

**Matemáticas discretas**

**Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones**

**Contenido nuclear**



**Universidad Abierta y a Distancia de México**

**Programa de la asignatura:  
Matemáticas discretas**

**Unidad 2:  
Teoría de Gráficas y Relaciones**



# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Contenido

Introducción .....	3
Un poco de historia.....	4
Aplicaciones en la actualidad.....	5
Esquema de contenidos nucleares .....	7
Desarrollo de contenido nuclear .....	8
Gráficas .....	9
Aprende observando .....	10
Aprende leyendo .....	11
Caminos .....	11
Aprende observando .....	13
Aprende leyendo .....	14
Árboles .....	15
Aprende observando .....	17
Aprende leyendo .....	17
Relaciones.....	18
Aprende observando .....	19
Aprende leyendo .....	19
Cierre de la Unidad.....	20
Fuentes de consulta .....	20

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

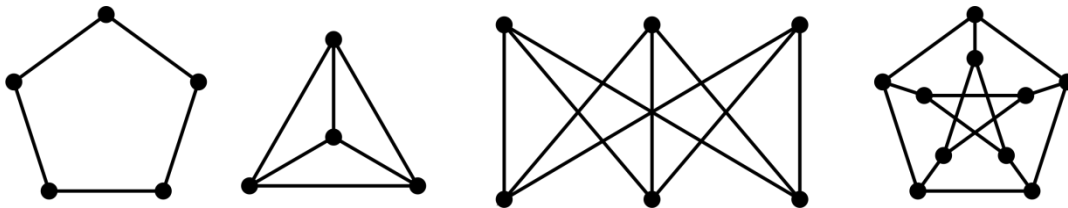
#### Introducción

La Teoría de gráficas es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos matemáticos llamados gráficas, los cuales están formados por un conjunto finito de elementos llamados vértices (o nodos) y una relación de adyacencia entre ellos.

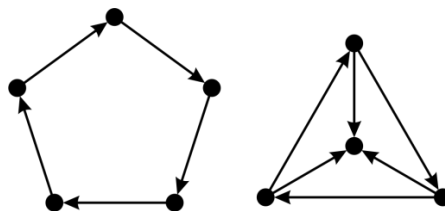
Típicamente, las gráficas se representan mediante una colección de puntos (los vértices) conectados por líneas llamadas aristas (o arcos) de acuerdo con la relación de adyacencia. Así, dos vértices están conectados por una arista si y sólo si son adyacentes.

En ocasiones es útil asignar una orientación a las aristas para obtener una gráfica dirigida; cuando las aristas están orientadas son llamadas flechas, y las gráficas dirigidas se denominan digráficas.

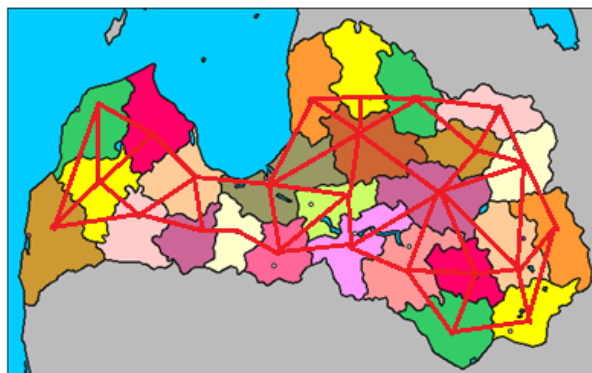
#### Ejemplos de gráficas



#### Ejemplos de digráficas



#### Ejemplo del uso de las gráficas para describir la estructura de un territorio



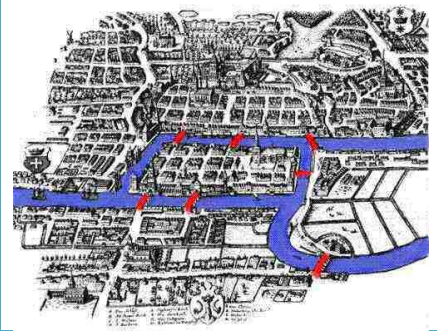
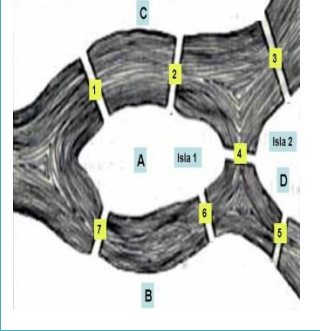
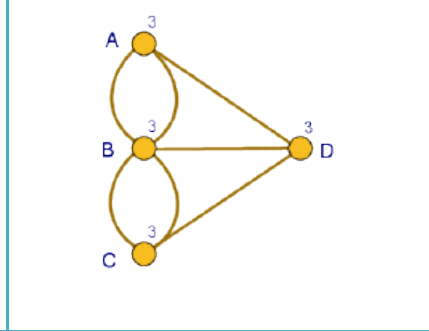

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Un poco de historia

El trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado como uno de los primeros resultados de la Teoría de gráficas. También se considera uno de los primeros resultados topológicos (donde, a diferencia de la geometría, se estudian las propiedades que no dependen de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la Teoría de gráficas y la Topología.

		
	<p><b>El problema de los puentes de Königsberg.</b> A esta ciudad la cruza el río Pregel creando dos islas. ¿Se puede recorrer toda la ciudad pasando una sola vez por todos y cada uno de los 7 puentes que unen la parte insular de la ciudad con el resto?</p>	<p><b>La solución de Euler.</b> El famoso matemático abstrajo los detalles de la forma de la ciudad y sus puentes para quedarse con la conectividad, dando lugar a una de las primeras gráficas. El grado de todos los vértices es impar, lo que implica que es imposible recorrerlos todos pasando una sola vez por cada uno.</p>

En 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores:

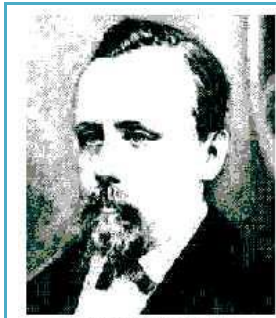
Determinar si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color.

Este problema permaneció abierto mucho tiempo, hasta que en los años setenta fue resuelto por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de las gráficas.

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear



Francis Guthrie.  
Imagen Univ. Sant Andrew

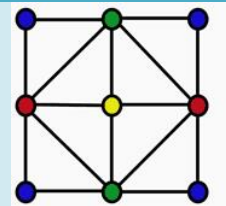
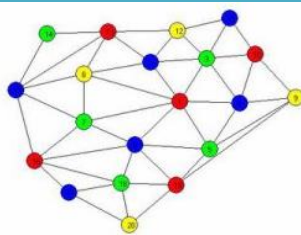
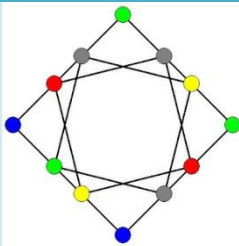
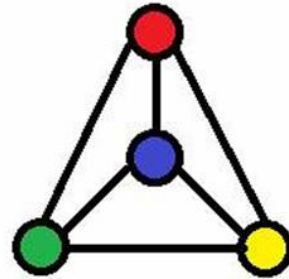
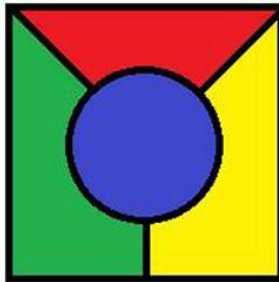
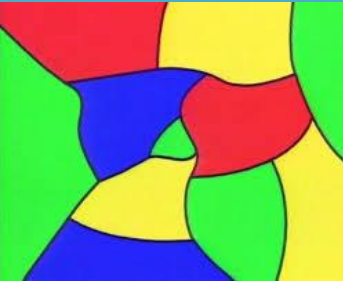
Francis Guthrie



Kenneth Appel



Wolfgang Haken



### Aplicaciones en la actualidad

Entre las aplicaciones de la Teoría de gráficas que se han vuelto importantes en la actualidad podemos encontrar el estudio de las redes sociales, cuya importancia radica en el adecuado almacenamiento de datos, puesto que el costo del tiempo de búsqueda de la información de cada miembro que pertenece a esta red puede tornarse demasiado alto debido al número de usuarios. Por ejemplo, el número de usuarios que hay actualmente en una importante red social tan sólo en México es de 49 millones -cifra reportada por el periódico El economista en 2014-, si este número lo multiplicamos por 194 que es el número aproximado de países que hay en el mundo, se percibe la posibilidad de un grave problema de almacenamiento para los servidores que hay destinados para ello y para la búsqueda de información. Este mismo fenómeno pasa en otras redes de fotografías, mensajes, etc.



Por otra parte, en el área de la Biología molecular, la Teoría de graficas es utilizada para generar modelos de proteínas y mapas genómicos.

Ciencias Exactas, Ingeniería y Tecnología | Matemáticas

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

En el área didáctica y lúdica la Teoría de gráficas permite modelar y resolver juegos, tal es el caso de las Torres de Hanoi, el Come-solo, el Dominó, el juego Nim, entre otros. También se han modelado laberintos y en los últimos años se ha creado una relación estrecha entre la Teoría de gráficas y la papiroflexia.



### Esquema de contenidos nucleares



# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

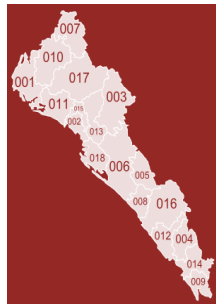
#### Desarrollo de contenido nuclear

En esta unidad estudiaremos los principios básicos de la Teoría de gráficas para familiarizarnos con los conceptos que nos servirán para modelar estructuras y fenómenos mediante los objetos matemáticos llamados gráficas y sus propiedades, nos vamos a enfocar en:

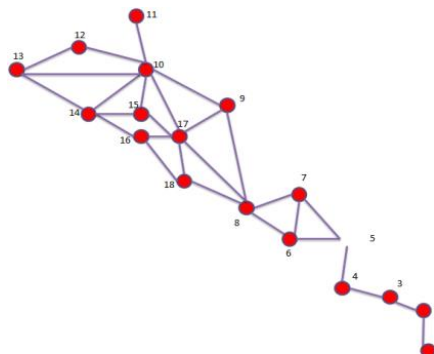
- ❖ Construir gráficas que esquematicen situaciones reales
- ❖ Demostrar teoremas, corolarios, lemas, propiedades, etc. propios de la Teoría de gráficas
- ❖ Resolver problemas numéricamente

Para lo anterior, utilizaremos los conceptos de gráficas, digráficas, árboles y relaciones.

Como ejemplo, consideremos un modelo del mapa del estado de Sinaloa. Se etiquetan los municipios y se le asigna un vértice a cada uno, se coloca una arista entre dos vértices si el municipio correspondiente al primero tiene frontera común con el municipio correspondiente al segundo.



#### Gráfica resultante





# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

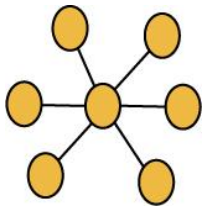
### Contenido nuclear

#### Gráficas

Muchas situaciones de la vida real pueden ser esquematizadas por medio de diagramas contruidos por puntos (vértices o nodos) y líneas (aristas o arcos) que conectan algunos pares de vértices, aunque eventualmente alguna línea puede unir un vértice consigo mismo.

Estos esquemas, que facilitan la comprensión del problema a resolver, aparecen frecuentemente en disciplinas dispares y bajo nombres diversos, tales como: redes (en ingeniería y economía), sociogramas (en psicología), organigramas (en economía y planificación), etc.

A la teoría que se ocupa del estudio de estos diagramas o esquemas se le conoce como Teoría de gráficas.

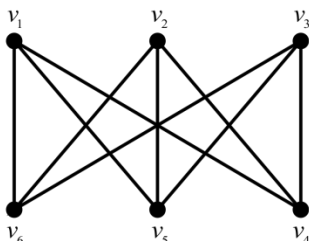


La Teoría de gráficas desempeña un papel importante en varios campos de la ciencia, entre ellos las ciencias de la computación, donde se tiene aplicación en la teoría de la computación y diseño lógico, la inteligencia artificial, los lenguajes formales, los gráficos por computadora, los sistemas operativos, la escritura de compiladores y la encriptación, así como en la recuperación de información.

Como ya se mencionó anteriormente, las gráficas están formadas por vértices que están unidos entre sí mediante aristas. Por lo tanto, una definición matemática de gráfica debe basarse en el conjunto de vértices y en el conjunto de aristas. Toda arista está asociada con dos vértices, esto es, existe una correspondencia entre las aristas y los pares de vértices. A continuación se da la definición formal de gráfica.

Una gráfica  $G$  está formada por un conjunto finito no vacío  $V$  cuyos elementos son llamados vértices, junto con un conjunto  $A \subset V \times V$  de parejas no ordenadas de vértices distintos cuyos elementos son llamados aristas. A la cardinalidad de  $V$  se le llama el orden de la gráfica, y a la cardinalidad de  $A$  se le llama el tamaño de la gráfica. Ejemplo:

$G$ :



El conjunto de vértices de  $G$  es

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

El conjunto de aristas de  $G$  es

$$A(G) = \{\overline{v_1 v_4}, \overline{v_1 v_5}, \overline{v_1 v_6}, \overline{v_2 v_4}, \overline{v_2 v_5}, \overline{v_2 v_6}, \overline{v_3 v_4}, \overline{v_3 v_5}, \overline{v_3 v_6}\}$$

El orden de  $G$  es  $|V(G)| = 6$

El tamaño de  $G$  es  $|A(G)| = 9$

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

Observa que el conjunto  $A$  de las aristas de una gráfica establece una relación sobre los elementos de  $V$ . A esta relación se le llama adyacencia, y más adelante veremos que tiene la propiedad de ser simétrica y no reflexiva. Dados dos vértices de una gráfica se dice que éstos son adyacentes si la arista que los une también pertenece a la gráfica, de lo contrario se dice que los vértices están separados. Formalmente, la relación se define:

Dada una gráfica  $G$ , para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  se dice que  $u$  y  $v$  son adyacentes si  $\overline{uv} \in A(G)$ .

Por ejemplo: en la gráfica anterior, los vértices  $v_1$  y  $v_6$  son adyacentes, mientras que los vértices  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes; ya que  $\overline{v_1 v_6} \in A(G)$  pero  $\overline{v_1 v_2} \notin A(G)$ .

Dado un vértice  $v \in V(G)$  se le llama el grado (o valencia) de  $v$  al número de aristas que inciden en él, y se denota como  $d(v)$ .

Por ejemplo: en la gráfica anterior, el grado del vértice  $v_1$  es 3, es decir,  $d(v_1) = 3$ .

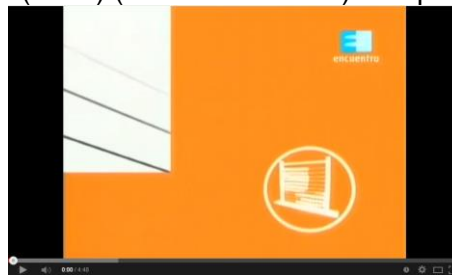
### Aprende observando

En estos videos se muestran los conceptos básicos de la teoría de gráficas

Jordan, Lluch, Cristina (2011) (Archivo de vídeo) recuperado de



Paenza, Adrián (2011) (Archivo de vídeo) recuperado de



# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Aprende leyendo



A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos:

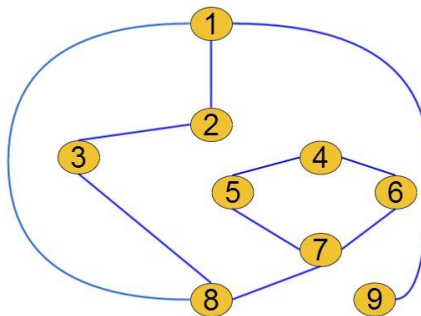
<http://www.unsa.edu.ar/~hibbard/discreta/grafos.pdf>

<http://www2.uca.es/matemáticas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion14.pdf>

<http://www.usergioarboleda.edu.co/matemáticas/memorias/memorias14/28.Teor%C3%ADa%20de%20Grafos.pdf>

#### Caminos

Si se piensa a los vértices de una gráfica como ciudades y a las aristas como carreteras, un camino corresponde a un viaje que comienza en cierta ciudad, pasa por varias ciudades y termina en alguna ciudad.



En esta gráfica, un ejemplo de camino sería la sucesión de vértices 8,7,5,4,6,7,8,3,2. Donde se inicia en el vértice 8 y se termina en el vértice 2, observa que para ir de un vértice al siguiente la arista que los une debe pertenecer a la gráfica.

Formalmente, un camino  $W$  de una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices

$$W: u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = v, x_i \in V(G)$$

en la cual los vértices consecutivos son adyacentes, es decir, donde  $\overline{x_i x_{i+1}} \in A(G)$  para toda  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Al vértice  $u$  se le llama vértice inicial y al vértice  $v$  se le llama vértice final, por lo que en ocasiones a  $W$  se le llama un  $uv$ -camino, a los vértices  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  se les llama vértices interiores; observa que los vértices  $x_i$  no necesariamente son diferentes. Se dice que  $W$  es un camino cerrado (o circuito) si  $u = v$ , en otro caso se dice que  $W$  es un camino abierto.

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

El número de aristas que aparecen en la sucesión de un camino se denomina longitud del camino, en este caso la longitud de  $W$  es  $n$  puesto que se recorren  $n$  aristas para llegar hasta  $v$  desde  $u$ .

Los caminos se pueden clasificar según sus características de la siguiente forma:

- ❖ Un camino  $W$  que no repite aristas se denomina paseo (camino sencillo)
- ❖ Un camino  $W$  que no repite vértices se llama trayectoria (camino elemental)
- ❖ Un camino cerrado  $W$  en el que todos los vértices son diferentes excepto el vértice inicial se llama un ciclo

EJEMPLOS DE CAMINOS		
Paseo	Trayectoria	Ciclo
$W_1: v_5, v_{10}, v_7, v_2, v_1, v_5, v_4, v_3$	$W_2: v_4, v_3, v_8, v_6, v_1$	$W_3: v_3, v_2, v_1, v_6, v_9, v_4, v_3$

Cuando entre dos vértices  $u, v \in V(G)$  existe un  $uv$ -camino se dice que  $u$  está conectado con  $v$  y se denota como  $u \sim v$ . Más adelante veremos que la relación “estar conectado con” es una relación de equivalencia.

Un concepto importante en la Teoría de gráficas es el de conexidad. Una gráfica  $G$  es conexa si para cada par de vértices  $u, v \in V(G)$  existe un  $uv$ -camino en  $G$  que los conecta.

**Teorema.** Sea  $G$  una gráfica y sean  $u, v \in V(G)$ , entonces existe un  $uv$ -camino en  $G$  si y sólo si existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$ .

**Corolario.** Una gráfica  $G$  es conexa si y sólo si para cualquier par de vértices  $u, v \in V(G)$  existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$ .



# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

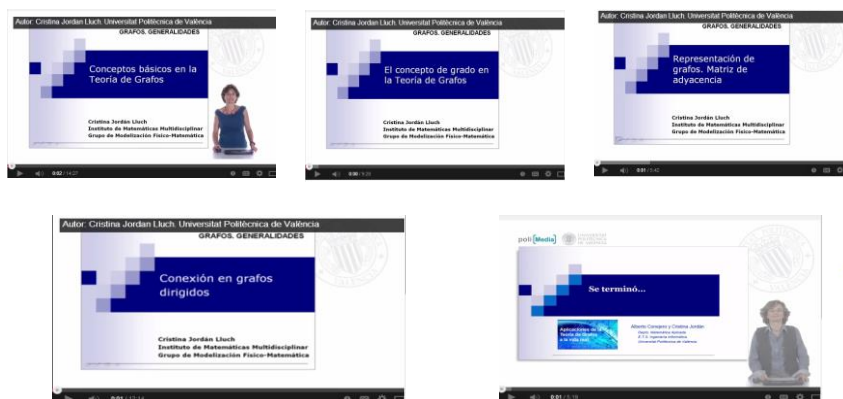
### Contenido nuclear

CONEXIDAD	
Gráfica conexa	Gráfica no conexa
$\forall v_i, v_j \in V(G) \exists v_i v_j - \text{camino}$	$\nexists u_1 u_5 - \text{camino}$

### Aprende observando

En estos videos se muestran los conceptos básicos de la Teoría de gráficas

Jordan, Lluch, Cristina (2011) (Archivo de vídeo) recuperado de



En estos videos se construye una gráfica con el programa Algraf  
Tabara Carbajo, José Luis (2011) (Archivos de vídeos)  
recuperado de

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear



#### Aprende leyendo



A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos:

<http://www.unsa.edu.ar/~hibbard/discreta/grafos.pdf>

<http://www2.uca.es/matemáticas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion14.pdf>

<http://www.usergioarboleda.edu.co/matemáticas/memorias/memorias14/28.Teor%C3%ADa%20de%20Grafos.pdf>

[http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/jozef/LTCC/Graph\\_Theory\\_Bondy\\_Murty.pdf](http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/jozef/LTCC/Graph_Theory_Bondy_Murty.pdf)

<http://www.esi2.us.es/~mbilbao/pdf/DiestelGT.pdf>

<http://www.hamilton.ie/oilie/Downloads/Graph.pdf>

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

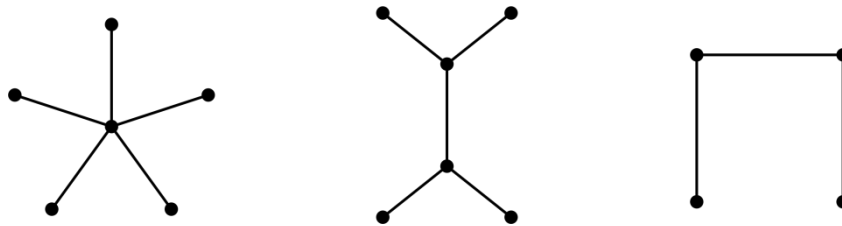
### Contenido nuclear

#### Árboles

Existe un tipo importante de gráficas que gracias a su simplicidad tienen muchas aplicaciones –en la práctica y dentro de la Teoría de gráficas misma-, las cuales reciben el nombre de árboles.

Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ciclos.

#### Ejemplos de árboles



En un árbol, a los vértices de grado 1 se les llama hojas.

A continuación se comentan algunas propiedades importantes de los árboles.

**Teorema.** Todo árbol de orden  $n$  tiene tamaño  $n - 1$ .

**Teorema.** En un árbol, cualesquiera dos vértices están conectados por una única trayectoria.

**Teorema.** Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Observa que los árboles mostrados arriba cumplen con las tres propiedades mencionadas.

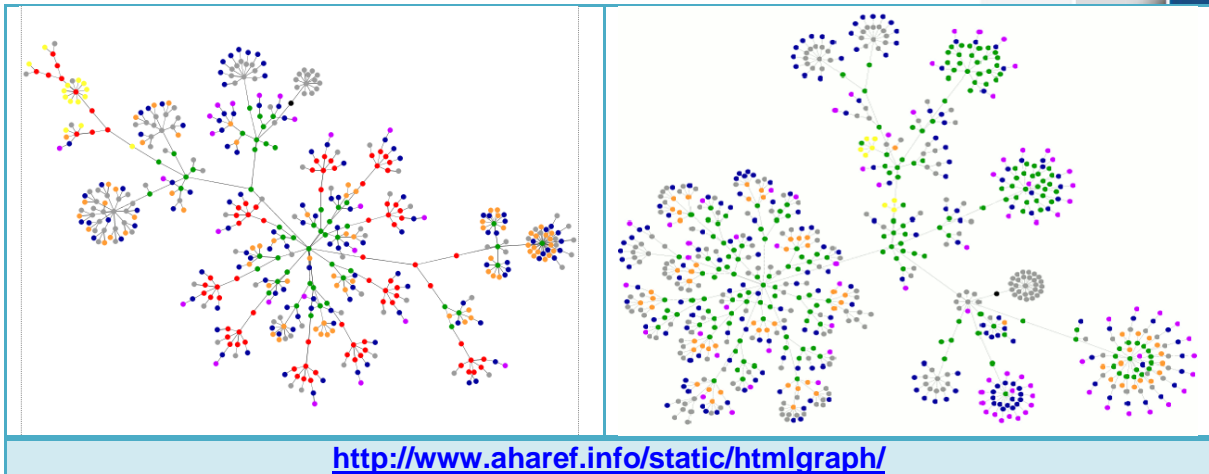
Dados dos vértices  $u$  y  $v$  de un árbol  $T$ , a la trayectoria única que los conecta se le suele denotar como  $uTv$ .

Los árboles se utilizan en muchos campos de aplicación. Por ejemplo, en las Ciencias de la computación se usan para desglosar problemas complejos y representarlos mediante una estructura ramificada.

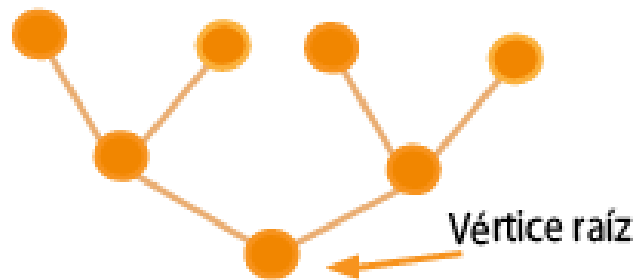
# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

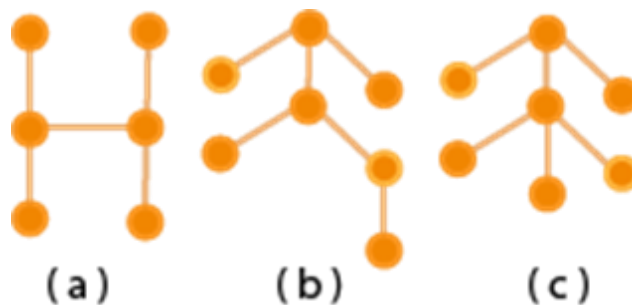


En algunos casos resulta conveniente considerar a uno de los vértices del árbol como especial, a tal vértice se le llama la raíz del árbol. Un árbol con una raíz fija se denomina árbol con raíz.



Ejemplo de árbol con raíz.

A los árboles sin raíz también se les suele llamar árboles libres.



Ejemplos de árboles libres.



# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Aprende observando

En estos videos se muestran los conceptos básicos de árboles en la teoría de gráficas

Jordan Lluch, Cristina (2011) (Archivo de vídeo) recuperado de



#### Aprende leyendo

A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos:



<http://www.iust.ac.ir/files/cefsse/pg.cef/Contents/smgmm.ch1.pdf>

[http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso\\_grafos\\_handout150909.pdf](http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso_grafos_handout150909.pdf)

[http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/jozef/LTCC/Graph\\_Theory\\_Bondy\\_Murty.pdf](http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/jozef/LTCC/Graph_Theory_Bondy_Murty.pdf)

<http://www.esi2.us.es/~mbilbao/pdf/DiestelGT.pdf>

<http://www.aharef.info/static/htmlgraph/>

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Relaciones

Estaremos interesados en estudiar el concepto de relación entre los elementos de un conjunto y sus propiedades; para ello debemos conocer lo que es una relación reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica, así como también su representación matricial y su gráfica. Además, aprenderemos el uso en conceptos como las cerraduras transitivas y sus aplicaciones en algoritmos como el algoritmo de Warshall y los diagramas de Hasse.

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se denomina una relación de  $A$  a  $B$  a cualquier subconjunto  $R$  de  $A \times B$ . Al conjunto  $\{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ para alguna } b \in B\}$  se le llama el dominio de  $R$ , y al conjunto  $\{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ para alguna } a \in A\}$  se le llama el rango de  $R$ .

Dada una relación  $R \subseteq A \times B$ , para dos elementos  $a \in A$  y  $b \in B$ , se dice que  $a$  está relacionado con  $b$  si  $(a, b) \in R$ , y se denota como  $aRb$ .

Cuando  $A = B$ , es decir, cuando  $R \subseteq A \times A$ , se dice que  $R$  es una relación binaria sobre  $A$ .

De acuerdo con sus propiedades, las relaciones binarias se clasifican de la siguiente manera.

Propiedad	Descripción
<b>Reflexiva</b>	$(a, a) \in R$ para todo $a \in A$
<b>Simétrica</b>	Si $(a_1, a_2) \in R$ entonces $(a_2, a_1) \in R$ para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$
<b>Transitiva</b>	Si $(a_1, a_2), (a_2, a_3) \in R$ entonces $(a_1, a_3) \in R$ para cualesquiera $a_1, a_2, a_3 \in A$
<b>Antisimétrica</b>	Si $(a_1, a_2), (a_2, a_1) \in R$ entonces $a_1 = a_2$ para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$

Cuando una relación es al mismo tiempo reflexiva, simétrica y transitiva se dice que es una relación de equivalencia.

Cuando una relación es simultáneamente reflexiva, antisimétrica y transitiva se le llama un orden parcial.

#### Ejemplos de relaciones

- La relación de adyacencia entre los vértices de una gráfica  $G$  definida por las aristas en  $A(G)$  es una relación simétrica y no reflexiva.
- La relación “estar conectado con” sobre el conjunto de vértices de una gráfica  $G$  es una relación de equivalencia.
- En un árbol  $T$  con raíz  $r$ , la relación  $R$  definida como  $(u, v) \in R$  si  $u \in rTv$  es un orden parcial.

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Aprende observando

En estos videos se muestran los conceptos básicos de relaciones binarias

Jordan Lluch, Cristina (2013) (Archivo de vídeo) recuperado de



#### Aprende leyendo

A continuación te recomendamos leer los siguientes documentos que brindan un panorama general sobre las matemáticas discretas.

Grimaldi, R. (1998). Matemática discreta y combinatoria. México: Addison Wesley.

Jonhsonbaugh, R. (1999). Matemáticas discretas. México: Prentice Hall

<http://www.bibliocomunidad.com/libros/Matem%C3%83%C2%A1ticas%20Discretas%20-%206edi%20Johnsonbaugh.pdf>

# Matemáticas discretas

## Unidad 2. Teoría de gráficas y Relaciones

### Contenido nuclear

#### Cierre de la Unidad

En esta unidad aprendiste los conceptos básicos de Teoría de gráficas y relaciones. Resolviste problemas y creaste representaciones de las gráficas. Ahora te invitamos a que revises los contenidos de la unidad 3 y realices las actividades para terminar el curso de matemáticas discretas.

#### Fuentes de consulta

**Chartrand G. & Zhang, P.** (2005). *Introduction to graph theory*. E.U.A.: Mc Graw Hill.

**Grimaldi, R.** (1998). *Matemática discreta y combinatoria*. México: Addison Wesley.

**Harary, F.** (1987). *Graph theory*. E.U.A.: Addison Wesley.

**Jonhsonbaugh, R.** (1999). *Matemáticas discretas*. México: Prentice Hall.

**Bondy, J.** (1988). *Graph theory with applications*. Inglaterra: Mc. Millán.

**Chartrand, G.** (1997). *Graphs as Mathematical Models*. USA: Wester Michigan University.

**Chartrand, G. & Zhang, P.** (2009). *Chromatic graph theory*. E.U.A: Chapman and Hall.

**Harris, J & Hirst, J. & Mossinghoff, M.** (2008). *Combinatorics and graph theory*. USA: Springer Verlag.

**Diestel, R.** (1991). *Directions in infinite graph theory and combinatorics*. Holanda: Link Amsterdam

**Wilson, R.** (2000). *Graphs and applications: an introductory approach*. Inglaterra: Open University.

**Bonomo F.** (2009) *Introducción a la Teoría de Grafos*. Argentina, recuperado de la siguiente dirección web [http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso\\_grafos\\_handout150909.pdf](http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso_grafos_handout150909.pdf)