

Rakéták, rakéta hajtóművek

2. házifeladat javítás

Ábrók László Patrik
JPWF8N

2025.06.10.

2. házi feladat

JPWF8N részére

Végezze el az alábbi feladatokat a megadott paraméterekkel rendelkező hordozórakétára, a légellenállást és a gravitáció hatását elhanyagolva, figyelemmel arra, hogy az egyes fokozatokra jellemző értékek kerültek megadásra!

1. Mekkora az egyes lépcsőkkel elérhető Δv gyorsítás?
2. Mekkora az egyes lépcsők s konstrukciós mutatója?
3. Mekkora lesz a végsebesség, ha a komplexum az északi szélesség 45,95. fokáról indul?
4. Az elméletileg elérhető végsebességgel milyen felszín feletti magasságba emelheti a hasznos terhet a rakéta?
5. Mekkora tömegaránnyal, ill. szerkezeti tömeggel kellene rendelkezzen egy azonos hasznos terhet azonos magasságba feljuttatni képes egyfokozatú rakéta, ha a hajtómű kiáramlási sebessége $w_{egyfok} = 3,19$ km/s? Mekkora változást jelent ez az eredeti, többfokozatú kialakításhoz képest? Adjon értékelést az egyfokozatú rakéta adott célra történő megvalósíthatóságáról!

Adatok:

Jellemző	1. fokozat	2. fokozat	3. fokozat	Hasznos teher
Induló tömeg (t)	458,9	168,3	50,1	22
Hajtóanyag tömege (t)	428,3	157,3	46,6	–
Kiáramlási sebesség (km/s)	2,83	3,14	3,19	–

A számítások tetszőleges programban készíthetőek (Excel, MATLAB, stb.), a kérdésekre adandó válaszok azonban egy külön dokumentumban szerepeljenek kigyűjtve. Ez utóbbi készülhet kézzel, de célszerű a számítógépen szerkesztett elektronikus dokumentum.

Leadás: elektronikusan a beneda.karoly@kjk.bme.hu email címre, 2025. V. 23-ig.

1 Bevezetés

A következő dokumentum a 2. házifeladat javítása a során elért eredményeket tartalmazza. Az egyszerű javítás érdekében itt már nem Jupyter notebook-ban, hanem Microsoft Excel táblázatban végeztem el a számításokat.

Az táblázat a dokumentációval együtt megtalálható a következő GitHub repository-ban: rockets-and-rocket-engines repository

2 Δv számítása

A sebességváltozás kiszámításához Ciolkovszkij egyenletét használtam:

$$\Delta v_i = w_{e,i} \cdot \ln \left(\frac{m_{0,i}}{m_{f,i}} \right)$$

- $w_{e,i}$ – az i -edik fokozat kiáramlási sebessége [m/s],
- $m_{0,i}$ – az i -edik fokozat induló tömege [kg],
- $m_{f,i}$ – az i -edik fokozat végső tömege [kg] (felsőbb fokozatok + hasznos teher + saját szerkezet).

Ezáltal a következő értékek adódtak:

- Első fokozat: $\Delta v_1 = 2682.729669$ m/s
- Második fokozat: $\Delta v_2 = 3470.610945$ m/s
- Harmadik fokozat: $\Delta v_3 = 3315.608139$ m/s

3 Konstruktíós mutató

$$s_i = \frac{m_{\text{szerk},i} + m_{\text{üza},i}}{m_{\text{szerk},i}}$$

ahol:

- $m_{\text{szerk},i}$ – az i -edik fokozat szerkezeti tömege,
- $m_{\text{üza},i}$ – az i -edik fokozat üzemanyag.

Ebből a következő értékek adódtak:

- Első fokozat: $s_1 = 14.99673203$
- Második fokozat: $s_2 = 15.3$
- Harmadik fokozat: $s_3 = 14.31428571$

4 Végsebesség

$$v_{\text{final}} = \sum_i \Delta v_i + v_E \cdot \cos(\varphi)$$

Ahol:

- φ – a szélesség (jelen esetben: $45,95^\circ$),
- v_E – Föld forgási sebessége az egyenlítőnél (kb. 465.11 m/s).

Ebből:

$$v_{\text{final}} = 9792.333154 \text{ m/s}$$

5 Felszín feletti magasság

A felszín feletti magasság kiszámításához először a pályára állás sebességparaméterét számoltam ki.

$$k_i = \frac{v_i^2}{v_{ci}^2} = \frac{v_i^2}{\mu/r_i}$$

ahol:

- k_i a sebességparaméter,
- v_i a test pillanatnyi sebessége,
- v_{ci} az adott r_i sugarú körpályához tartozó körsebesség,
- μ a gravitációs paraméter ($\mu = GM$, ahol M a Föld tömege),
- r_i a pályamagasság.

Az pályamagasságot a Föld sugara és a felszín feletti magasság összege adja meg. Feltételezve, hogy 0 méterről indítjuk a rakétát a Föld sugarával számoltam.

A körsebesség a következő képpen adódott:

$$v_{ci} = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} = \sqrt{\frac{3.986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{6.37 \cdot 10^6}} = 7.91 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

A pályára állás sebességparamétere:

$$k_i = \frac{v_{\text{final}}^2}{v_{ci}^2} = \frac{(9792.333154 \text{ m/s})^2}{(7.91 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2} = 1.53$$

Ezt követően kiszámítottam a félnagy tengely távolságát:

$$a = \frac{r_i}{2 - k_i} = \frac{6.37 \cdot 10^6 \text{ m}}{2 - 1.53} = 1.36 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Ezután kiszámoltam az excentricitást:

$$e = \sqrt{k_i \cdot (k_i - 2) \cdot \cos^2 \gamma + 1} = 5.32 \cdot 10^{-2}$$

Az félnagytengetyből meghatározható az apogeum sugara:

$$r_a = a \cdot (1 + e) = 1.36 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot (1 + 5.32 \cdot 10^{-2}) = 2.09 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Az apogeum magasságát pedig a következő képpen kaphatjuk meg:

$$h_a = r_a - r_i = 2.09 \cdot 10^7 \text{ m} - 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} = 1.45 \cdot 10^7 \text{ m} = 14500 \text{ km}$$

6 Egyfokozatú rakéta

A tömegarányt a következő képlettel számoltam ki:

$$z = \exp\left(\frac{\Delta v}{w_e}\right)$$

Ahol:

$$v_{final} = 9792.333154 \text{ m/s}$$

és

$$w_{egyfok} = 3.19 \text{ km/s} = 3190 \text{ m/s}$$

$$z_{egyfok} = 21.5353746$$

Eközben a 3 fokozatú rakéta tömegaránya:

$$z_{3fok} = z_{13fok} \cdot z_{23fok} \cdot z_{33fok} = 2.580442804 \cdot 3.020100503 \cdot 2.82745098 = 22.0348814$$

A tömegarány az egy és háromfokozatú rakéta esetében hasonló értékű.

Az induló tömeget pedig payload és z tömegarány segítségével számoltam ki:

$$m_0 = z \cdot m_{\text{payload}} = 21.5353746 \cdot 22 \text{ t} = 473.7782412 \text{ t}$$

Először kiszámoltam a három fokozatú rakéta szerkezeti tömegének és üzemanyag tömegének arányát a következő módon:

$$r = \frac{m_{\text{szerkezeti},3fok}}{m_{\text{üza},3fok}} = \frac{45.1 \text{ t}}{632.2 \text{ t}} = 0.071338184$$

Ezután az egyfokozatú rakéta hajtóanyag tömegét számítottam ki:

$$m_{\text{üza}} = \frac{m_0 - m_{\text{payload}}}{1 + r} = \frac{473.7782412 - 22}{1 + 0.071338184} = 421.6952667 \text{ t}$$

A szerkezeti tömeget az induló tömeg, a hasznos teher és a üzemanyag különbségeként számítottam:

$$m_{\text{szerkezeti}} = m_0 - m_{\text{payload}} - m_{\text{üza}} = 473.7782412 - 22 - 421.6952667 = 30.08297458 \text{ t}$$

Az egyfokozatú és háromfokozatú rakéta tömegének aránya:

$$\text{ratio} = \frac{m_{\text{szerk},3\text{fok}}}{m_{\text{szerk},\text{egyfok}}} = \frac{30.08297458 \text{ t}}{45.1 \text{ t}} = 0.667028261$$

Az egyfokozatú rakéta a számításaim alapján 30.08297458 tonna , amely a 45.1 tonnás háromfokozatú rakéta szerkezeti tömegének nagyjából 67%-át teszi ki. Ebben az esetben egy fokozatra hárul az egész payload pályára állítása. A szerkezettel ebben az esetben jóval nagyobb terhelésbeli követelmények lépnek fel. Ugyan a több fokozat esetén nagyobb lehet a meghibásodás esélye, mégis a három fokozat esetén van mód a fokozatok optimalizálására. Ugyan az egyfokozatú rendszer megvalósítható, célszerűbb lehet a többfokozatú rakéta használata.