

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Universidad Abierta y a Distancia de México

**Programa de la asignatura:
Matemáticas discretas**

**Unidad 1:
Sistemas numéricos**



Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Índice

Introducción	3
Desarrollo de contenido nuclear	4
Características de los sistemas numéricos.....	4
Sistema decimal.....	4
Sistema binario	5
Sistema octal.....	6
Sistema hexadecimal	7
Conversiones	7
Operaciones aritméticas básicas en el sistema binario	13
Cierre de la Unidad.....	17
Fuentes de consulta.....	17

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

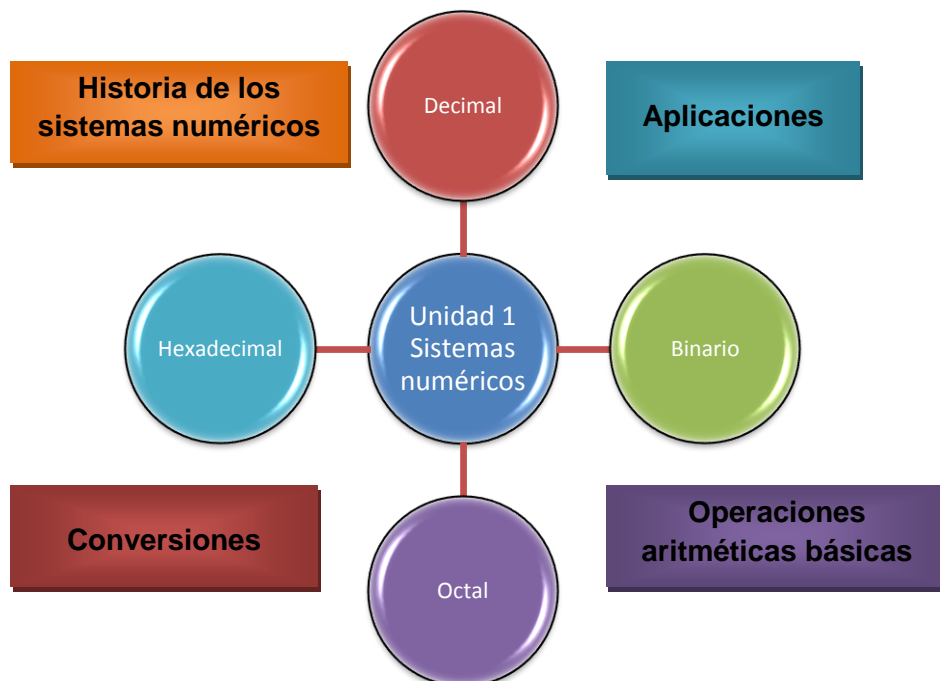
Introducción

En matemáticas, el término “discreto” tiene que ver con el manejo de objetos numerables, con valores distintos separables, así como con la descripción de objetos y problemas reales de modelos abstractos. Las **matemáticas discretas** proporcionan gran parte de los fundamentos de la computación, como la utilización de estructuras que pueden contabilizarse, números naturales, gráficas finitas y procesos de razonamiento, mediante un número finito de pasos. Uno de los aspectos básicos que se presenta en el manejo de la información es cómo representarla, de lo cual depende su manipulación.

Desde hace cientos de años, los sistemas numéricos forman parte del desarrollo de la humanidad, su principal aplicación es la de representar cantidades, es así que se tienen el sistema numérico decimal, maya, romano, etc. Con la aparición de la tecnología informática fue necesario desarrollar nuevas representaciones de las cantidades. Gran parte de los sistemas tecnológicos y digitales manejan el sistema binario para procesar y almacenar información, y sistemas como el octal y el hexadecimal para poder representar grandes volúmenes de información de forma abreviada.

En esta unidad analizaremos las características de varios sistemas numéricos que se utilizan en la actualidad (decimal, binario, octal y hexadecimal), la conversión entre sistemas y las operaciones aritméticas básicas relacionadas.

Esquema gráfico de la unidad



Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Desarrollo del contenido nuclear

Características de los sistemas numéricos

Un sistema numérico se define como un conjunto ordenado de símbolos, o dígitos, y las reglas con las que se combinan sus elementos para representar cantidades numéricas.

A pesar de que existe un número considerable de sistemas numéricos, los más utilizados son el decimal, el binario, el octal y el hexadecimal. Su principal característica en común es que estos sistemas numéricos utilizan una base. La base de un sistema numérico es el número de dígitos diferentes usados en él.

A continuación se ejemplifica esta definición con los sistemas numéricos más comúnmente utilizados.

Base	Sistema	Dígitos
2	Binario	0,1
8	Octal	0,1,2,3,4,5,6,7
10	Decimal	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
16	Hexadecimal	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Comúnmente para distinguir entre los diferentes sistemas numéricos se encierra entre paréntesis el número y se añade un subíndice indicando su base. Sin embargo, si no se usa subíndice se entiende que el número está representado en base diez.

Ejemplo

$$35 = (35)_{10} = 35 \text{ base } 10 \text{ (sistema decimal)}$$

$$(110100)_2 = 110100 \text{ base } 2 \text{ (sistema binario)}$$

$$(34)_{16} = 34 \text{ base } 16 \text{ (sistema hexadecimal)}$$

Sistema decimal

El sistema numérico que usamos cotidianamente, en la escuela, en el trabajo y en nuestra vida diaria se conoce como **sistema numérico decimal**, en éste un número es representado por una cadena de dígitos y cada posición tiene un peso asociado.

El valor del número es la suma ponderada de todos los dígitos, por ejemplo:

$$\begin{aligned}(2345)_{10} &= 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0\end{aligned}$$

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

El peso de cada potencia de 10 corresponde a la posición del dígito. Observa la siguiente tabla:

Posición	Nombre	Valor multiplicador
1 ^a	Unidades	X 1
2 ^a	Decenas	X 10
3 ^a	Centenas	X 100
4 ^a	Unidades de millar	X 1000
5 ^a	Decenas de millar	X 10 000
6 ^a	Centenas de millar	X 100 000

El sistema numérico decimal es expresado con una base 10, lo que significa que las cantidades son representadas utilizando 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Sistema binario

La información que manejan los circuitos que contienen los sistemas de cómputo tiene señales que están en una de dos condiciones: alto o bajo, activado o desactivado, etc. Las señales en estos circuitos representan dígitos binarios llamados bits. Un bit es un dígito binario (abreviación del inglés **binary digit**), es decir, un 0 ó un 1.

Este sistema numérico utiliza la base 2, es decir, sólo utiliza dos dígitos (0 y 1) para representar cantidades; la agrupación de varios bits se conoce como **byte**.

Ejemplo

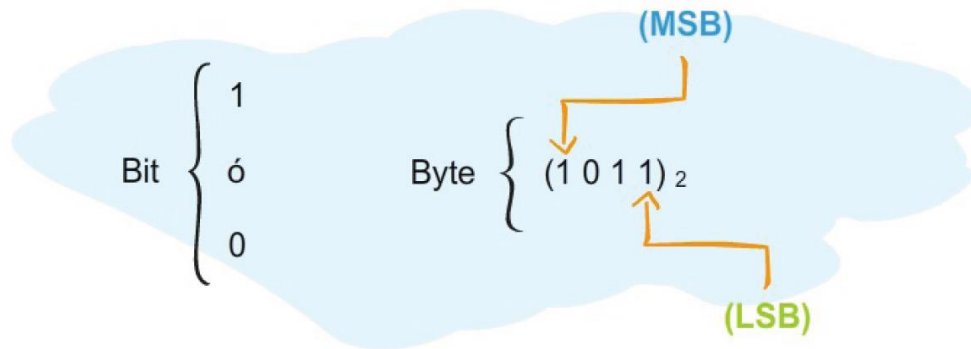
Byte (1101)₂

El bit ubicado más a la izquierda de un número binario se llama bit de orden superior o bit más significativo (MSB, siglas en inglés de *most significant bit*); y el bit más a la derecha es el bit de orden inferior o bit menos significativo (LSB, siglas en inglés de *least significant bit*).

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

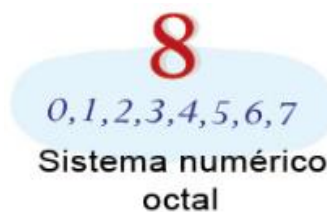


En conclusión, podemos decir que cada uno de los **bits** que forman un **byte** tiene un peso específico de acuerdo a su posición.

Sistema octal

Los sistemas numéricos que utilizan la base 10 son de suma importancia, ya que se usan en la vida cotidiana, y los de base 2 son los que pueden procesarse directamente mediante circuitos electrónicos digitales. Aunque los números en otras bases no se procesan directamente, a menudo se utilizan para representaciones breves que son convenientes para números con múltiples bits en un sistema digital, tal es el caso del **sistema numérico octal**.

Este sistema utiliza como base el 8. El sistema octal necesita 8 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) para poder representar cantidades.



Ejemplo

Múltiples bits	representación breve en octal
$(100011001110)_2$	$= (4316)_8$

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Sistema hexadecimal

Al igual que el sistema numérico octal, el **sistema numérico hexadecimal** es utilizado ampliamente como código para representar números de múltiples bits en códigos abreviados. Este sistema tiene como base el 16, lo que significa que utiliza 16 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) para representar cantidades.



Ejemplo

Múltiples bits		representación breve en hexadecimal
	↓	↓
$(1010001011101000)_2$	=	$(A2E8)_{16}$

Conversiones

Para diferentes aplicaciones tecnológicas de electrónica y computación es importante utilizar equivalencias entre cada uno de los sistemas numéricos aplicando conversiones; sin embargo, la conversión entre dos bases no puede hacerse por simple sustitución, se requiere de operaciones aritméticas.

Conversiones decimal-binario

Una de las conversiones más utilizadas es de decimal a binario y viceversa. Antes de realizar las conversiones es importante mencionar que existen diferentes técnicas para conocer su equivalencia. Una de ellas es una técnica sencilla llamada equivalencia de acuerdo a su posición. Esta técnica implica la suma ponderada de cada una de sus posiciones.

Las siguientes tablas contienen una serie de conversiones para los diferentes sistemas numéricos.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Tablas de conversión de sistemas numéricos

Tabla de conversiones de Sistema numérico decimal a binario.

Binario Posición	8^a MSB	7^a	6^a	5^a	4^a	3^a	2^a	1^a LSB
Equivalencia Decimal	128	64	32	16	8	4	2	1

Tabla de conversiones de Sistema numérico binario a octal.

Binario	000	001	010	011	100	101	110	111
Octal	0	1	2	3	4	5	6	7

Tabla de conversiones de Sistema numérico binario a hexadecimal.

Binario	Hexadecimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

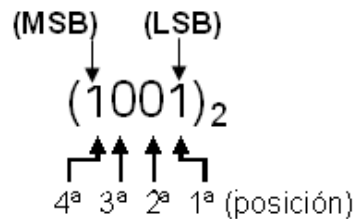
Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Recordemos que en el sistema numérico binario se utilizan 2 dígitos (0 y 1). El 1 es utilizado para dar el valor numérico, y el 0 para llenar la posición de la cual no necesitamos el valor.

Ejemplo 1



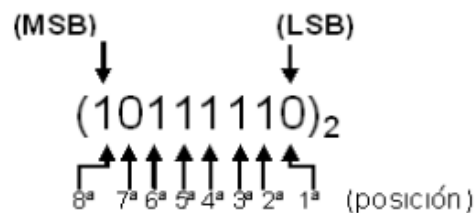
De acuerdo con la tabla de conversión de sistema decimal a binario, el valor equivalente según su posición es:

$$\begin{array}{c} (1001)_2 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 8 \quad + \quad 1 = 9 \text{ (Decimal)} \end{array}$$

De tal forma que:

$$(1001)_2 = (9)_{10}$$

Ejemplo 2



Tomando en cuenta la posición de los dígitos 1 tenemos:

$$\begin{array}{c} (10111110)_2 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 190 \text{ (Decimal)} \end{array}$$

La suma de las posiciones es: $(190)_{10}$

Por lo tanto: $(10111110)_2 = (190)_{10}$

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Para realizar conversiones de sistema numérico decimal a binario se utiliza un método semejante.

Ejemplo

Tenemos el número en decimal $(48)_{10}$ y necesitamos su equivalente binario utilizando la tabla de conversiones de sistema decimal a binario. Comenzamos con la posición 6^a , que equivale al número 32 en decimal, ya que la posición 7^a es 64 en decimal y excede el número $(48)_{10}$ del cual necesitamos conocer su equivalencia. A partir de la posición 6^a comenzaremos nuestra suma de posiciones procurando que esa suma se ajuste al número que necesitamos conocer, recordemos que el dígito 1 en binario es el que le da el valor a la posición y el dígito 0 es solo para llenar espacio.

$$\begin{array}{c} 6^a \text{ (posición)} \\ \downarrow \\ (48)_{10} = (110000)_2 \\ \uparrow \uparrow \\ 32+16 = 48 \end{array}$$

Conversiones binario-octal-hexadecimal

Una parte importante de las conversiones es que podemos tener representaciones breves utilizando diferentes sistemas de numeración, tal es el caso de los sistemas de numeración octal y hexadecimal, esto se debe a que utilizan diferentes dígitos.

Ejemplo de conversión de sistema binario a octal

Recuerda que el sistema de numeración octal utiliza 8 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Supón que tenemos el número binario $(10111001)_2$ y necesitamos su equivalente en sistema numérico octal.

El primer paso es realizar agrupaciones de tres bits partiendo de derecha a izquierda como se muestra a continuación:

$$(10 \ 111 \ 001)_2$$

Utilizando la tabla de conversión de sistema binario a octal, de forma directa convertimos su equivalente como si fueran grupos independientes.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

$$\begin{array}{ccc} (10 & 111 & 001)_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 7 & 1 \quad (\text{octal}) \end{array}$$

En resumen tenemos:

$$(10111001)_2 = (271)_8$$

Ejemplo de conversión de sistema binario a hexadecimal

Recuerda que el sistema numérico hexadecimal utiliza 16 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).

Supón que tenemos el número en binario $(111010111001)_2$ y necesitamos su equivalente en sistema numérico hexadecimal.

El primer paso es hacer agrupaciones de cuatro bits partiendo de derecha a izquierda como se muestra a continuación:

$$(1110 \ 1011 \ 1001)_2$$

Utilizamos la tabla de conversiones correspondiente y de forma directa convertimos su equivalente de binario en hexadecimal como si fueran grupos independientes.

$$\begin{array}{ccc} (1110 & 1011 & 1001)_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ E & B & 9 \quad (\text{hexadecimal}) \end{array}$$

En resumen tenemos: $(111010111001)_2 = (EB9)_{16}$

Conversiones entre distintas bases

Ya hemos realizado operaciones para conocer las equivalencias de decimal a binario y viceversa, de binario a octal y de binario a hexadecimal, pero ¿qué pasaría si quisiéramos realizar una conversión de decimal a hexadecimal o a octal? A continuación realizaremos los procesos para llevar a cabo dichas conversiones.

Ejemplo de conversión de sistema decimal a octal

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Supón que necesitamos conocer la equivalencia de $(105)_{10}$ en sistema numérico octal.

El primer paso tendría que ser la conversión del sistema numérico decimal al sistema numérico binario como se muestra a continuación:

$$(105)_{10} = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)_2$$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$
 $64 + 32 + 8 + 1 = 105 \text{ (decimal)}$

Una vez que tenemos el código en binario lo que resta es convertir el sistema binario en sistema octal usando la tabla correspondiente, como se muestra:

$$(1\ 101\ 001)_2$$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow$
 $1\ 5\ 1 \text{ (octal)}$

$$(1101001)_2 = (151)_8$$

Por lo tanto, en conclusión podemos decir que:

$$(105)_{10} = (151)_8$$

Ejemplo de conversión de sistema decimal a hexadecimal

Supón que necesitamos conocer el número $(170)_{10}$ en sistema numérico hexadecimal.

El primer paso será convertir el número decimal en número binario.

$$(170)_{10} = (10101010)_2$$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$
 $128 + 32 + 8 + 2 = 170 \text{ (Decimal)}$

Una vez que tenemos el número en binario lo convertimos en hexadecimal usando la tabla correspondiente, de tal forma que:

$$(1010\ 1010)_2$$

$\uparrow\ \uparrow$
 $A\ A \text{ (Hexadecimal)}$

$$(10101010)_2 = (AA)_{16}$$

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Por lo tanto, en conclusión podemos decir que:

$$(170)_{10} = (AA)_{16}$$

Operaciones aritméticas básicas en el sistema binario

La aritmética binaria se realiza con frecuencia en los sistemas digitales tales como computadoras y sistemas de comunicación, entre otros, por lo que cobra una mayor importancia utilizar operaciones binarias. La suma, resta, multiplicación y división de números binarios usan la misma técnica aprendida en la escuela para los números decimales. Para comprender los circuitos aritméticos es necesario conocer los principios básicos de estas operaciones.

Suma binaria

La operación de suma se estructura en columnas, es decir, se realiza bit a bit de derecha a izquierda, verificando si existe un acarreo.

- El bit menos significativo del resultado de una columna es la suma de dicha columna.
- El bit más significativo del resultado de una columna pasa como acarreo a la columna siguiente.

Una manera de representar las 4 reglas básicas de la suma binaria es la siguiente:

0 + 0	=	0 0	→	suma 0, acarreo 0
0 + 1	=	0 1	→	suma 1, acarreo 0
1 + 0	=	0 1	→	suma 1, acarreo 0
1 + 1	=	1 0	→	suma 0, acarreo 1

Cuando existe un acarreo igual a 1 es necesario sumar 3 bits el lugar de 2.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

$1 + 0 + 0$	$=$	01	\rightarrow	suma 1, acarreo 0
$1 + 0 + 1$	$=$	10	\rightarrow	suma 0, acarreo 1
$1 + 1 + 0$	$=$	10	\rightarrow	suma 0, acarreo 1
$1 + 1 + 1$	$=$	11	\rightarrow	suma 1, acarreo 1

A continuación se presenta un ejemplo de la suma de dos números binarios:

EJEMPLO $1110 + 1010$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{r} 14 \\ + 10 \\ \hline 24 \end{array} \end{array}$$

Una forma de comprobar la suma es convirtiendo los sumandos y el resultado a decimal y comprobar si coinciden.

Resta binaria

La operación de resta también se organiza en columnas. La resta bit a bit se hace como la conocemos, sólo cuando el minuendo es menor que el sustraendo (0 menos 1), entonces el resultado es la diferencia entre las dos, es decir, 1. En este caso se produce un acarreo negativo y sumamos 1 al sustraendo de la siguiente columna. Sumar un acarreo negativo a 1 en el sustraendo implica la generación de un nuevo acarreo negativo.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

EJEMPLO $1101 - 111$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ - 0111 \\ \hline 0110 \end{array}$$

Diagrama de la resta binaria $1101 - 111$. Se muestra la resta en formato de columna. El minuendo es 1101 y el sustraendo es 0111. El resultado es 0110. Se indica un préstamo de 1 desde la columna de las decenas (la segunda columna desde la izquierda) hacia la columna de las unidades (la primera columna desde la izquierda). El préstamo se realiza a través de una línea roja punteada que conecta el 1 de la columna de las decenas con el 0 de la columna de las unidades, donde se convierte en un 10.

Multiplicación binaria

Las reglas básicas de la multiplicación binaria son:

0	x	0	=	0
0	x	1	=	0
1	x	0	=	0
1	x	1	=	1

La multiplicación binaria se realiza igual que la decimal, generando productos parciales, desplazando cada nuevo producto parcial una posición a la izquierda y luego sumándolos todos.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

EJEMPLO 11010×101

$$\begin{array}{r}
 11010 \\
 \times 101 \\
 \hline
 11010 \\
 00000 \\
 + 11010 \\
 \hline
 1000010
 \end{array}$$

$26 \times 5 = 130$

División binaria

La división binaria sigue el procedimiento tradicional de multiplicación y resta al que estamos acostumbrados.

EJEMPLO $101110 / 101$

$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 101 \overline{) 101110} \\
 \underline{- 101} \\
 000110 \\
 \underline{- 101} \\
 001
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 5 \overline{) 46} \\
 \underline{- 45} \\
 1
 \end{array}$$

Aprende observando

En este vídeo se muestra la representación de los sistemas

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear



de numeración y aritmética binaria. Tomado de Kudzu. (2012). (Archivo de vídeo) recuperado de



Aprende leyendo

A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos:

Los recursos que utilizaremos son:

- http://www.fca.unam.mx/docs/apuntes_matematicas/02.%20Sistemas%20de%20Numeracion.pdf
- <http://robotica.uv.es/pub/Libro/PDFs/CAP14.pdf>
- http://arantxa.ii.uam.es/~ig/teoria/temas/IG_tema-3-2008-2009.pdf
- <http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/numeracion.html>
- <http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/aritmetica.html>

Representación de números negativos en el sistema binario

Utilizando n bits se pueden representar 2^n números binarios distintos. Hasta el momento has trabajado con números binarios naturales positivos que con n bits permiten el rango desde 0 hasta el $2^n - 1$. En el caso concreto de 8 bits, se puede ir desde el 0 hasta el 255, que son el $(00000000)_2$ y el $(11111111)_2$, respectivamente.

En algunas ocasiones es necesario realizar operaciones binarias con números negativos, para ello pueden utilizarse métodos diferentes a los que se han mencionado hasta el momento.

Para representar un número negativo en el sistema binario e identificarlos se toma el bit del extremo izquierdo (bit del signo) para saber si se trata de un número positivo o no positivo (0 si es un número positivo y 1 si es negativo o cero). Esto implica que con 8 bits pueden representarse números en un rango desde el -128 hasta el 127.

El sistema que utilizan las computadoras para trabajar con números enteros es el complemento a 2, pero es conveniente revisar el complemento a 1, para dar una introducción.

Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Complemento a 1

Se obtiene cambiando los 0 por 1 y viceversa

Ejemplo

Número binario: $(01010110)_2 = (86)_{10}$

Complemento a 1: $c(0101001)_2 = (-86)_{10}$

Complemento a 2

Se obtiene tomando el complemento a 1 y sumándole 1 al bit menos significativo

Ejemplo

Para representar con bit de signo en complemento a dos el número -45 , utilizando 8 bits, se sigue el siguiente procedimiento.

1. Escribe el 45 en sistema binario $(101101)_2$
2. Completa con ceros a la izquierda hasta el número de bits con que se quiere expresar el número, en este caso ocho, $(00101101)_2$
3. Realiza el complemento a 1 $(11010010)_2$
4. Suma 1 al bit menos significativo $(11010011)_2$

Para desarrollar los conocimientos en este contenido nuclear, te recomendamos revisar los siguientes contenidos y recursos para la mejor comprensión sobre sistemas numéricos.

Aprende observando



En este vídeo se muestra la representación de los sistemas de numeración y aritmética binaria. Tomado de Ramón Toala. (2011). (Archivo de vídeo) recuperado de



Matemáticas discretas

Unidad 1. Sistemas numéricos

Contenido nuclear

Aprende leyendo

A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos:

Los recursos que utilizaremos son:

- <http://arantxa.ii.uam.es/~ig/practicas/enunciados/prac3/operacionescomplementoa1.pdf>
- <http://www.itescam.edu.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r97063.PDF>

Cierre de la Unidad

En esta unidad aprendiste los conceptos básicos de los sistemas numéricos más utilizados en la actualidad: decimal, binario, octal y hexadecimal. Este conocimiento te será de gran utilidad para un mejor entendimiento de los sistemas informáticos.

Fuentes de consulta

Hortala González, M. T. (2008). Matemática discreta y lógica matemática. España: Complutense.

Matousek, J. y Nešetřil, J. (2008). Invitación a la matemática discreta. España: Reverte.

Morris Mano, M. (2007). Fundamentos de diseño lógico y de computadoras. España: Pearson.