微积分应用

姓名：刘欣豪　　　学号：2020112921　　　学院专业：交通运输类

毫无疑问，高等数学在大学本科教育中的地位是极为特殊的，工科、理科、财经类的学生都需要在大一整个学年进行学习。而微积分是高等数学中的核心知识，我认为对其应用进行具体的实例分析以及分析其在本专业中的应用也是尤为重要的。下面我将从几何应用、大学物理、与交通运输专业的联系几个方面来进行讨论。

一、 几何应用

首先，微积分的直接应用就体现在其几何应用，课本上直接且鲜明的给我们进行了讲解，我们可以看到，微积分可以应用于求解平面图形的面积，无论是在极坐标还是直角坐标下其鲜明的优越性是其他方法难以比拟的。

例 2 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的全长(图 7.4-4).

解 $r'(\theta)=-a\sin\theta$，根据对称性，有

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$
$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta}d\theta$$
$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta$$
$$=4a\int_0^{\pi}(\cos\frac{\theta}{2})d\theta$$
$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$=\left[8a\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8a.$$

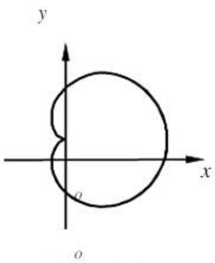
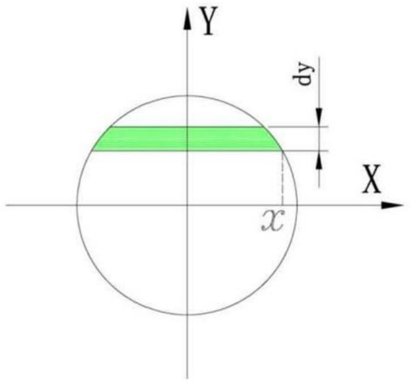


图 7.4-4

另外，微积分也可以来进行求解旋转体的体积或平行截面为已知的立体的体积。
例如：



图中圆曲线方程: $x^2+y^2=r^2$

绿色部分微分体积：πx^2dy

球的体积：$\int_{-r}^{r}\pi x^2dy=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-y^2)dy==\pi(r^2y-\frac{y^3}{3})|_{-r}^{r}=\frac{4\pi r^3}{3}$

二、工科必修——大学物理

微积分的发展是服务于物理的，牛顿在研究力学，流体力学的问题中，提出了很多新

课题，这些问题使用当时的数学方法是无法解决的，于是牛顿和莱布尼兹发明了微积分理论。比如如何在已知位移公式的情况下求出 v、a，又如已知曲线方程求其某个点上的切线，或者求出曲线某段的弦长。

例：已知一质点作直线运动，其加速度 $a=4+3t\ m/s^2$ ，开始运动时，x=5m 、v=0，求该质点在 t=10s 时的速度和位置。

在不断的发展中微积分的应用范围也不断扩展，如火箭问题中的密舍尔斯基方程就是利用微元法求解变质量问题，又如在计算转动惯量时用到了微积分知识，微积分在力学方向大有作为。

有定积分的定义可知当质量连续分布时，刚体的转动惯量可表示为

$$J=\int_m r^2 dm$$

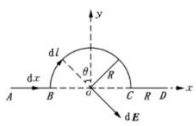
例1、 如图所示，求质量为 m，长为 l 的均匀细棒的传统惯量：（1）转轴通过棒的中心并与棒垂直；（2）转轴通过棒一端并与棒垂直。

此外，微积分在电磁学、热学、光学、近代物理方面发挥着其独一无二的作用，此处举了一例定积分在电势计算中的应用：

例2、如图所示的绝缘细线上均匀分布着线密度为 λ 的正电荷,两直导线的长度和半圆环的半径都等于 R. 试求环中心 O 点处的场强和电势.

解： (1)由于电荷均匀分布与对称性， AB 和 CD 段电荷在 O 点产生的场强互相抵消，取 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$

则 $\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$ 产生 O 点 $\mathrm{d}\vec{E}$ 如图，由于对称性，O 点场强沿 y 轴负方向



$$E=\int \mathrm{d}E_y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\sin(-\frac{\pi}{2})-\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

(2) AB 电荷在 O 点产生电势，以 $U_\infty=0$

$$U_1=\int_B^A\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}=\int_R^{2R}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

同理 CD 产生 $\quad U_2=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$

半圆环产生 $\quad U_3=\frac{\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$

$$\therefore\quad U_O=U_1+U_2+U_3=\frac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_0}\ln 2+\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

基于微积分计算的物理的学习价值不仅体现在能够锻炼我们的思维能力，其帮助我们开拓眼界、认识这个奇妙的世界的作用更是有意义的。

三、 交通管理事务

在本专业（交通运输类）中，相对而言与微积分密切相关的是交通管理事务方面的问题。微积分的应用普遍且有效，用定量分析方法解决交通问题已经成为科学管理体系中的一个重要理论基础，微积分也推动管理学朝着定量化的方向越走越远。微积分作为高等数学的基础，对交通管理事物的定量支持作用效果显著，可以解决道路测速管理、黄灯时间管理、交通堵塞等问题。

例：

表 1　5 个小时内车辆平均速度统计数据情况

时刻/h	速度/$km\cdot h^{-1}$	时刻/h	速度/$km\cdot h^{-1}$	时刻/h	速度/$km\cdot h^{-1}$	时刻/h	速度/$km\cdot h^{-1}$
2.0	49.7	3.2	60.3	4.2	68.9	5.2	76.2
2.2	51.6	3.4	62.8	4.4	70.1	5.4	78.3
2.4	53.9	3.6	63.7	4.6	73.5	5.6	77.9
2.6	51.1	3.8	65.1	4.8	74.7	5.8	80.5
2.8	53.5	4.0	66.2	5.0	77.0	6.0	82.4
3.0	52.2						

我们将时间和车辆速度拟合呈曲线，计算 5 个小时内车辆的平均行驶速度，为了更好地拟合时间与速度数据，可采用 3 次曲线，其表达方程为：

$$y = a+bt+ct^2+dt^3$$

根据二乘法求得曲线中 4 个未知常数 a,b,c,d，满足以下情况：

$$\begin{cases}\sum yt=na+b\sum t+c\sum t^2+d\sum t^3\\ \sum tyt=a\sum t+b\sum t^2+c\sum t^3+d\sum t^4\\ \sum t^2yt=a\sum t^2+b\sum t^3+c\sum t^4+d\sum t^5\\ \sum t^3yt=a\sum t^3+b\sum t^4+c\sum t^5+d\sum t^6\\ \sum t^4yt=a\sum t^4+b\sum t^5+c\sum t^6+d\sum t^7\\ \sum t^5yt=a\sum t^5+b\sum t^6+c\sum t^7+d\sum t^8\end{cases}$$

经过具体计算得出车辆行使均速为：

$$s(t)=2t^3-21t^2+60t+40(km/h)$$

车辆平均行使速度为：$v=\frac{1}{6-l}\int 6s(t)dt=\frac{1}{5}\int(2t^3-2lt^2+60t+40)dt=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}t^4-7t^3+30t^2+40t\right)=78.5km/L$

在得到车辆平均速度之后，可对本区域内高速公路车辆行驶情况作出分析，在工作中制定有效的管理对策，以规范交通行为，提升管理质量和水平，减少事故和违规行为的发生几率。

四、轨道交通站间距的优化

在交通工程专业方向，关于城市轨道交通可以利用微积分的知识对轨道交通站的间距进行数学建模与优化。这里引用了一份论文中的模型与使用微积分的片段：

模型：

1.1 模型假设

在总出行时间曲线上存在着某个站间距值（或者区间），使其对应的乘客总出行时间值最小，这个值就是最适宜站间距。为了简化求解过程，假设如下。

（1）随着城市轨道交通的不断发展，城市轨道交通线路数量逐渐增加，增加到一定数量时，假设城市中心区的地铁线路网络将呈现一种整齐的“棋盘格式”，在此基础上，再假设每个相邻站点之间的站间距都近似相同。

（2）不考虑乘客的换乘时间，当有换乘情况时，可以看作一条线路进行处理。

（3）在城市中心区内，每个站点的吸引范围规定为以地铁站为中心、以站间距为边长的正方形区域。

（4）对于每个独立的站点而言，在其吸引范围内的客流密度是相同的，暂不考虑站点的客流量差异。

（5）在每个站点的吸引范围内，当乘客的出发地／目的地与站点的距离小于 500 m 时，乘客将选择步行前往；距离大于 500 m 时，乘客将选择坐公交车／骑自行车前往。

（6）将利用地铁从出发地到目的地的总出行时间分为 3 部分：乘客从出发地到达地铁站的时间 T_1；乘客从地铁站到达目的地的时间 T_2；乘客乘坐地铁的时间 T_3（包括等待时间、站内行走时间等）。将 T_1 和 T_2 合称站外时间，T_3 称为站内时间，假设乘客在地铁站外的出行情况是一致的，即 T_1 和 T_2 的构成是一致的。

片段：

的地离地铁站的距离和出行方式。根据模型假设，可以将站间距 X 取值分为 3 个区间范围进行计算，在每个区间范围内，利用双重积分依次计算乘客在站外出行的平均距离，进而求得站外时间。

（1）站间距 X 取值区间为时 $X \geqslant 1$ km，即在每个站点的吸引范围内，乘客将选择步行或坐公交车／骑自行车前往站点。记 E_1 为乘客步行前往地铁站的区域，E_2 为乘客坐公交车／骑自行车前往地铁站的区域，则当 $X \geqslant 1$ km 时乘客站外出行方式选择示意图如图 2 所示。

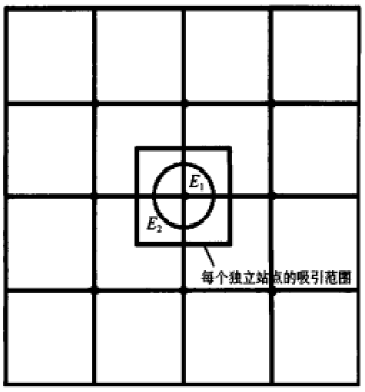


图 2　当 $X \geqslant 1$ km 时乘客站外出行方式选择示意图

Fig.2　Choice of travel mode outside station when $X \geqslant 1$ km

在 E_1 区域内，从出发地到最近地铁站的平均距离可表示为

$$L_{1步行}' = \frac{\int_0^{0.5} 2\pi x \cdot x\mathrm{d}x}{\int_0^{0.5} 2\pi x\mathrm{d}x} = \frac{1}{3} \tag{1}$$

式中：$L_{1步行}'$ 为在 E_1 区域内从出发地到最近地铁站的步行平均距离，km；x 为积分函数变量。

在 E_2 区域内，从出发地到最近地铁站的平均距离可以表示为

$$L_{1公交}' = \frac{\iint\limits_{E_2} \sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{E_2} 1\mathrm{d}\sigma} = \frac{\int_{0.5}^{X/2}\mathrm{d}x\int_0^{X/2}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{0.5}^{X/2}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{0.5^2-x^2}}^{0.5}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y}{\int_{0.5}^{X/2}\mathrm{d}x\int_0^{X/2}1\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{0.5}^{X/2}1\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{0.5^2-x^2}}^{0.5}1\mathrm{d}y} \tag{2}$$

式中：$L_{1公交}'$ 为在 E_2 区域内从出发地到最近地铁站的坐公交／骑自行车平均距离，km；y，σ 为积分函数变量。

当 $X \geqslant 1$ km 时，从出发地到最近地铁站花费的时间可以表示为

$$T_1' = \begin{cases} \dfrac{L_{1步行}'}{v_1} = \dfrac{1}{3v_1} \\ \dfrac{L_{1公交}'}{v_2} = \dfrac{\int_{0.5}^{X/2}\mathrm{d}x\int_0^{X/2}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{0.5}^{X/2}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{0.5^2-x^2}}^{0.5}\sqrt{(x^2+y^2)}\mathrm{d}y}{\left(\int_{0.5}^{X/2}\mathrm{d}x\int_0^{X/2}1\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{0.5}^{X/2}1\mathrm{d}y + \int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{0.5^2-x^2}}^{0.5}1\mathrm{d}y\right)\cdot v_2} \end{cases} \tag{3}$$

五、铁路工程材料供应优化

在交通运输方向，关于铁路工程材料供应的优化也可以采用微积分的方法来解决：

理论计算方法通常假设 2 个（或以上）料源点的材料均能满足用量要求，且价格相等、运输单价相等、沿线用料均匀分布（其中线性规划法可以解决沿线用料不均匀分布的问题）。

如图 1 所示：

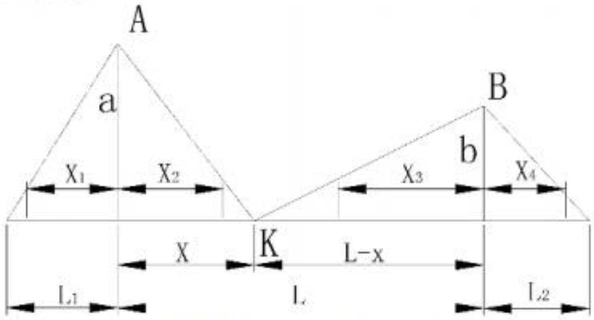


图 1 材料供应分界计算示意图

图 1 中：A、B---- 料源点；

a、b---- 料源点至铁路线的横向距离（km）；

L---- 两料源点间铁路线的长度（km）；

X ---- 料源点 A 的供应范围（km）；

L − x ---- 料源点 B 的供应范围（km）；

K----A 与 B 料源点供应范围的分界点。

微积分法把线路看作由无限多个无限细分的点组成。总的运输距离就是两料源点到各自供应范围的这些无穷小的点的运输距离的总和，从而转化成定积分问题来求解。所谓的材料经济供应分界点，就是能使 A、B 两料源点总的运输距离最小的点。记运距总和为，则

$$S_{总} = \int_0^{L_1} (a + x_1)\,dx + \int_0^{x} (a + x_2)\,dx + \int_0^{L-x} (b + x_3)\,dx + \int_0^{L_2} (b + x_4)\,dx \quad (10)$$

式中：x_1、x_2、x_3、x_4 ---- 积分变量

从物理意义上讲，对上式求导并令其等于 0，即可得使 $s_{总}$最小的积分变量 x 的值。

$$x = \frac{L + b - a}{2} \quad (11)$$

由微积分法所得总运距最小的材料供应分界点与最大运距相等法的计算结果是一致的，则全线路的材料经济供应运距也与最大运距相等法的计算结果一致。

总结：

微积分作为一种数学科学，其研究的出发点，就是把世间的万物万事分割为细微，那似乎是只存在于人类大脑中很细微很薄的物质，不论你是多么宏观浩瀚，根据你的外形或者趋势，其研究的起步点就是将其分割到无限小，再用最基本的算术数学公式计算测算，然后在其相同性质的区间内累计相加而成。浩瀚的宇宙，或复杂的外形，或运动的物体和流体，以及人类某些经济活动等等，都被微积分的数学理念一一化解。在分析微积分应用的过程中，我觉得其微分思想才是微积分的真正可贵之处，还记得一位伟人曾说：学习另一种语言的真正价值就是学会了一种新的思维方式。我想，学习微积分的过程就是在给我们打开了一扇新的大门，门后面确确实实是一个崭新的世界。

参考文献：

[1]谷存昌,王春晓.微积分在交通管理事务中的应用[J].太原城市职业技术学院学报,2008,(8):129-130. DOI:10.3969/j.issn.1673-0046.2008.08.074.
[2]杨鸿雁.微积分对交通管理事务的定量支持作用[J].中国管理信息化,2014,(14):134-134,135. DOI:10.3969/j.issn.1673-0194.2014.14.083.
[3]李婷,靳文舟,朱子轩.城市中心区轨道交通站间距优化研究[J].铁道运输与经济,2019,41(11):116-122. DOI:10.16668/j.cnki.issn.1003-1421.2019.11.20.
[4]杨江乐.铁路工程建筑材料供应分界优化分析[J].建筑工程技术与设计,2017,(14):1297-1297，1605. DOI:10.3969/j.issn.2095-6630.2017.14.246.