Rakéták, rakéta hajtóművek
1. házifeladat

Ábrók László Patrik
JPWF8N

2025.04.13.

1. házi feladat

JPWF8N részére

Végezze el az alábbi feladatokat a megadott paraméterekkel rendelkező ideális (veszteségmentes) rakétahajtóműre!

1. Mekkora a karakterisztikus sebesség, c^*?
2. Határozza meg a torokkeresztmetszet jellemzőit (termodinamikai állapotjelzők (p, T, ρ), geometriai méretek (D, A), tömegáram $\dot{m}$)!
3. Mekkora lesz a p_2 nyomás a kilépő keresztmetszetben? Milyen repülési magasságon lesz optimális a hajtómű üzeme?
4. Diagramban ábrázolja a tolóerő és a tolóerő-tényező változását a magasság függvényében a működés során H_0 és $H_{évp}$ repülési magasságok között 20 egyenletes osztásközzel!

Adatok:

Jellemző	**Jel**	**Érték**	**Mérték-egység**
Működési idő	$t_{műk}$	40	s
Égéstér nyomás	p_1	70	bar
Égéstér hőmérséklet	t_1	2460	°C
Adiabatikus kitevő	κ	1,21	–
Specifikus gázállandó	R	332,56	$\frac{J}{kgK}$

Jellemző	**Jel**	**Érték**	**Mérték-egység**
Induló tömeg	m_0	1289	kg
Égésvégi tömeg	$m_{évp}$	215	kg
Indulási magasság	H_0	0	km
Elért repülési magasság	$H_{évp}$	3	km
Tolóerő indulási magasságon	$F_{t,H0}$	62,25	kN
Terjeszkedési viszony	ε	12	–

A számítások tetszőleges programban készíthetőek (Excel, MATLAB, stb.), a kérdésekre adandó válaszok azonban egy külön dokumentumban szerepeljenek kigyűjtve. Ez utóbbi készülhet kézzel, de célszerű a számítógépen szerkesztett elektronikus dokumentum.

Leadás: elektronikusan a beneda.karoly@kjk.bme.hu email címre, 2025. IV. 03-ig.

1 Bevezetés

A feladat elvégzéséhez a Python programozási nyelvet használtam. Az egyes kérdésekhez tartozó számításokat egy Jupyter notebook-ban vezettem le. A megoldáshoz a következő könyvtárakat használtam:

- `numpy` - numerikus számításokhoz
- `scipy` - közelítő megoldáshoz
- `matplotlib` - grafikonok készítéséhez
- `pandas` - adatok kezeléséhez

A megoldás megtalálható a következő GitHub repository-ban: rockets-and-rocket-engines repository

A notebook futtatásához célszerű egy virtuális környezet létrehozása, amelyben a szükséges könyvtárak telepítve vannak. A szükséges könyvtárak elérhetőek egy requirements.txt fájlban, amelyet a következő paranccsal telepíthetünk:

```
pip install -r requirements.txt
```

Az adatokat egy json fájlban tároltam, amelyet a notebookban beolvasok. A json fájl tartalma a következő:

```
{
    "t_muk": 40,
    "p_1": 7000000,
    "t_1": 2733.15,
    "k": 1.21,
    "R": 332.56,
    "m_0": 1289,
    "m_evp": 215,
    "H_0": 0,
    "H_evp": 3000,
    "F_t_h0": 62250,
    "epsilon": 12
}
```

A feladatleírásban felsorolt mértékegységeket SI-ben adtam meg.

2 Karakreterisztikus sebesség

A karakterisztikus sebesség azt adja meg, hogy milyen hatékonyan képes a hajtómű a hőenergiát mozási energiává alakítani. Ez a jellemző a torok méretétől és tömegáramtól függ.
Tömegáram kiszámítása:

$$\dot{m} = \frac{m_0 - m_{\text{evp}}}{t_{\text{muk}}}$$

$$\dot{m} = \frac{1289 - 215}{40} = 26.85 \text{ kg/s}$$

A torok méretének kiszámítása:

$$A_t = \frac{\dot{m}}{p_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{R \cdot T_1}} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

$$A_t = \frac{26.85}{7000000 \cdot \sqrt{\frac{1.21}{332.56 \cdot 2733.15}} \cdot \left(\frac{2}{1.21+1}\right)^{\frac{1.21+1}{2(1.21-1)}}} = 0.0056m^2$$

Karakterisztikus sebesség kiszámítása:

$$c^* = \frac{p_1 \cdot A_t}{\dot{m}}$$

$$c^* = \frac{7000000 \cdot 0.0056}{26.85} = 1465.6904 \text{ m/s}$$

3 A torokkeresztmetszet jellemzői

A tömegáram már az előző részben kiszámításra került.
A torokátmérő kiszámítása:

$$d_t = \sqrt{\frac{4 \cdot A_t}{\pi}}$$

$$d_t = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.0056}{\pi}} = 0.0846 \text{ m}$$

Poisson egyenlet segítségével kiszmátható a toroknál mérhető hőmérséklet.

$$T_t = \frac{2 \cdot T_1}{k+1}$$

$$T_t = \frac{2 \cdot 2733.15}{1.21+1} = 2473.4389 \text{ K}$$

Az izentropikus folyamat nyomása:

$$p_t = p_1 \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$p_t = 7000000 \cdot \left(\frac{2}{1.21+1}\right)^{\frac{1.21}{1.21-1}} = 3937755.2917 \text{ Pa} = 3937.7552917 \text{ kPa}$$

Sűrűség:

$$\rho_t = \frac{p_t}{R \cdot T_t}$$

$$\rho_t = \frac{3937755.2917}{332.56 \cdot 2473.4389} = 4.7872 \text{ kg/m}^3$$

4 Kilépő nyomás és optimális magasság

A kilépő nyomás meghatározásához szükség van a kilépő Mach szám meghatározására. Ezt analaítikus módon nem lehet megoldani, ezért iteratív eljárását használtam. A következő egyenlet nem oldható meg zárt alakban:

$$f(M) = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} - \varepsilon$$

Ezért a következő egyenletet oldottam meg gyökkereséssel:

$$f(M_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{M_e} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \right) \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

A megoldáshoz a *scipy* könyvtár `fsolve` függvényét használtam, 3.0 kezdeti értékkel. Ennek eredménye:

$$M_e = 3.4373$$

Ezt követően a kilépő nyomás kiszámítása a következő egyenlet segítségével történik:

$$p_2 = p_1 \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$p_2 = 7000000 \cdot \left(1 + \frac{1.21-1}{2} \cdot 3.4373^2 \right)^{-\frac{1.21}{1.21-1}} = 67042.3800 \text{ Pa} = 67.0423800 \text{ kPa}$$

Az optimális magasság meghatározásához azt vettem figyelembe, hogy egy hajtómű akkor működik a legoptimálisabban, ha a fúvókából kilépő nyomás megegyezik a külső nyomással.
A megoldáshoz a standard ISA modellt használtam, amely a következő egyenlettel írható le:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{gM}{RL}}$$

Ebből kifejezve a magasságot:

$$h_{opt} = \frac{T_0}{L} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{RL}{gM}} \right)$$

A következő konstansokat használtam:

Jelölés	**Érték**	**Mértékegység**
p_0	101325	Pa
T_0	288.15	K
L	0.0065	K/m
g	9.81	m/s^2
M_{air}	0.02896	kg/mol
R	8.31446	J/mol·K

$$h_{opt} = \frac{288.15}{0.0065} \left(1 - \left(\frac{67.0423800}{101325} \right)^{\frac{287.05 \cdot 0.0065}{9.81 \cdot 0.0289644}} \right) = 3349.6154 \text{ m}$$

5 Tolóerő és tolóerőtényező

A tólóerő kiszámításához a tólóerő egyenletét használtam:

$$F_t = \dot{m} \cdot w + (p_2 - p_0) \cdot A_2$$

Ebből:

$$w = \frac{F_t - (p_2 - p_0) \cdot A_2}{\dot{m}}$$

$$w = \frac{62250 - (67042.3800 - 101325) \cdot 0.0675}{26.85} = 2404.5747 \text{ m/s}$$

A kilépő sebesség segítségével minden egyes vizsgált magasságra kiszámítottam a tolóerőt a tolóerő egyentlet segítségével. A nyomás adott magasságon történő meghatározásához a következő egyenletet használtam fel:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{T_0 L h}{R L g M}\right)^{\frac{gM}{RL}}$$

A tolóerőtényezőket pedig a következő összefüggéssel számoltam:

$$c_f = \frac{F_t}{p_1 \cdot A_t}$$

A következő ábrán látható a tolóerő és tolóerőtényező változása a magassággal 0 és 3000 méter között 20 osztásközzel:

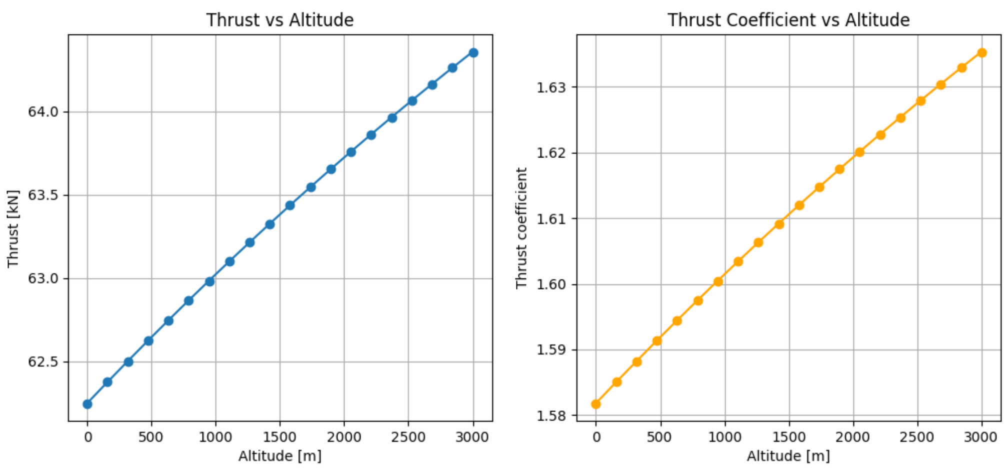

Figure 1: Tolóerő és tolóerőtényező változása a magassággal

A következő táblázat pedig tartalmazza az egyes magasságokhoz tartozó tolóerőt és tolóerőtényezőt.

Magasság [m]	**Tolóerő [kN]**	**Tolóerőtényező**
0.0	62.25	1.5818
157.89	62.38	1.5850
315.79	62.50	1.5882
473.68	62.63	1.5913
631.58	62.75	1.5944
789.47	62.87	1.5975
947.37	62.98	1.6005
1105.26	63.10	1.6034
1263.16	63.21	1.6063
1421.05	63.33	1.6091
1578.95	63.44	1.6120
1736.84	63.55	1.6147
1894.74	63.65	1.6174
2052.63	63.76	1.6201
2210.53	63.86	1.6228
2368.42	63.96	1.6254
2526.32	64.06	1.6279
2684.21	64.16	1.6304
2842.11	64.26	1.6329
3000.0	64.36	1.6353