- 磁感应强度 毕奥-萨伐尔定律及其应用
- 磁场的高斯定理和安培环路定理
- 洛伦兹力、安培力、载流线圈的磁矩

运动电荷间的相互作用 → 磁场 稳恒磁场

磁场 → 磁感应强度 → 毕---萨定律 → 磁场的高斯定理 / 安培环路定理 → 磁场的基本性质

磁场 → 洛仑兹力 → 带电粒子在磁场中的运动 → 霍尔效应

磁场 → 安培定律 → 磁力和磁力矩 → 磁力的功

磁场 → 顺磁质、抗磁质和铁磁质的磁化 → 磁场强度 → 磁介质中的安培环路定理

电现象 — 电流的磁效应

磁现象 — 电磁感应

电流的磁效应、电磁感应 → 麦克斯韦方程 → 磁场是电场的相对论效应

基本概念： 磁感应强度，磁通量，电流磁矩

基本规律： 磁场叠加原理

毕---萨定律及其应用

稳恒磁场高斯定理和安培环路定理

磁场的基本性质（无源场、涡旋场）

基本计算： 稳恒磁场$\vec{B}$分布

洛仑兹力，安培力，磁力矩

难点： 运动电荷之间的相互作用，磁场是电场的相对论效应。

磁介质

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$$

--- 恒定电流的**安培环路定理**

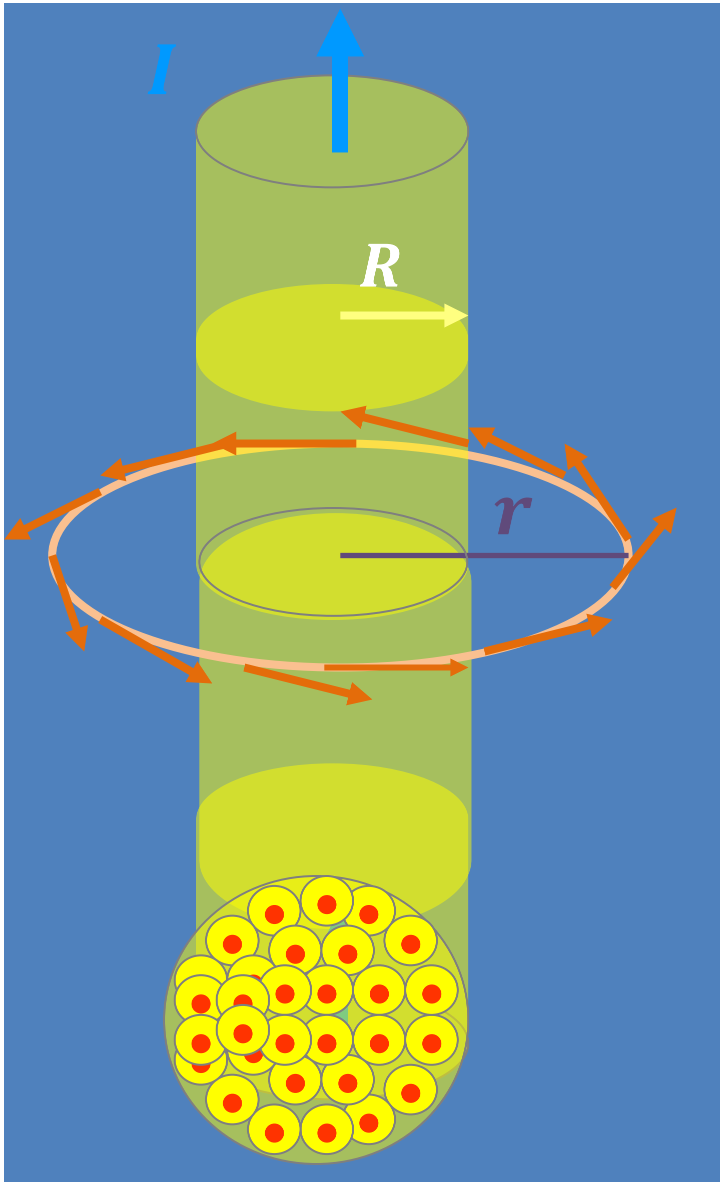
- 无限长均匀载流圆柱面（体）内外的磁场分布。
- 密绕载流长直螺线管的磁场分布。
- 密绕载流螺绕环（密绕在圆环上的螺线形线圈）的磁场分布。
- 无限大平面电流的磁场分布。

① 根据电流分布的对称性分析磁场分布的对称性。

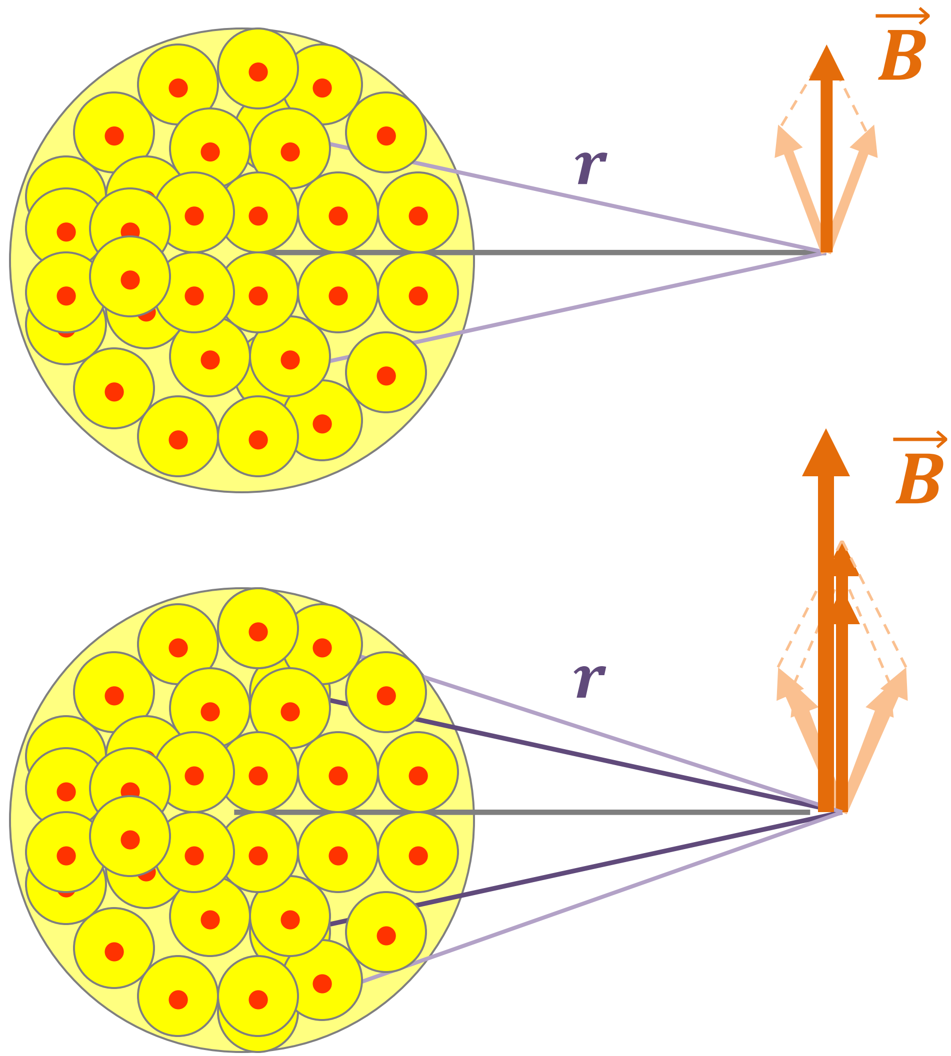
② 根据磁场分布的对称性选择合适的积分路径。

- 路径上各点$\vec{B}$大小相等，方向沿路径的切线方向。
- 在积分路径的一部分$\vec{B}=0$ 或$\vec{B}\perp \mathrm{d}\vec{l}$，
  在另一部分各点 $\vec{B}$ 大小相等，方向沿路径的切线方向。

□ 无限长直圆柱体载流导线磁场的分布。

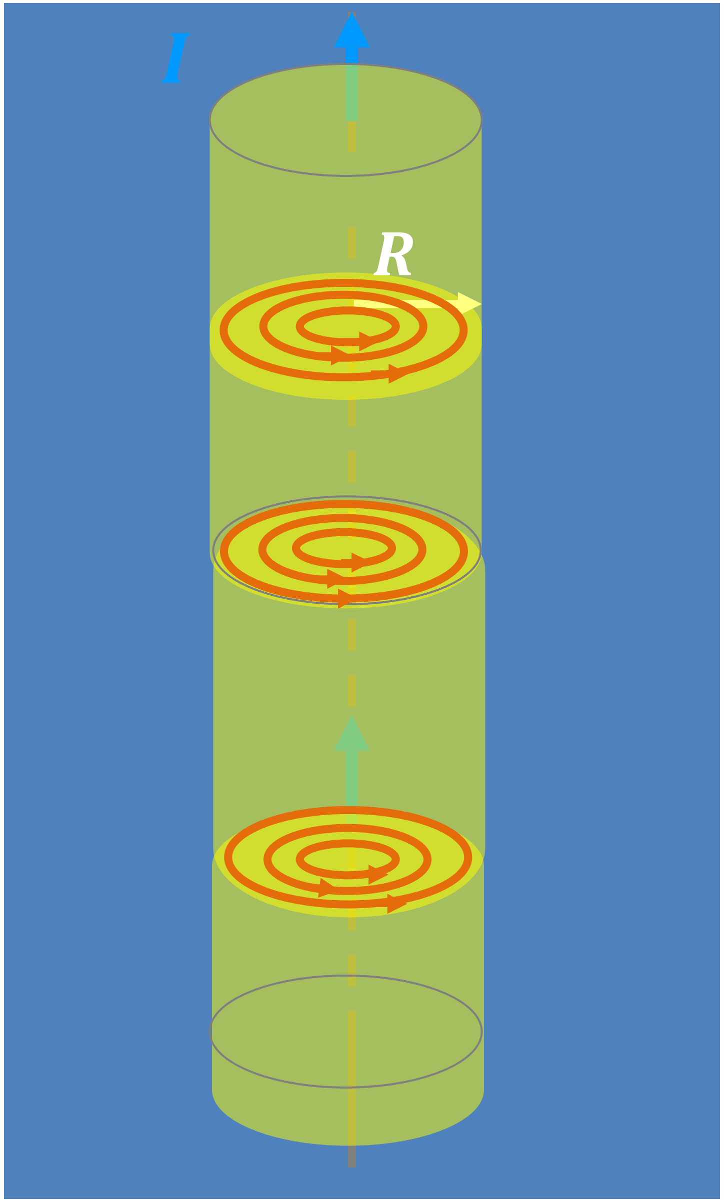


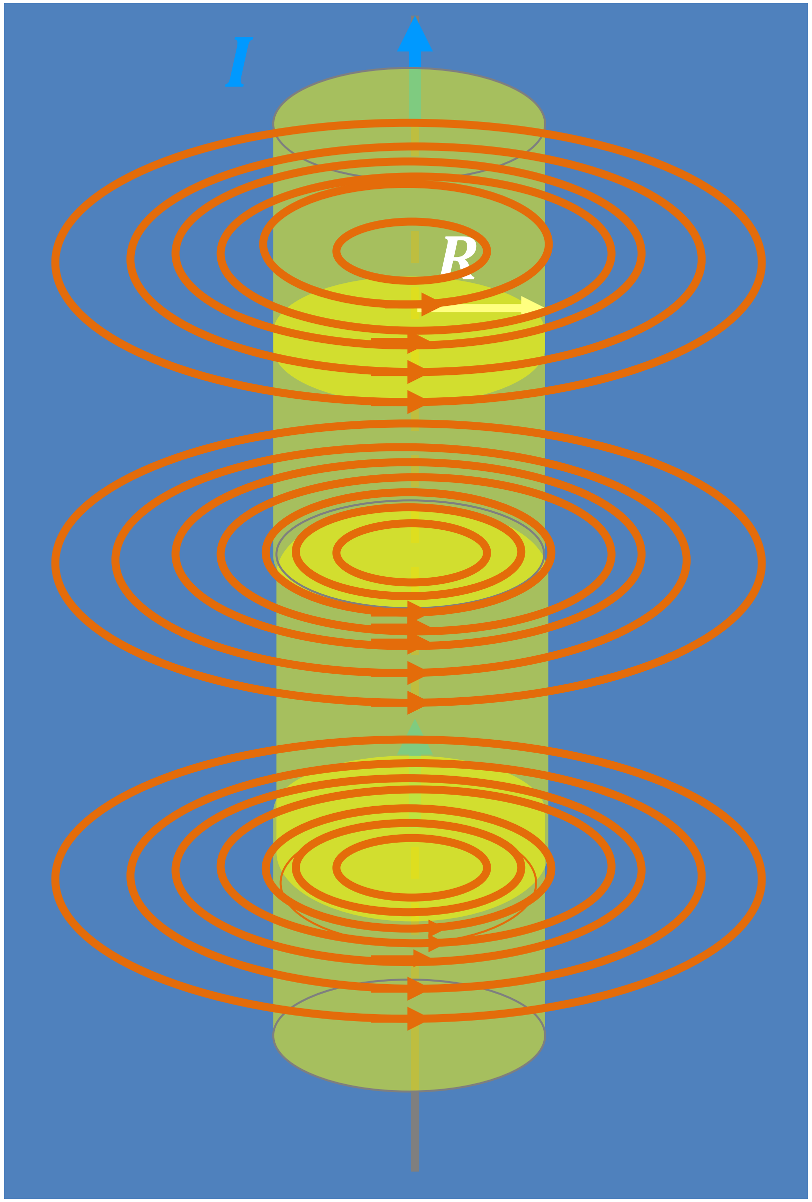
磁场分布的分析：



◆ 以中心轴为对称轴的磁场。

□ 无限长直圆柱体载流导线磁场的分布。

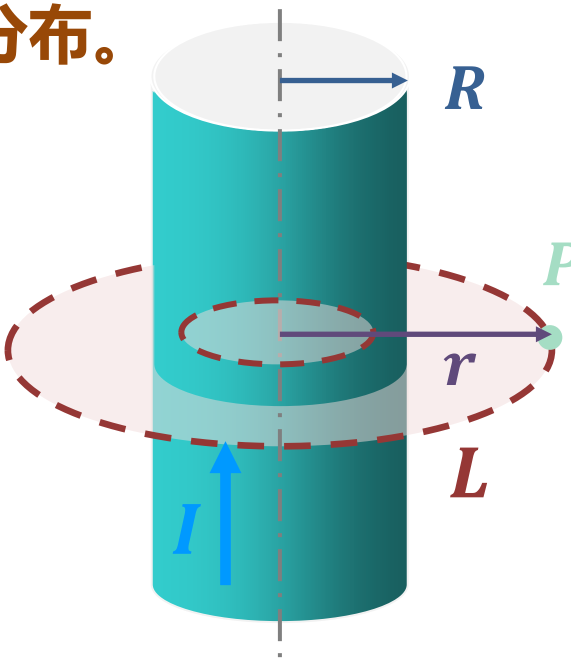




□ 无限长均匀载流圆柱面（R, I）的磁场分布。

分析磁场对称性。

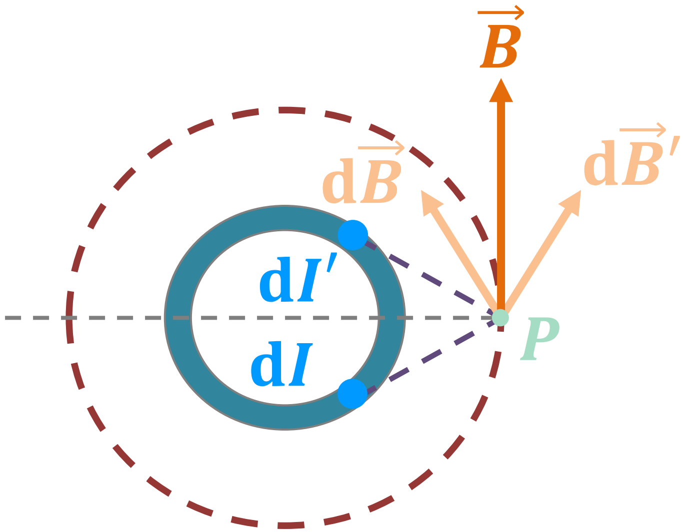
取两对称电流元$\mathrm{d}\vec{I}$、$\mathrm{d}\vec{I}'$，它们在P点产生的$\mathrm{d}\vec{B}$、$\mathrm{d}\vec{B}'$，大小相等，合矢量垂直于径矢$\vec{r}$，所有电流元$\mathrm{d}\vec{I}$在P点产生的总磁感应强度$\vec{B}$垂直于径矢$\vec{r}$。



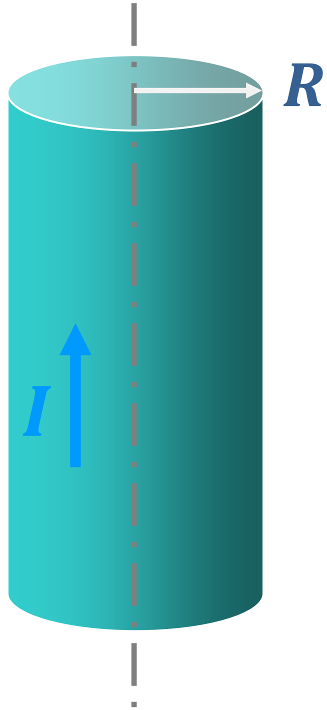
P点任意，因此与轴线等距离的各点的$\vec{B}$的大小都相同，方向都沿着切线方向，与电流满足右手螺旋关系。

选取圆形积分环路L。

- 选在垂直于长直载流导线的平面内，以导线与平面交点O为圆心，半径为r的圆周路径L，其指向与电流成右旋关系。



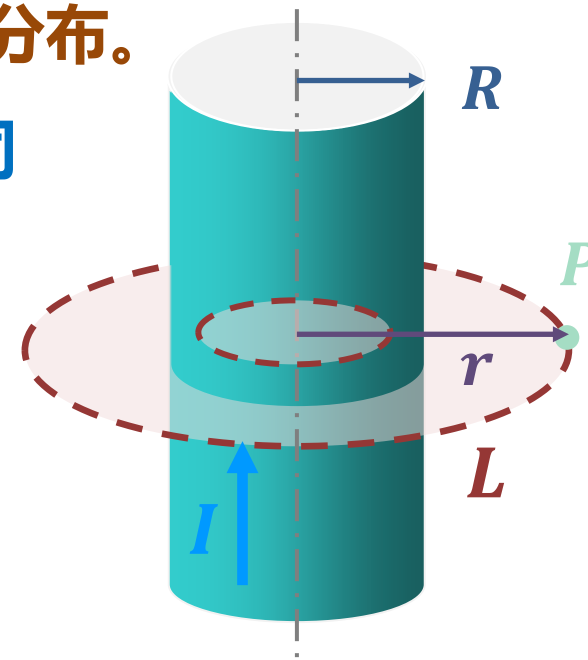
□ 无限长均匀载流圆柱体（R, I）的磁场分布。



选取圆形积分环路L。

- 选在垂直于长直载流导线的平面内，以导线与平面交点O为圆心，半径为r的圆周路径L，其指向与电流成右旋关系。

☐ 无限长均匀载流圆柱面（R, I）的磁场分布。



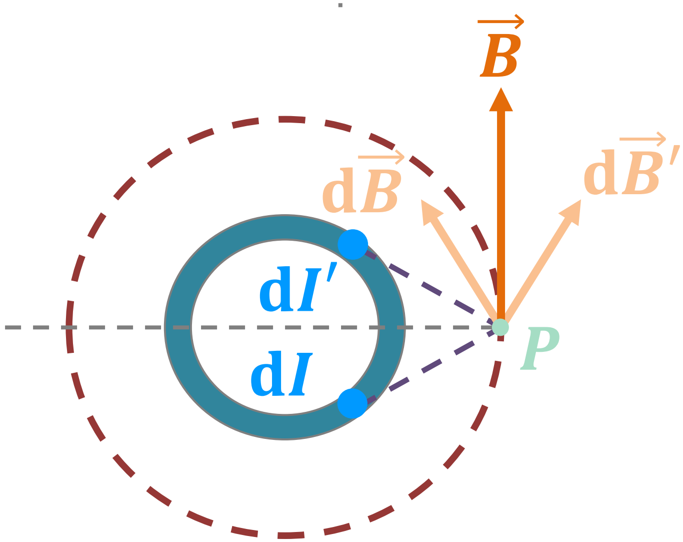
解：系统有轴对称性，圆周上各点的B相同

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos 0^\circ\, \mathrm{d}l$$

$r > R$ 过圆柱面外场点P做一圆周

$$\oint_L B\cos 0^\circ\, \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\,2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

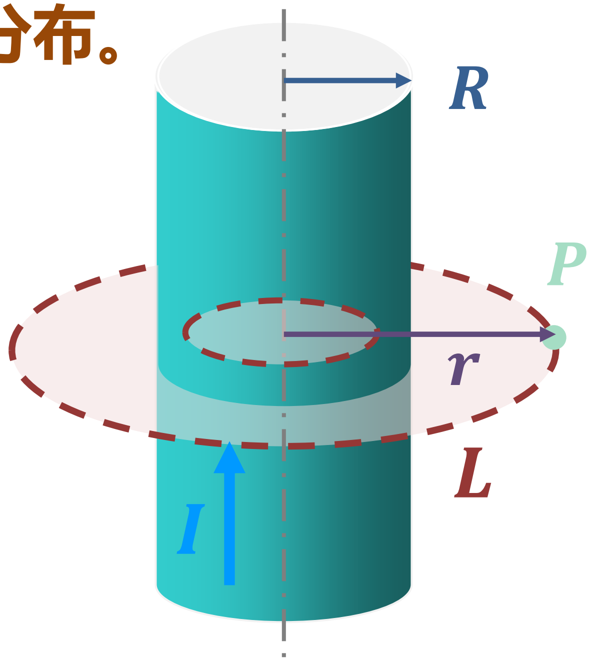


$r < R$ 过圆柱面内场点P做一圆周

$$\oint_L B\cos 0^\circ\, \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\,2\pi r = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = 0$$

□ 无限长均匀载流圆柱体（R, I）的磁场分布。



解：分析磁场分布的对称性

把圆柱看作一系列同轴柱面

系统有轴对称性，圆周上各点的B相同

$r \geq R$ 过圆柱体外场点P做一圆周

$$\oint_L B\cos 0^\circ \, \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\,2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r < R$ 过圆柱体内场点P做一圆周

$$\oint_L B\cos 0^\circ \, \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\,2\pi r = \mu_0 I'$$

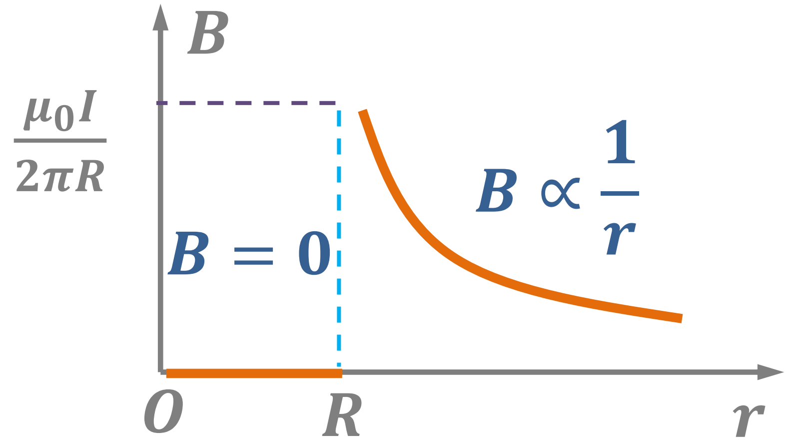
$$= \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$\vec{B}$的方向与电流I满足右手螺旋关系。

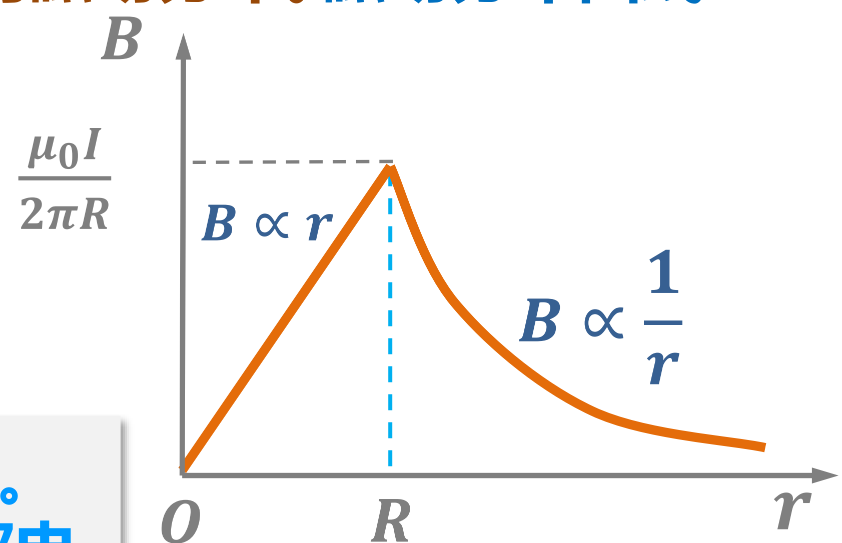
□ 无限长均匀载流圆柱面（R, I）的磁场分布。

$$B = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > R) \end{cases}$$



□ 无限长均匀载流圆柱体（R, I）的磁场分布。磁场分布曲线

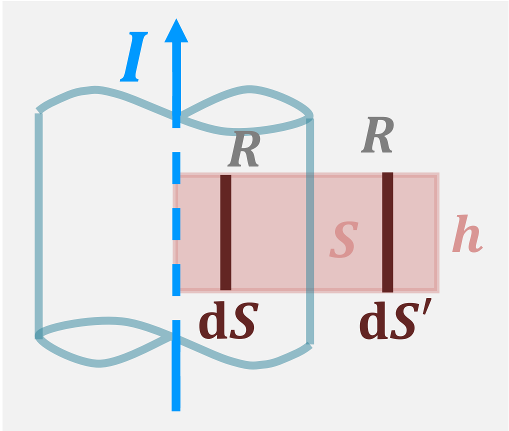
$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & (r \le R) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r \ge R) \end{cases}$$



磁场分布曲线

- $\vec{B}$的方向与电流满足右手螺旋关系。
- 圆柱面（体）外的磁场等价于全部电流集中于轴线的无限长直电流的磁场。

无限长均匀载流圆柱体（R, I）如图，求通过截面S（$2R$，h）的磁通量。



解：磁场分布

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r\ge R)\end{cases}$$

微元分析法：取$\mathrm{d}S=h\mathrm{d}r$　且$\mathrm{d}\vec{S}$与$\vec{B}$方向相同

$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_{内}} B_{内}\mathrm{d}S+\int_{S_{外}} B_{外}\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}h\mathrm{d}r+\int_R^{2R}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}h\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I h}{4\pi}(1+2\ln 2)$$

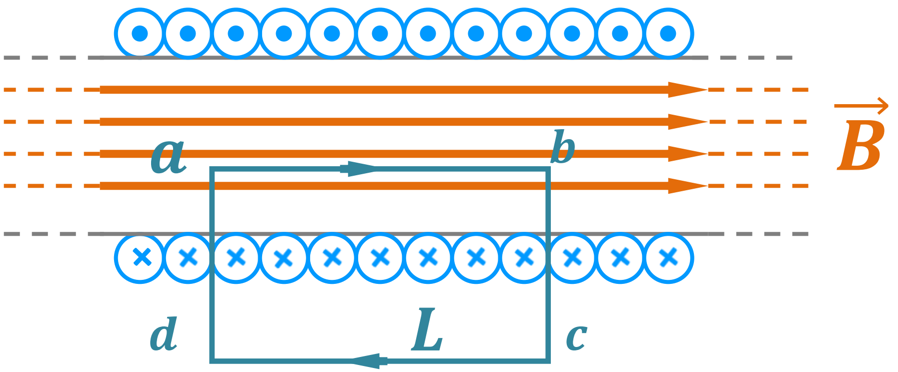
□ 密绕载流长直螺线管（n, I）的磁场分布。

解：对称性分析

螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，
外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$ 。

作矩形回路 $abcda$ ，
由安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{穿过}L} I_i$$



$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_c^d \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_d^a \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} = \mu_0 n I \overline{ab}$$

$$\Rightarrow B\,\overline{ab} = \mu_0 n I \overline{ab} \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

◆**无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零。**

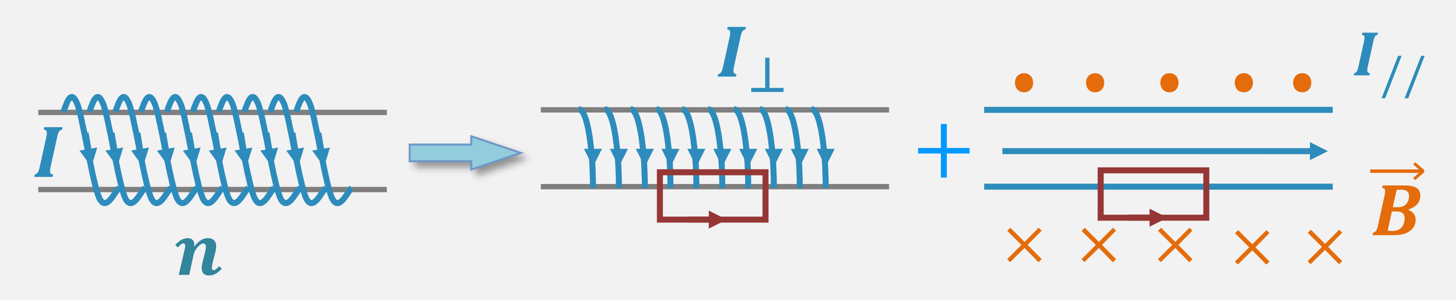
☐ 密绕载流长直螺线管（n, I）的磁场分布。

无限长载流螺线管内为均匀磁场

$$B_{内} = \mu_0 nI$$

思考：

如果螺距不为零（螺旋电流）对以上结果有无影响?



$$B_{内} = \mu_0 nI$$

螺线管内磁场不变

$$B_{外} = \frac{\mu_0 I_{//}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{外}}{B_{内}} = \frac{1}{2\pi nr}$$

$n = 4000\ \mathrm{m}^{-1}$

$R = 0.02\ \mathrm{m}$

$r = 0.2\ \mathrm{m}$

$$\Rightarrow \frac{B_{外}}{B_{内}} = 2 \times 10^{-4}$$

可以认为在螺线管外磁场为零！

半径 R 的无限长均匀带电圆筒绕轴线匀速旋转。
面密度σ，角速度ω。
求带电圆筒内部的磁场分布。

解：该长直圆筒等效于长直载流螺线管，
其内部为均匀磁场

$$B = \mu_0 nI$$

沿圆筒方向上的面电流密度 i
(单位垂直长度上流过的电流)

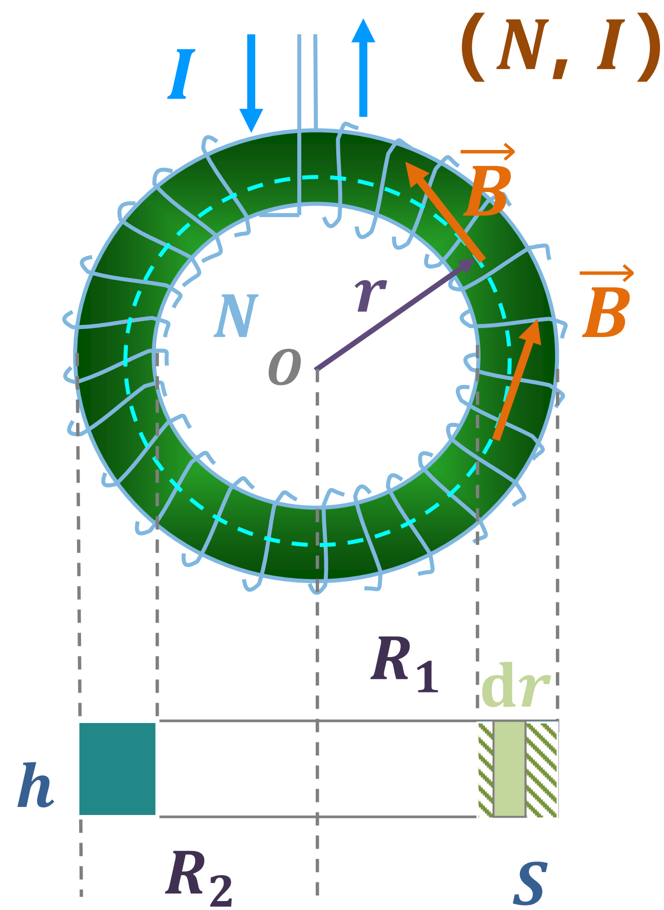
单位长度上电流：

$$nI = 2\pi R \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 nI = \mu_0 R\sigma\omega$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 R\sigma\,\vec{\omega}$$

□ 密绕载流螺绕环（密绕在圆环上的螺线形线圈）的磁场分布。



解：对称性分析

螺旋环内$\vec{B}$线为同心圆，
方向沿切线方向。

以中心O,半径 r 的圆环为安培环路

在螺绕环内部做一个环路，$R_1 < r < R_2$

$$\oint_L B\cos\theta\, \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\Rightarrow \quad B_{内} = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I$$

在螺绕环外部，$r > R_2$

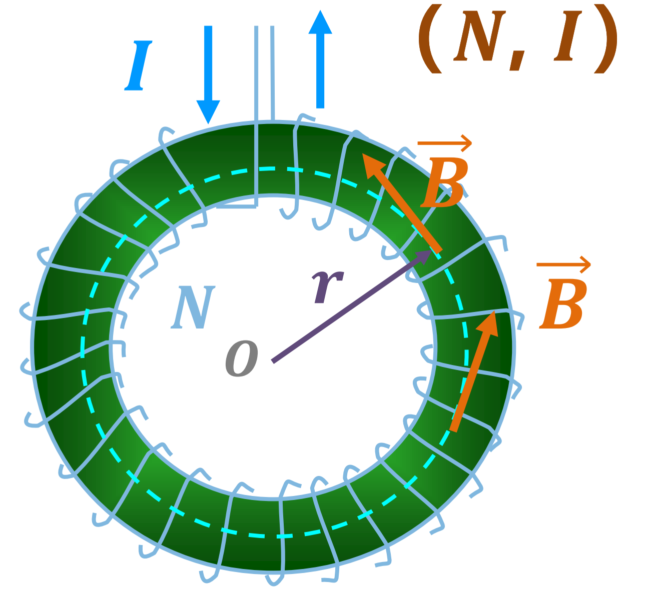
$$\sum I_i = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{外} = 0$$

- 若螺绕环的截面很小，$R_1 >> (R_2 - R_1)$，$r = \bar{r} = R$

$$B_{内} = \mu_0 \frac{N}{2\pi \bar{r}} I = \mu_0 nI$$

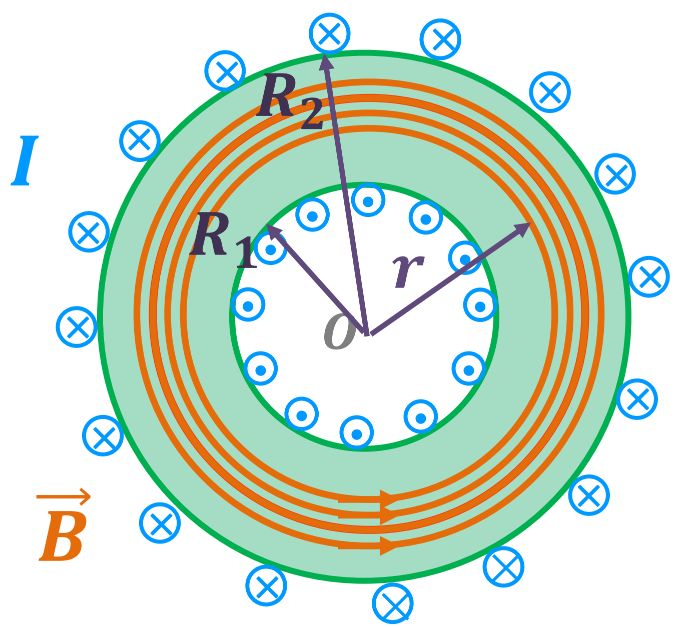
□ 密绕载流螺绕环（密绕在圆环上的螺线形线圈）的磁场分布。

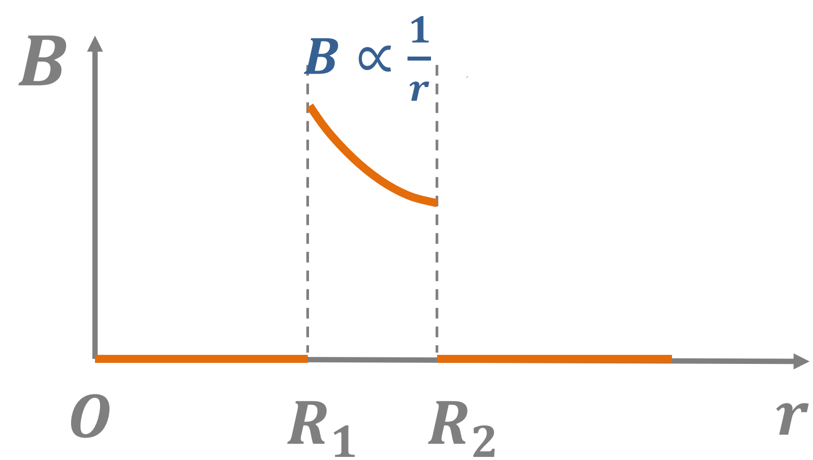
$$B = \begin{cases} 0 & (r < R_1,\ r > R_2) \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} & (R_1 < r < R_2) \end{cases}$$



$\vec{B}$ 大小相等的点的集合：同心圆环

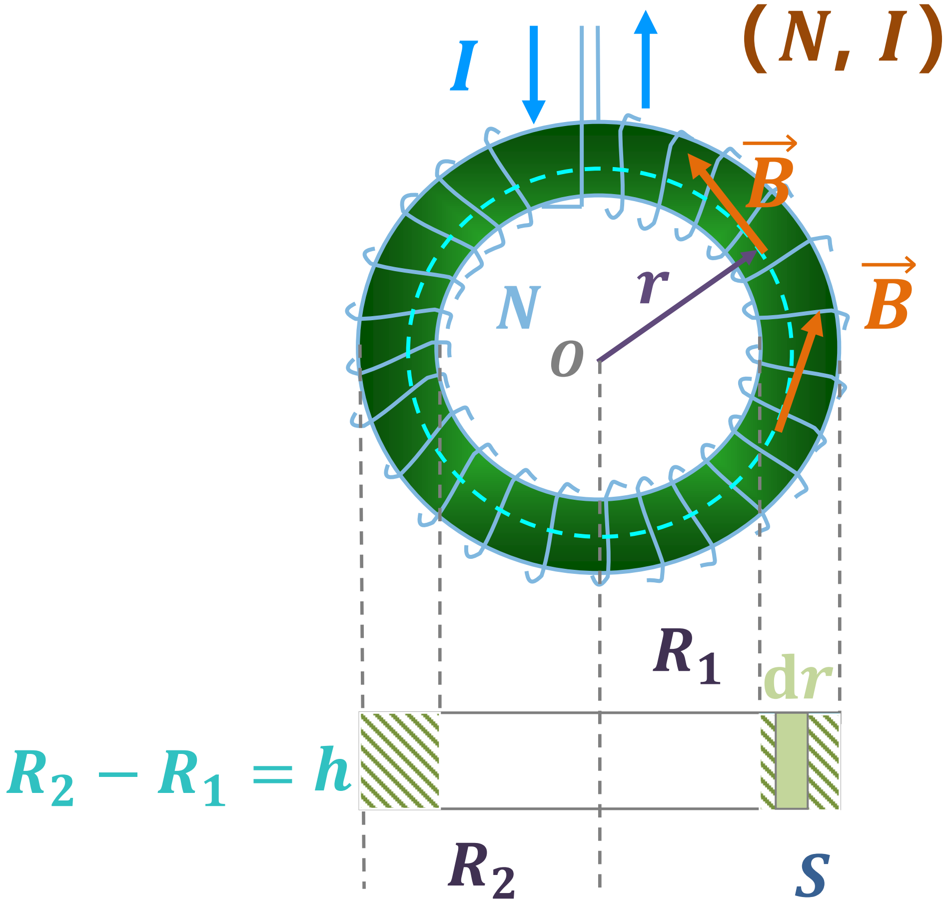
方向：沿圆周的切线方向





□ 密绕载流螺绕环（密绕在圆环上的螺线形线圈）的磁场分布。

若螺绕环截面为正方形，
求通过螺绕环截面的磁通量。



解：在螺绕环截面上取面积元$\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}S=h\mathrm{d}r=(R_2-R_1)\mathrm{d}r$$

通过面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_m=\vec{B}_{内}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}(R_2-R_1)\mathrm{d}r$$

螺绕环内的磁通量为

$$\Phi_m=\int\mathrm{d}\Phi_m=\int_{R_1}^{R_2}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

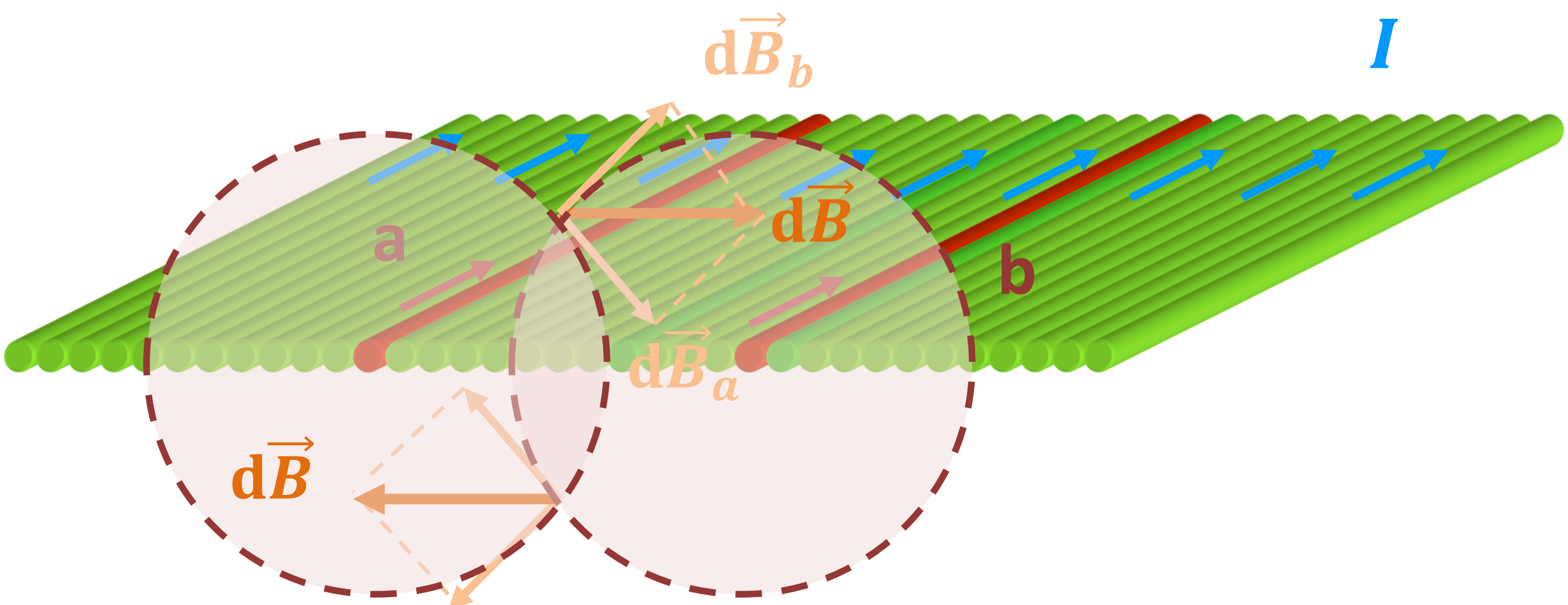
$$=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2-R_1)\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2-R_1)\ln\frac{R_2}{R_1}$$

□ 无限大平面电流的磁场分布。 $B=\frac{1}{2}\mu_0 i$

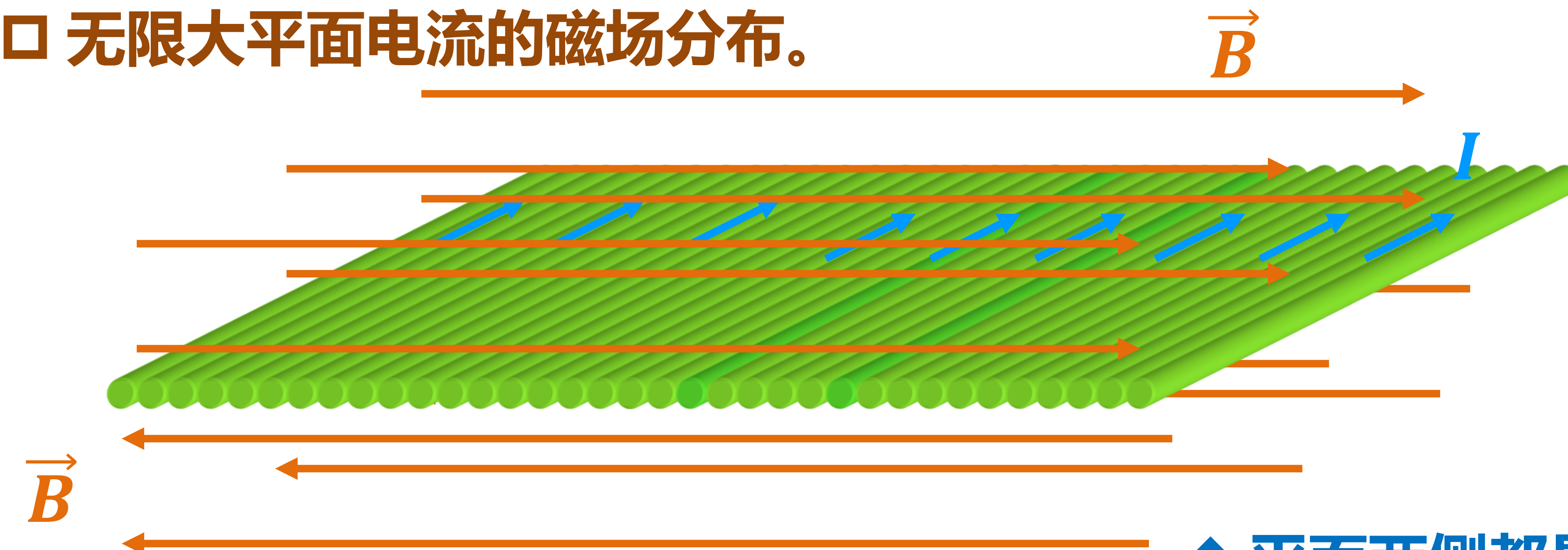
有一导体，由“无限多”根平行排列的细导线组成，
每根导线都“无限长”且均通以电流I。
设单位长度上的导线数目为n。

可证这无限长的电流片各处的磁感应强度：$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$

单位长度内通过的电流为i

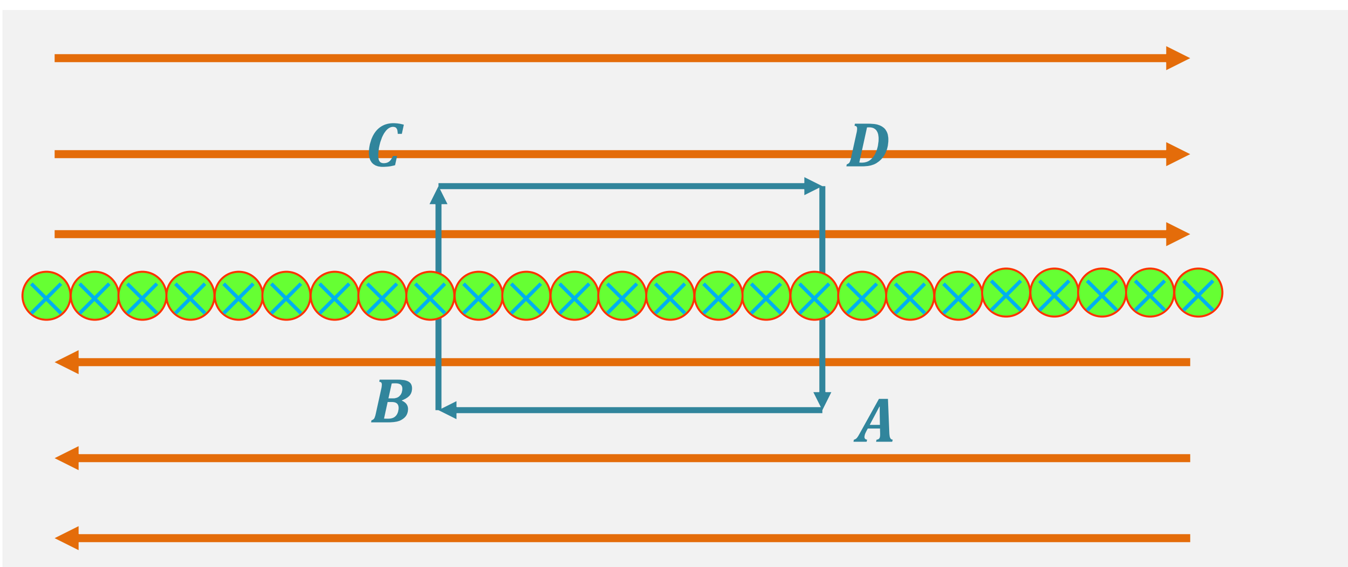


□ 无限大平面电流的磁场分布。



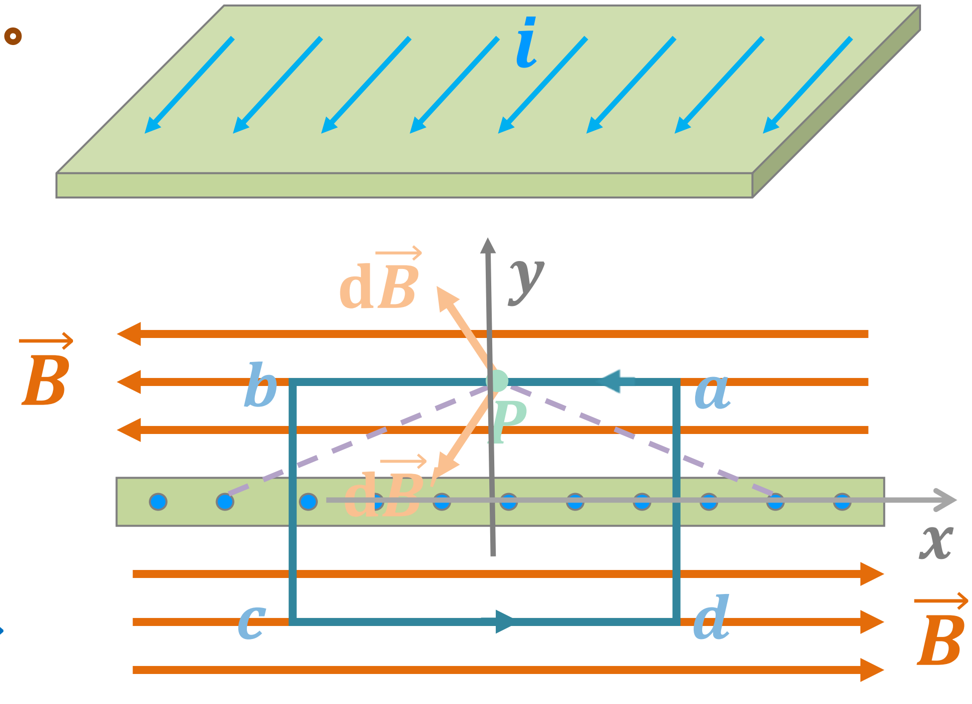
◆ **平面两侧都是均匀磁场，$\vec{B}$的方向平行于平面且垂直于电流方向。**

作安培环路 $ABCDA$



☐ 无限大平面电流的磁场分布。

单位长度内通过的电流为i



解：对称性分析

在 $y>0$区域，$\vec{B}$沿$-x$方向；

在 $y<0$区域，$\vec{B}$沿$+x$方向。

$|x|$相等的场点B的大小相等。

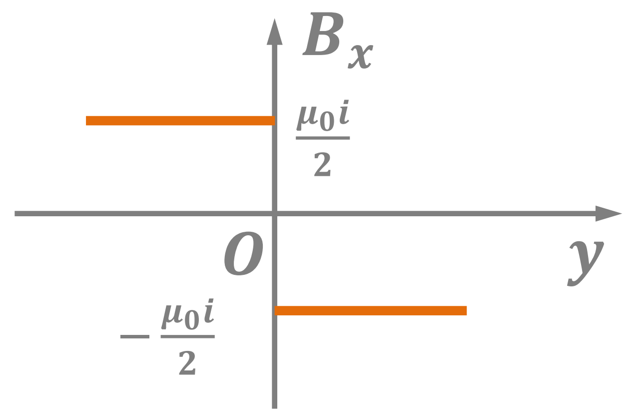
作 矩形回路 $abcda$，

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$+\int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

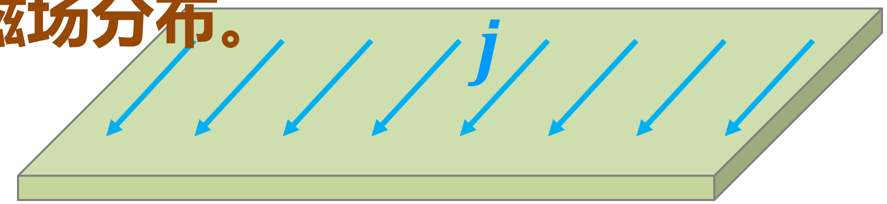
$$= B\int_a^b \mathrm{d}l + B\int_c^d \mathrm{d}l$$

$$= 2B\overline{ab} = \mu_0 \overline{ab} i \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 i/2$$



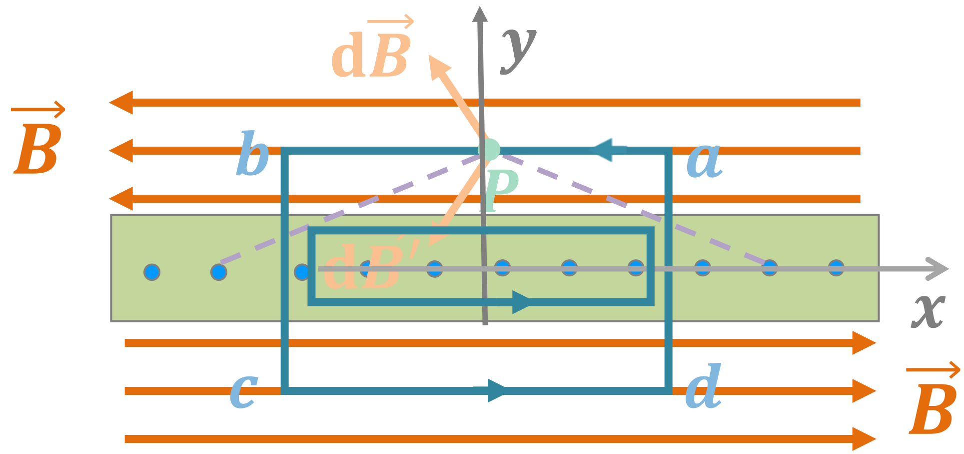
磁场分布曲线

□ 有厚度的无限大平板电流的磁场分布。



厚度为d，
单位面积内通过的电流为j

解：分别在平板内、外
作 矩形回路 $abcda$，



$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

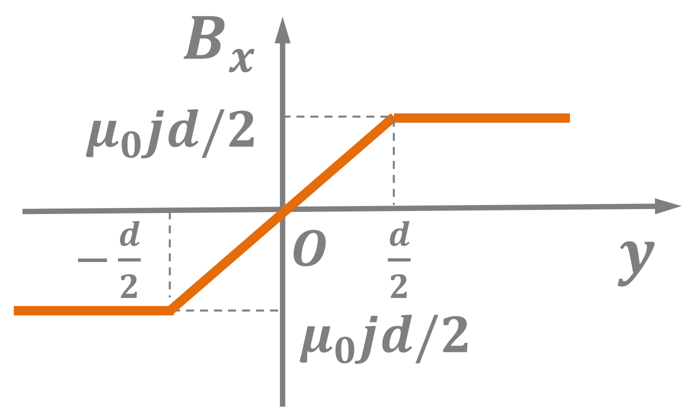
$$= B\int_a^b \mathrm{d}l + B\int_c^d \mathrm{d}l$$

◆ 外部 $= 2B\overline{ab} = \mu_0 \overline{ab} dj$

$\Rightarrow$ $B_{外} = \mu_0 jd/2$

◆ 内部 $= 2B\overline{ab} = \mu_0 \overline{ab}\, 2yj$

$\Rightarrow$ $B_{内} = \mu_0 jy$

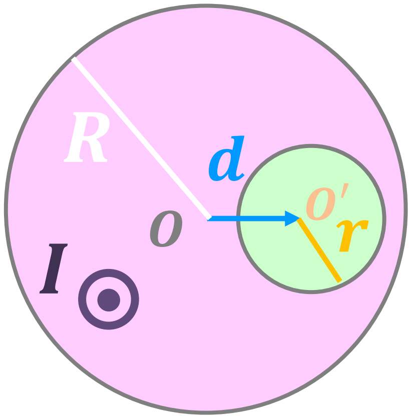


磁场分布曲线

半径R的长圆柱形导体内与轴线平行地挖去一个半径为r的圆柱形空腔：$OO' = d$，电流I在截面内均匀分布，方向平行于轴线，求：

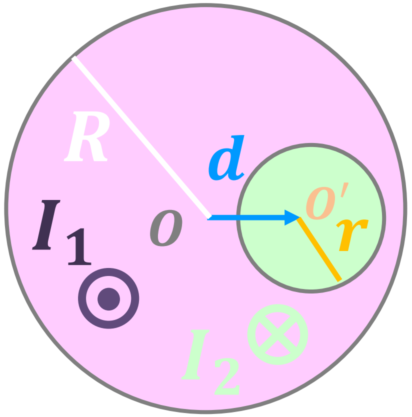
(1) 圆柱轴线上磁感应强度$\vec{B}_O$；

(2) 空心部分中任一点的磁感应强度$\vec{B}$。



解：用补偿法！

在空心部分中补上与实体具有相同的电流密度的电流 I' ⊙ 和I_2⊗。这等价于原来的空心部分。



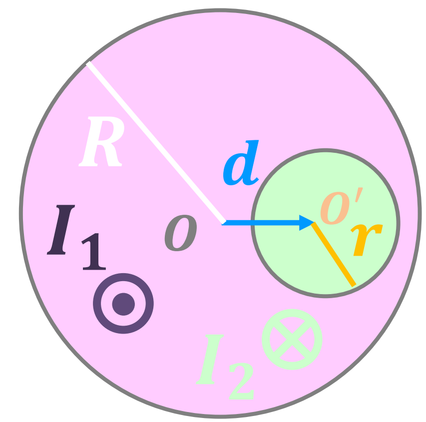
补上的 ⊙ 电流I'与圆柱体的电流I 构成实心圆柱电流I_1

原电流分布等效于 $\begin{cases} \text{实心圆柱电流} & I_1 \odot \text{ —— } \vec{B}_1 \\ \text{空腔部分电流} & I_2 \otimes \text{ —— } \vec{B}_2 \end{cases}$

半径R的长圆柱形导体内与轴线平行地挖去一个半径为r的圆柱形空腔：$OO' = d$，电流I在截面内均匀分布，方向平行于轴线，求：

(1) 圆柱轴线上磁感应强度$\vec{B}_O$；

(2) 空心部分中任一点的磁感应强度$\vec{B}$。



电流密度 $j = \dfrac{I}{\pi R^2 - \pi r^2}$

电流：
- 实心圆柱电流 ⊙ $I_1 = j\,\pi R^2 = \dfrac{IR^2}{R^2 - r^2}$
- 空腔部分电流 ⊗ $I_2 = j\,\pi r^2 = \dfrac{Ir^2}{R^2 - r^2}$

(1) 由安培环路定理

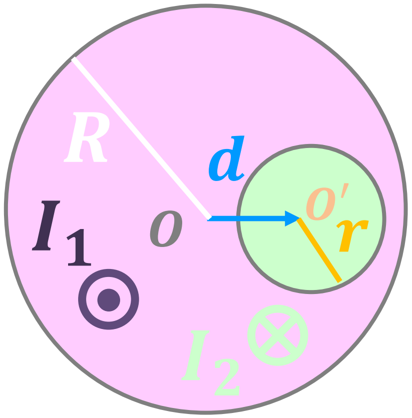
$$\left.\begin{aligned} B_{O1} &= 0 \\ B_{O2} &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \end{aligned}\right\} \quad B_O = B_{O1} + B_{O2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d\left(R^2 - r^2\right)}$$

(2) 对空腔内任一点 P

设 $\overline{OP}=r_1$， $\overline{O'P}=r_2$

电流密度

$$j=\frac{I}{\pi R^2-\pi r^2}$$

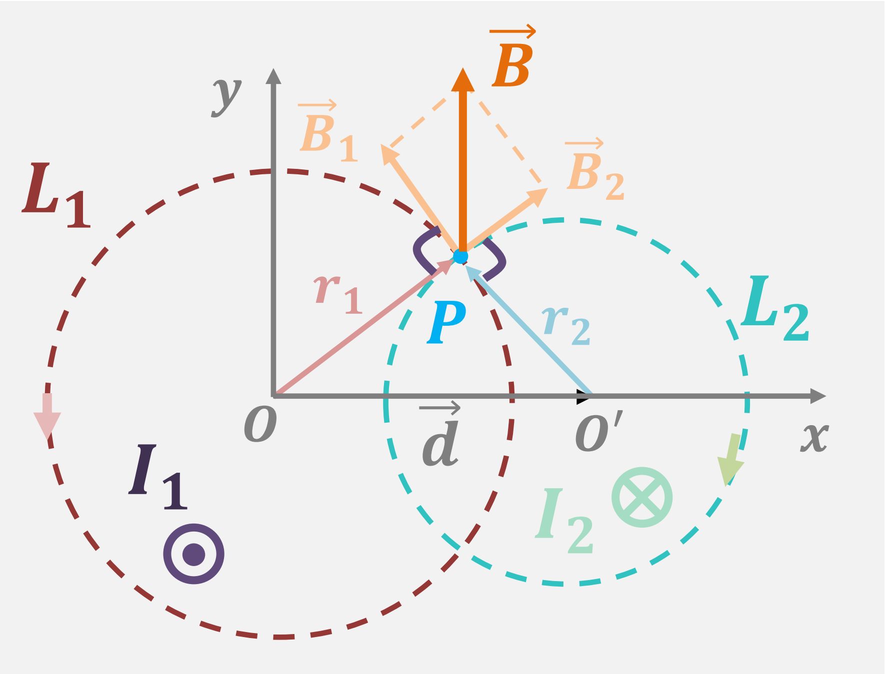


由安培环路定理：

过空腔内场点P做安培环路 L_1

$$\oint_{L_1}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B_1\,2\pi r_1=\mu_0\,j\pi r_1^2$$

$$\Rightarrow\quad B_1=\frac{\mu_0\,jr_1}{2}$$



过空腔内场点P做安培环路 L_2

$$\oint_{L_2}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B_2\,2\pi r_2=\mu_0\,j\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow\quad B_2=\frac{\mu_0\,jr_2}{2}$$

(2) 对空腔内任一点 P

设 $\overline{OP}=r_1$， $\overline{O'P}=r_2$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 j r_1}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_1}{r_1}=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_1$$

$$\vec{B}_2=-\frac{\mu_0 j r_2}{2}\vec{k}\times\frac{\vec{r}_2}{r_2}=-\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{r}_2$$

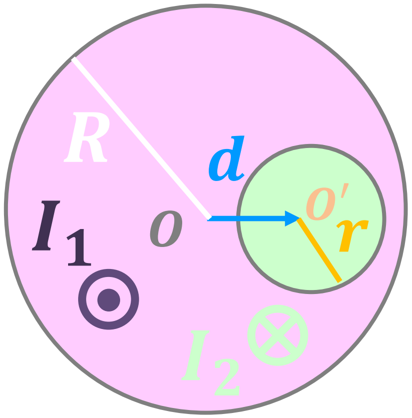
$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0 j}{2}\vec{k}\times\vec{d}=\frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2-r^2)}\vec{k}\times\vec{d}$$

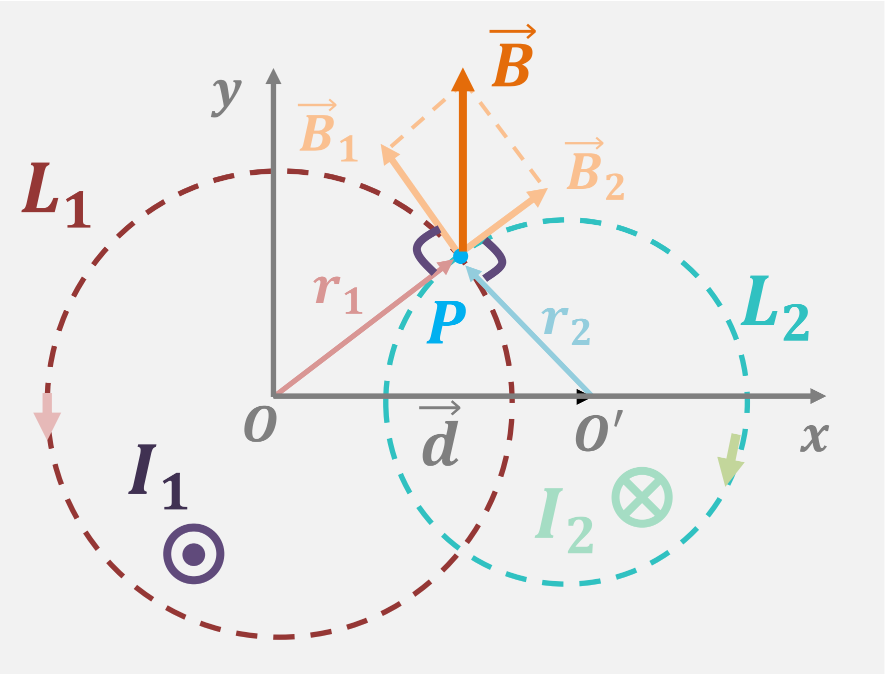
电流密度

$$j=\frac{I}{\pi R^2-\pi r^2}$$

$$B_1=\frac{\mu_0 j r_1}{2}$$

$$B_2=\frac{\mu_0 j r_2}{2}$$





◆ 空腔内为垂直于$\overrightarrow{OO'}=\vec{d}$的均匀磁场。 $B=\frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2-r^2)}$

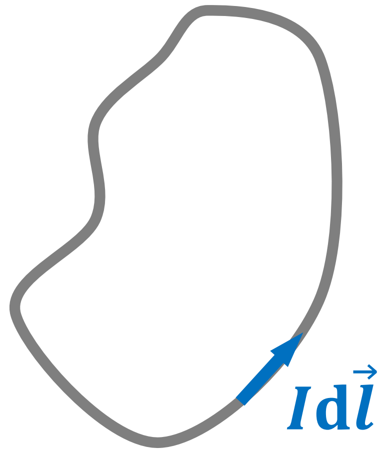
形成均匀磁场的方法

- 长直载流螺线管
- 亥姆霍兹圈
- 无限大载流平面两侧
- 圆柱载流导体内平行于轴线的空腔

……

□ 磁感应强度 $\vec{B}$

在闭合回路中取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

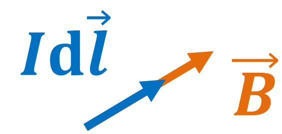


电流元在磁场中的受力特点：

(1) 电流元在磁场中的方向不同，受力也不同；

存在一个方向使 $\mathrm{d}F=0$

定义 该方向为磁感应强度的方向

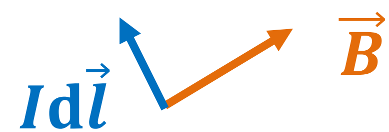


$\mathrm{d}F=0$

(2) 当电流元的取向与磁感应强度的方向垂直时，受到的磁场力最大。

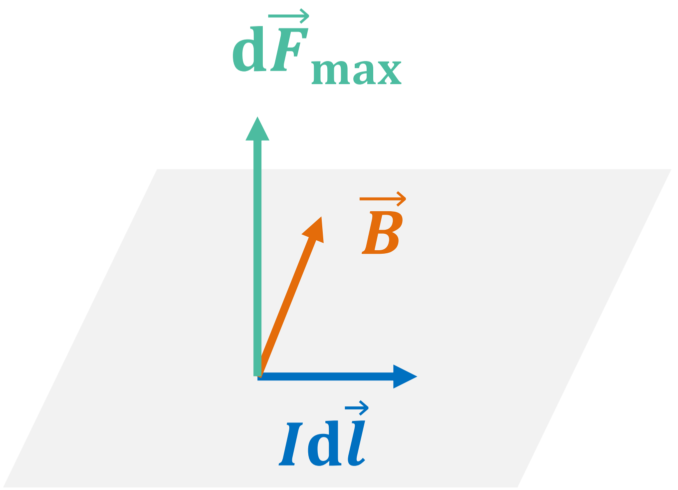
定义 磁感应强度的大小

$$B=\frac{\mathrm{d}F_{\max}}{I\mathrm{d}l}$$



$\mathrm{d}F=\mathrm{d}F_{\max}$

□ 磁感应强度 $\vec{B}$



在闭合回路中取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

电流元在磁场中的受力特点：

(3) 磁场力$\mathrm{d}\vec{F}_{\max}$的方向与电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 和磁感应强度$\vec{B}$满足

右手螺旋关系

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

---安培力公式

磁感应强度有各种定义方法，除上述方法外，我们还可以用运动电荷在磁场中的受力来定义。

载流导体产生磁场 ⟷ 磁场对电流有作用

安培力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

大小：$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta$

方向：由右手螺旋法则确定

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

- 安培定律是矢量表述式 $\mathrm{d}\vec{F} \Rightarrow \mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y, \mathrm{d}F_z$
- 若磁场为匀强场 ➡ $\vec{F} = \left(\int I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 ➡ $\vec{F} = \left(\oint I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = 0$

在均匀磁场中放置一任意形状的导线，电流强度为I，求此段载流导线受的磁力。

解: 在电流上任取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

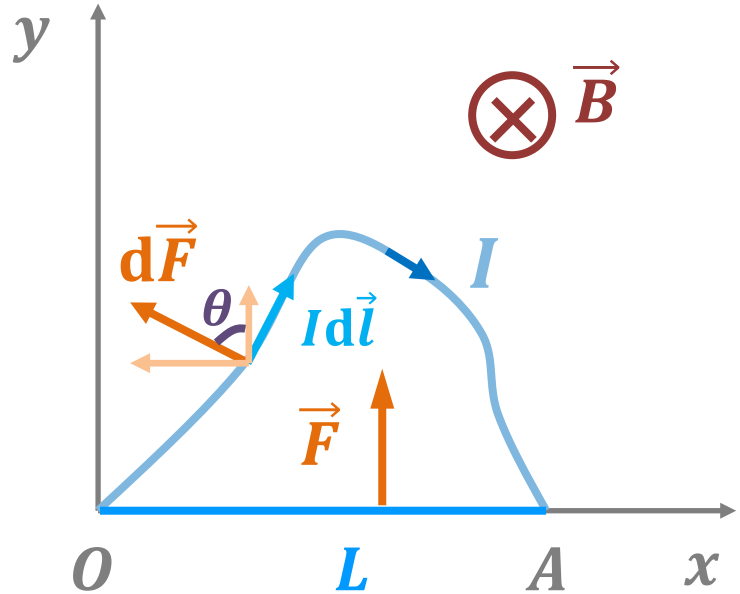
$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}=IB\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}F_x=IB\mathrm{d}l\sin\theta=IB\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}F_y=IB\mathrm{d}l\cos\theta=IB\mathrm{d}x$$

$$F_x=\int_0^0 IB\mathrm{d}y=0$$

$$F_y=\int_0^L IB\mathrm{d}x=IBL$$

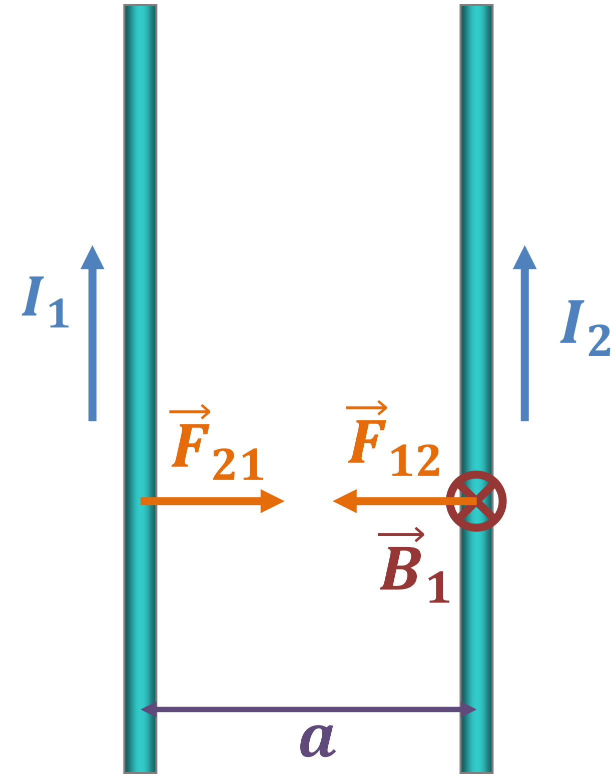


均匀磁场中，弯曲载流导线所受磁场力与从起点到终点间载有同样电流的直导线所受的磁场力相同。

相当于载流直导线 $\overline{OA}$ 在匀强磁场中受的力，方向沿y轴正向。

求两平行无限长直导线之间的相互作用力。

I_1、I_2、a



解： 电流2 处于 电流1的磁场中

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

电流2中 单位长度上受的安培力

$$f_{12} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

同理，电流1 处于 电流2的磁场中，

电流1中 单位长度上受的安培力

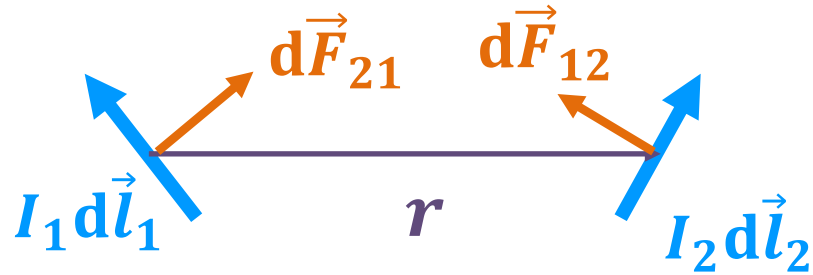
$$f_{21} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

◆ **电流之间的磁力符合牛顿第三定律。**

若两直导线电流方向相反
二者之间的作用力如何？

定义：真空中通有同值电流的两无限长平行直导线，若相距 1 米，单位长度受力2×10^{-7}N，则电流为1 安培。

分析两电流元之间的相互作用力。



$$\mathrm{d}\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \mathrm{d}\vec{B}_1$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}}{r^3}$$

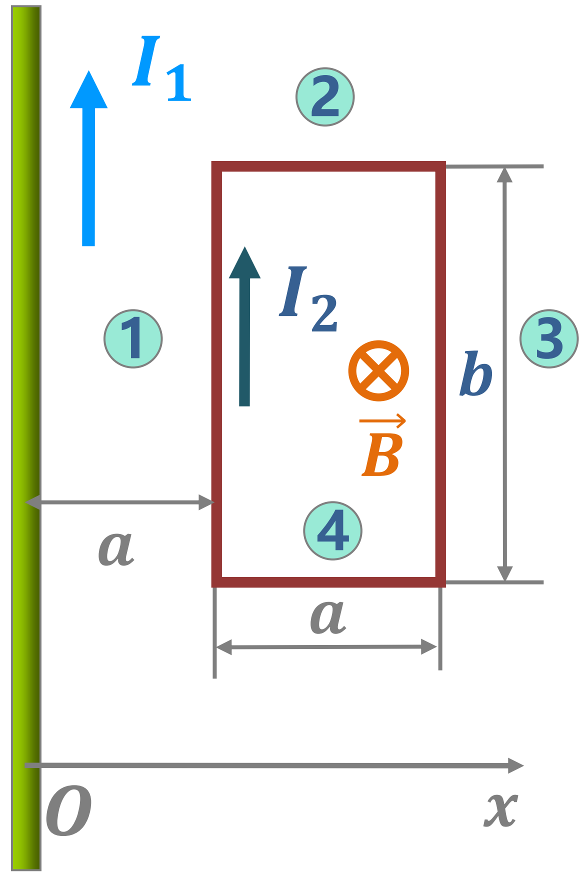
$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} \neq \mathrm{d}\vec{F}_{21}$$

同理 $$\mathrm{d}\vec{F}_{21} = I_1\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \mathrm{d}\vec{B}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{r}_{21}}{r^3}$$

◆ 两电流元之间的相互作用力，一般不遵守牛顿第三定律。

求一载流导线框在无限长直导线磁场中的受力和运动趋势。



解：

① $F_1 = I_2 b B_1 = I_2 b \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$

方向向左

③ $F_3 = I_2 b B_3 = I_2 b \dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$

方向向右

② $F_2 = \int_a^{2a} I_2 \mathrm{d}l B_1 \sin\dfrac{\pi}{2}$

$$= \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2$$

④ $F_4 = F_2$

整个线圈所受的合力：$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$

$\because |\vec{F}_1| > |\vec{F}_3| \qquad \therefore$ 线圈向左做平动

□ 均匀磁场中的平面矩形载流线圈

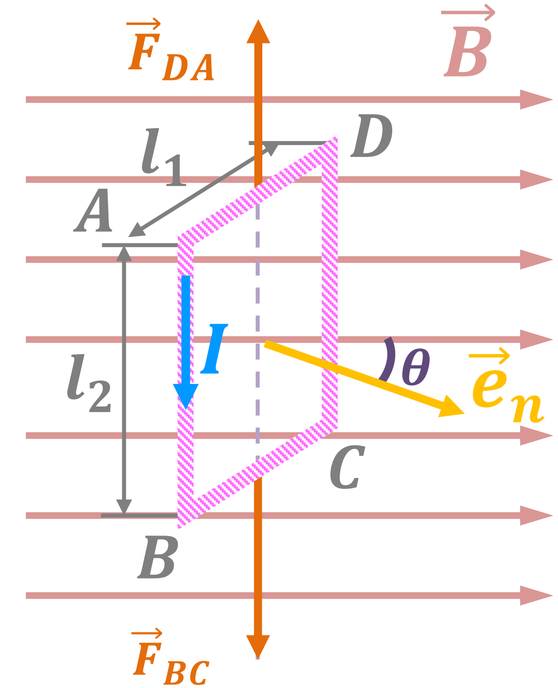
$$F_{DA}=F_{BC}=Il_1B\sin\theta$$

（方向相反 在同一直线上）

$$F_{CD}=F_{AB}=BIl_2$$

"力偶"（方向相反 不在一条直线上）

➡ $\sum\vec{F}_i=0$ （线圈无平动）



对线圈中心的力矩为 $\vec{M}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i$

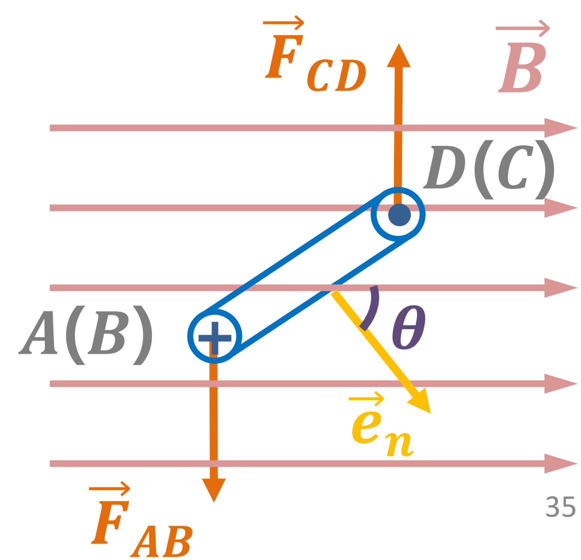
$$M=F_{AB}\frac{l_1}{2}\sin\theta+F_{CD}\frac{l_1}{2}\sin\theta$$

$$=l_1l_2BI\sin\theta$$

令 $\vec{S}=S\vec{e}_n=l_1l_2\vec{e}_n$ $\vec{p}_m=IS\vec{e}_n$

磁矩

➡ $\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$



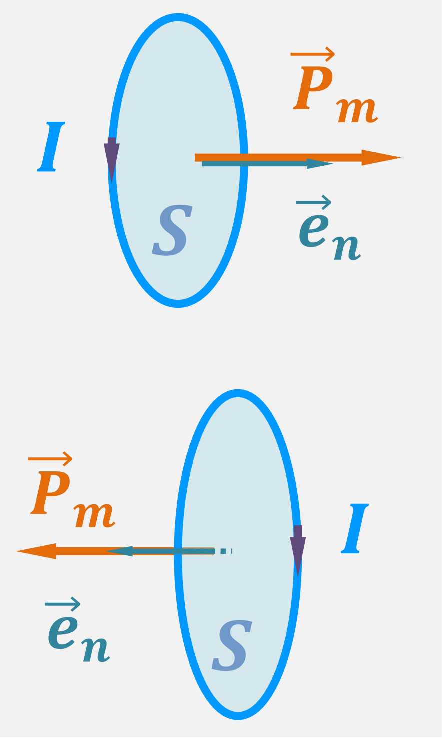
□ 载流线圈的磁矩

$$\vec{P}_m = I\vec{S} = IS\vec{e}_n$$

单位：$\mathrm{A \cdot m^2}$

S --- 平面载流线圈所包围的面积（形状不限）

$\vec{e}_n$ --- 平面载流线圈的法线方向，与电流的方向满足右手螺旋关系。



圆电流磁矩 $\vec{P}_m = I\pi R^2\vec{e}_n$

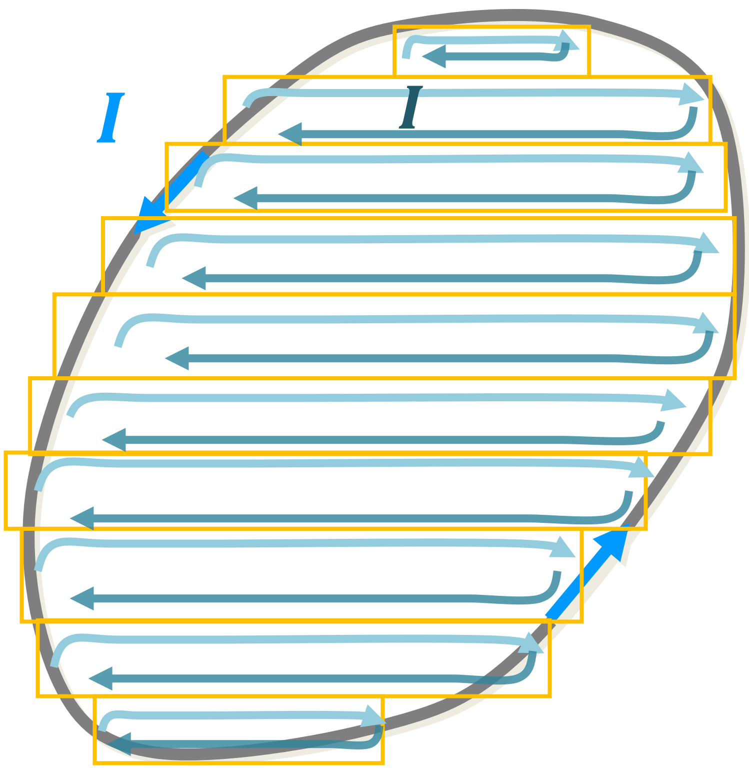
- 只有当圆形电流的面积S很小，或场点距圆电流很远时，才能把圆电流叫做**磁偶极子**。

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$ 适用于任意形状的平面线圈在均匀磁场中的情况。

$$\sum \vec{F}_i = 0$$ （线圈无平动）

$\vec{p}_m = IS\vec{e}_n$ 磁矩

将线圈等效看成许多小矩形线圈组成：



$$M = \int \mathrm{d}M = \int IB\sin\theta\,\mathrm{d}S$$

$$= IB\sin\theta \int_S \mathrm{d}S = IBS\sin\theta$$

$$= |\vec{p}_m \times \vec{B}|$$

每个小磁矩的方向一致。

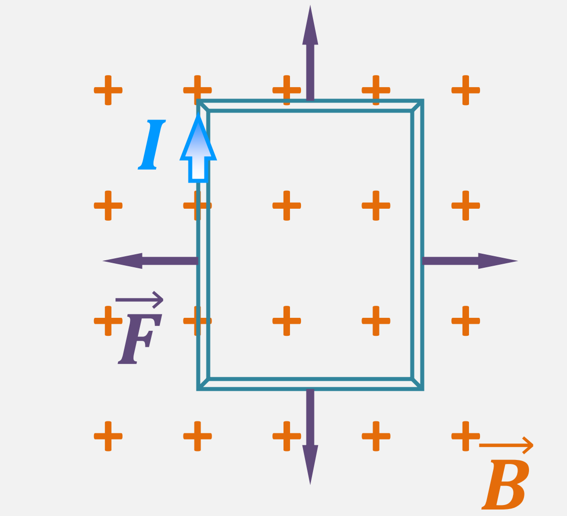
□ 均匀磁场中的平面矩形载流线圈

$$\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$$

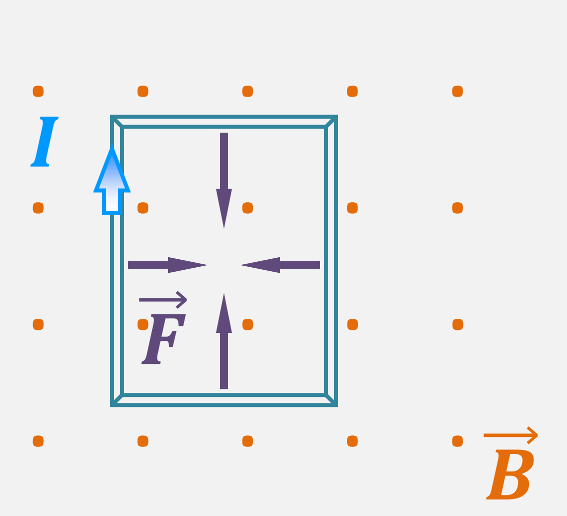
$$\vec{p}_m=IS\vec{e}_n$$

- $\vec{p}_m$与$\vec{B}$方向相同
- $\vec{p}_m$与$\vec{B}$方向相反
- $\vec{p}_m$与$\vec{B}$方向垂直

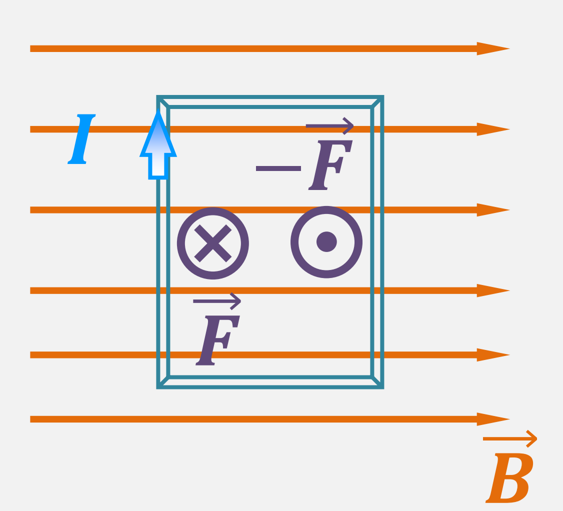
稳定平衡	不稳定平衡	力矩最大



$\theta=0°$，$M=0$



$\theta=\pi$，$M=0$



$\theta=\frac{\pi}{2}$，$M=M_{max}$

◆ 均匀磁场中，任意形状的平面载流线圈所受的力和力矩为:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$ 线圈没有平动

$$\vec{p}_m // \vec{B}, \quad \vec{M} = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 & \text{稳定平衡} \\ \theta = \pi & \text{非稳定平衡} \end{cases}$$

$$\vec{p}_m \perp \vec{B}, \quad M = M_{\max} = p_m B, \quad \theta = \pi/2$$ 线圈转动

- 线圈若有N匝线圈 $\vec{M} = N\,\vec{p}_m \times \vec{B}$
- $\vec{M}$ 作用下，磁通量增加

◆ 非均匀磁场中的平面电流线圈

一般，$\sum \vec{F}_i \neq 0 \quad \vec{M} \neq 0$ 线圈不但转动，还要平动，移向$\vec{B}$较强的区域。

- 磁力矩公式适用于任何闭合线圈，但要求线圈所在处的磁场均匀。
- 均匀磁场中，闭合线圈所受的合力为零，但合力矩不为零。线圈转动。
- 磁场对任意形状弯曲导线的作用合力，等于从起点到终点间的载有同样电流的直导线所受的磁场力。
- 非均匀磁场中，闭合线圈所受的合力与合力矩一般不为零。线圈平动，转动或形变。

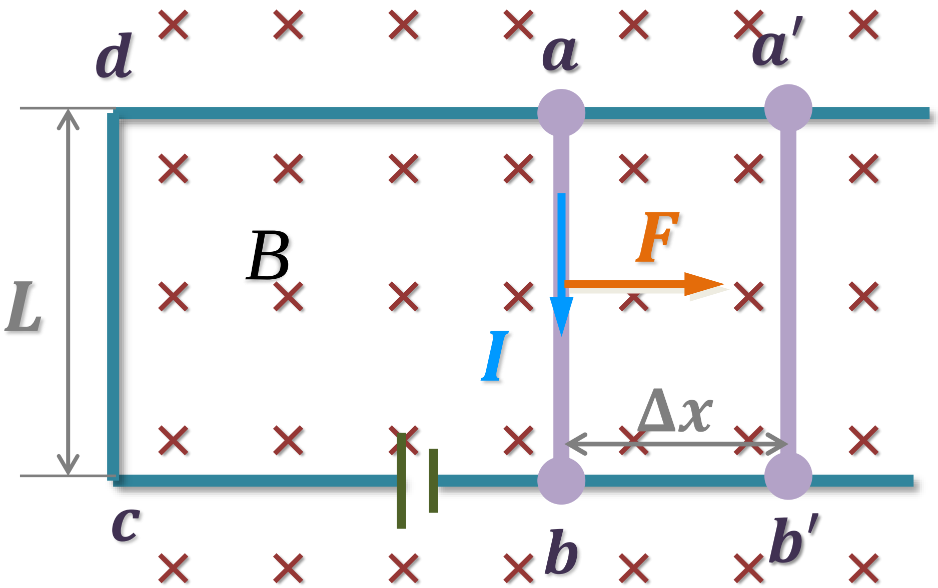
□ 载流导线在磁场中移动

磁场力：$F = IlB$

磁场力的功：

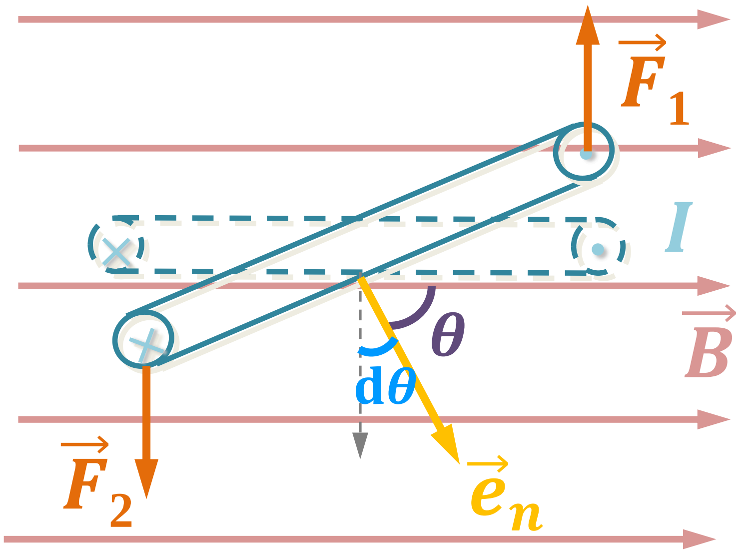
$$A = F\overline{aa'} = IlB\overline{aa'}$$

$$= IB\Delta S = I\Delta\Phi_m$$



磁场力对运动载流导线作的功A等于电流强度I与闭合回路所包围面积的磁通量的增量$\Delta\Phi_m$的乘积。

□ 载流线圈在磁场中转动



载流线圈位于匀强磁场中，线圈中电流为I，当线圈平面的法向方向与$\vec{B}$之间夹角为θ时，所受到的磁力矩为

$$M = P_m B \sin\theta$$
$$= BIS\sin\theta$$

当线圈从θ转至$\theta + \mathrm{d}\theta$时，相应穿过线圈的磁通量由$\Phi_{m1}$变为$\Phi_{m2}$，磁力矩所作的功为

$$\mathrm{d}A = -M\mathrm{d}\theta = -BIS\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= I\mathrm{d}(BS\cos\theta) = I\mathrm{d}\Phi_m$$

负号表示磁力矩作正功时将使θ角减小。

$$A = \int \mathrm{d}A = \int I\mathrm{d}\Phi_m = I\Delta\Phi_m \quad (I\text{ 为恒量})$$

□ 磁场力的功

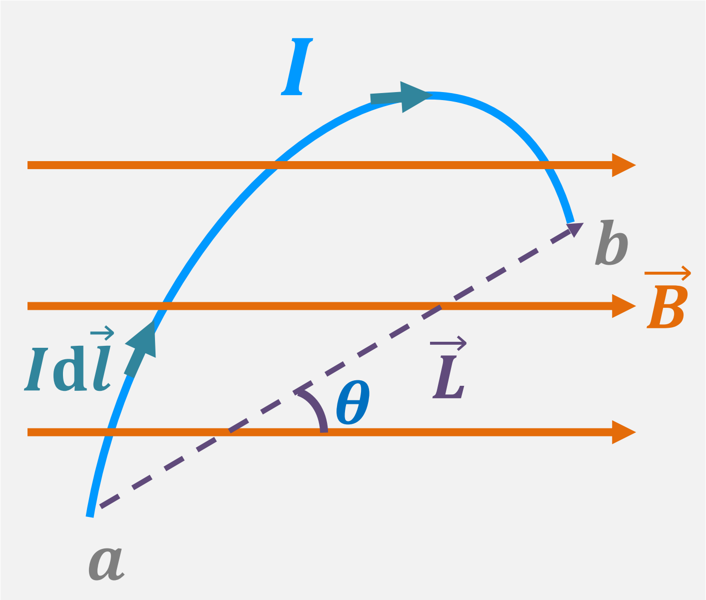
$$A=\int_{\Phi_{m_1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I(\Phi_{m2}-\Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$ （I为恒量）

$$A=\int I\mathrm{d}\Phi_m$$ 回路中电流I变化

磁力的功=电流强度×穿过回路磁通量增量；
=电流强度×载流导线切割磁力线条数。

□ 载流导线所受磁场力

$$\vec{F}=\int_L \mathrm{d}\vec{F}=\int_L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$



特点： 可能 $\boxed{\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}}$

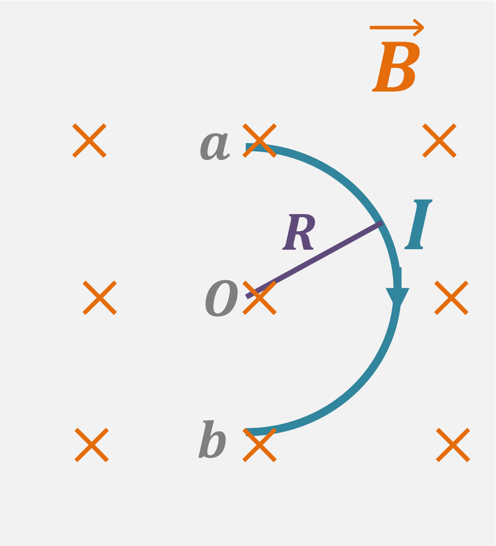
特例： $\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B}$

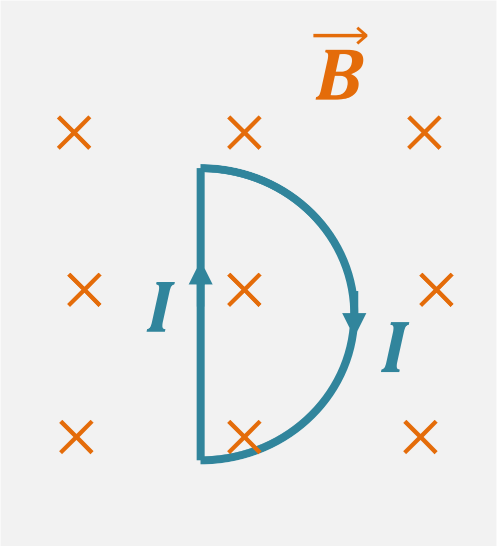
□ 载流平面线圈所受磁场力和磁力矩

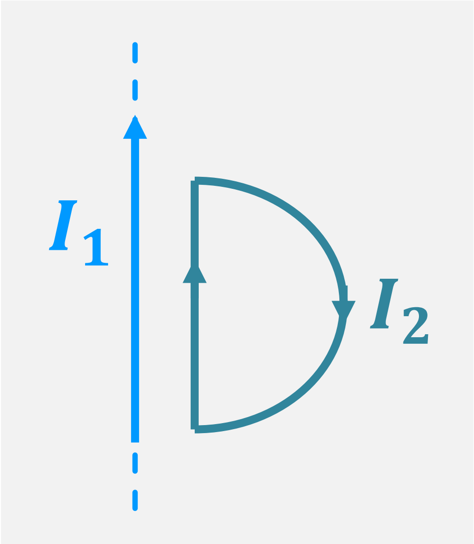
$\sum\vec{F}=0$ $\boxed{\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}}$ $\vec{P}_m\rightarrow//\vec{B}$

特点：对于两个线圈间 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

求电流在磁场中所受的力。







$F = BI\,2R$

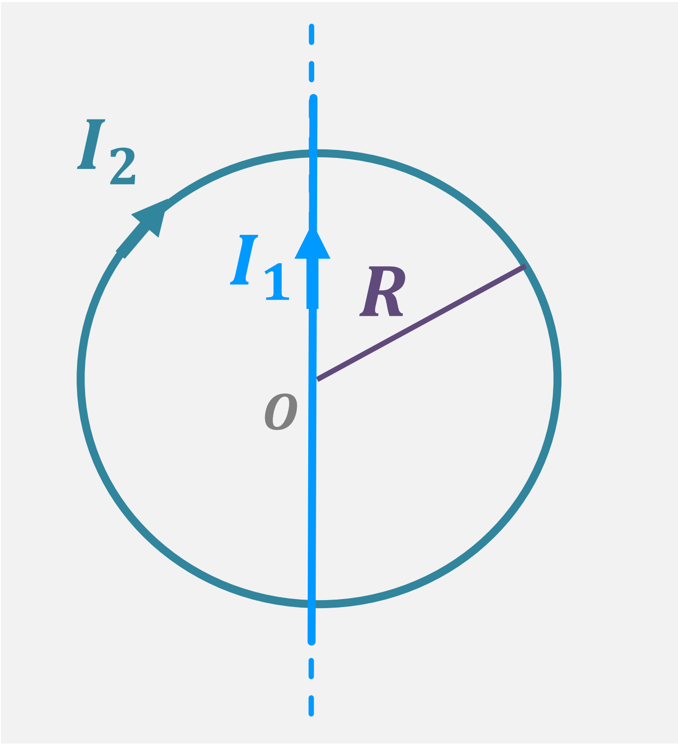
方向：水平向右

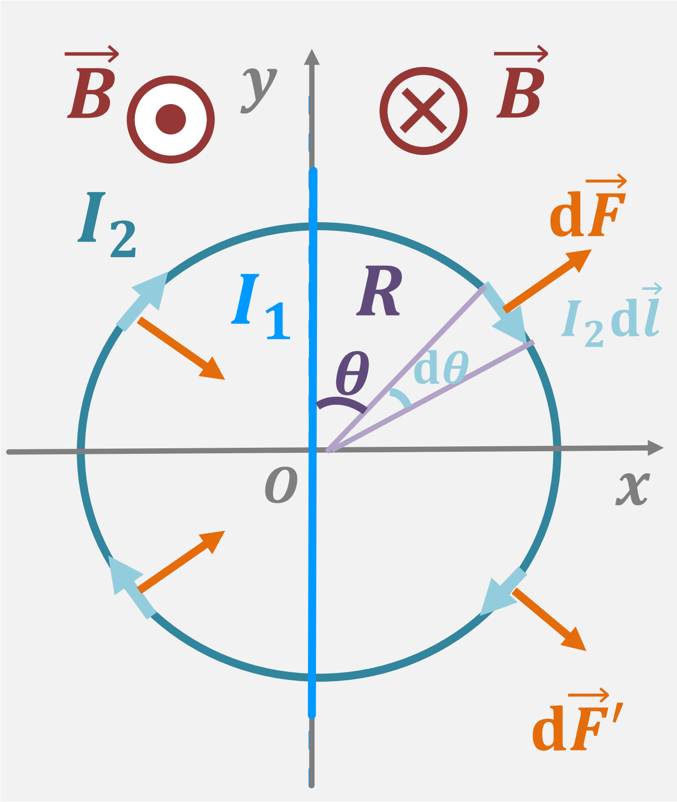
$\vec{F} = 0$

I_2 受力

$\vec{F} \neq 0$

求I_2所受I_1磁场的作用力。





$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$x=R\sin\theta$$

取电流元$I_2\mathrm{d}\vec{l}$

$$I_2\mathrm{d}l=I_2R\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}F=I_2\mathrm{d}lB$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}l}{2\pi x}$$

方向：沿径向

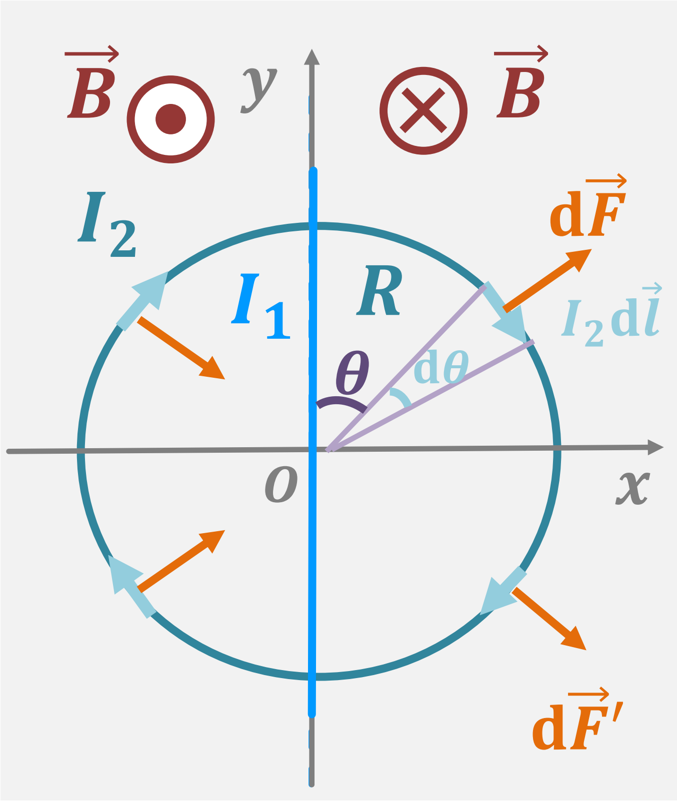
求I_2所受I_1磁场的作用力。

由对称性 $F_y = \int \mathrm{d}F_y = 0$

$$F = F_x = \int \mathrm{d}F_x = \int \mathrm{d}F \sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \mu_0 I_1 I_2$$ **沿 $+x$方向。**



$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$x = R\sin\theta$$

取电流元$I_2\mathrm{d}\vec{l}$

$$I_2\mathrm{d}l = I_2 R\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}F = I_2\mathrm{d}lB$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}\theta}{2\pi\sin\theta}$$

方向：沿径向

场源电荷

- 静止电荷 ---激发静电场 $\vec{E}'$
- 运动电荷（相对于观察者 $\vec{u}$）
  - 激发电场 $\vec{E}$ $\begin{cases} E_\perp = \gamma E'_\perp \\ E_{//} = E'_{//} \end{cases}$
  - 激发磁场 $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}\times\vec{E}}{c^2}$

检验电荷

- 静止 ---只受电场力 $\vec{F} = q\vec{E}$
- 运动（相对观察者 $\vec{v}$）
  - 电场力 $\vec{F}_1 = q\vec{E}$
  - 磁场力 $\vec{F}_2 = q\vec{v}\times\vec{B}$

☐运动电荷间的相互作用

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

检验电荷相对于观察者的速度

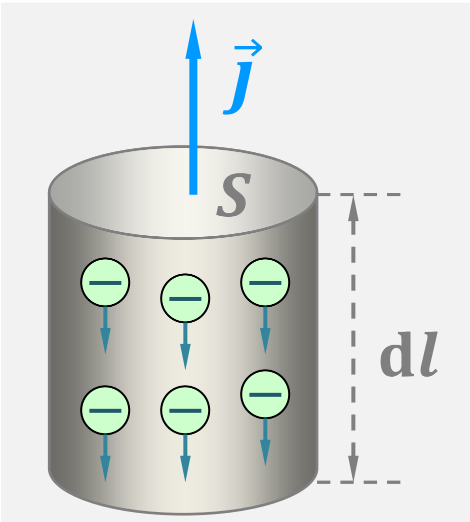
场源电荷相对于观察者的速度

磁感应强度 $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2}$

磁场力 $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ 与场源电荷、检验电荷相对于观察者的速度均有关。

电场力 $\vec{F}_e = q\vec{E}$ 与场源电荷相对于观察者的速度有关；与检验电荷相对于观察者的速度无关。

在电磁学中，无论速度多么小（$v \ll c$），伽利略变换都不适用，电磁场的变换必须应用相对论变换。

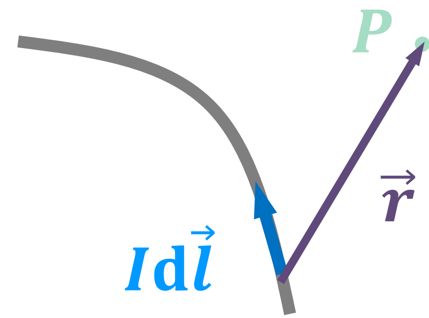


电流元内总电荷数

$$N = nS\mathrm{d}l$$

安培力

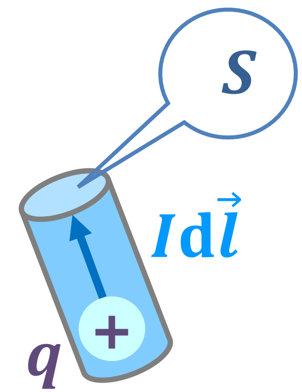
$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



$$I\mathrm{d}\vec{l} = \vec{j}S\mathrm{d}l = nq\vec{v}\,S\mathrm{d}l = N\,q\vec{v}$$

电荷密度

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{n \cdot S\mathrm{d}l \cdot q}{\mathrm{d}t} = nSqv$$



$$\Rightarrow \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = N\,q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- 安培力是大量带电粒子洛伦兹力的叠加。

磁场力（洛仑兹力）

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

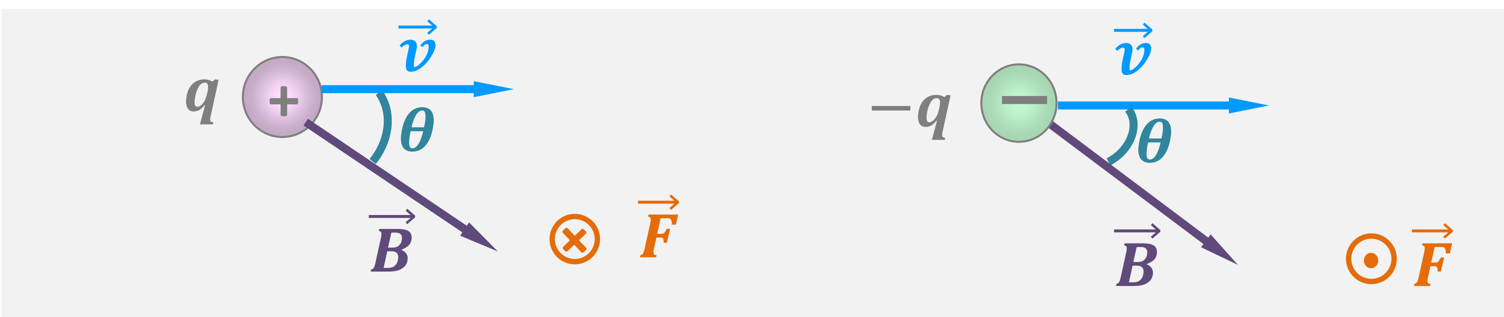
不改变$\vec{v}$大小，
只改变$\vec{v}$方向。
不对q做功。

可能 $\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$

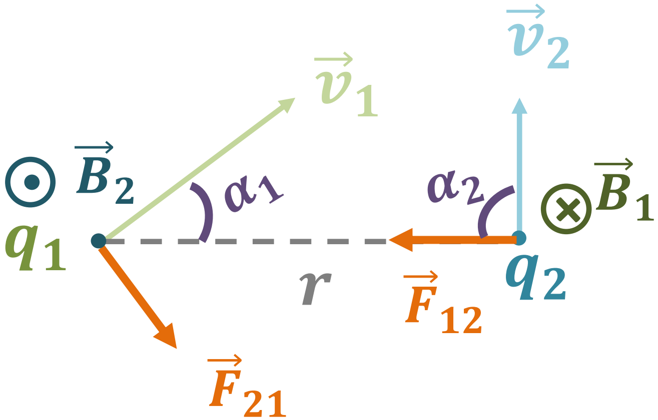
大小： $F = qvB\sin\theta$

方向：垂直于（$\vec{v}, \vec{B}$）平面

$$\begin{cases} +q & \vec{v} \times \vec{B}\ \text{方向} \\ -q & -(\vec{v} \times \vec{B})\ \text{方向} \end{cases}$$



求 q_1和 q_2 相互作用洛仑兹力的大小和方向。



$$\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{u} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2 \sin \alpha_2}{r^2}$$

$$F_{21} = q_1 v_1 B_2 \sin 90^\circ$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2 \sin \alpha_2}{r^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1 \sin \alpha_1}{r^2}$$

$$F_{12} = q_2 v_2 B_1 \sin 90^\circ$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2 \sin \alpha_1}{r^2}$$

电荷1 $\xrightarrow{\text{激发}}$ 磁场 $\xrightarrow{\text{作用}}$ 电荷2

电荷1 $\xleftarrow{\text{作用}}$ 磁场 $\xleftarrow{\text{激发}}$ 电荷2

带电粒子在均匀磁场中的运动

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

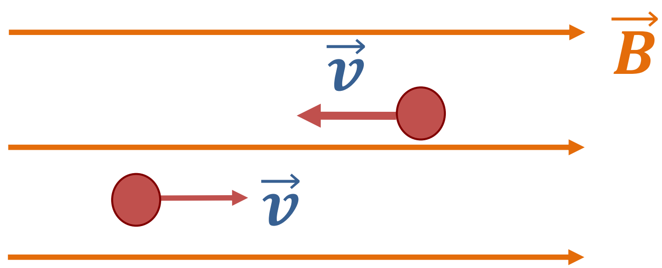
粒子：电量q, 质量m, 初速度$\vec{v}$, 磁场$\vec{B}$

- $\vec{v}//\pm\vec{B}$

$$\theta = 0, \pi; \quad \sin\theta = 0$$

$$F = qvB\sin\theta = 0$$

粒子作匀速直线运动

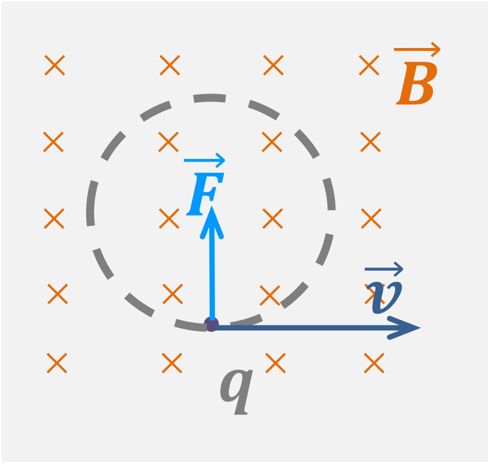


- $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \quad \sin\theta = 1$$

$\vec{F}_m \perp \vec{v}, \vec{B}$ 粒子作匀速率圆周运动

$$F_m = qvB = \frac{mv^2}{R}$$



- 回旋半径 $R = \dfrac{mv}{qB}$ 半径与速度成正比
- 回旋周期 $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$ 周期与速度无关

带电粒子在均匀磁场中的运动

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

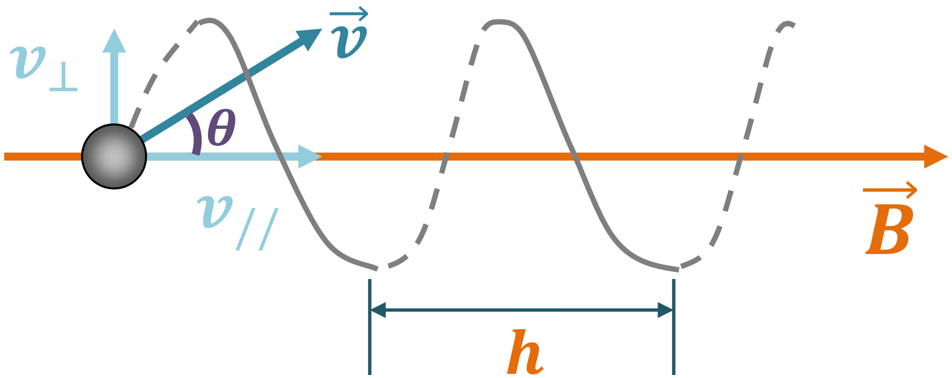
粒子：电量q, 质量m, 初速度$\vec{v}$, 磁场$\vec{B}$

□ $\vec{v}$与$\vec{B}$夹角为θ

$$v_{//} = v\cos\theta$$

$$v_{\perp} = v\sin\theta$$

带电粒子作螺旋运动



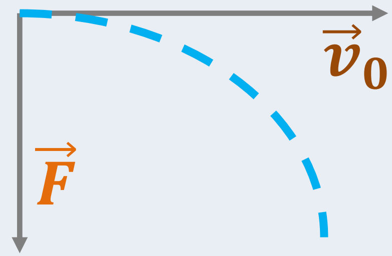
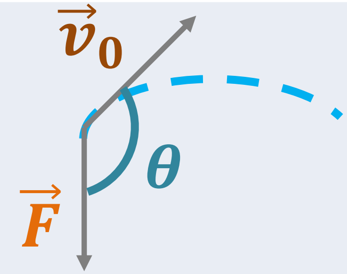
- 螺距

---在一个周期内沿磁场方向行进的距离

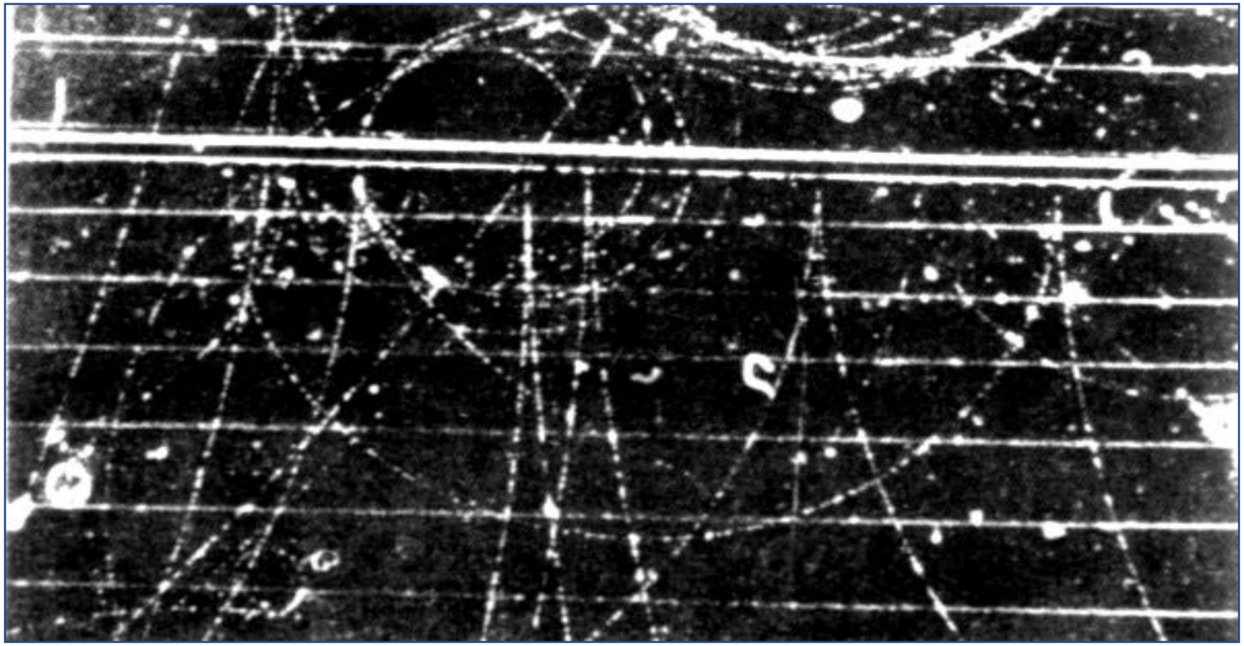
$$h = v_{//}T = \frac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$$

- 回旋半径 $R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv\sin\theta}{qB}$　　半径与速度成正比

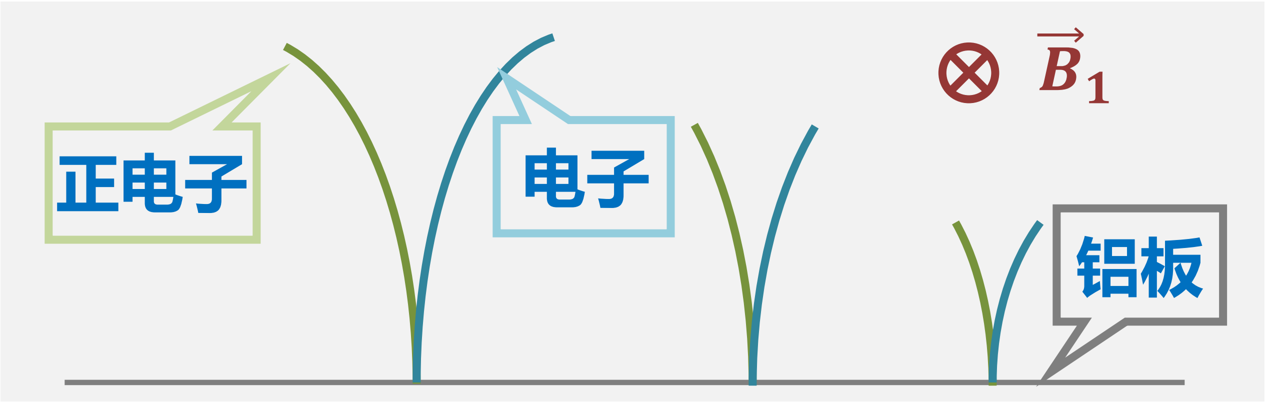
- 回旋周期 $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$　　周期与速度无关

匀强电场	$\vec{v}_0//\vec{E}$	$\vec{v}_0 \perp \vec{E}$	$\vec{v}_0$与$\vec{E}$夹角为θ
	$\vec{F} = q\vec{E}$		
	匀变速直线运动	类平抛 	类斜抛 
匀强磁场	$\vec{v}_0//\vec{B}$	$\vec{v}_0 \perp \vec{B}$	$\vec{v}_0$与$\vec{B}$夹角为θ
	$\vec{F} = 0$	$F = qv_0B$	$F = qv_0B\sin\theta$
	□ 匀速直线运动	□ 匀速率圆周运动 $R = mv_0/qB$ $T = 2\pi m/qB$	□ 等螺距螺旋线运动 $R = mv_{\perp}/qB$ $= mv_0\sin\theta/qB$ $h = Tv_{//}$ $= \frac{2\pi m}{qB}v_0\cos\theta$

■ 电子的反粒子　电子偶



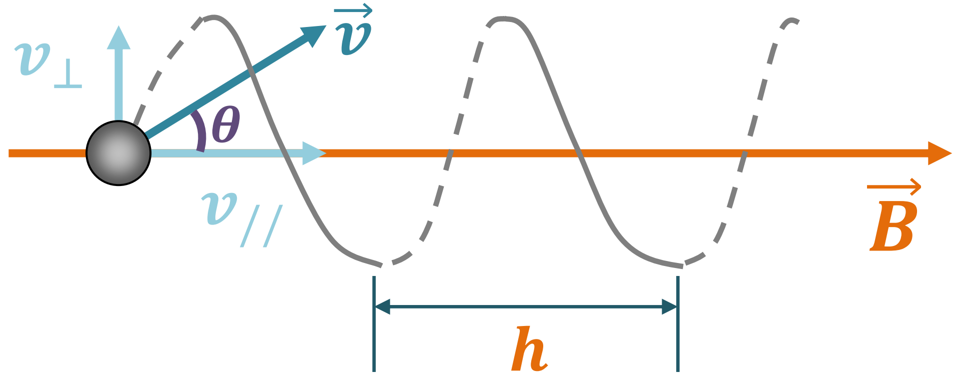
1930年狄拉克预言自然界存在正电子。



显示正电子存在的云室照片及其摹描图

■ 磁聚焦

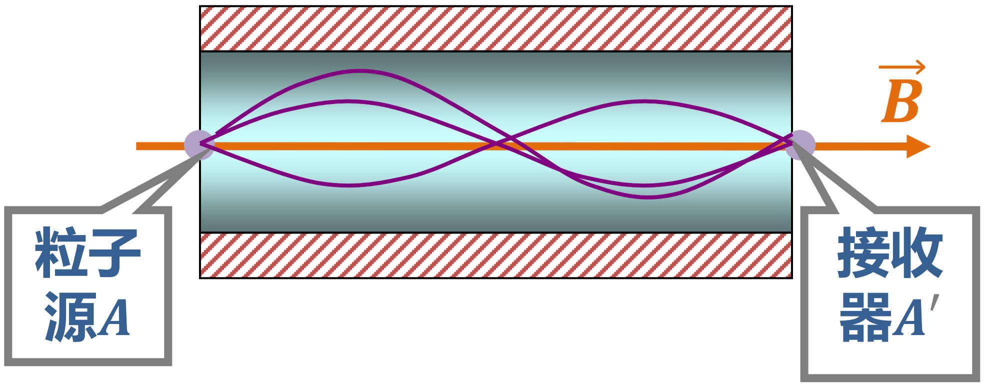
在均匀磁场中某点A发射一束初速相差不大的带电粒子，它们的$\vec{v}$与$\vec{B}$之间的夹角θ不尽相同，但都较小，这些粒子沿半径不同的螺旋线运动，因螺距近似相等，都相交于屏上同一点，此现象称之为**磁聚焦**。



θ很小时

$$v_{//} \approx v \qquad v_\perp \approx v\theta$$

$$h = v_{//}T \approx \frac{2\pi m v}{qB}$$



发散角不太大的带电粒子束，经过一个周期后，重新会聚。

应用：电子光学， 电子显微镜等

■ 磁约束

在非均匀磁场中，速度方向与磁场不同的带电粒子，也要作螺旋运动，但半径和螺距都将不断发生变化。

$$R=\frac{mv_{\perp}}{qB}=\frac{mv\sin\theta}{qB}$$

磁场增强，运动半径减少

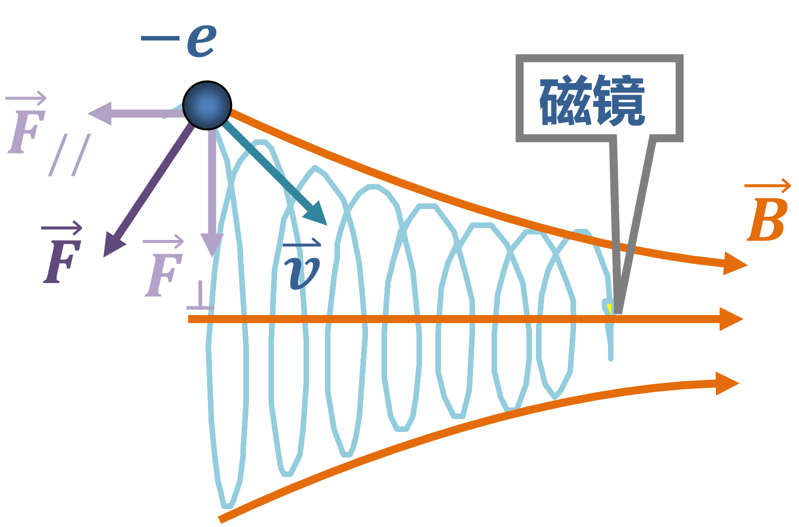
强磁场可约束带电粒子在一根磁场线附近---横向磁约束

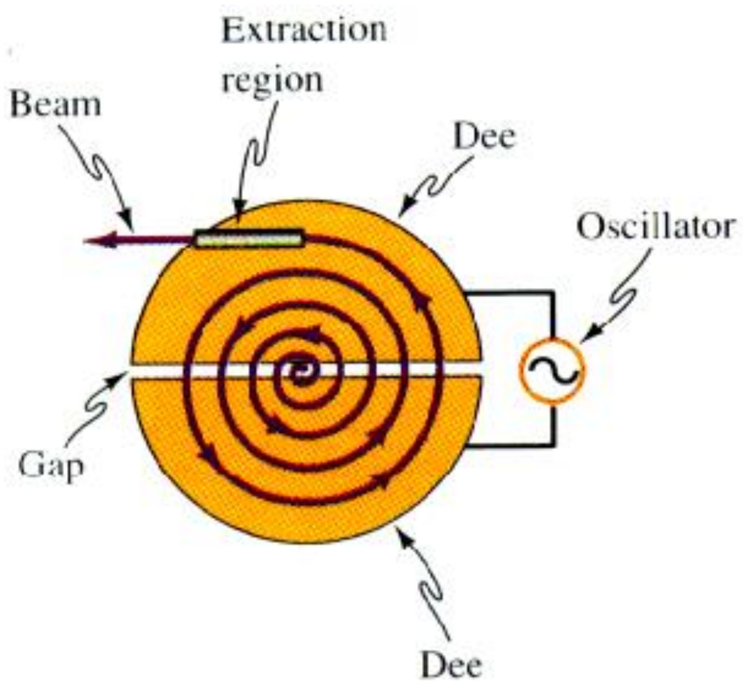
纵向磁约束

$$\vec{F}=\vec{F}_{//}+\vec{F}_{\perp}$$

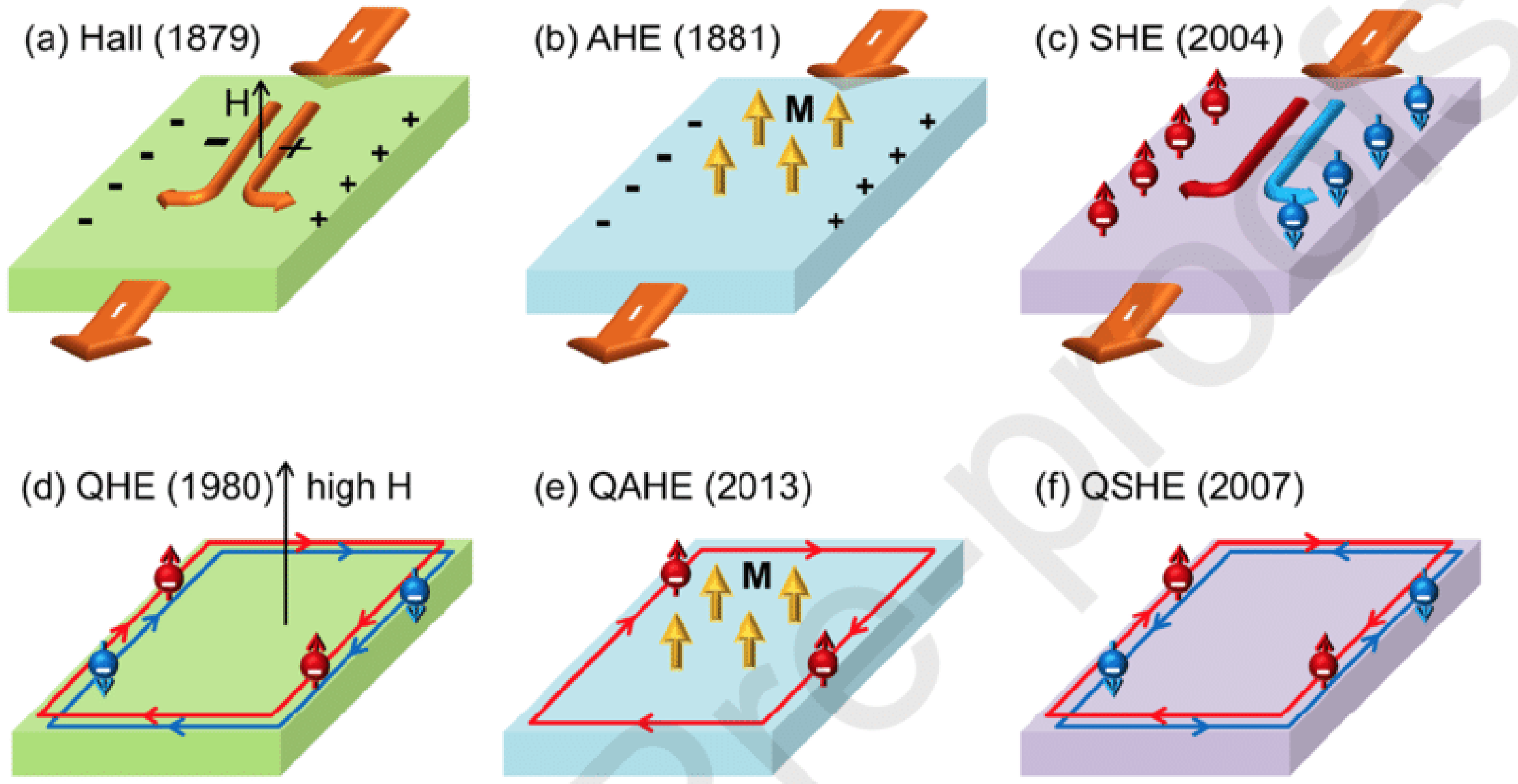
$\vec{F}_{//}$减少粒子的纵向前进速度，使粒子运动发生“反射”

在非均匀磁场中，纵向运动受到抑制---**磁镜效应**





- 回旋加速器
- 磁聚焦
- 磁约束（非均匀场）
- 霍尔效应
- 磁流体发电
- 电子比荷的测定
- 质谱仪

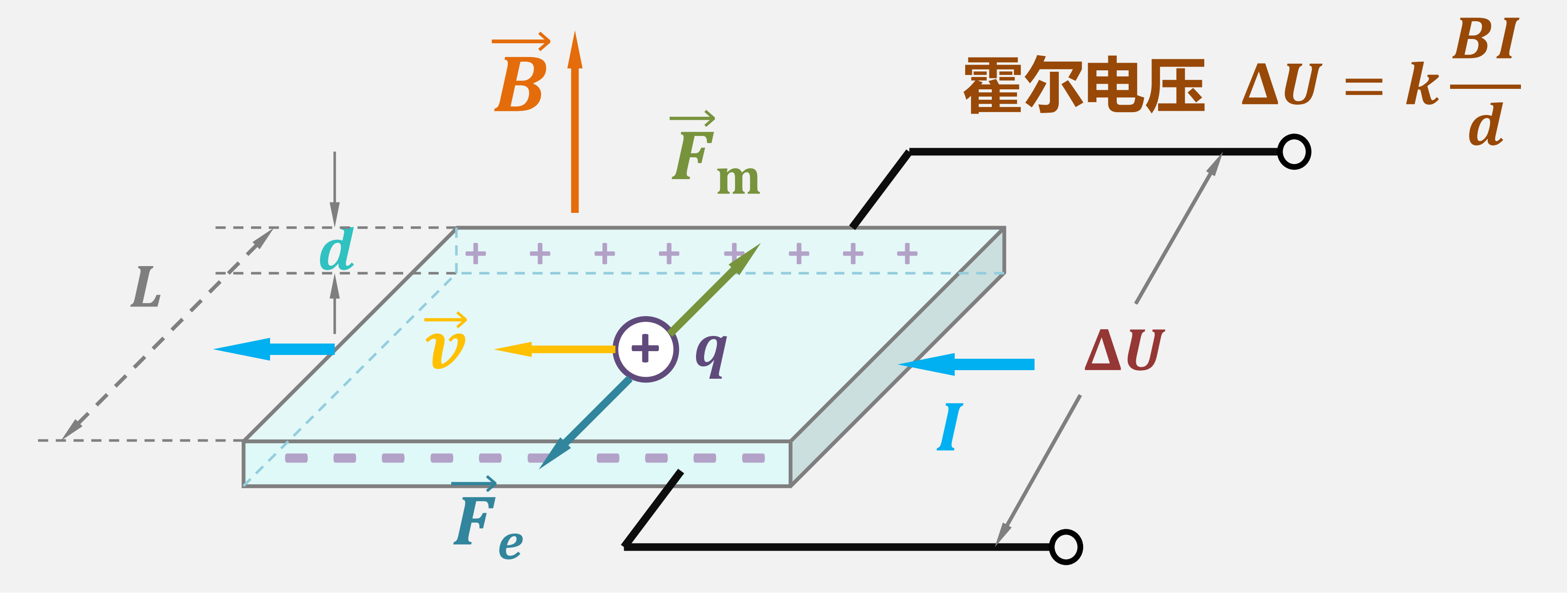


Schematic diagrams of Hall effects

(a) conventional Hall effect, (b) anomalous Hall effect (AHE), (c) spin Hall effect (SHE), (d) quantum Hall effect (QHE), (e) quantum anomalous Hall effect (QAHE) and (f) quantum spin Hall effect (QSHE) [120].

Ref. Review on Spintronics: Principles and Device Applications
March 2020, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 509(12):166711

■ 霍尔效应



洛伦兹力:

$$F_m = qvB$$

电场力:

$$F_e = qE = q\frac{\Delta U}{L}$$

达到动态平衡时 $F_m = F_e$

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB$$

$$\Delta U = EL \Rightarrow \Delta U = vBL \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{nq}\frac{BI}{d}$$

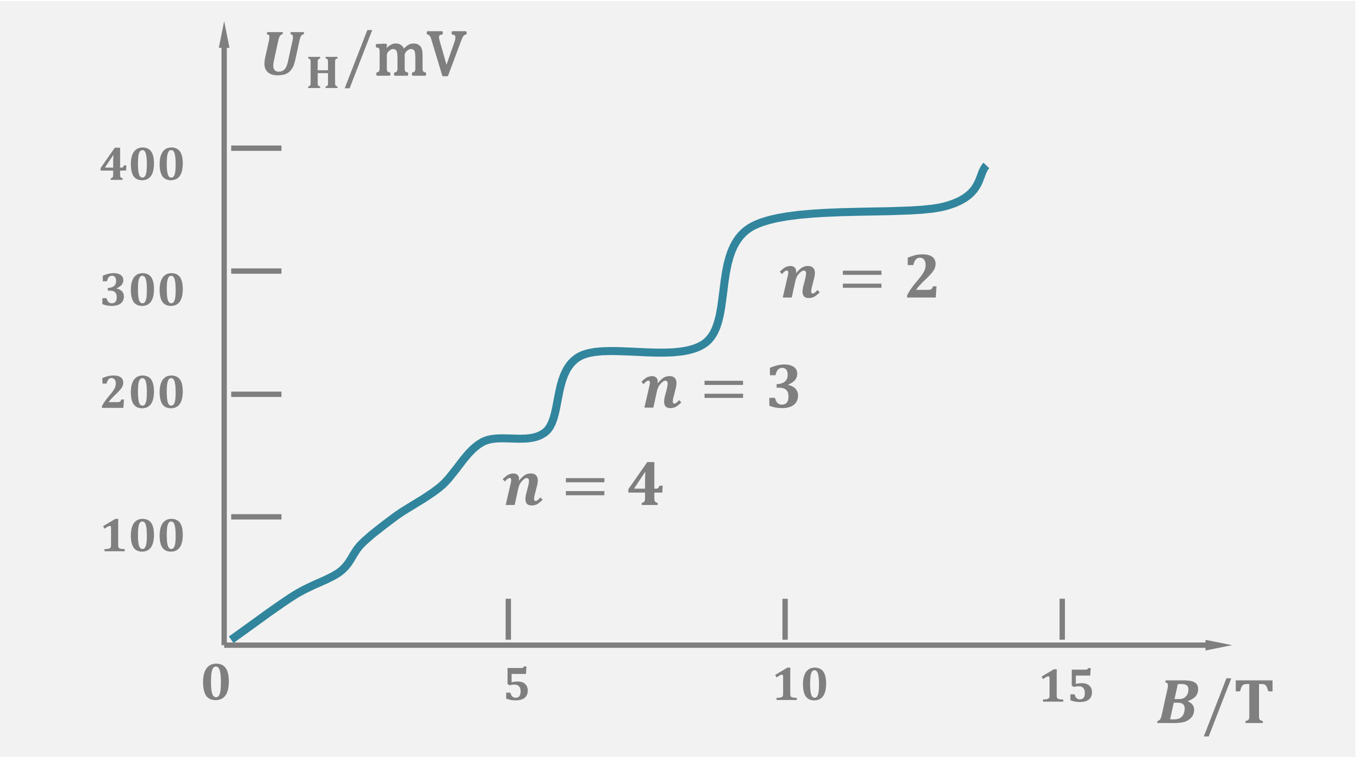
$$I = qnvS = qnvLd$$

$$\Rightarrow v = \frac{I}{qnLd}$$

霍耳系数 $k = \frac{1}{nq}$

■ 霍尔效应

量子霍尔效应（1980年）

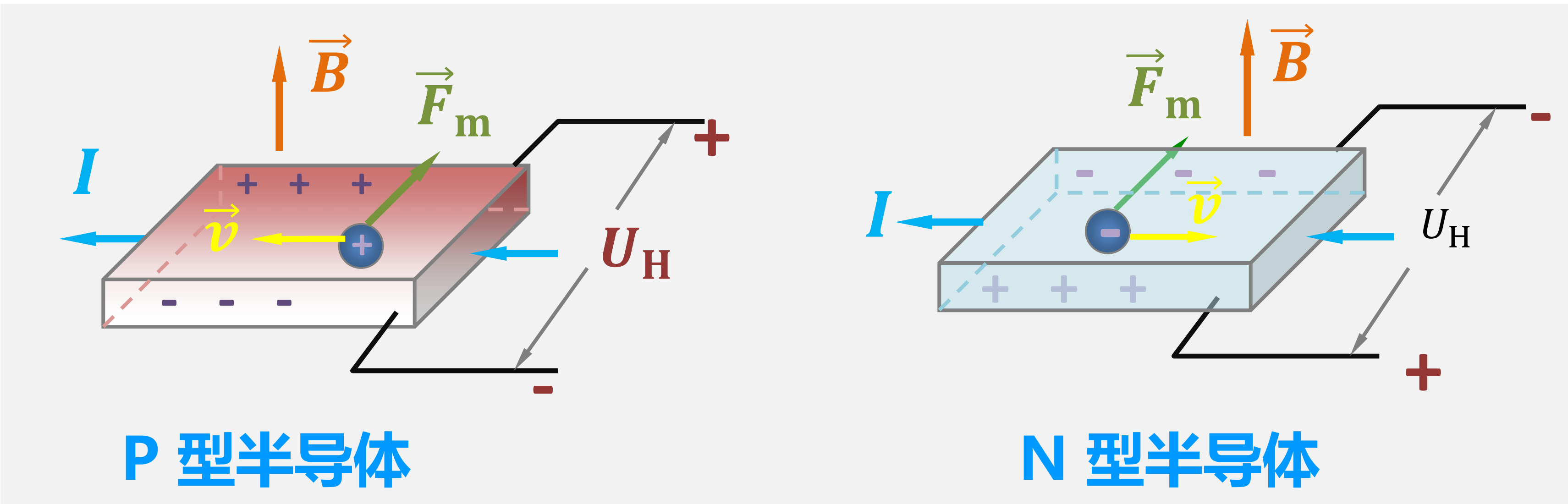


霍尔电阻 $R'_H = \dfrac{U_H}{I}$ $\qquad R'_H = \dfrac{h}{ne^2} \ (n = 1, 2, \cdots)$

■ 霍尔效应

应用

- 测载流子密度 $n = \dfrac{BI}{qd\,\Delta U}$
- 测载流子电性---半导体类型
- 测磁场$\vec{B}$（霍尔元件）
- 磁流体发电
- 量子霍尔效应



一个电子在均匀磁场中以速度$\vec{v}=40\vec{i}+35\vec{j}(\mathrm{km/s})$运动。它受到的力为$\vec{F}=-4.2\vec{i}+4.8\vec{j}\ (\mathrm{fN})$，其中$1\mathrm{fN}=1\times10^{-15}\mathrm{N}$。如果$B_x=0$, 求该磁场的磁感应强度为多少?

解：由题意知 $B_x=0$,

由洛伦兹力公式可知 $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$

$$=-e\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\right)\times\left(B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$

$$=-ev_yB_z\vec{i}+ev_xB_z\vec{j}\underbrace{-ev_xB_y\vec{k}}_{0}$$

$$=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$$

由上面的结果可知 $B_y=0$,

$$B_z=\frac{F_x}{(-e)v_y}=\frac{F_y}{ev_x}$$

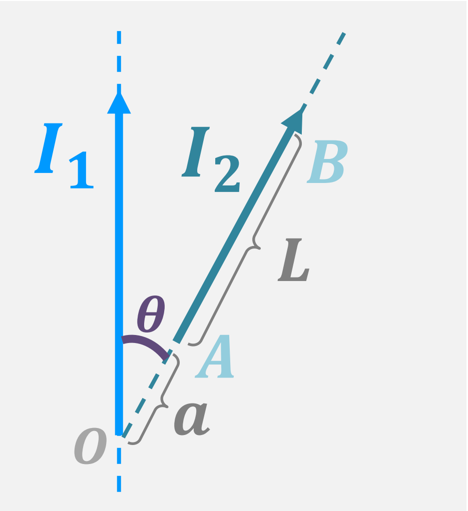
$$=\frac{4.8\times10^{-15}}{1.6\times10^{-19}\times40\times10^{3}}$$

$$=0.75\ (\mathrm{T})$$

所以 $\vec{B}=B_z\vec{k}=0.75\vec{k}\ (\mathrm{T})$

求AB段直电流受I_1磁场作用力。

$$(I_1, I_2, a, L, \theta)$$



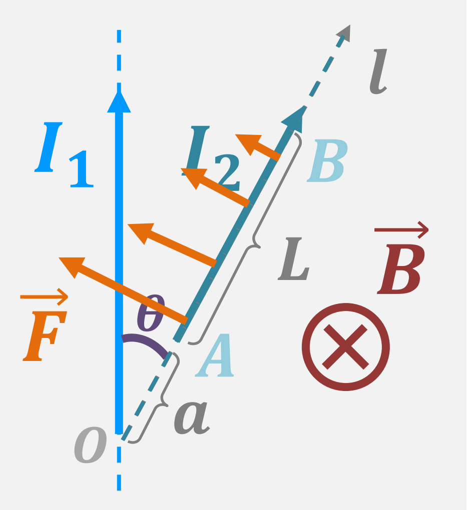
解：无限长载流导线I_1产生磁场的感应强度大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \quad \otimes \qquad x = l\sin\theta$$

在AB段直电流上取电流元$I_2 \mathrm{d}\vec{l}$，

电流元 $\mathrm{d}I$ 的所受安培力大小为

$$\mathrm{d}F = I_2 \mathrm{d}l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi l \sin\theta}$$



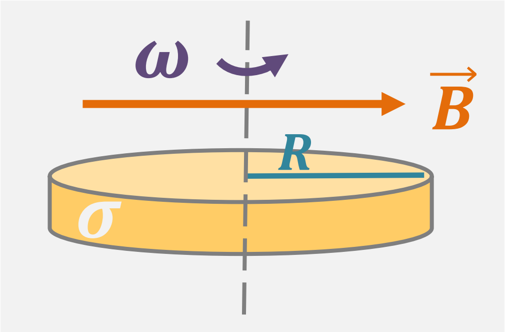
AB段直电流所受安培力大小为

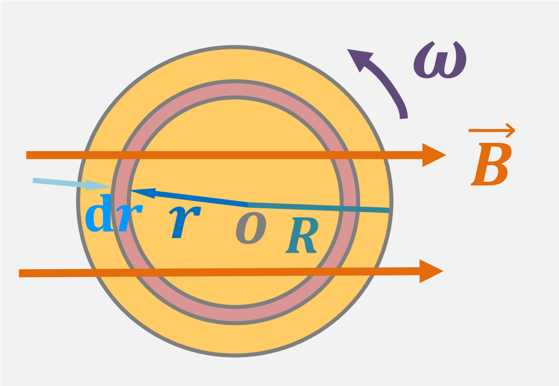
$$F = \int \mathrm{d}F = \int \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi l \sin\theta} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta}\int_a^{a+L} \frac{\mathrm{d}l}{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sin\theta} \ln\frac{a+L}{a}$$

AB一面斜向上运动，一面转动

半径为 R 的带电圆盘放入沿均匀磁场 $\vec{B}$ 中，电荷面密度为$\sigma = kr$（k为常数），并以角速度ω绕通过盘心垂直于盘面的轴转动。求圆盘的磁力矩$\vec{M}$。





解：在带电圆盘上取半径r，宽dr的圆环，

其带电荷量为 $\mathrm{d}q = \sigma\, 2\pi r \mathrm{d}r$

它以ω旋转时，电流为 $\mathrm{d}I = \dfrac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$

电流元 $\mathrm{d}I$ 的磁矩大小为

$$\mathrm{d}P_m = \mathrm{d}I\, \pi r^2 = k\omega\pi r^4 \mathrm{d}r$$

整个旋转圆盘的磁矩大小为

$$P_m = \int \mathrm{d}P_m = \int_0^R k\omega\pi r^4 \mathrm{d}r = \frac{1}{5}k\omega\pi R^5$$

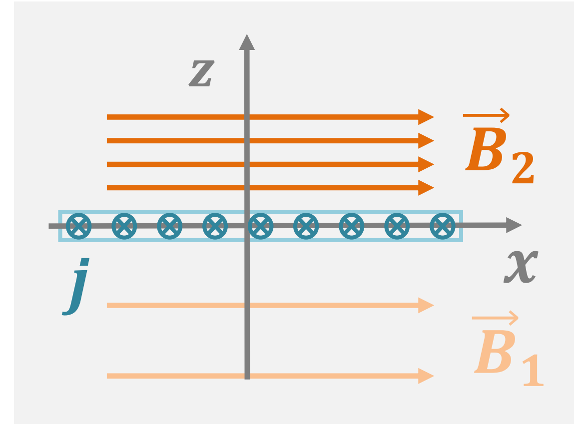
写成矢量式为 $\vec{P}_m = \dfrac{1}{5}k\pi R^5 \vec{\omega}$

大小：

$$M = \frac{1}{5}k\pi R^5 \omega B$$

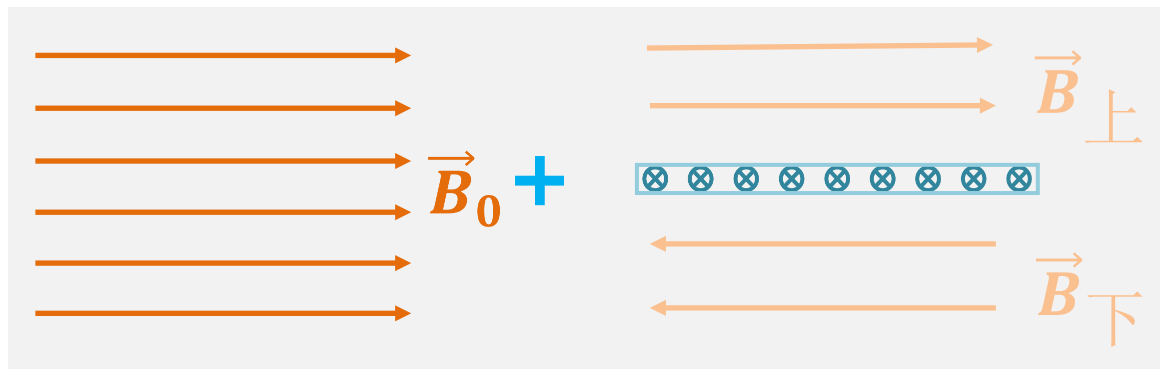
圆盘的磁力矩为 $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B} = \dfrac{1}{5}k\pi R^5 \vec{\omega} \times \vec{B}$

将一电流沿$+y$方向的无限大载流平面放入沿x方向的均匀磁场中，放入后平面两侧的磁感应强度分别为B_1和B_2，都与板面平行并垂直于电流。求载流平面上单位面积所受磁场力的大小及方向。



解：由安培环路定理可求出，无限大载流平面两侧磁感应强度大小为

$$B_{上} = B_{上} = B = \frac{\mu_0 j}{2}$$



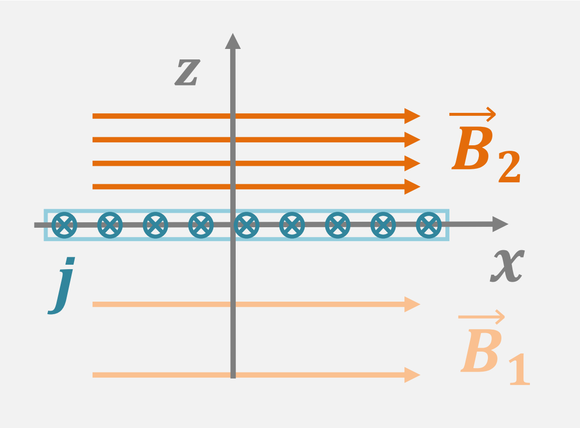
$\vec{B}$ 分布图

设均匀磁场磁感应强度$\vec{B}_0$，根据磁场的叠加原理

$$\begin{cases} B_1 = B_0 - B \\ B_2 = B_0 + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{B_2+B_1}{2} \\ j = \dfrac{B_2-B_1}{\mu_0} \end{cases}$$

$$B = \frac{B_2-B_1}{2}$$

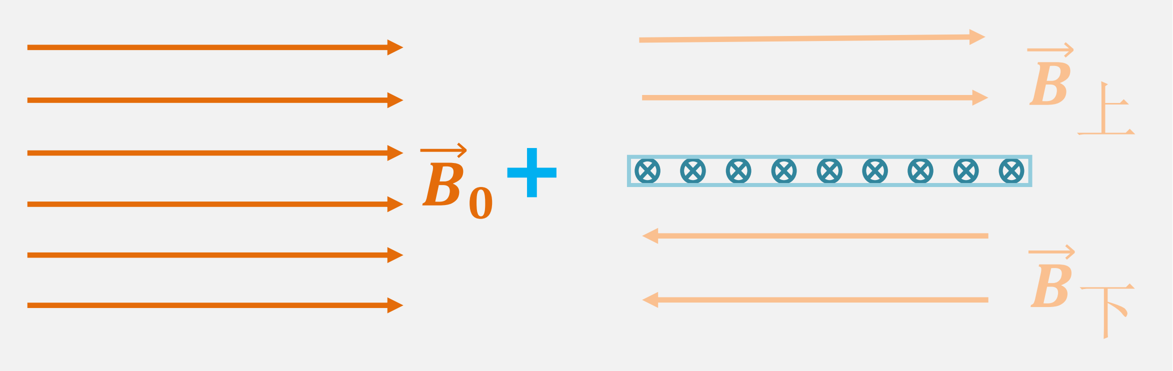
$$\begin{cases} B_0 = \dfrac{B_2+B_1}{2} \\ j = \dfrac{B_2-B_1}{\mu_0} \end{cases}$$



在载流平面上取电流元 $I\mathrm{d}l$

$$I\mathrm{d}l = j\mathrm{d}x\mathrm{d}y = j\mathrm{d}S$$

根据安培定律，电流元 $I\mathrm{d}l$ 在均匀外磁场磁感应强度$\vec{B}_0$中受到的安培力的大小为



$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l\, B_0 = j\mathrm{d}S\, B_0$$

单位面积受到安培力的大小为：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = B_0 j = \frac{B_2+B_1}{2} \cdot \frac{B_2-B_1}{\mu_0} = \frac{B_2^2-B_1^2}{2\mu_0}$$

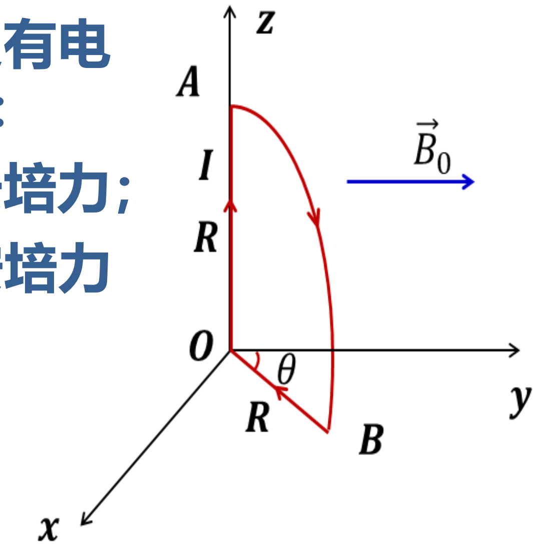
方向：沿$-z$

如图所示的平面线圈，处于均匀磁场$\vec{B}_0 = B_0\vec{j}$ 中，通有电流I，半径为R，其中AB为1/4圆弧，可绕z轴转动，求：

(1)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力；

(2)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力对z轴的力矩；

(3)当线圈转到与磁场垂直时，磁力矩做功多少？



解：(1) 由安培定律可知，在均匀磁场中，

平面载流线圈$OABO$所受合力：$\vec{F}_{OABO} = 0$

载流导线 BO：

$$\vec{F}_{BO} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = \int_B^O I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I\overrightarrow{BO} \times \vec{B}$$

$$= -B_0 IR\sin(\pi - \theta)\vec{k} = -B_0 IR\sin\theta\,\vec{k}$$

载流导线 OA：

$$\vec{F}_{OA} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = \left(\int_O^A I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = I\overrightarrow{OA} \times \vec{B} = -B_0 IR\,\vec{i}$$

由于 $\vec{F}_{OABO} = \vec{F}_{BO} + \vec{F}_{OA} + \vec{F}_{AB} = 0$

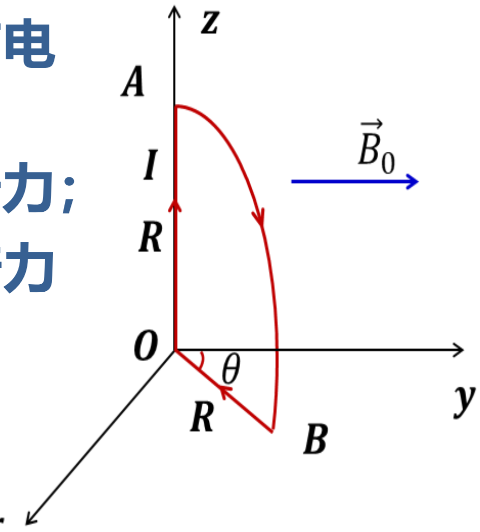
故 $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{OABO} - \vec{F}_{BO} - \vec{F}_{OA} = B_0 IR\vec{i} + B_0 IR\sin\theta\,\vec{k}$

如图所示的平面线圈，处于均匀磁场$\vec{B}_0=B_0\vec{j}$ 中，通有电流I，半径为R，其中AB为1/4圆弧，可绕z轴转动，求：

(1)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力；

(2)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力对z轴的力矩；

(3)当线圈转到与磁场垂直时，磁力矩做功多少？



解：(2) 面载流线圈所受磁力矩 $\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}$，

平面载流线圈所受磁力对z轴的力矩

$$\vec{M}_{OABO}=-ISB\sin\alpha\,\vec{k}=-ISB_0\cos\theta\,\vec{k}$$

$$=-\frac{1}{4}I\pi R^2B_0\cos\theta\,\vec{k}$$

其中 S为线圈面积，α为磁矩与磁感应强度的夹角，参见示意图

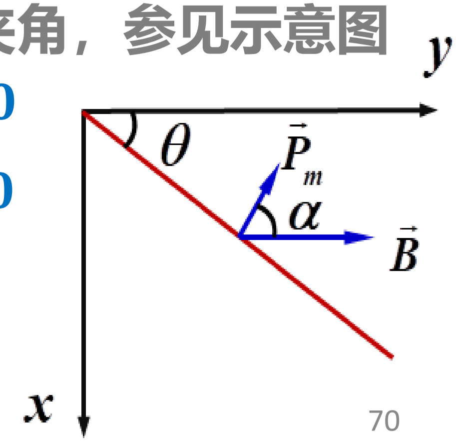
$\vec{F}_{BO}$ // z轴，导线BO所受磁力对z轴的力矩 $M_{BO}=0$

$\vec{F}_{AO}$ 过 z轴，导线AO所受磁力对z轴的力矩 $M_{OA}=0$

$\because M_{OABO}=M_{OA}+M_{AB}+M_{BO}=M_{AB}$

$\therefore$ 圆弧导线AB所受磁力对z轴的力矩

$$M_{AB}=-\frac{1}{4}I\pi R^2B_0\cos\theta$$

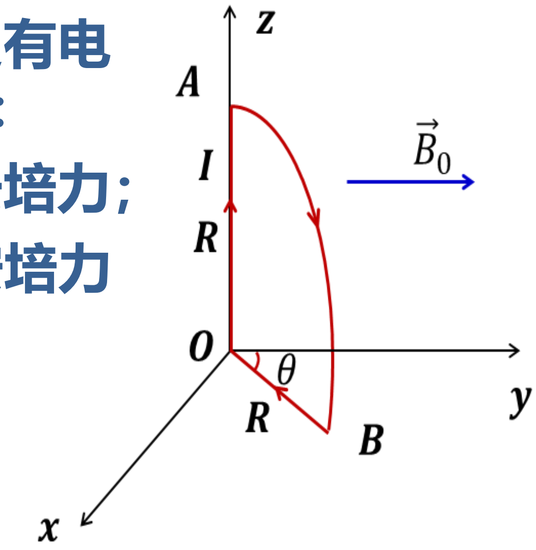


如图所示的平面线圈，处于均匀磁场$\vec{B}_0 = B_0\vec{j}$ 中，通有电流I，半径为R，其中AB为1/4圆弧，可绕z轴转动，求：

(1)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力；

(2)平面线圈、导线BO 、导线OA、圆弧导线AB所受安培力对z轴的力矩；

(3)当线圈转到与磁场垂直时，磁力矩做功多少？



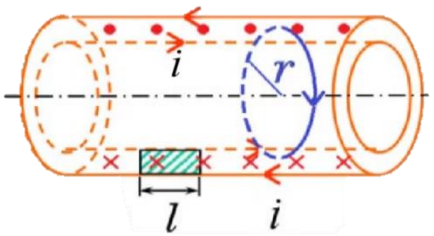
解：(3) 磁力矩的功

$$A = I\Delta\phi_m$$

$$= I\left(B_0\frac{1}{4}\pi R^2 - B_0\frac{1}{4}\pi R^2\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^2 I B_0(1 - \sin\theta)$$

一对同轴的无限长空心导体直圆筒，内、外筒半径分别为R_1和 R_2（筒壁厚度可以忽略），电流 I 沿内筒流出去，沿外筒流回，如图所示。
（1）计算两圆筒间的磁感应强度。
（2）求通过长度为l的一段截面（图中画斜线部分）的磁通量。



解：（1）取筒间半径为r的同轴环形积分回路如图所示，其绕行正向与穿过它所围面积的电流满足右手螺旋法则。由安培环路定理可得：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

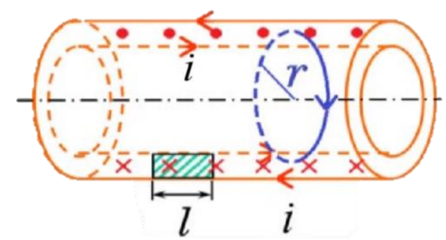
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

方向：和内筒电流方向成右旋关系

一对同轴的无限长空心导体直圆筒，内、外筒半径分别为R_1和 R_2（筒壁厚度可以忽略），电流 I 沿内筒流出去，沿外筒流回，如图所示。

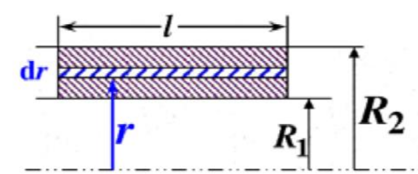
（1）计算两圆筒间的磁感应强度。

（2）求通过长度为l的一段截面（图中画斜线部分）的磁通量。



解：（2）此横截面上距离轴为r处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



如图所示，在此处取宽为$\mathrm{d}r$，长为l的矩形窄面元，面积为 $\mathrm{d}S=l\,\mathrm{d}r$，则

$$\phi_B=\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S B\mathrm{d}S\cos 0^\circ$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cdot l\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 i l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

1. 电量为q的带电粒子在均匀磁场中运动，粒子进入磁场后，其动量变化，但动能不变。
2. 做圆周运动的点电荷的磁矩可与一个载流圆线圈的磁矩等效。
3. 磁场强度$\vec{H}$只与传导电流有关。
4. 稳恒磁场的安培环路定理表明不存在磁单极子。
5. 恒定磁场中穿过以同一闭合曲线为边界的任意曲面的磁通量相同。
6. 在无电流的空间，如果磁感应线是密度不同的平行直线，那么磁场是非均匀磁场。

若无电流的空间中，磁感应线是密度不同的平行直线，取一矩形回路，则$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$，违反安培环路定理。
所以无电流的空间中，磁感应线不可能是密度不同的平行直线。