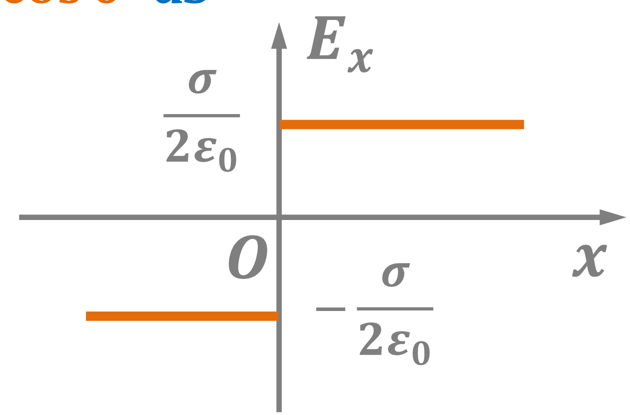
$$= \int_{\text{侧}} E\cos\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}S + \int_{\text{左底}} E\cos 0^\circ\,\mathrm{d}S + \int_{\text{右底}} E\cos 0^\circ\,\mathrm{d}S$$

$$= 0 + ES + ES = 2ES$$

根据高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}}$

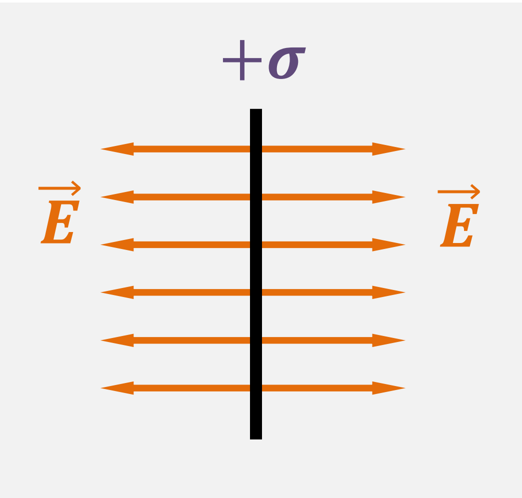
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

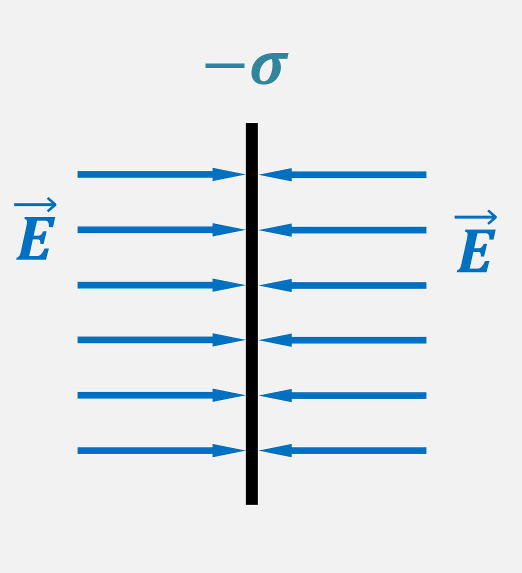
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 其指向由σ的符号决定

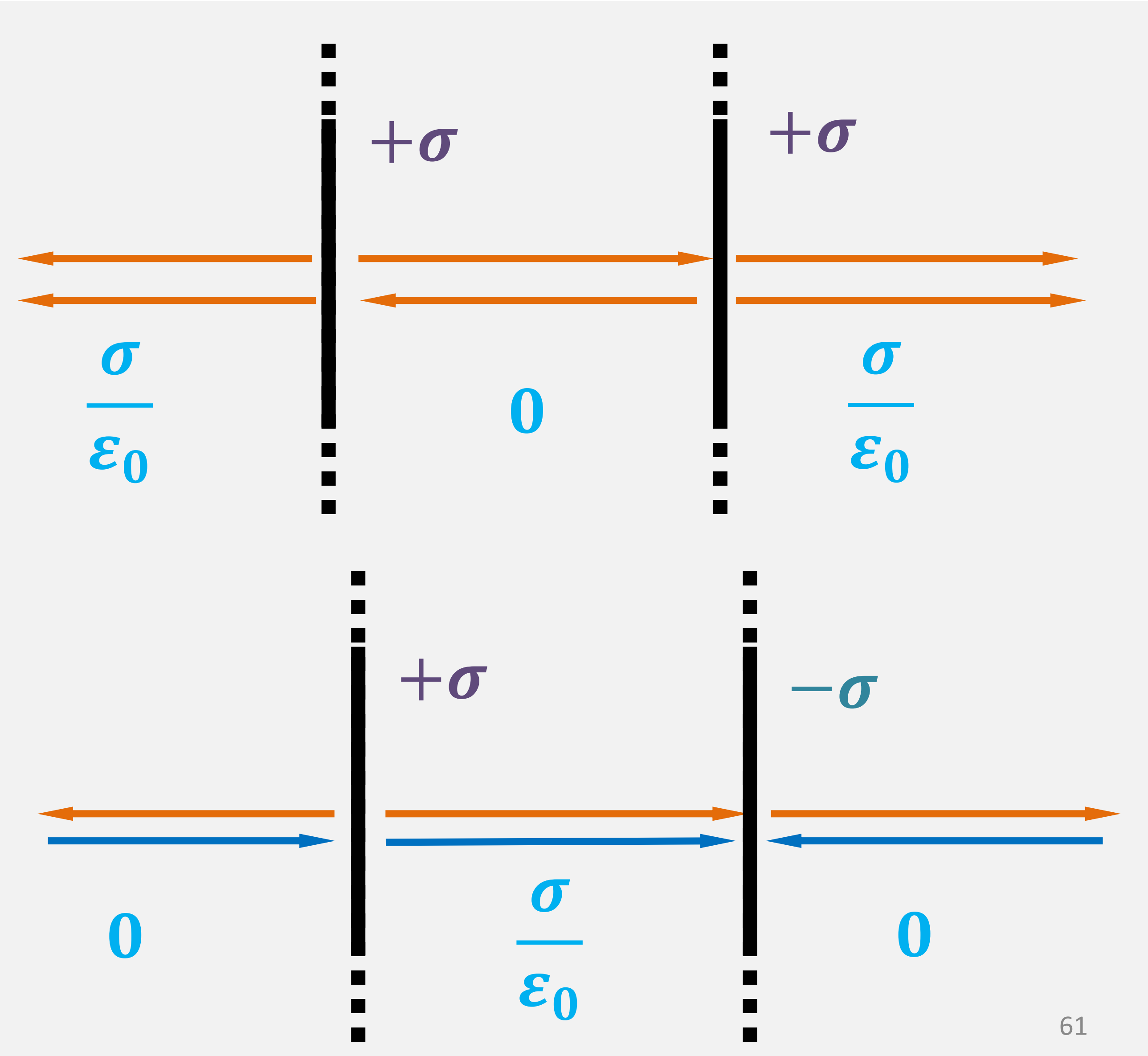


电场分布曲线

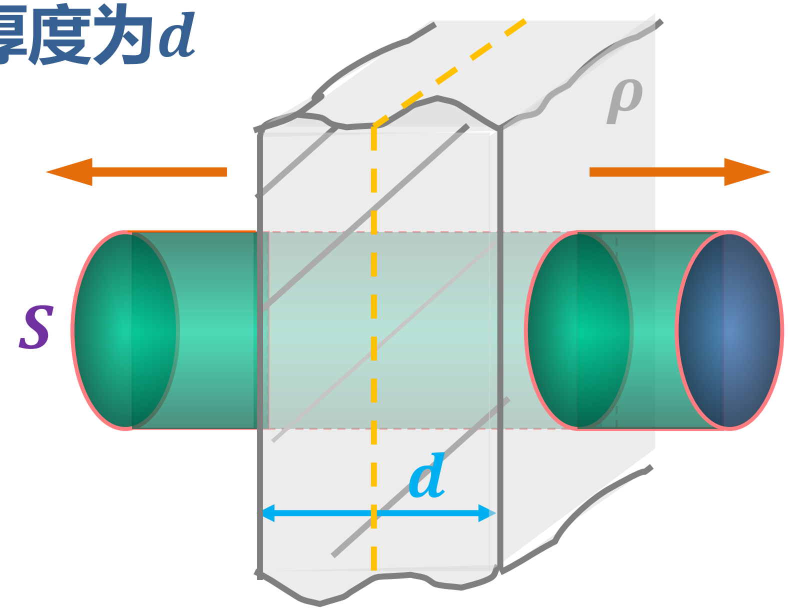
无限大带电平面的电场叠加问题







已知无限大板电荷体密度为ρ，厚度为d求电场场强分布。



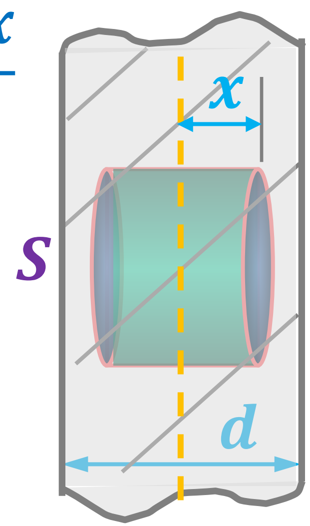
解：选取如图的圆柱面为高斯面

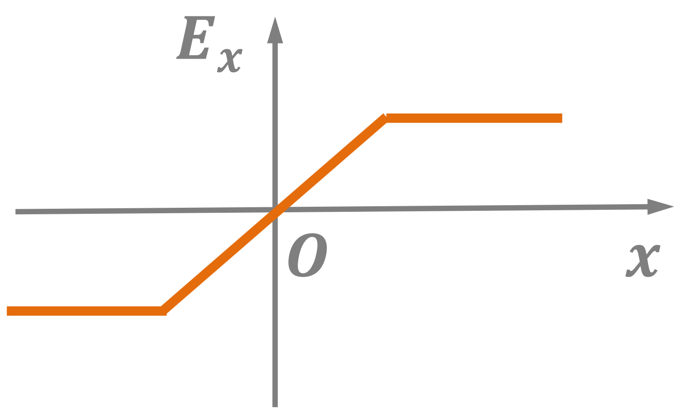
板外： $$2ES = \frac{\rho S d}{\varepsilon_0}$$

$$E_{外} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

板内： $$2ES = \frac{\rho S \cdot 2x}{\varepsilon_0}$$

$$E_{内} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$



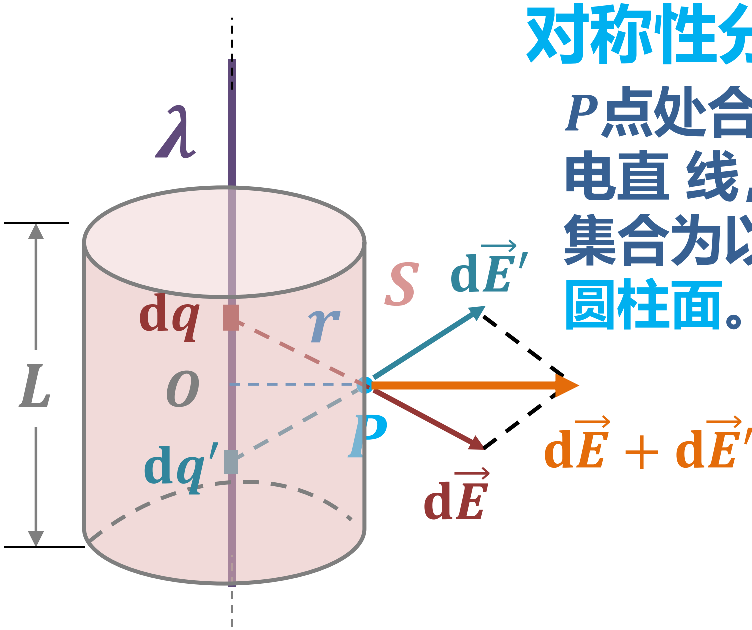


电场分布曲线

◆ 带电平面上电场强度突变的原因?

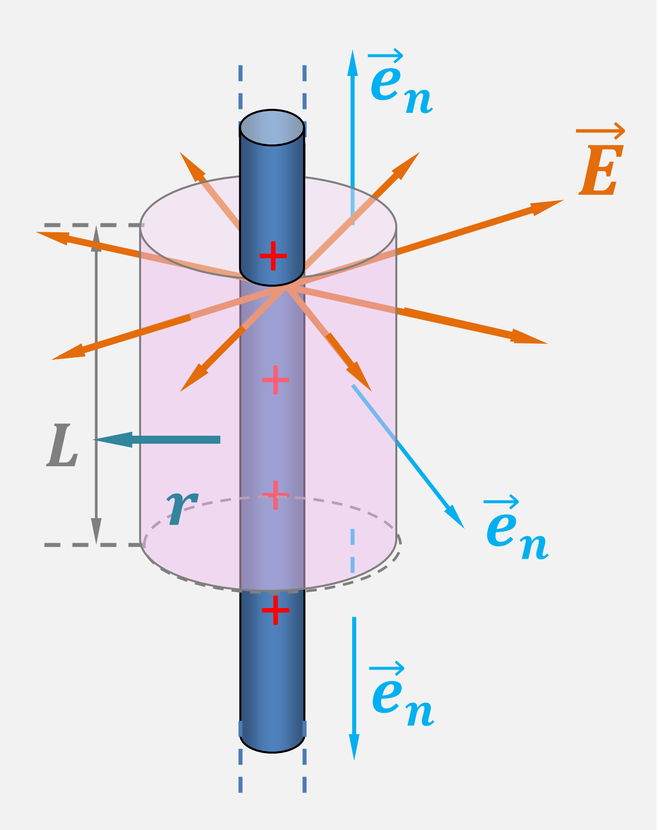
已知“无限长”均匀带电直线的电荷线密度为λ，

求无限长均匀带电直线的电场强度。



对称性分析：轴对称

P点处合场强$\vec{E}$垂直于带电直 线，与P等价的点的集合为以带电直线为轴的圆柱面。



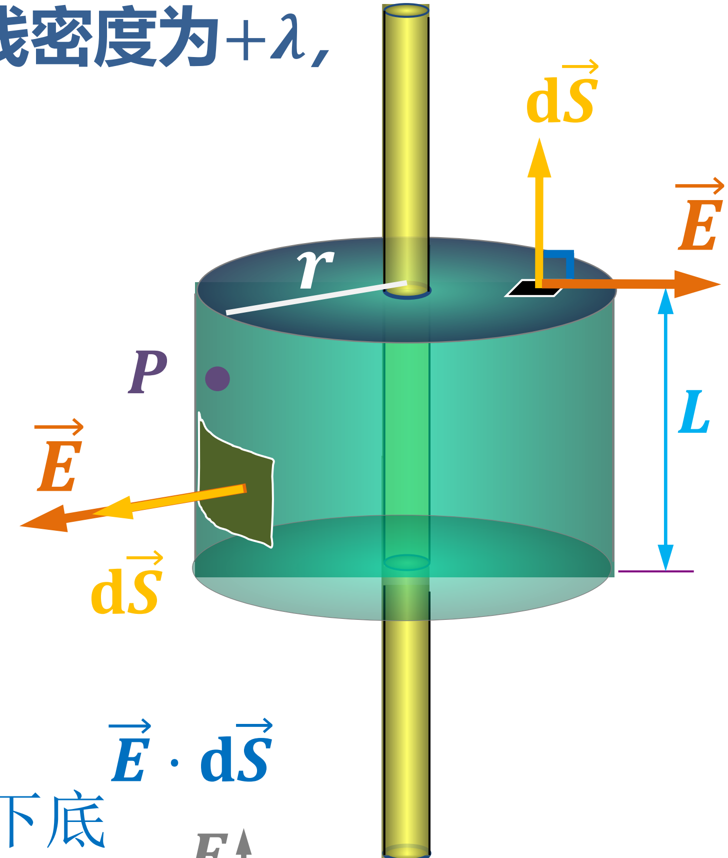
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{柱面}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{柱面} E\cos 0^\circ\, dS + \int_{上底} E\cos\frac{\pi}{2}\, dS + \int_{下底} E\cos\frac{\pi}{2}\, dS$$

$$= E\cdot 2\pi r L = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

◆取长L的圆柱面，加上底、下底构成封闭的柱形高斯面。

已知“无限长”均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$，求距直线r处一点P的电场强度。



解：电场分布具有轴对称性

过P点作一个以带电直线为轴，以L为高的圆柱形闭合曲面S作为高斯面

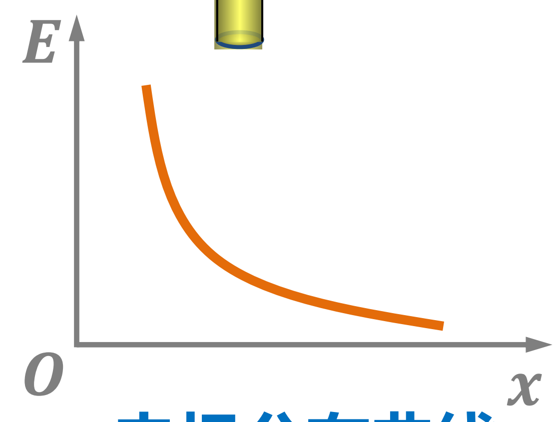
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\int_{侧} dS = E\,2\pi r l$$

根据高斯定理得 $E\,2\pi r l = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$

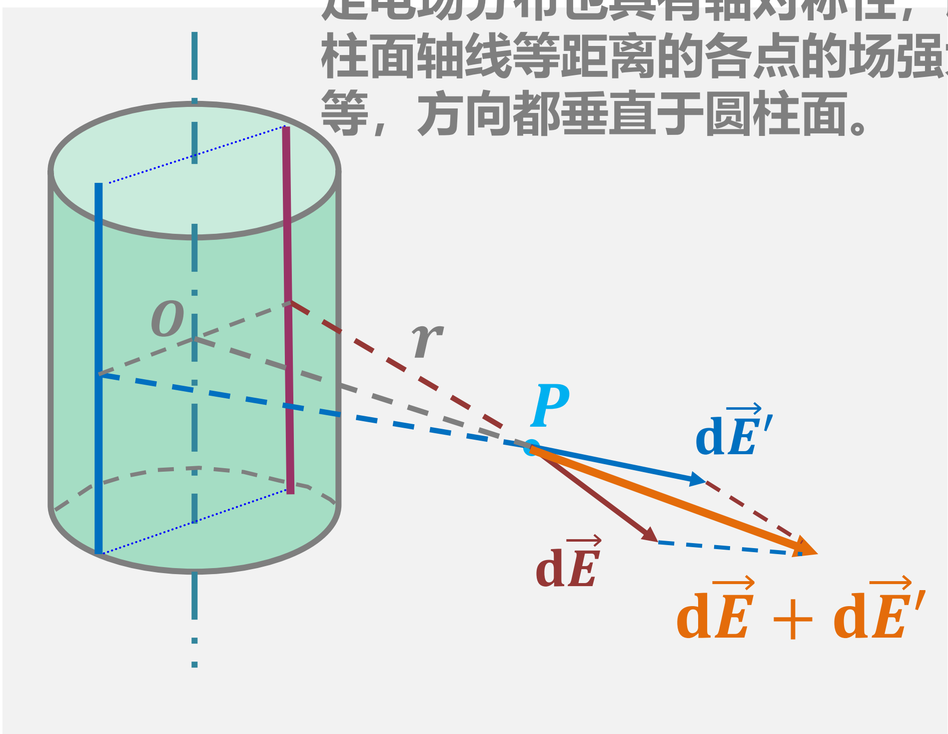
$$\Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



电场分布曲线

求无限长均匀带电柱面的电场分布。

由于电荷分布具有轴对称性，可以确定电场分布也具有轴对称性，即与圆柱面轴线等距离的各点的场强大小相等，方向都垂直于圆柱面。



对称性分析:

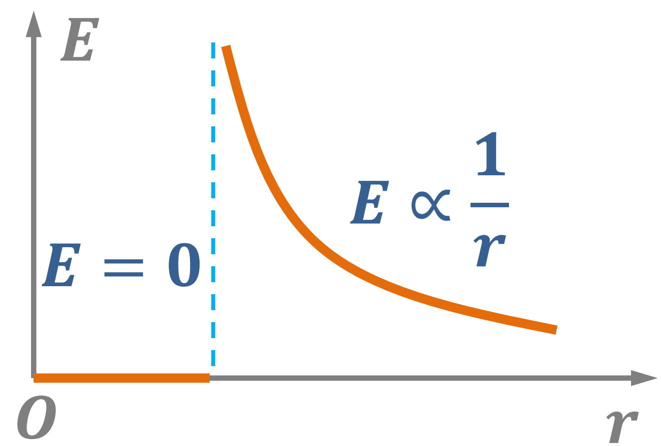
视为无限长均匀带电直线的集合

选同轴圆柱型高斯面；

由高斯定理计算

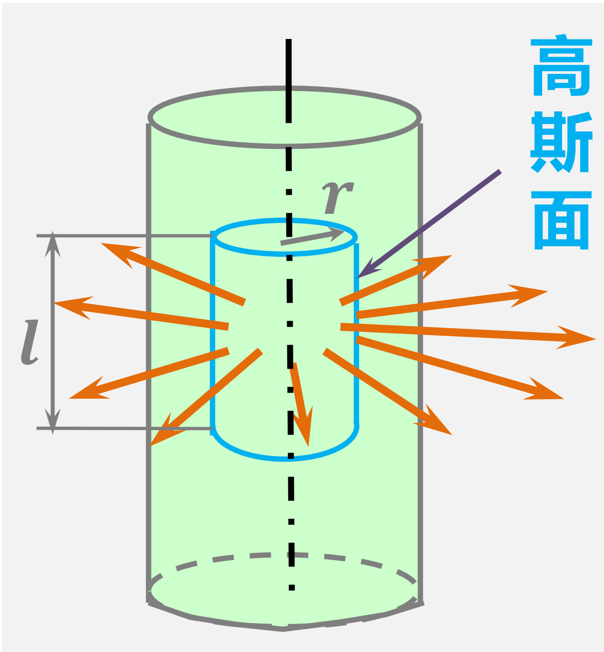
$$r < R，\ E = 0$$

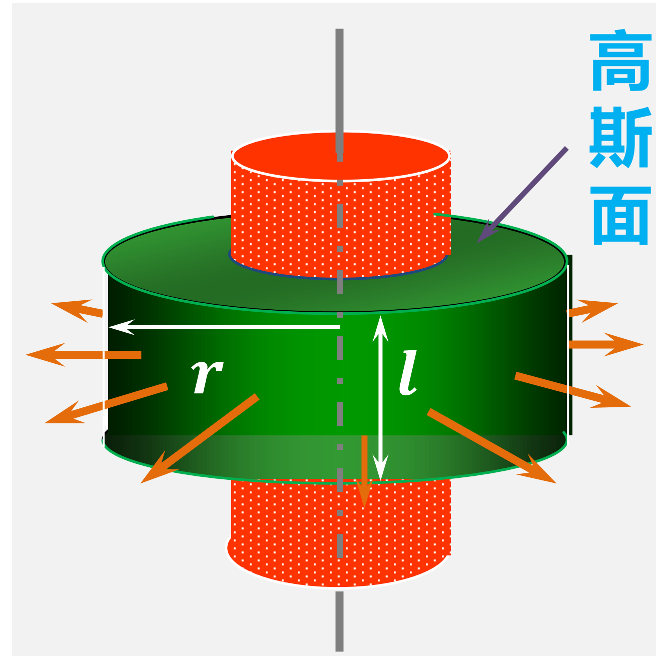
$$r > R，\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



电场分布曲线

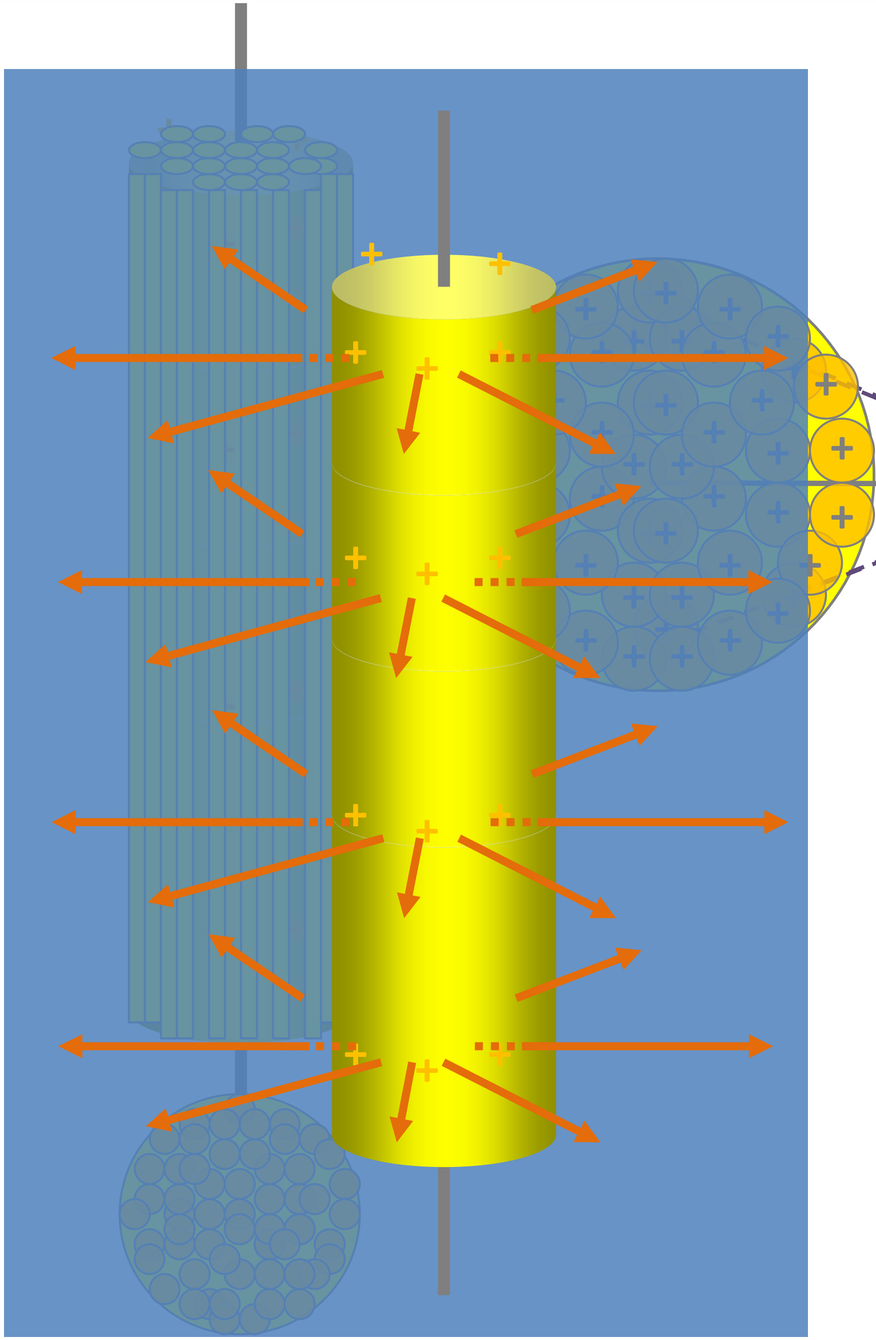
求无限长均匀带电柱体的电场分布。





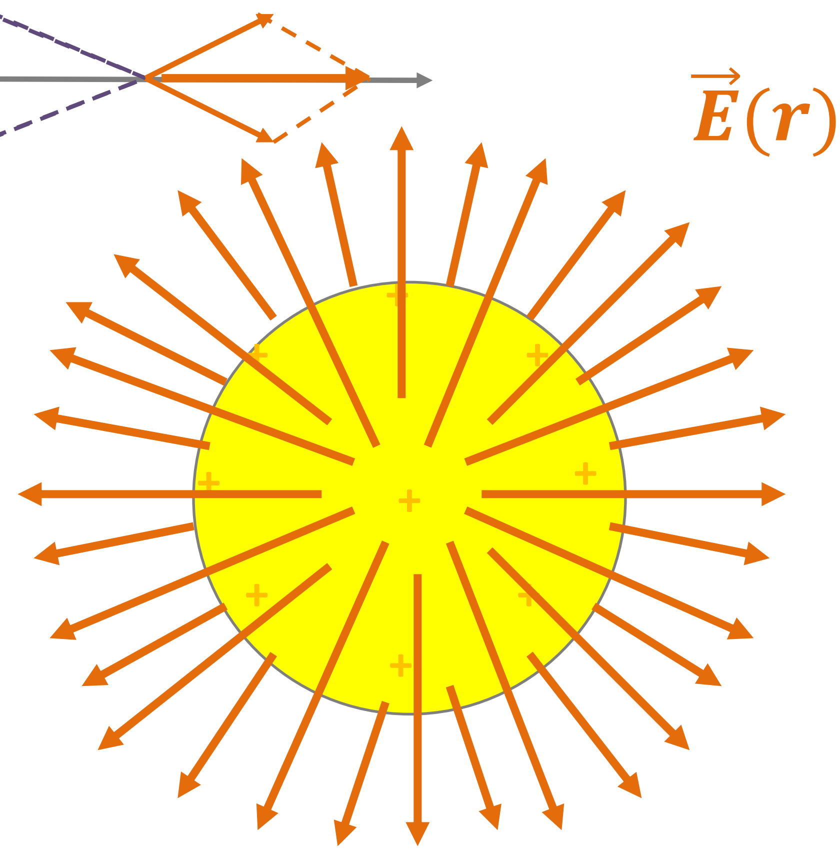
◆ 当带电直线，柱面，柱体不能视为无限长时，能否用高斯定理求电场分布？ 不能

如果不能，是否意味着高斯定理失效？ 不是

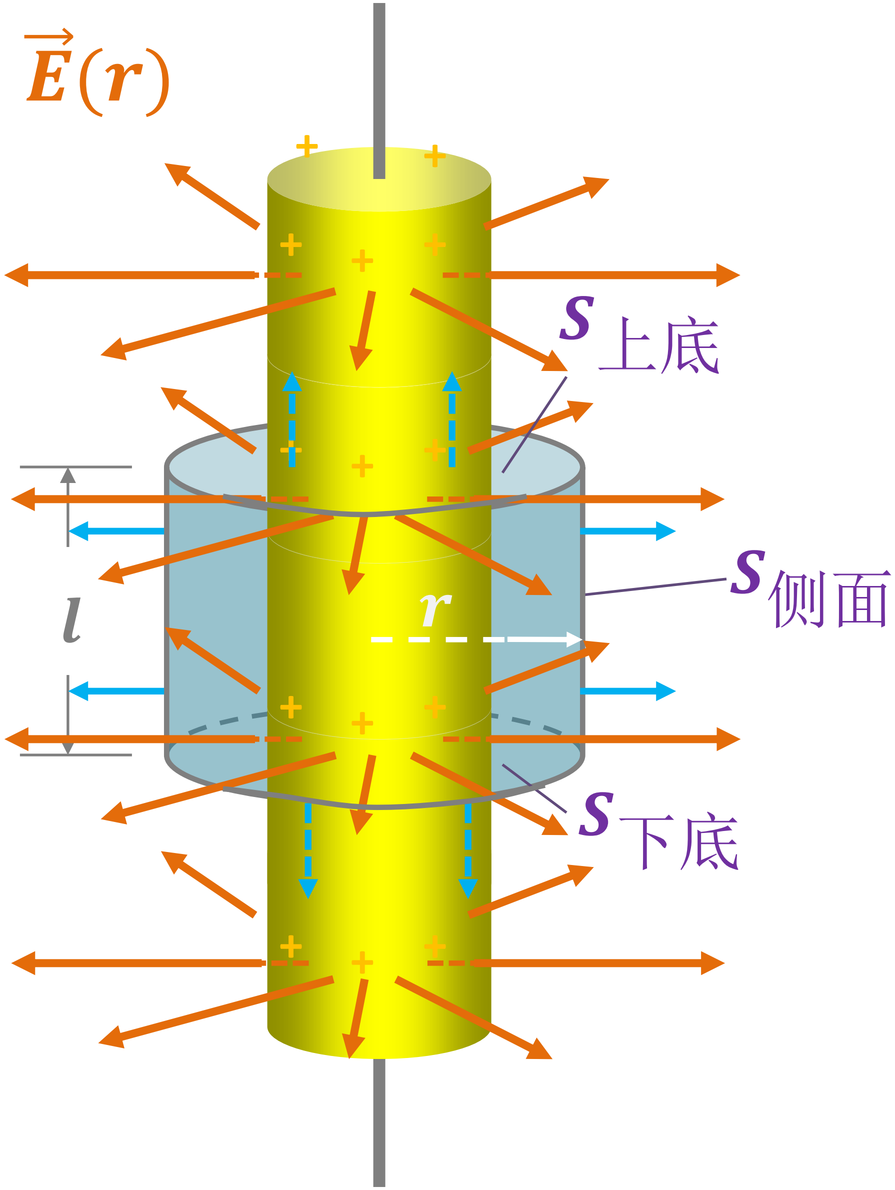


求一无限长，单位长度带电λ的直圆柱带电体的电场。

- 电场以中心轴线为面对称。



以轴线为中心，作半径为r的圆柱形高斯面S（$r \geq R$）



根据高斯定理：

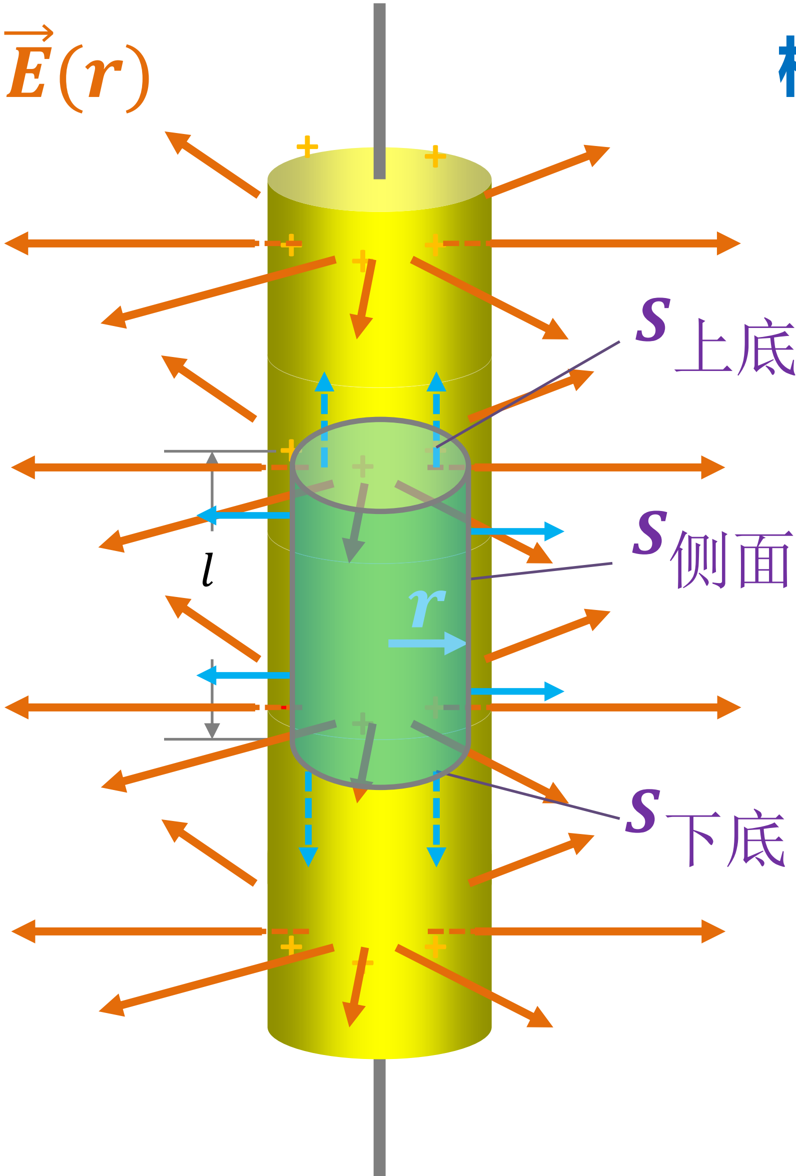
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{s内} q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_上} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_下} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_侧} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E\,2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R \leq r < \infty)$$

以轴线为中心，作半径为r的圆柱形高斯面S $(0 \leq r < R)$



根据高斯定理：

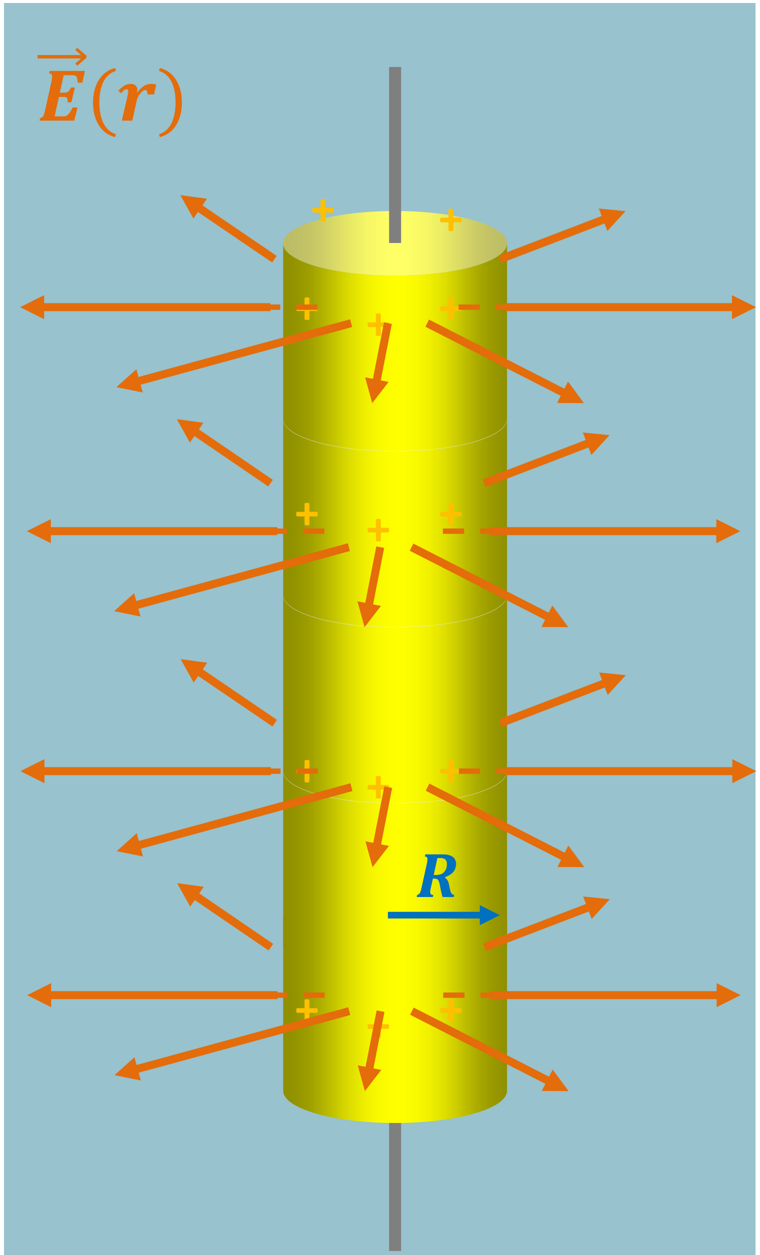
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_上} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_下} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_侧} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E\,2\pi r l$$

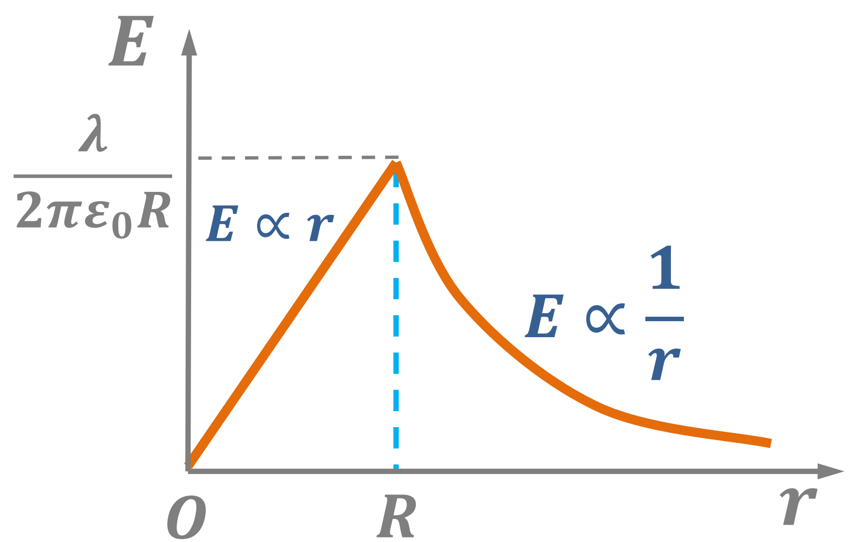
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\lambda}{\pi R^2} \pi r^2 l$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi \varepsilon_0 R^2}$$



求一无限长，单位长度带电λ的直圆柱带电体的电场。

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\lambda\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & (0\le r<R)\\ \dfrac{\lambda\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & (R\le r<\infty)\end{cases}$$



电场分布曲线

气体（氧气等）在强激光的焦点附近容易被电离，从而形成圆柱状带正电的离子体，称为光丝现象，其电荷体密度分布可以近似用如下式子表示：$\rho(r)=\frac{\rho_0}{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2+1\right]^2}$，这里$r$是到圆柱体轴线的距离，$\rho_0$是轴线上的电荷密度值，$a$为常数。求距离轴线为$r$处的电场强度大小。

解：根据对称性作高为l的圆柱状高斯面，由高斯定理

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

得 $$2\pi rl\cdot E=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q=\iiint \rho \mathrm{d}V=\int_0^r \rho\cdot 2\pi rl\cdot \mathrm{d}r=2\pi l\rho_0\cdot\int_0^r\frac{r\mathrm{d}r}{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2+1\right]^2}$$

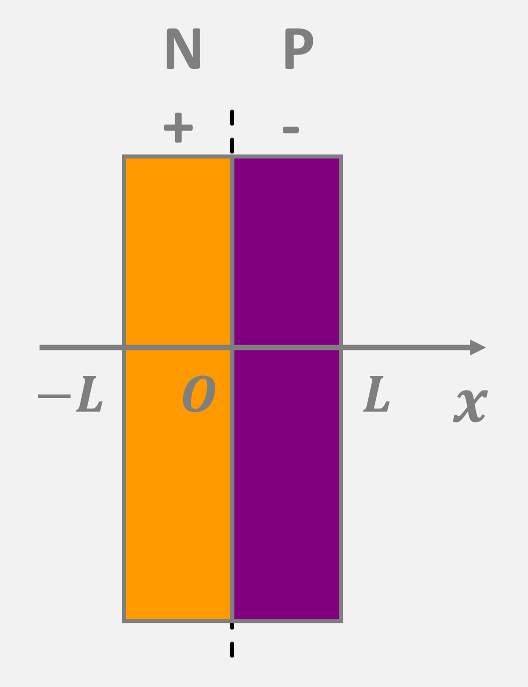
$$=\pi a^2 l\rho_0\int_0^r\frac{\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)}{\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)^2}$$

求得电场强度大小为

$$E=\frac{\rho_0 a^2 r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

已知PN结内电荷体密度分布

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & (x > L,\ x < -L) \\ -ax & (-L \le x \le L) \end{cases}$$



求半导体PN结内外的电场。

解：对称性分析

虽然电荷非均匀分布，但ρ随x变化规律未破坏面对称性。

在 $|x| \ge L$ 处，P区与N区电荷的电场相互抵消，

$$\vec{E} = 0$$

由高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

$|x| \le L$，作过场点的圆柱形高斯面

$$\sum q_{内} = \int \rho \mathrm{d}V = \int_x^L -ax \cdot \Delta S \mathrm{d}x$$

$$= -a\Delta S \frac{1}{2}\left(L^2 - x^2\right)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{柱面} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

0

$\cos\frac{\pi}{2}$

$$= \int_{左底} E \cos 180^\circ \, \mathrm{d}S$$

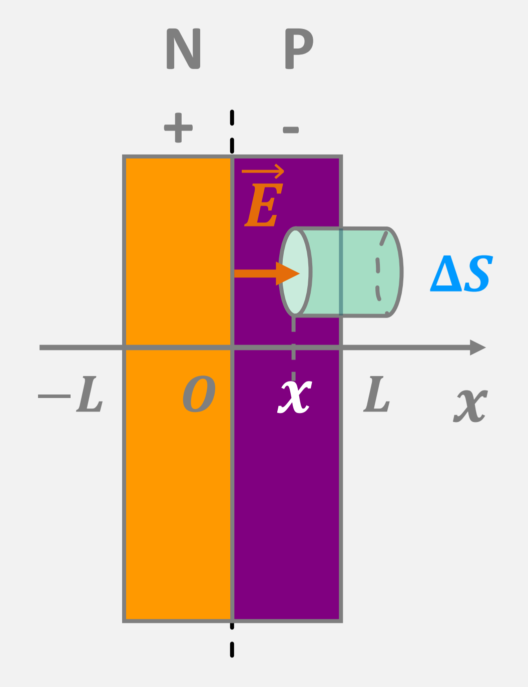
穿入

$$= -E\,\Delta S = -a\Delta S \frac{1}{2}\left(L^2 - x^2\right)$$

$$E = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(L^2 - x^2\right)$$

方向沿$+x$

$$\vec{E} = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(L^2 - x^2\right)\vec{i}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

球对称	轴对称	面对称
点电荷	直线	平面
球面	柱面	平板
球体	柱体	

- 利用高斯定理求解电场分布时，首先要根据电场分布的对称性选择恰当高斯面。

求解条件：电场分布具有某些对称性

找到恰当的高斯面，使 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 中的$\vec{E}$能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出$\vec{E}$分布。

当场源电荷分布具有某种对称性时，根据对称性的特点，选取适当的高斯面：使得场强都垂直于闭合曲面，且大小处处相等；或者使一部分场强垂直于闭合曲面的一部分，且大小处处相等。而余下的场强则与其余的曲面平行，通过该曲面的电通量为零。

电场分布	高斯面
球对称	同心的球面
轴对称	包含上下底面的同轴圆柱面
面对称	上下底面与带电面平行，轴与带电面垂直的圆柱面

面积为S的空气平行板电容器，极板上分别带电量$\pm q$，若不考虑边缘效应，则两极板间的相互作用力为

(A) $\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}$ (B) $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$ (C) $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$ (D) $\frac{q^2}{\varepsilon_0 S^2}$

◆ 计算两板之间的静电力时，只能视其中一板在另一板的电场中受力，该电场的场强是其中一个带电板产生的

（设为$+q$板），则其值为$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$

于是$-q$板受$+q$板作用力大小为

$$F=\int E\mathrm{d}q=E\int \mathrm{d}q=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

两条平行的无限长均匀带电直线，相距为a, 电荷线密度分别为$\pm\lambda$，那么每条线单位长度上所受的库仑力为

(A) $\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 a}$ (B) $\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$ (C) $\frac{\lambda^2}{\pi\varepsilon_0 a}$ (D) $\frac{\lambda^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

◆ 无限长直线带电线的电场强度 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

一条线与另一条线的距离$r=a$, 因此单位长度所受吸引力为：

$$\frac{F}{l}=\frac{\lambda l E}{l}=\lambda\cdot\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

1. 电场强度的大小是单位正电荷所受的力。而电荷的单位是库仑，因此某点的电场强度等于在该点放1库仑的点电荷所受的力。
2. 电场线代表点电荷在电场中的运动轨迹。
3. 空间中的电场线有可能会相交。
4. 两个等量同号点电荷连线中点的电场强度为零。
5. 两个点电荷之间相距一定的距离，它们之间产生的库仑作用力是一种超距力，不需要经过任何物质或者场的传递。
6. 如果某一闭合曲面S的电通量为0，那么S面内所有电荷的代数和一定为零。
7. 已知一个高斯面上电场强度处处为0，那么在它所包围的空间内任意一点都没有电荷存在。
8. 高斯面上的电场强度是由高斯面内包含的所有电荷决定的，与高斯面外的电荷无关。
9. 场线稀疏的地方电场强度小，密的地方电场强度大。