

Rakéták, rakéta hajtóművek

2. házi feladat

Ábrók László Patrik
JPWF8N

2025.05.23.

2. házi feladat

JPWF8N részére

Végezze el az alábbi feladatokat a megadott paraméterekkel rendelkező hordozórakétára, a légellenállást és a gravitáció hatását elhanyagolva, figyelemmel arra, hogy az egyes fokozatokra jellemző értékek kerültek megadásra!

1. Mekkora az egyes lépcsőkkel elérhető Δv gyorsítás?
2. Mekkora az egyes lépcsők s konstrukciós mutatója?
3. Mekkora lesz a végsebesség, ha a komplexum az északi szélesség 45,95. fokáról indul?
4. Az elméletileg elérhető végsebességgel milyen felszín feletti magasságba emelheti a hasznos terhet a rakéta?
5. Mekkora tömegaránnyal, ill. szerkezeti tömeggel kellene rendelkezzen egy azonos hasznos terhet azonos magasságba feljuttatni képes egyfokozatú rakéta, ha a hajtómű kiáramlási sebessége $w_{egyfok} = 3,19$ km/s? Mekkora változást jelent ez az eredeti, többfokozatú kialakításhoz képest? Adjon értékelést az egyfokozatú rakéta adott célra történő megvalósíthatóságáról!

Adatok:

Jellemző	1. fokozat	2. fokozat	3. fokozat	Hasznos teher
Induló tömeg (t)	458,9	168,3	50,1	22
Hajtóanyag tömege (t)	428,3	157,3	46,6	–
Kiáramlási sebesség (km/s)	2,83	3,14	3,19	–

A számítások tetszőleges programban készíthetőek (Excel, MATLAB, stb.), a kérdésekre adandó válaszok azonban egy külön dokumentumban szerepeljenek kigyűjtve. Ez utóbbi készülhet kézzel, de célszerű a számítógépen szerkesztett elektronikus dokumentum.

Leadás: elektronikusan a beneda.karoly@kjk.bme.hu email címre, 2025. V. 23-ig.

1 Bevezetés

A feladat elvégzéséhez a Python programozási nyelvet használtam. Az egyes kérdésekhez tartozó számításokat egy Jupyter notebook-ban vezettem le. A megoldáshoz a következő könyvtárakat használtam:

- `numpy` - numerikus számításokhoz
- `pandas` - adatok kezeléséhez

A megoldás megtalálható a következő GitHub repository-ban: `rockets-and-rocket-engines repository`

A notebook futtatásához célszerű egy virtuális környezet létrehozása, amelyben a szükséges könyvtárak telepítve vannak. A szükséges könyvtárak elérhetőek egy `requirements.txt` fájlban, amelyet a következő paranccsal telepíthetünk:

```
pip install -r requirements.txt
```

Az adatokat két csv fájlban tároltam, amelyet a notebookban beolvasok. A csv fájlok tartalma a következő:

data-1.csv:

```
stage,m_0_t,m_prop_t,vel_out_m_s
1,458900,428300,2830
2,168300,157300,3140
3,50100,46600,3190
```

data-2.csv:

```
component,m_t
payload,22000
```

A feladateleírásban felsorolt mértékegységeket SI-ben adtam meg.

2 Δv számítása

A sebességváltozás kiszámításához Ciolkovszkij egyenletét használtam:

$$\Delta v_i = w_{e,i} \cdot \ln \left(\frac{m_{0,i}}{m_{f,i}} \right)$$

- $w_{e,i}$ – az i -edik fokozat kiáramlási sebessége [m/s],
- $m_{0,i}$ – az i -edik fokozat induló tömege [kg],
- $m_{f,i}$ – az i -edik fokozat végső tömege [kg] (felsőbb fokozatok + hasznos teher + saját szerkezet).

Ezáltal a következő értékek adódtak:

- Első fokozat: $\Delta v_1 = 1490.599206$ m/s
- Második fokozat: $\Delta v_2 = 2215.908674$ m/s
- Harmadik fokozat: $\Delta v_3 = 2154.342753$ m/s

3 Konstrukciós mutató

$$s_i = \frac{m_{\text{struct},i}}{m_{\text{struct},i} + m_{\text{prop},i}}$$

ahol:

- $m_{\text{struct},i}$ – az i -edik fokozat szerkezeti tömege,
- $m_{\text{prop},i}$ – az i -edik fokozat hajtóanyagtömege.

Ebből a következő értékek adódtak:

- Első fokozat: $s_1 = 0.066681$
- Második fokozat: $s_2 = 0.065359$
- Harmadik fokozat: $s_3 = 0.069860$

4 Végsebesség

$$v_{\text{final}} = \sum_i \Delta v_i + v_E \cdot \cos(\varphi)$$

Ahol:

- φ – a szélesség (jelen esetben: $45,95^\circ$),
- v_E – Föld forgási sebessége az egyenlítőnél (kb. 465 m/s).

Ebből:

$$v_{\text{final}} = 6184.158553238991 \text{ m/s}$$

5 Maximális magasság

A következő képpen közelítettem feltételezve azt, hogy elhanyagoljuk a légellenállást és gravitáció változást.

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

ahol:

- h – magasság [m],
- v – a rakéta végsebessége [m/s],
- g – a nehézségi gyorsulás ($g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$).

Innen a magasság:

$$h = 1949.2261473801716 \text{ km}$$

6 Tömegarány és szerkezeti tömeg

A tömegarányt a következő képlettel számoltam ki:

$$z = \exp\left(\frac{\Delta v}{w_e}\right)$$

Ahol:

$$\Delta v = 5860.8506337930385 \text{ m/s}$$

és

$$w_e = 3.191 \text{ km/s}$$

$$z = 6.279292104874458$$

Az induló tömeget pedig a payload és z tömegarány segítségével számoltam ki:

$$m_0 = z \cdot m_{\text{payload}}$$

$$m_0 = 138144.42630723809 \text{ kg}$$

Először kiszámoltam a három fokozatú rakéta szerkezeti tömegének és üzemanyag tömegének arányát, amelyet a következő képlettel számoltam ki:

$$r = \frac{m_{\text{struct},3\text{fok}}}{m_{\text{prop},3\text{fok}}}$$

$$r = 0.0713381841189497$$

Ezután az egyfokozatú rakéta hajtóanyag tömege az alábbi képlettel számolható:

$$m_{\text{prop}} = \frac{m_0 - m_{\text{payload}}}{1 + r}$$

$$m_{\text{prop}} = 108410.6102339228 \text{ kg}$$

A szerkezeti tömeget az induló tömeg, a hasznos teher és a propellánsúly különbségeként számítottam:

$$m_{\text{struct}} = m_0 - m_{\text{payload}} - m_{\text{prop}}$$

$$m_{\text{struct}} = 7733.816073315291 \text{ kg}$$

Az egyfokozatú és háromfokozatú rakéta tömegének aránya:

$$\text{ratio} = \frac{m_{\text{struct}}}{m_{\text{struct},3\text{fok}}}$$

$$\text{ratio} = 0.17148150938614837$$

Ahol:

$$m_{\text{struct}} = 45100 \text{ kg}$$

Az egyfokozatú rakéta a számítások alapján összesen 7733.82 kg szerkezeti tömeggel rendelkezik, míg a háromfokozatú rakéta 45100 kg szerkezeti tömeggel bír. A kettő szerkezeti tömegének aránya 0.1715. Az eredeti háromfokozatúhoz képest ez kevesebb, mint 18%. Ez azt jelenti, hogy jelentősen csökkenteni kell a szerkezeti tömeget, ahhoz hogy azonos magasságra juttassuk fel a payload-ot. Egy ilyen rakéta megépítése elméletben lehetséges, de a gyakorlatban sokkal megbízhatóbb megoldás egy több fokozatú rakéta.