



DESARROLLO DE SOFTWARE SEMESTRE 2

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:
CÁLCULO DIFERENCIAL

UNIDAD 3.
DERIVACIÓN

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO DEL 2017

UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE
MÉXICO



UNIDAD 3. DERIVACIÓN

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD	3
COMPETENCIA ESPECÍFICA.....	3
PROPÓSITOS.....	3
3.1. LA DERIVADA	4
3.1.1. CONCEPTO DE DERIVADA	4
3.1.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA	11
3.2. FUNCIONES TRASCENDENTES	25
3.2.1. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS	25
3.2.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	35
3.2.3. FUNCIONES HIPERBÓLICAS.....	45
3.3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.....	50
3.4. DERIVACIÓN IMPLÍCITA.....	55
3.5. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA	58
CIERRE DE LA UNIDAD.....	68
PARA SABER MÁS	69
FUENTES DE CONSULTA.....	69

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

Sabemos que la derivada de una función representa una razón de cambio, lo cual hace una de las herramientas importantes para los estudios de diversas áreas de conocimiento. Durante la unidad se revisaran, esos tipos de cambios, además de representar las propiedades de la derivada.

El cálculo en si representa una mayor importancia cuando tratamos de una función real, dado que indica la variación de la función en un instante determinado de la variable. Así decimos que la derivada de una función para un valor de una variable, es la variación instantánea de dicha función y para el valor de la variable.

En esta unidad se presenta el concepto de derivada de una función como un límite en particular, posteriormente se presentan las propiedades de la derivada y sus interpretaciones gráficas de dichas propiedades.

COMPETENCIA ESPECÍFICA

Aplicar el concepto de la derivada para analizar el comportamiento de las funciones y sus aplicaciones, utilizando las propiedades de las derivadas.

PROPOSITOS

- Identificar el concepto de derivada a través de límites de funciones.
- Relacionar la derivada con la continuidad de funciones.
- Aplicar las regla de la cadena para resolver operaciones de funciones lo que permite calcular más derivadas.
- Utilizar las propiedades de la derivada para determinar la derivada de funciones.

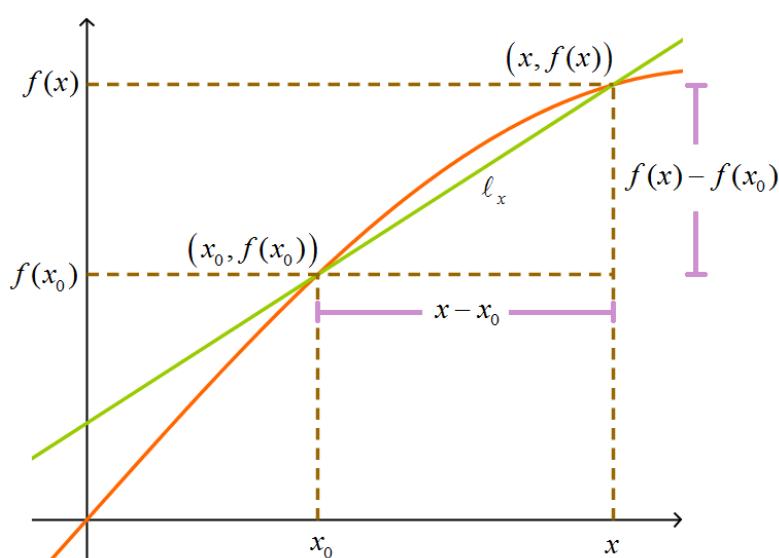
UNIDAD 3. DERIVACIÓN

3.1. LA DERIVADA

La derivada de una función es uno de los conceptos fundamentales dentro en el estudio del cálculo. La derivada tiene su origen en el estudio de la velocidad instantánea de una partícula, también se puede considerar que su origen está en el en el problema geométrico de hallar la recta tangente a una curva cualquiera.

3.1.1. CONCEPTO DE DERIVADA

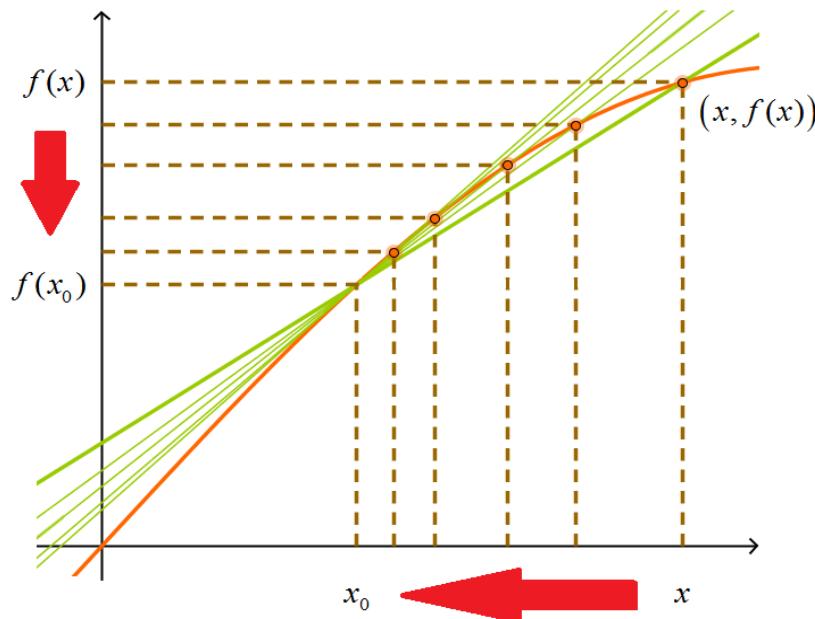
Para motivar la definición de la derivada de una función en un punto dado, considera que se tiene una función $f(x)$ definida en un intervalo I que contenga a x_0 , dado $x \in I$ con $x \neq x_0$ y x suficientemente cercano a x_0 . Considerando la recta ℓ_x que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$, es fácil ver que ℓ_x tiene pendiente $m_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, además ℓ_x intersecta a la gráfica de $f(x)$ en al menos dos puntos, por tal motivo toma el nombre **recta secante a** $f(x)$, como lo muestra la siguiente figura:



Recta secante

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ahora se tiene que observar que pasa con la recta ℓ_x a medida que x se acerca a x_0 como lo muestra la siguiente figura:



Recta secante

Se observa que punto $(x, f(x))$ se aproxima al punto $(x_0, f(x_0))$, además la discrepancia que existe entre la recta ℓ_x y la función $f(x)$ es cada vez menor, **esas rectas secantes tienden a una recta que toma el nombre de tangente**, la cual se define como una recta que toca en un solo punto a la curva que forma la gráfica de la función, en la siguiente sección se explicará con más detalle el significado de recta tangente.

El comportamiento anterior es la motivación para la definición de la derivada de una función en un determinado punto de la recta real.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Definición 3.1.1. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I que contenga a x_0 , se dice que $f(x)$ **tiene derivada en** x_0 o que $f(x)$ **es derivable en** x_0 sí y sólo si el siguiente límite conocido como el **cociente de Newton** existe:

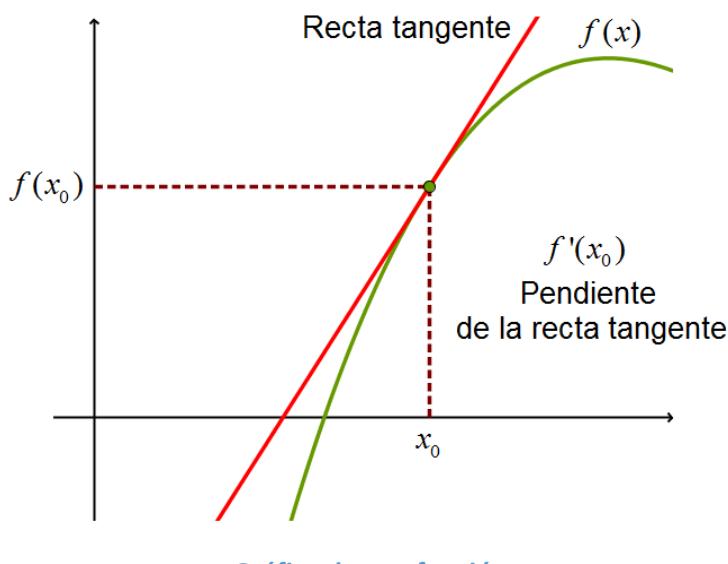
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En caso de cumplirse lo anterior se utiliza la siguiente notación $f'(x_0)$ o $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ o $D_{x_0} f$

. Además se dice que $f(x)$ **es derivable en un conjunto** S si y sólo sí $f'(x)$ existe para todo $x \in S$.

Hay que resaltar que los límites presentados en definición son iguales ya que haciendo $h = x - x_0$ se tiene que $h \rightarrow 0$ sí y sólo sí $x \rightarrow x_0$. Por otro lado, que $f(x)$ exista significa que x está lo suficientemente cerca a x_0 que cumpla que $x \in I$.

De manera gráfica, la derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, como lo muestra la siguiente figura:



UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ejemplo: Dada una función constante $f(x) = c$, se tiene que $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. En efecto tomando la definición de derivada se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = 2x + 4$ y $x_0 = 3$ si se desea calcular $f'(3)$ sólo hay que aplicar la definición:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(3+h)+4) - (2(3)+4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6+2h+4) - (10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(3) = 2$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$ y $x_0 = -1$, si se desea calcular $f'(-1)$ basta aplicar la definición:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 2x) - ((-1)^2 - 2(-1))}{x - (-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = (-1) - 3 = -4 \end{aligned}$$

Por consiguiente $f'(-1) = -4$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para calcular $f'(x_0)$ se aplica la definición del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{x-x_0}}{xx_0 \cancel{(x-x_0)}} \\ &= -\frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Por lo tanto $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Ejemplo: Considerando la función $f(x) = \sqrt{x}$, para calcular $f'(x_0)$ para cualquier $x_0 > 0$ se tiene que aplicar la definición:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \times \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h}) - \sqrt{x_0}}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Cabe mencionar que no todas las funciones son derivables, como se muestra a continuación.

Ejemplo: Sea $f(x) = |x|$ y $x_0 = 0$, se tiene que $f'(0)$ no existe ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

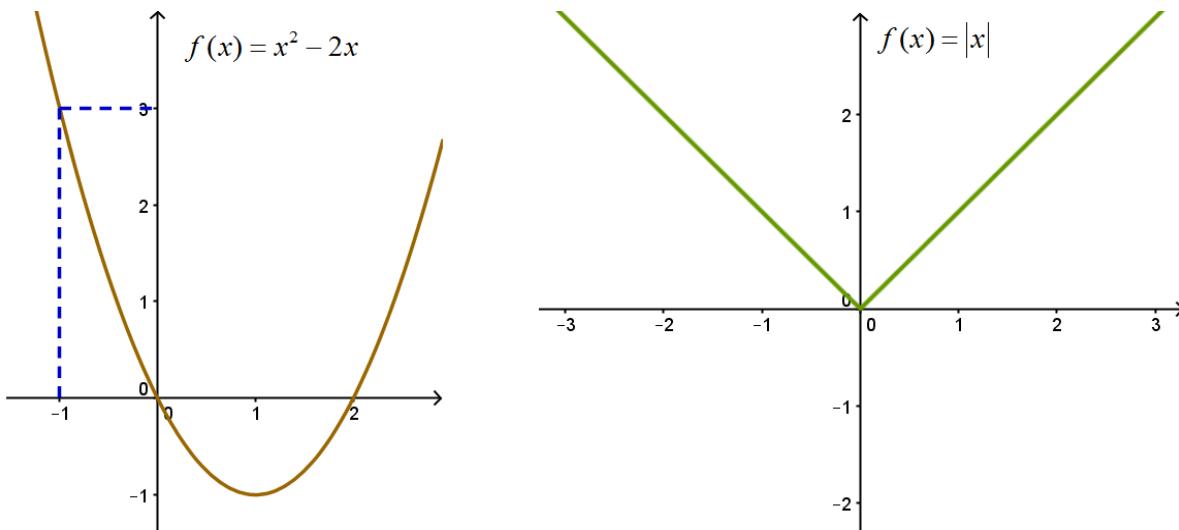
Calculando los límites unilaterales se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Lo que implica que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe, por lo tanto $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Las gráficas para las funciones de los dos últimos ejemplos son:



Gráfica de una función

Como se puede observar en la gráfica de la función que tiene derivada, curva que forma la función se construye de manera “uniforme”, sin embargo la gráfica donde la derivada no existe presenta un pico, esto quiere decir, que la función tiene un comportamiento “drástico”. Por tal motivo, algunos autores suelen utilizar la palabra **suave** como sinónimo de derivable y en general si una función continua no es derivable en un punto su gráfica presenta un “pico” en ese punto.

Como se observó en la unidad anterior, también existen los límites unilaterales y son muy útiles para calcular el límite de una función, estos son aplicados al concepto de la derivada.

Definición 3.1.2. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I que contenga a x_0 , se dice que $f(x)$ **tiene derivada por la izquierda de x_0** o que $f(x)$ **es derivable por la izquierda de x_0** sí y solo sí el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

De manera similar, dice que $f(x)$ tiene derivada por la derecha de x_0 o que $f(x)$ es derivable por la derecha de x_0 si y solo si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Como consecuencia inmediata se tiene que:

Teorema 3.1.3. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I que contenga a x_0 , entonces $f(x)$ es derivable en x_0 sí y sólo sí la derivada por la derecha y por la izquierda de $f(x)$ en x_0 existen y son iguales.

Demostración: Esto es una consecuencia inmediata de la relación que hay entre la existencia de los límites unilaterales y la existencia del límite.

La derivada por la derecha y la izquierda son muy útiles en el cálculo de la derivada de una función definida a secciones, como se muestra a continuación:

Ejercicio: Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, mostrar que $f(x)$ es derivable en $x_0 = 1$.

$$x_0 = 1 .$$

Solución: Aplicando la definición de derivada por la izquierda se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = -2 \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la definición de derivada por la derecha se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-2x+1) - (-2(1)+1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2(3) = -2 \end{aligned}$$

Como ambas derivadas son iguales se concluye que $f'(1) = -2$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

3.1.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Esta sección se comienza presentando la relación que existe entre la derivada y la continuidad.

Teorema 3.1.4. Si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces $f(x)$ es continua en x_0 .

Demostración: Para mostrar lo anterior basta presentar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \times \frac{x - x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (0) = 0\end{aligned}$$

Por consiguiente $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, por lo tanto $f(x)$ es continua en x_0 .

Cabe mencionar que el inverso de este teorema no es válido, es decir, la continuidad no implica la existencia de la derivada, por ejemplo, en la sección anterior se muestra que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ sin embargo $f'(0)$ no existe. Además, como consecuencia inmediata se tiene lo siguiente:

Corolario 3.1.5. Si $f(x)$ es discontinua en x_0 entonces $f'(x_0)$ no existe.

Ahora toca el turno de presentar el comportamiento de la derivada con respecto a las operaciones algebraicas de funciones.

Teorema 3.1.3. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un intervalo I que contenga a x_0 , si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x_0 entonces:

(i). Suma: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii). Resta: $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(iii). Producto: $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

(iv). Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ cuando $g(x_0) \neq 0$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Demostración: hay que observar que como $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x_0 implican que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Para (i) y (ii) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \pm g(x_0) - f(x_0) \mp g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \pm (g(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

Para (iii), se utiliza el hecho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ porque $f(x)$ es derivable en x_0 por consiguiente $f(x)$ es continua en x_0 , luego se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \right] \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Para (iv) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-f(x)[g(x) - g(x_0)] + g(x)[f(x) - f(x_0)]}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)} \\
 &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}
 \end{aligned}$$

Lo que demuestra el resultado.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior son los siguientes resultados:

Corolario 3.1.4. Para todo $c \in \mathbb{R}$ y toda función $f(x)$, si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces

$$\frac{d}{dx}(cf(x))\Big|_{x=x_0} = c \frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0}.$$

Demostración: Se utiliza la fórmula de la derivada de una constante y de un producto del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(cf(x))\Big|_{x=x_0} &= c \frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0} + f(x_0) \frac{d}{dx}(c)\Big|_{x=x_0} \\
 &= c \frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0} + f(x_0) \frac{d}{dx}(0)\Big|_{x=x_0} \\
 &= c \frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0}
 \end{aligned}$$

Que es lo que se deseaba mostrar.

Corolario 3.1.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\frac{d}{dx}(x^n)\Big|_{x=x_0} = nx_0^{n-1}$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Demostración: Se procede por inducción sobre n , para $n=1$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(x^n)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}(x)\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 = nx^{n-1}$$

Supóngase que para $n=k$ se tiene $\frac{d}{dx}(x^k)\Big|_{x=x_0} = kx_0^{k-1}$. Tomando $n=k+1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{k+1})\Big|_{x=x_0} &= \frac{d}{dx}(x^k \cdot x)\Big|_{x=x_0} = x_0^k \frac{d}{dx}(x)\Big|_{x=x_0} + x_0 \cdot \frac{d}{dx}(x^k)\Big|_{x=x_0} \\ &= x_0^k (1) + x_0 (kx_0^{k-1}) = (k+1)x_0^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}(x^n)\Big|_{x=x_0} = nx_0^{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Corolarios 3.1.6. Dado un conjunto finito de función $f_1(x), \dots, f_n(x)$ diferenciables en x_0 entonces $(f_1 + \dots + f_n)'(x) = f_1'(x_0) + \dots + f_n'(x_0)$.

Demostración: Se obtiene por inducción sobre n , el número de funciones.

Ejercicio: Dada la función $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2$, calcular $f'(x)$.

Solución: Basta aplicar el Teorema 3.1.3 del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^3 + 4x^2 - 2) \\ &= \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(-2) \\ &= 5 \frac{d}{dx}(x^3) + 4 \frac{d}{dx}(x^2) + (0) \\ &= 5(3x^2) + 4(2x) \\ &= 15x^2 + 8x \end{aligned}$$

Observación: Para agilizar el cálculo de la **derivada de un monomio** tienes que observar que **la potencia multiplica al coeficiente y esta disminuye en uno**, es símbolos lo anterior se expresa así:

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ejemplos: Observa cómo se aplica lo explicado en el párrafo anterior:

- $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$.
- $\frac{d}{dx}(-5x^7) = -35x^6$
- $\frac{d}{dx}(-6x^8) = -48x^7$.
- $\frac{d}{dx}(3x^5) = 15x^4$

Ejercicio: Demostrar que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Solución: Aplicando el Teorema 3.1.3 y el Corolario 3.1.5 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) &= \frac{x^n \frac{d}{dx}(1) - (1)\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} = \frac{x^n(0) - (1)(nx^{n-1})}{x^{2n}} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

Cabe mencionar que este último ejercicio muestra que la fórmula $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

también es válida cuando las potencias son negativas.

Ejemplos: Observa cómo se aplica el comentario anterior:

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-2}) = -6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$.
- $\frac{d}{dx}\left(-\frac{5}{x^7}\right) = \frac{d}{dx}(-5x^{-7}) = 35x^{-8} = \frac{35}{x^8}$
- $\frac{d}{dx}\left(-\frac{6}{x^8}\right) = \frac{d}{dx}(-6x^{-8}) = 48x^{-9} = \frac{48}{x^9}$.
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-5}) = -15x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$

Ejercicio: Calcular $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - 3x}{3x + 4}\right)$.

Solución: Primero hay que observar que se tiene un cociente de funciones, por consiguiente hay que ocupar la parte (iv) del Teorema 3.1.3,

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

utilizando la notación del dicho teorema se tiene que $f(x)=4x^2-3x$ y $g(x)=3x+4$, luego $f'(x)=8x-3$ y $g'(x)=3$, en consecuencia se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{(3x+4)(8x-3)-(4x^2-3x)(3)}{[3x+4]^2} \\ &= \frac{(-12+23x+24x^2)-(12x^2-9x)}{[3x+4]^2} \\ &= \frac{12x^2+32x-12}{[3x+4]^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-3x}{3x+4}\right)=\frac{12x^2+32x-12}{[3x+4]^2}$.

Ejercicio: Calcular $\frac{d}{dx}\left([5x^2+1][-3x^3+2x]\right)$.

Solución: Primero hay que observar que se tiene un cociente de cociente de funciones, por consiguiente hay que ocupar la parte (iii) del Teorema 3.1.3, utilizando la notación del dicho teorema se tiene que $f(x)=5x^2+1$ y $g(x)=-3x^3+2x$, esto implica que $f'(x)=10x$ y $g'(x)=-9x^2+2$, en consecuencia se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f(x)g'(x)+f'(x)g(x) \\ &= (5x^2+1)(-9x^2+2)+(10x)(-3x^3+2x) \\ &= (2+x^2-45x^4)+(20x^2-30x^4) \\ &= 2+21x^2-75x^4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}\left([5x^2+1][-3x^3+2x]\right)=2+21x^2-75x^4$.

Ahora toca el turno de presentar la derivación de una composición de funciones, esta relación se conoce como la **regla de la cadena**, ya que la derivada convierte una cadena de composición de funciones en una cadena producto de derivadas.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Teorema 3.1.7. Supóngase que $f(x)$ es derivable en x_0 y que $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$ entonces $(g \circ f)(x)$ es derivable en x_0 y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Demostración: Se comienza definiendo la siguiente función:

$$\Phi(h) = \begin{cases} \frac{g(f(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} & \text{si } f(x_0 + h) - f(x_0) \neq 0 \\ g'(f(x_0)) & \text{si } f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \end{cases}$$

De forma intuitiva, se tiene que $\Phi(h)$ es continua en $h_0 = 0$ ya que si $f(x_0 + h) - f(x_0) \neq 0$ y h cercano a x_0 se tiene que el valor $\frac{g(f(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$ está cercano a $g'(f(x_0))$ además si $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ y h cercano a x_0 se tiene que $\Phi(h) = g'(f(x_0))$. Por consiguiente $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = g'(f(x_0))$.

Por otro lado, hay que observar que si $f(x_0 + h) - f(x_0) \neq 0$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h} &= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} \\ &= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \\ &= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \Phi(h) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Se manera similar, cuando $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ se obtiene que

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(h) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Lo que implica que

$$\frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = \Phi(h) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\Phi(h) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) \right] \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= g'(f(x_0)) f'(x_0)\end{aligned}$$

Por lo tanto $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

Cabe mencionar que la expresión $g'(f(x_0))$ significa que hay que calcular $g'(x_0)$ y luego se realiza la sustitución $x_0 \mapsto f(x_0)$. Ahora se presentan algunos ejemplos del uso del teorema anterior.

Ejemplo: Si se desea calcular $\frac{d}{dx}((2x-5)^3)$ primero hay que presentar a la función $(2x-5)^3$ como la composición de dos funciones. En este caso, utilizando la notación del Teorema 3.1.7, las funciones $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = x^3$ se componen y se obtiene que

$$(2x-5)^3 = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Además $f'(x) = 2$ y $g'(x) = 3x^2$; aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dx}(2x-5)^3 = g'(f(x)) f'(x) = 3x^2 \Big|_{x=2x-5}(2) = 3x(2x-5)^2(2) = 6x(2x-5)^2.$$

Ejemplo: Para calcular $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+x})$, hay que observar que la función $\sqrt{x^2+x}$ es la composición de las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, del siguiente modo

$$\sqrt{x^2+x} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Además $f'(x) = 2x + 1$ y $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+x}) &= g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=x^2+x} (2x+1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

A continuación se presentan algunos resultados de funciones derivables sobre intervalos abiertos, esta parte comienza con el siguiente concepto:

Definición 3.1.8. Sea $f(x)$ una función real definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, un elemento $\alpha \in A$ se dice que es un **máximo de $f(x)$ en A** si y sólo si $f(x) \leq f(\alpha)$ para todo $x \in A$. El valor $f(\alpha)$ recibe el nombre de **valor máximo de $f(x)$ en A** . De manera similar, un elemento $\beta \in A$ se dice que es un **mínimo de $f(x)$ en A** si y sólo si $f(\beta) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. El valor $f(\beta)$ recibe el nombre de **valor mínimo de $f(x)$ en A** . El primer resultado muestra cómo se caracterizan los máximos y mínimos de funciones derivables sobre un intervalo, estos se estudiarán con más detalle en la siguiente unidad.

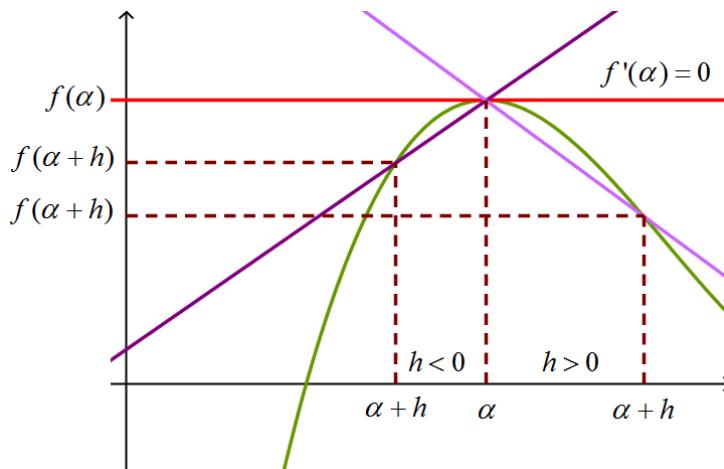
Teorema 3.1.9. Sea $f(x)$ una función definida sobre (a,b) . Si $\alpha \in (a,b)$ es un máximo o mínimo de $f(x)$ en (a,b) entonces $f'(\alpha) = 0$.

Demostración: Solo se presenta el caso cuando α es un máximo de $f(x)$ en (a,b) . Para un valor pequeño h se tiene que $f(\alpha+h) - f(\alpha) \leq 0$, cuando $h < 0$ se tiene que $\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \geq 0$, lo que implica que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \geq 0$, de manera similar cuando $h > 0$ se tiene que $\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \leq 0$, así $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \leq 0$. Como $f(x)$ es derivable en α entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

De manera gráfica lo anterior se presenta de la siguiente forma:



Gráfica del límite de una función

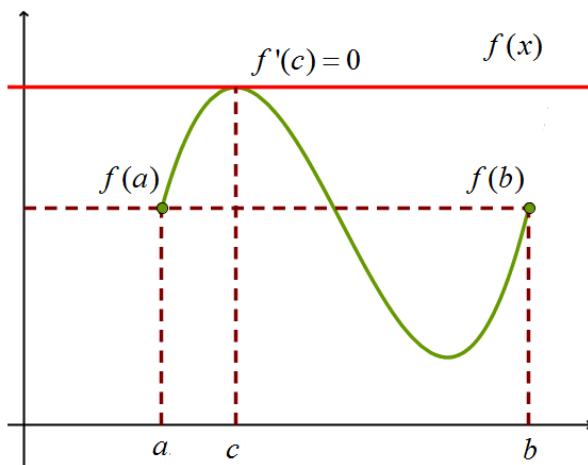
Por lo tanto $f'(\alpha)=0$.

El siguiente resultado es una aplicación del Teorema 3.1.9 el cual se conoce como **Teorema de Rolle.**

Teorema 3.1.10. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f(a)=f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración: Como $f(x)$ es continua en $[a,b]$ toma un máximo en $\alpha \in [a,b]$ y un mínimo en $\beta \in [a,b]$, cuando $\alpha \in (a,b)$ o $\beta \in (a,b)$ se tiene $f'(\alpha)=0$ o $f'(\beta)=0$ en otro caso si el máximo o el mínimo de $f(x)$ esta en los extremos de $[a,b]$ se tiene $f(x)$ es constantes y cualquier valor de $x \in (a,b)$ cumple con $f'(x)=0$. El teorema de Rolle se ejemplifica del siguiente modo:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN



Gráfica Teorema de Rolle

Una aplicación directa del teorema de Rolle permite demostrar el siguiente resultado que se conoce como **Teorema del valor medio**.

Teorema 3.1.11. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Demostración: Hay que definir la función

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Claramente se tiene que la función $h(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , además satisface lo siguiente:

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a) \quad y \quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(b)$$

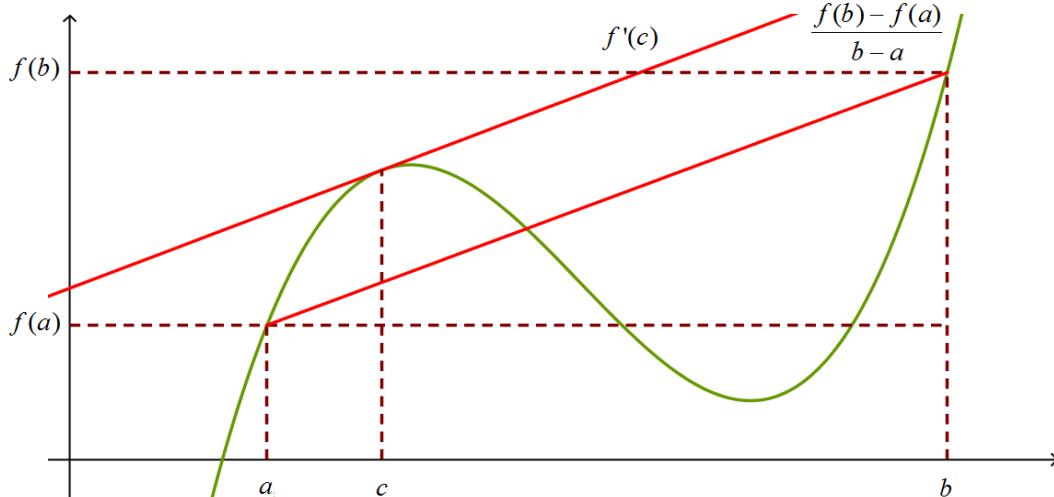
Por el Teorema 3.1.10 existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, además es fácil ver que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

En consecuencia $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$. Por lo tanto $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

El teorema del valor medio tiene la siguiente interpretación gráfica:



Teorema del valor medio

En la sección anterior se mostró que una función constante tiene derivada idénticamente igual a cero, ahora se muestra el resultado inverso como una consecuencia inmediata del teorema del valor medio.

Corolario 3.1.12. Si $f'(x)=0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f(x)$ es constante en (a,b) .

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) por el teorema del valor medio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = (0)(x_2 - x_1) = 0$$

Por consiguiente $f(x_1) = f(x_2)$, por lo tanto $f(x)$ es constante.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Otra aplicación del teorema del valor medio es la siguiente, que presenta la relación que existe entre dos funciones que tienen la misma derivada.

Corolario 3.1.13. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones definidas en (a,b) tales que $f'(x)=g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)-g(x)=c$ para todos $x \in (a,b)$.

Demostración: Se tiene que la función $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ para todo $x \in (a,b)$, por consiguiente $f(x)-g(x)$ es constante en (a,b) .

Para finalizar esta sección se presenta la regla de L'Hôpital, la cual permite calcular límites que involucran formas indeterminadas.

Teorema 3.1.14. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un intervalo que contenga a x_0 . Supóngase que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ y que $g'(x_0) \neq 0$ existe entonces

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Demostración: Dado que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ se puede suponer que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 tomando $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Hay que observar que para $x \neq x_0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\ &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Ejercicio: Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$.

Solución: Con notación del Teorema 3.1.14 se tiene que $f(x) = x^2 - 4$ y

$g(x) = x^2 + x - 6$ son dos funciones derivables en 2, luego hay que observar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = (2)^2 - 4 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = (2)^2 + (2) - 6 = 0$$

Finalmente $g'(x) = 2x + 1$ en particular $g'(2) = 2(2) + 1 = 5$, lo que muestra que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.1.14, por consiguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{2(2)}{2(2) + 1} = \frac{4}{5}.$$

Ejercicio: Calcular $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 8x + 15}$.

Solución: Con notación del **Teorema 3.1.14** se tiene que $f(x) = x^2 - x - 12$ y

$g(x) = x^2 + 8x + 15$, son dos funciones derivables en -3 , luego hay que observar que

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x - 12) = (-3)^2 - (-3) - 12 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 8x + 15) = (-3)^2 + 8(-3) + 15 = 0$$

Finalmente $g'(x) = 2x + 8$ en particular $g'(-3) = 2(-3) + 8 = 2$, lo que muestra que se

cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.1.14, por consiguiente:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x - 1}{2x + 8} = \frac{2(-3) - 1}{2(-3) + 8} = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}.$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

3.2. FUNCIONES TRASCENDENTES

Hasta este momento, solo se han utilizado funciones de naturaleza algebraicas, es decir, aquellas funciones que se obtienen de las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división, junto con las potencias y las raíces. Ahora toca el turno de presentar funciones que no provienen de este origen, por tal motivo toman el nombre de **funciones trascendentes**.

3.2.1. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

La primera función trascendente que se presenta es la función exponencial. En la Unidad 1 se estudió las potencias enteras y fraccionarias de un número real positivo, en la Unidad 2 se presenta la función potencia que deja fijo el exponente y la base es variable, ahora toca el turno de invertir esos papeles, es decir, la base es la fija y las potencias varían.

Se comienza de una función $f(x)$ definida en todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple con $f(0)=1$ que tiene la condición $f'(x)=f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto implica que $f(x)$ tiene que ser continua para todo $x \in \mathbb{R}$. Además tomando la función $h(x)=f(x)f(-x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[h(x)] &= \frac{d}{dx}[f(x)f(-x)] = f(x)f'(-x)(-1) + f'(x)f(-x) \\ &= -f(x)f(-x) + f(x)f(-x) = 0 \end{aligned}$$

El Corolario 3.1.13 afirma que $h(x)=f(x)f(-x)=c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Más aún la condición $f(0)=1$ implica que $c=1$, en consecuencia $f(x)>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$f(-x)=\frac{1}{f(x)}$. De lo anterior se tiene el siguiente resultado:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Teorema 3.2.1. Una $f(x)$ definida en todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple con las condiciones $f(0)=1$ y $f'(x)=f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es única.

Demostración: Supóngase que existe una función $g(x)$ que satisface $g(0)=1$ y $g'(x)=g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, tomando la función $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[h(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(g(x))^2} = 0 \end{aligned}$$

El Corolario 3.1.13 afirma que $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, equivalentemente $f(x)=cg(x)$, la condición $g(0)=1$ afirma que $1=f(0)=cg(0)=c$, así $f(x)=g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La siguiente propiedad muestra como la función antes definida relaciona a la suma y al producto de números reales.

Lema 3.2.2. Para cuales quiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x+y)=f(x)f(y)$.

Demostración: Sea $x, y \in \mathbb{R}$, fijando y se define la función $g(x)=f(x+y)$, a partir de estos se obtiene lo siguiente:

$$g'(x) = f'(x+y) = f(x+y) = g(x)$$

Lo que implica que $g(x)=kf(x)$ para alguna constante $k \in \mathbb{R}$. Tomando $x=0$ se tiene que

$$f(y) = f(0+y) = g(0) = kf(0) = k$$

Por lo tanto $f(x+y)=f(x)f(y)$.

Como consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene lo siguiente:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Corolario 3.2.3. Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que $f(nx) = (f(x))^n$.

Demostración: Se aplica inducción matemática, para $n=1$ se tiene

$$f(nx) = f(x) = (f(x))^1 = (f(x))^n$$

Supóngase que para $n=k$ se cumple $f(kx) = (f(x))^k$, tomando

$$f([k+1]x) = f(kx+x) = f(kx)f(x) = (f(x))^k f(x) = (f(x))^{k+1}$$

Por lo tanto $f(nx) = (f(x))^n$ todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora la existencia de una función $f(x)$ definida en todo $x \in \mathbb{R}$ que tiene cumple con las condiciones $f(0)=1$ y $f'(x)=f(x)$ se escapa del objetivo de este curso, en un curso de análisis matemático se muestra que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$ existe y tal valor es denotado por e , es decir, se tiene que:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n \approx 2.7182818284590\dots$$

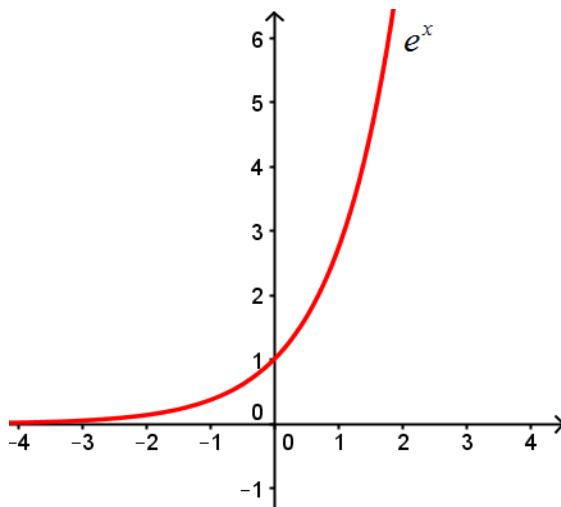
Además se demuestra que la relación que existe entre la función $f(x)$ y la constante e se presenta por $f(1)=e$.

Definición 3.2.4. La función exponencial es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna el número e^x , el cual satisface $e^0=1$ y $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$.

Hay que tener en cuenta que el Lema 3.1.2 afirma que $e^{x+y} = e^x e^y$, el Corolario 3.1.3 dice que $e^{nx} = (e^x)^n$ y finalmente también se cumple la relación $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Finalmente, la gráfica de la función e^x es la siguiente:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN



Grafica función e^x

Ejemplo: Aplicando la definición de derivada calcular $\frac{d}{dx}(e^x)$.

Solución: Basta aplicar la definición de derivada a la función e^x del siguiente modo:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Todo se limita a calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$, para ello hay que observar lo siguiente:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n} \right]^n = \lim_{h \rightarrow 0} [1 + h]^{\frac{1}{h}}$$

Para h cercano de 0 se tiene que $e \approx [1 + h]^{\frac{1}{h}}$, es decir, se tiene que $\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$, así,

intuitivamente se tiene que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Por lo tanto $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(e^{3x+2})$.

Solución: Para calcular $\frac{d}{dx}(e^{3x+2})$ hay que observar que la función e^{3x+2} es la composición de la función $f(x) = 3x + 2$ y la función $g(x) = e^x$, es decir, se tiene que $e^{3x+2} = (g \circ f)(x)$, por la regla de la cadena se tiene lo siguiente:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\frac{d}{dx}(e^{3x+2}) = \frac{d}{dx}(e^x) \Big|_{x=3x+2} \frac{d}{dx}(3x+2) = e^x \Big|_{x=3x+2} (3) = 3e^{3x+2}.$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(e^{4x^2-5x^3})$.

Solución: Para calcular $\frac{d}{dx}(e^{4x^2-5x^3})$ hay que observar que la función $e^{4x^2-5x^3}$ es la composición de la función $f(x)=4x^2-5x^3$ y la función $g(x)=e^x$, es decir, se tiene que $e^{4x^2-5x^3} = (g \circ f)(x)$, por la regla de la cadena se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{4x^2-5x^3}) &= \frac{d}{dx}(e^x) \Big|_{x=4x^2-5x^3} \frac{d}{dx}(4x^2-5x^3) = e^x \Big|_{x=3x+2} (8x-15x^2) \\ &= (8x-15x^2)e^{4x^2-5x^3}\end{aligned}$$

Los ejercicios anteriores muestran que para derivar una exponencial basta multiplicar la exponencial por la derivada del exponente.

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(x^2e^{3x})$.

Solución: Hay que observar que la función x^2e^{3x} es el producto de la función $f(x)=x^2$ y la función $g(x)=e^{3x}$, en consecuencia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2e^{3x}) &= x^2 \frac{d}{dx}(e^{3x}) + e^{3x} \frac{d}{dx}(x^2) = x^2(3e^{3x}) + e^{3x}(2x) \\ &= (3x^2 + 2x)e^{3x}\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + e^{3x}})$.

Solución: Hay que observar que la función $\sqrt{x^2 + e^{3x}}$ es la composición de la función $f(x)=x^2 + e^{3x}$ y la función $g(x)=\sqrt{x}$, la regla de la cadena trae como consecuencia:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + e^{3x}}) &= \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \Big|_{x=x^2+e^{3x}} \frac{d}{dx}(x^2 + e^{3x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=x^2+e^{3x}} (2x + 3e^{3x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + e^{3x}}} (2x + 3e^{3x}) = \frac{2x + 3e^{3x}}{2\sqrt{x^2 + e^{3x}}}\end{aligned}$$

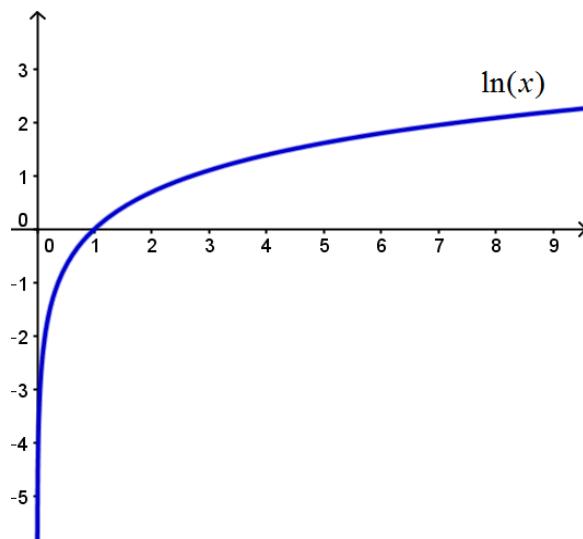
UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ahora toca el turno de presentar la función logaritmo natural, esta se obtiene a partir de la función exponencial del siguiente modo: Dado $x \in \mathbb{R}$ el logaritmo natural de x es el número real $\ln(x)$ que satisface la siguiente relación:

$$\ln(x) = y \text{ si y sólo si } e^y = x$$

Esta relación implica que el dominio de la función $\ln(x)$ es el intervalo $(0, \infty)$ ya que $e^y > 0$ para toda $y \in \mathbb{R}$. Además implica que $\ln(x)$ es continua en $(0, \infty)$ ya que e^x es continua en \mathbb{R} .

La función $\ln(x)$ tiene la siguiente representación gráfica:



Gráfica función $\ln(x)$

De la definición anterior se tienen las siguientes propiedades:

Lema 3.2.5. Para cuales quiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ se tiene lo siguiente:

- (i). $\ln(1) = 0$.
- (ii). $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- (iii). $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
- (iv). $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Demostración: Para (i) se obtiene de observar que $e^0 = 1$ lo que implica que $\ln(1) = 0$, para (ii) sean $u = \ln(x)$ y $v = \ln(y)$ lo que implica que $e^u = x$ y $e^v = y$, luego, la relación $e^{u+v} = e^u e^v$ implica que $e^{u+v} = x \cdot y$, es decir, se cumple que $\ln(x \cdot y) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$. La parte (iii) se obtiene de observar que cuando $u = \ln(x)$ implica que $e^u = x$ así $e^{nu} = (e^u)^n = (x)^n = x^n$, por lo tanto $\ln(x^n) = nu = n \ln(x)$. Finalmente, para (iv) basta observar que si $u = \ln(x)$ implica que $e^u = x$ así la relación $e^{-u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}$ implica que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -u = -\ln(x)$.

La derivada de la función $\ln(x)$ se presenta en el siguiente resultado:

Teorema 3.2.6. Para cada $x \in (0, \infty)$ se tiene $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$.

Demostración: sea $x \in (0, \infty)$ y aplicando la definición de derivada se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right] \end{aligned}$$

Tomando $n = \frac{x}{h}$ se tiene que $h \rightarrow 0^+$ sí y sólo sí $n \rightarrow \infty$ en consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \end{aligned}$$

Por la continuidad de $\ln(x)$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{x} \ln(e) = \frac{1}{x}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Por lo tanto $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$.

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx} [\ln(3x^2 - 4x)]$.

Solución: Hay que observar que la función $\ln(3x^2 - 4x)$ es la composición de la función $f(x) = 3x^2 - 4x$ con la función $g(x) = \ln(x)$, es decir, se tiene que $\ln(3x^2 - 4x) = (g \circ f)(x)$, para calcular $\frac{d}{dx} [\ln(3x^2 - 4x)]$ basta aplicar la regla de la cadena del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln(3x^2 - 4x)] &= \frac{d}{dx} \ln(x) \Big|_{x=3x^2-4x} \frac{d}{dx} [3x^2 - 4x] \Big|_{x=3x^2-4x} \frac{1}{x} (6x - 4) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 4x} (6x - 4) = \frac{6x - 4}{3x^2 - 4x}\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx} [\ln(e^{2x} + 5x^3)]$.

Solución: De manera similar al ejercicio anterior se tiene que la función $\ln(3x^2 - 4x)$ es la composición de la función $f(x) = e^{2x} + 5x^3$ con la función $g(x) = \ln(x)$, es decir, se tiene que $\ln(e^{2x} + 5x^3) = (g \circ f)(x)$, la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\ln(e^{2x} + 5x^3)] &= \frac{d}{dx} \ln(x) \Big|_{x=e^{2x}+5x^3} \frac{d}{dx} [e^{2x} + 5x^3] \Big|_{x=e^{2x}+5x^3} \frac{1}{x} (2e^{2x} + 15x^2) \\ &= \frac{1}{e^{2x} + 5x^3} (2e^{2x} + 15x^2) = \frac{2e^{2x} + 15x^2}{e^{2x} + 5x^3}\end{aligned}$$

La regla de la cadena muestra en los ejercicios anteriores muestran que para realizar de forma más rápida el cálculo de **la derivada del logaritmo natural de una función hay que dividir la derivada de la función entre la función**.

En muchas ocasiones las propiedades del logaritmo natural sirve para calcular la derivada de una forma más óptima como lo muestran los siguientes ejercicios.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx} \left[\ln \sqrt{2x+x^3} \right]$.

Solución: Por las propiedades del logaritmo natural se tiene que

$$\ln \sqrt{2x+x^3} = \ln(2x+x^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(2x+x^3)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\ln \sqrt{2x+x^3} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \ln(2x+x^3) \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\ln(2x+x^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx}(2x+x^3)}{2x+x^3} = \frac{2+3x^2}{2(2x+x^3)} \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{3x+4}{x^2-5x} \right) \right]$.

Solución: Por las propiedades del logaritmo natural se tiene que

$$\ln \left(\frac{3x+4}{x^2-5x} \right) = \ln(3x+4) - \ln(x^2-5x)$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{3x+4}{x^2-5x} \right) &= \frac{d}{dx} \left[\ln(3x+4) - \ln(x^2-5x) \right] \\ &= \frac{d}{dx}(3x+4) - \frac{d}{dx}(x^2-5x) \\ &= \frac{3}{3x+4} - \frac{2x-5}{x^2-5x} \end{aligned}$$

Para finalizar esta sección se presenta la función exponencial y logaritmo con base arbitraria a partir de las siguientes observaciones:

De forma análoga a la exponencial e^x , la idea es presentar el valor a^x para esto se hace uso del logaritmo natural del siguiente modo: Supóngase que $a^x = y$ en consecuencia se tienen las siguientes relaciones:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\begin{aligned}
 \ln(a^x) &= \ln(y) && \text{Aplicando logaritmo natural} \\
 x\ln(a) &= \ln(y) && \text{Por propiedades del logaritmo natural} \\
 e^{x\ln(a)} &= y && \text{Por definición de logaritmo natural} \\
 e^{x\ln(a)} &= a^x && \text{Por hipótesis}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el logaritmo de base a se define de forma similar al logaritmo natural vía las siguientes relaciones:

$$\log_a(x) = y \quad \text{si y solo si } a^y = x$$

Observa que $x = a^y = e^{y\ln(a)}$ por consiguiente $\ln(x) = y\ln(a)$, luego $y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ por lo tanto

$$\text{se tiene que } \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En resumen la exponencial y el logaritmo en una base arbitraria son casos particulares de la exponencial y el logaritmo natural. A partir de lo anterior se tiene lo siguiente:

Definición 3.2.7. Sea $a \in (0, \infty)$ **la función exponencial con base a** asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ el número a^x y **la función logaritmo de base a** es la función que asigna a cada $x \in (0, \infty)$ el número real $\log_a(x)$.

Ejemplo: Para cualquier $a \in (0, \infty)$ calcular $\frac{d}{dx}(a^x)$.

Solución: Solo hay que aplicar la derivada de una exponencial a la definición de a^x del siguiente modo:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln(a)}) = e^{x\ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a)$$

Ejemplo: Para cualquier $a \in (0, \infty)$ calcular $\frac{d}{dx}(\log_a(x))$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Solución: Solo hay que aplicar la derivada de una exponencial a la definición de $\log_a(x)$ del siguiente modo:

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{d}{dx} [\ln(x)] = \frac{1}{x \ln(a)}$$

3.2.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas tienen sus orígenes en las relaciones que hay entre los lados y sus ángulos en los triángulos rectángulos. En un curso elemental de trigonometría se presenta que en un triángulo rectángulo, a partir de alguno de sus ángulos agudos, los catetos toman el nombre de cateto opuesto y cateto adyacente como se muestra en la siguiente figura:



Triángulo rectángulo 1

A partir de ubicar los catetos se definen las funciones trigonométricas del ángulo señalado, del siguiente modo:

Definición 3.2.8. Para el ángulo señalado la figura anterior, sus funciones trigonométricas son las siguientes:

- (i). La función **seno** es la razón de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

- (ii). La función **coseno** es la razón de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa.
- (iii). La función **tangente** es la razón de dividir el cateto opuesto entre cateto adyacente.
- (iv). La función **cotangente** es la razón de dividir el cateto adyacente entre cateto opuesto.
- (v). La función **secante** es la razón de dividir la hipotenusa entre el cateto adyacente.
- (vi). La función **cosecante** es la razón de dividir la hipotenusa entre el cateto opuesto.

En símbolos la definición anterior se presenta del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} & \cos \alpha &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} & \tan \alpha &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}} \\ \cot \alpha &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}} & \sec \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}} & \csc \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}}\end{aligned}$$

Cabe mencionar que el **Teorema de Tales** (de la intersección) garantiza que las funciones trigonométricas no dependen de las dimensiones del triángulo rectángulo. De las relaciones anteriores se obtienen inmediatamente las siguientes identidades:

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Razón por la cual solo se estudia detalladamente las funciones seno y coseno, además entre ellas se tiene la siguiente relación:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha).$$

Otra identidad importante se obtiene a partir de las definiciones de las funciones seno y coseno y el uso del teorema de Pitágoras:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

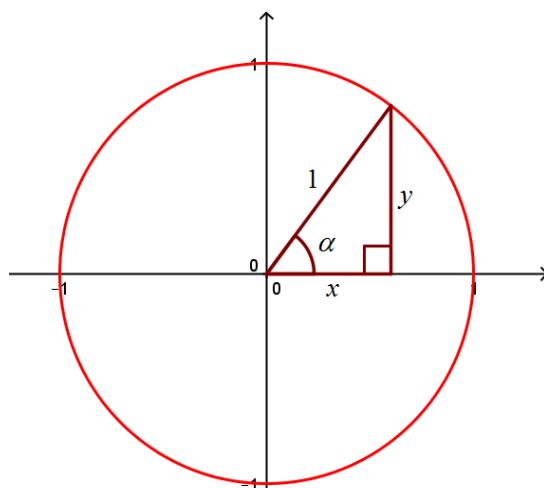
$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \left[\frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} \right]^2 + \left[\frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} \right]^2 \\
 &= \frac{(\text{cat. opuesto})^2}{(\text{hipotenusa})^2} + \frac{(\text{cat. adyacente})^2}{(\text{hipotenusa})^2} \\
 &= \frac{(\text{hipotenusa})^2}{(\text{hipotenusa})^2} = 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. A partir de esta relación y utilizando las relaciones entre el seno y el cosecante con las restantes funciones trigonométricas se tiene las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \alpha + 1 &= \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \\
 \cot^2 \alpha + 1 &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 + 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Por consiguiente $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$ y $\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha$.

La relación $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ tiene la siguiente interpretación geométrica: Considera un círculo de radio 1 centro en el origen de coordenadas y el triángulo rectángulo junto con el ángulo agudo presentado en la siguiente figura:



Función circular

Hay que observar que $\sin \alpha = y$ y $\cos \alpha = x$, por tal motivo algunos autores las suelen llamar **funciones circulares**. Esto permite extender las funciones seno y coseno

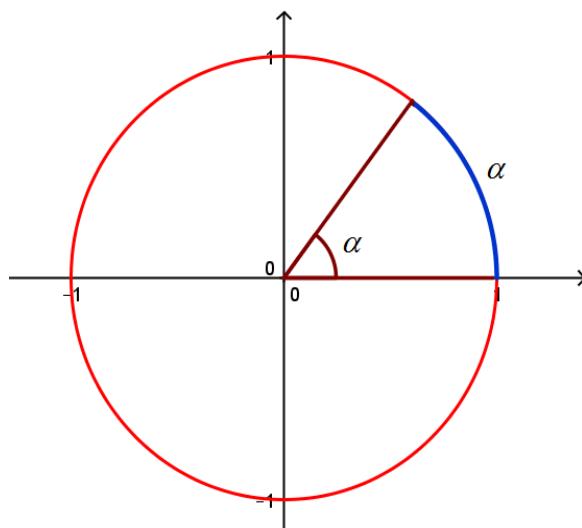
UNIDAD 3. DERIVACIÓN

para ángulos que se formen dentro del círculo, colocando el signo adecuado dependiendo del cuadrante donde se posiciona el lado final del ángulo, lo permite obtener la siguiente tabla:

	0°	Primer cuadrante	90°	Segundo cuadrante	180°	Tercer cuadrante	270°	Cuarto cuadrante
$\sin \alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-
$\cos \alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+
$\tan \alpha$	0	+	No existe	-	0	+	No existe	-
$\cot \alpha$	No existe	+	0	-	No existe	+	0	-
$\sec \alpha$	0	+	No existe	-	0	-	No existe	+
$\csc \alpha$	No existe	+	0	+	No existe	-	0	-

Ahora toca el turno de reinterpretar el concepto de un ángulo y su medición ya que el cálculo trabaja con funciones con dominio en los números reales y un ángulo claramente no es un número. Para resolver esta situación considera un triángulo rectángulo colocado en el sistema de ejes como se realizó anteriormente, a cada ángulo α se le asocia la longitud del arco del círculo que inicia en el lado inicial y que termina en el lado final que también se denotará por α y toma el nombre de **radian**, como lo muestra la siguiente figura:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

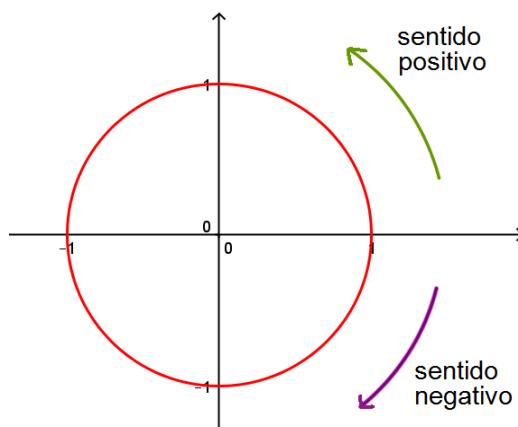


Representación radián

La relación que guardan los ángulos y los radianes es la siguiente:

$$180^\circ \quad \text{---} \quad \pi$$

Por convenio, se considera que los arcos que se recorren **contra de las manecillas del reloj son positivos** y los que son **a favor de las manecillas del reloj son negativos** esto permite extender el concepto de ángulo a valores negativos, como lo muestra la siguiente figura: sentido positivo y sentido negativo

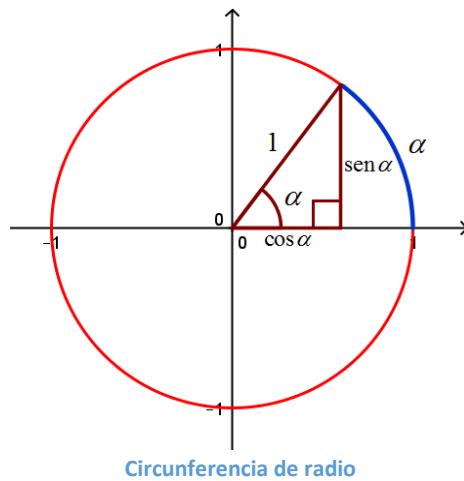


Sentido positivo-negativo

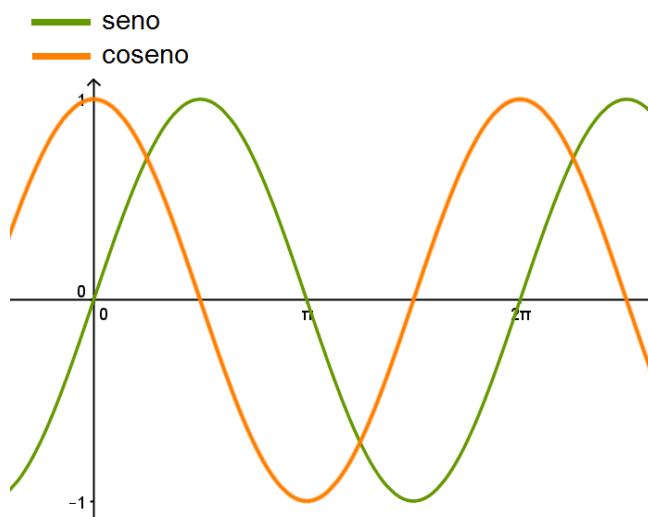
Finalmente los números reales están ubicados sobre la circunferencia de radio 1 con centro en el origen donde 0 se identifica con el punto $(1,0)$, este permite presentar

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

a las funciones trigonométricas como funciones de variable real, asignándole el valor de la función trigonométrica que le corresponde al ángulo que forme el arco de círculo, como se muestra en la siguiente figura:



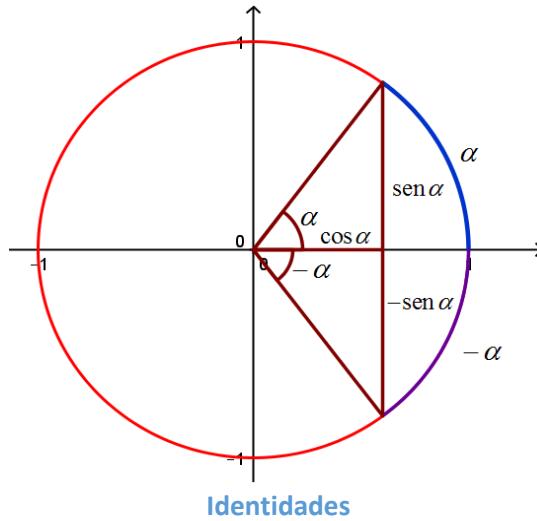
Dado que el círculo es una curva continua, intuitivamente las funciones trigonométricas son continuas salvo los puntos donde no estén definidas , además después de completar una vuelta las funciones seno y coseno repiten sus valores, en símbolos se tiene que $\sin(x+2\pi)=\sin x$ y $\cos(2\pi+x)=\cos x$. Reforzando el comentario anterior, las gráficas de las funciones seno y coseno son las siguientes:



Función seno coseno

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

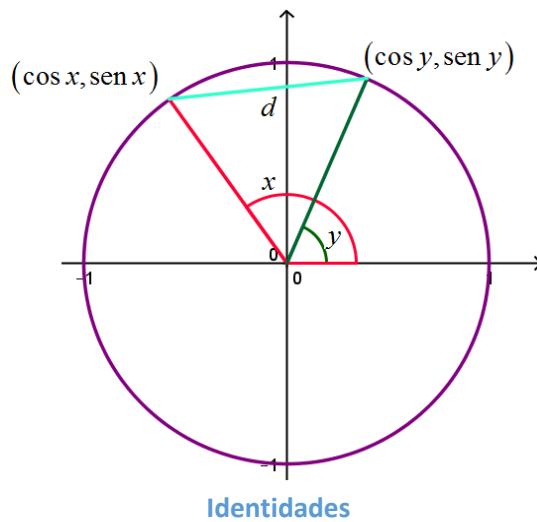
Ahora se presentan algunas identidades que se obtienen a partir de las observaciones anteriores, para ello considere la siguiente figura:



Se tienen las siguientes relaciones:

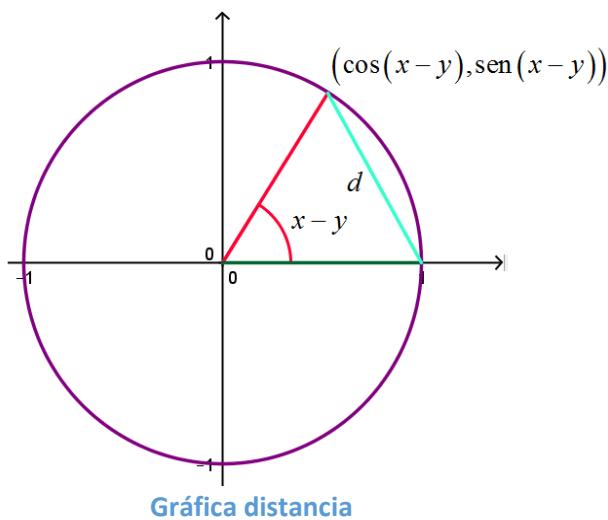
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad y \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

Por otro lado dados $x, y \in \mathbb{R}$ como se presentan en la siguiente figura:



A partir de esta figura, la distancia d es igual a $\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}$. Por otro lado, si rota la figura de tal manera que el lado final de y coincida con la parte positiva del eje horizontal se tiene la siguiente figura:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN



De manera similar, la distancia d es igual a $\sqrt{(\cos(x-y)-1)^2 + (\sin(x-y)-0)^2}$, en consecuencia se tiene las siguientes relaciones:

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x-y)-1)^2 + (\sin(x-y)-0)^2}$$

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (\cos(x-y)-1)^2 + (\sin(x-y)-0)^2$$

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 y - 2\sin x \sin y + \sin^2 x = \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y)$$

$$2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x-y)$$

Por lo tanto $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Tomando en cuenta que $\cos(-x) = \cos x$ y $\sin(-x) = -\sin x$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x-(-y)) \\ &= \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

De la relación $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right) = \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} - x\right] + y\right) \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \cos y - \sin\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \sin y \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \sin(x+y) &= \sin(x - (-y)) \\
 &= \sin x \cos(-y) - \cos x \sin(-y) \\
 &= \sin x \cos y + \cos x \sin y
 \end{aligned}$$

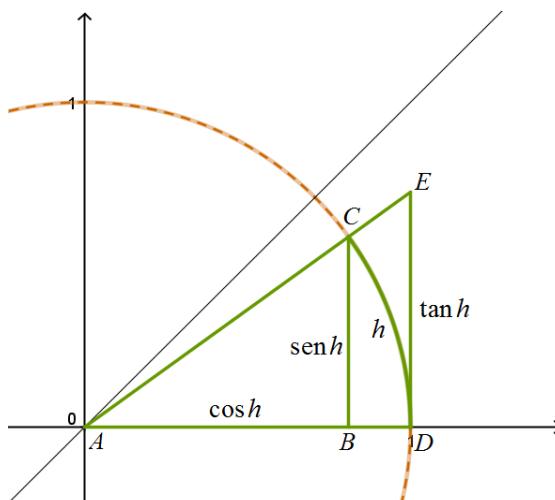
Para la derivada de la función seno hay que aplicar la definición derivada de una función y algunas identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh h - \cos x \sinh h - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \frac{\cosh h - 1}{h} + \cos x \frac{\sinh h}{h} \right] \\
 &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h}
 \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que todo se limita a calcular los siguientes límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h}$$

Para calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h}$ hay que observar la siguiente figura:



Representación gráfica límite

Para valores h cercanos a 0 la figura proporciona la siguiente información:

- El área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} \cosh h \sinh h$.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

- El área del sector ADC es $\frac{2}{h}$.
- El área del triángulo ADE es $\frac{1}{2} \tanh h$
- $\frac{1}{2} \cosh h \sinh h \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2} \tanh h$.

La última desigualdad conduce a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cosh h \sinh h &\leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2} \tanh h \\ \cosh h \sinh h &\leq h \leq \tanh h \\ \cosh h &\leq \frac{h}{\sinh h} \leq \frac{1}{\cosh h}\end{aligned}$$

Además, demás como la función $\cos x$ es continua en \mathbb{R} se sigue que

$\lim_{h \rightarrow 0} \cosh h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh h} = 1$, el Teorema 2.1.13 implica que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sinh h} = 1$. Finalmente,

utilizando la continuidad de la función $\sin x$ en todos los \mathbb{R} y el límite antes calculado se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cosh h - 1}{h} \times \frac{\cosh h + 1}{\cosh h + 1} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cosh h + 1)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\sin^2 h}{h(\cosh h + 1)} \right] = -\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin h}{h} \times \frac{\sinh h}{\cosh h + 1} \right] \\ &= -(1) \times \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\cos x)$.

Solución: Basta aplicar la fórmula $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ a la relación $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ del siguiente modo:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= \frac{d}{dx} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\tan x)$.

Solución: Hay que aplicar la derivada de un cociente a la relación $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y utilizar identidades trigonométricas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(x^2 \cos(3x+4))$.

Solución: Hay que aplicar la derivada de un producto a las funciones x^2 y $\cos(3x+4)$, además para derivar la función $\cos(3x+4)$ hay que aplicar la regla de la cadena a las funciones $3x+4$ y $\cos x$, en conjunto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 \cos(3x+4)) &= x^2 \frac{d}{dx}[\cos(3x+4)] + \cos(3x+4) \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2 \left[-\sin x \Big|_{x=3x+4} \frac{d}{dx}(3x+4) \right] + \cos(3x+4)(2x) \\ &= -x^2 \sin(3x+4)(3) + 2x \cos(3x+4) \\ &= 2x \cos(3x+4) - 3x^2 \sin(3x+4)\end{aligned}$$

3.2.3. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

En la sección anterior se presentó como las funciones seno y coseno de un número real se representan de manera gráfica como las componentes de un punto sobre la

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

circunferencia con centro en el origen y radio 1, por tal motivo algunos autores las suelen llamar funciones circulares. Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la función exponencial y toman su nombre porque son representadas sobre una hipérbola.

De manera similar a las funciones trigonométricas se comienza definiendo el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico, el resto de las funciones se definen en términos de identidades que involucren dichas funciones.

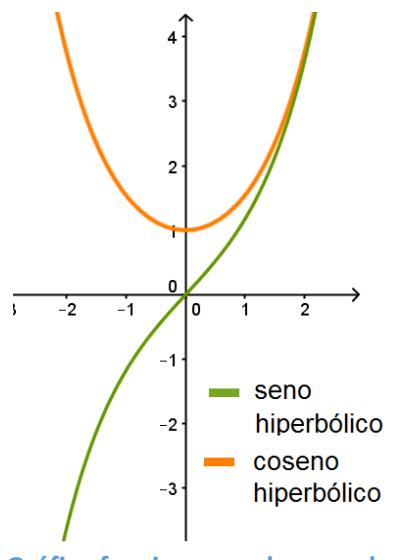
El seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen del siguiente modo:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad y \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Por definición, ambas funciones son continuas y derivables en todo el conjunto de los \mathbb{R} , además se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\end{aligned}$$

Las gráficas de las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ se presentan en la siguiente figura:



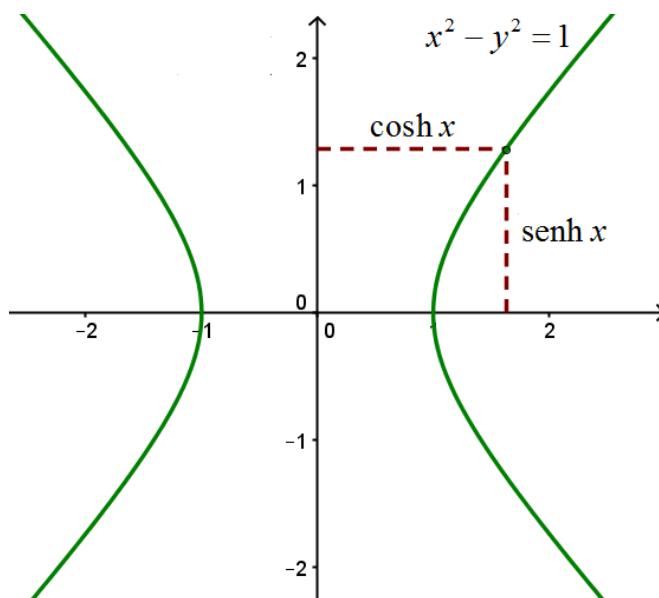
Gráfica funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

La razón por la cual toman el nombre de funciones hiperbólicas es por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} [e^{2x} + 2 + e^{-2x}] - \frac{1}{4} [e^{2x} - 2 + e^{-2x}] \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

De forma gráfica se tiene lo siguiente:



Función hiperbólica

Obsérvese que solo se toma la rama que esta de lado derecho porque $\cosh x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Las restantes funciones hiperbólicas se definen de manera similar al caso de las funciones circulares:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

El hecho $\cosh x > 0$ implica que el dominio de las funciones $\tanh x$ y $\operatorname{sech} x$ es el conjunto de los \mathbb{R} para el domino de las funciones $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ hay que encontrar el

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

conjunto de todo los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación $\operatorname{senh} x = 0$, esto se obtiene a partir de las siguientes relaciones:

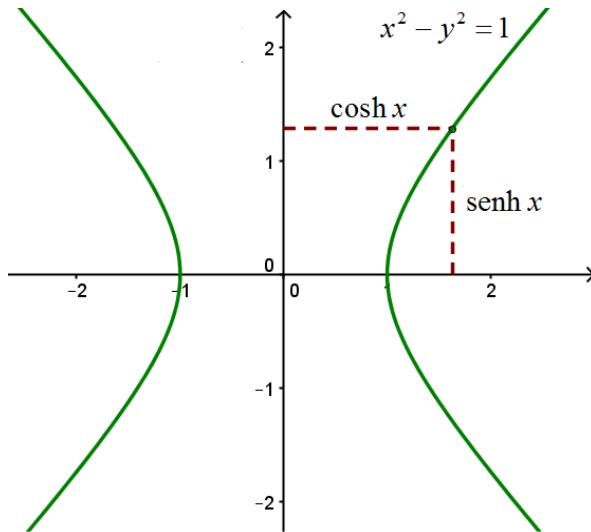
$$\begin{aligned}\operatorname{senh} x &= 0 & e^{2x} - 1 &= 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= 0 & e^{2x} &= 1 \\ e^x - \frac{1}{e^x} &= 0 & 2x &= 0 \\ \frac{e^{2x} - 1}{e^x} &= 0 & x &= 0\end{aligned}$$

Esto implica que el dominio de las funciones $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ es el conjunto $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo: Demostrar que $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Es conveniente partir del lado de la identidad que tenga más término, en este caso se tiene lo siguiente:

De forma gráfica se tiene lo siguiente:



Función hiperbólica

Obsérvese que solo se toma la rama que está de lado derecho porque $\cosh x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Las restantes funciones hiperbólicas se definen de manera similar al caso de las funciones circulares:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

El hecho $\cosh x > 0$ implica que el dominio de las funciones $\tanh x$ y $\operatorname{sech} x$ es \mathbb{R} . Para el dominio de las funciones $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ hay que encontrar el conjunto de todo los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación $\sinh x = 0$, esto se obtiene a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\sinh x &= 0 & e^{2x} - 1 &= 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= 0 & e^{2x} &= 1 \\ e^x - \frac{1}{e^x} &= 0 & 2x &= 0 \\ \frac{e^{2x} - 1}{e^x} &= 0 & x &= 0\end{aligned}$$

Esto implica que el dominio de las funciones $\coth x$ y $\operatorname{csch} x$ es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo: Demostrar que $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Es conveniente partir del lado de la identidad que tenga más término, en este caso se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right] \left[\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] + \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right] \left[\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} \right] + \frac{1}{4} \left[e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y} \right] \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\tanh x)$.

Solución: Basta aplicar la derivada de un cociente a la relación $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ del siguiente modo:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \right] = \frac{\cosh x \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) - \operatorname{senh} x \frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh x(\cosh x) - \operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x)$.

Solución: De forma similar al ejercicio anterior basta aplicar la derivada de un cociente a la relación $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ del siguiente modo:

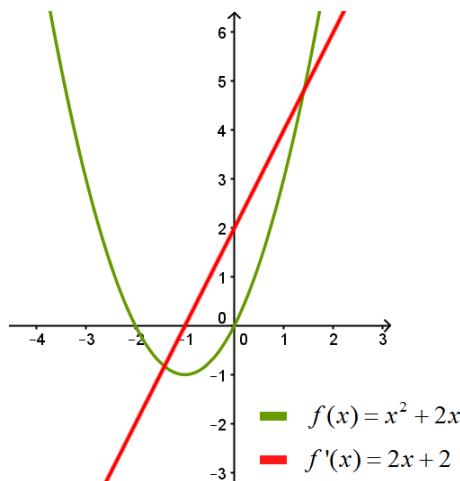
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\cosh x} \right] = \frac{\cosh x \frac{d}{dx}(1) - (1) \frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh x(0) - (\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x} = -\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \\
 &= -\frac{1}{\cosh x} \times \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x
 \end{aligned}$$

3.3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada una función $f(x)$ definida sobre un conjunto $A_0 \subset \mathbb{R}$, se denota por A_1 el conjunto de todos los valores de $x \in A_0$ tal que $f'(x)$ existe, luego, la derivada induce una nueva función llamada **la primera derivada** denotada por $f^{(1)}(x)$ definida en A_1 donde a cada x se le asigna $f'(x)$.

Ejemplo: En la función $f(x) = x^2 + 2x$ se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f'(x) = 2x + 2$ entonces la primera derivada es la función $f'(x) = 2x + 2$, gráficamente se tiene lo siguiente:

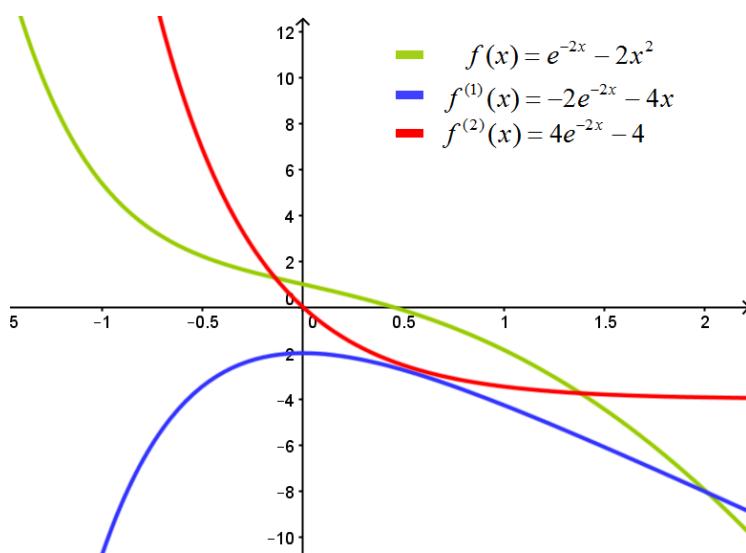
UNIDAD 3. DERIVACIÓN



Gráfica de la derivada 1

De manera similar, sea A_2 el conjunto de todos $x \in A_2$ tales que $\frac{d}{dx} f'(x)$ existe, lo cual induce una función llamada **la segunda derivada** y denotada por $f^{(2)}(x)$ definida por A_2 .

Ejemplo: Para la función $f(x) = e^{-2x} - 2x^2$ se tiene que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f'(x) = -2e^{-2x} - 4x$ entonces la primera derivada la función $f^{(1)}(x) = -2e^{-2x} - 4x$, en consecuencia $(f'(x))' = (-2e^{-2x} - 4x)' = 4e^{-2x} - 4$ para cada $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la segunda derivada es $f^{(2)}(x) = 4e^{-2x} - 4$, gráficamente se tiene lo siguiente:



Gráfica de la derivada 2

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

De forma inductiva, se define **la tercera derivada** como la función $f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))'$

, **la cuarta derivada** como la función que se define por $f^{(4)}(x) = (f^{(3)}(x))'$, así sucesivamente, **la k -ésima derivada** se define por $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$, las funciones $f^{(k)}(x)$ para $k \geq 2$, cuando existen, son llamadas **las derivadas de orden superior de $f(x)$** .

Cabe mencionar que dado que el símbolo $\frac{d}{dx}$ se utiliza para la derivada de una función, el símbolo $\frac{d^k}{dx^k}$ utiliza, en caso de existir, para denotar la k -ésima derivada de una función. Además para las tres primera derivadas se utilizan los símbolos $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ en vez de $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ y $f^{(3)}(x)$ respectivamente.

Ejemplo: Calcular las derivadas de orden superior de la función $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 5$.

Solución: Solo hay que derivar sucesivamente las funciones que se obtienen a partir de la función original, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 5x^2 + 6x - 5 \\ f'(x) &= 12x^2 - 10x + 6 \\ f''(x) &= 24x - 10 \\ f'''(x) &= 24 \\ f^{(k)}(x) &= 0, \quad \text{para } k \geq 4 \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que no tienen por qué existir todas derivadas de una función en determinado punto.

Ejemplo: Considera la función:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para la primera derivada si $x < 0$ se tiene que $f'(x) = 2x$ y para $x > 0$ se cumple que $f'(x) = -3x^2$. Además cuando $x = 0$ se tiene que las derivadas por la izquierda y la derecha son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-x^3) - (-0^3)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0$$

Por consiguiente $f'(0) = 0$, en resumen se tiene lo siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

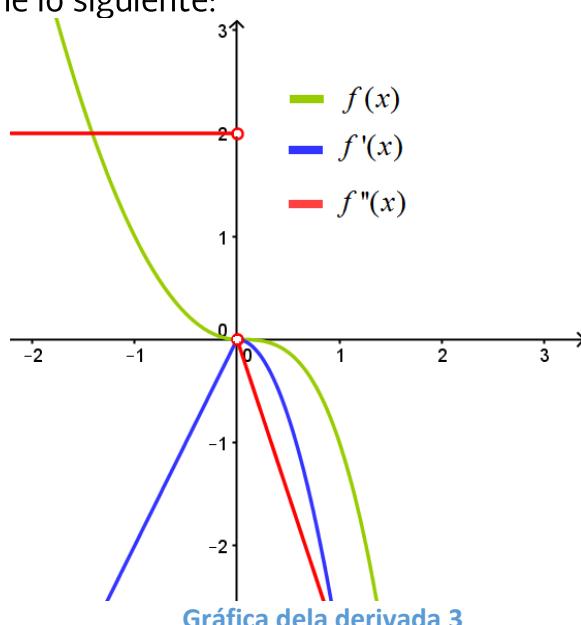
Para la segunda derivada si $x < 0$ se tiene que $f''(x) = 2$ y para $x > 0$ se cumple que $f''(x) = -6x$. De nuevo cuando $x = 0$ se tiene que las derivadas por la izquierda y la derecha son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-3x^2) - (-3(0)^2)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-3x) = 0$$

Por consiguiente $f''(0)$ no existe, la segunda derivada es la función:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ calcular $f''(x)$ para todo $x \neq 1$.

Solución: Aplicando la primera derivada se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x+1}{x-1} \right] = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Luego, derivando la función $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx} \left[-\frac{2}{(x-1)^2} \right] = -2 \frac{d}{dx} \left[(x-1)^{-2} \right] \\ &= -2 \left[-2(x-1)^{-3}(1) \right] = \frac{4}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d^3}{dx^3}(e^{x^2-3x})$.

Solución: Solo hay que derivar tres veces la función e^{x^2-3x} , del siguiente modo:

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2-3x}) = e^{x^2-3x} \frac{d}{dx}(x^2 - 3x) = (2x - 3)e^{x^2-3x}$$

Volviendo a derivar se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f'(x)) &= \frac{d}{dx}((2x-3)e^{x^2-3x}) = e^{x^2-3x} \frac{d}{dx}(2x-3) + (2x-3) \frac{d}{dx}(e^{x^2-3x}) \\ &= 2e^{x^2-3x} + (2x-3)[(2x-3)e^{x^2-3x}] = [(2x-3)^2 + 2]e^{x^2-3x} \\ &= (4x^2 - 12x + 11)e^{x^2-3x} \end{aligned}$$

Volviendo a derivar se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f''(x)) &= \frac{d}{dx}[(4x^2 - 12x + 11)e^{x^2-3x}] \\ &= (4x^2 - 12x + 11) \frac{d}{dx}(e^{x^2-3x}) + e^{x^2-3x} \frac{d}{dx}(4x^2 - 12x + 11) \\ &= (4x^2 - 12x + 11)[(2x-3)e^{x^2-3x}] + e^{x^2-3x}(8x-12) \\ &= [(4x^2 - 12x + 11)(2x-3) + (8x-12)]e^{x^2-3x} \\ &= (-45 + 66x - 36x^2 + 8x^3)e^{x^2-3x} \end{aligned}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

3.4. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Hasta este momento todas las funciones que se han presentado tienen una forma explícita de la regla de correspondencia, por ejemplo, la función $f(x) = 4x^2 + 5x$. Pero existen funciones que no tiene esa característica por ejemplo supóngase que la variable y depende de la variable x , en símbolos se tiene que $y = f(x)$, además que x, y se relacionan de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Haciendo una pequeña manipulación algebraica se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Dado que una raíz cuadrada tiene dos signos, se tiene que hay dos funciones que cumplen con la condición anterior:

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad y \quad f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Así la función $y = f(x)$ tiene una forma explícita. Sin embargo, no siempre es posible, por ejemplo considera la siguiente relación:

$$x^2 + y^3 \operatorname{sen}(x+y) + xy = \ln(y^2 - 4x)$$

Intentar encontrar una expresión de la forma $y = f(x)$ resulta técnicamente imposible, pero este tipo de relaciones se presentan de manera natural, por ejemplo, la ecuación de un círculo, de una elipse, una hipérbola, etc. Una par de preguntas naturales que te tienen que surgir a partir de lo anterior son: ¿existe la derivada de una función con esa característica?, en caso de ser afirmativo, ¿Cómo se calcula la derivada para este tipo de funciones?

Definición 3.4.1. Una función de dos variables que satisface $f(x, y) = 0$ **define a y implícitamente como función de** x . El dominio de la función $f(x, y)$ definida

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

implícitamente está formado por el conjunto de todos los x tales que existe un único y que satisface $f(x, y) = 0$.

Ejemplo: Las siguientes expresiones definen a y implícitamente como función de x :

- $3xy^2 + \operatorname{sen}(xy) = 0$.
- $x^2 + y^3 + xy^2 = 0$.
- $\operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 0$.

Cuando y es una función implícita de x definida por la relación $f(x, y) = 0$ su derivada se calcula por alguna de las siguientes maneras:

- Método 1.** Resolver la ecuación en términos de y para presentar de forma explícita la regla que determina a y y calcular su derivada directamente, como se mencionó antes, este método puede no ser práctico.
- Método 2.** Se plantea el hecho de que y depende de x y aplicar la derivada en ambos lados de la igual $f(x, y) = 0$ y resolver la ecuación resultante en términos de la derivada de y , cabe mencionar que en este método se utiliza la regla de la cadena ya y es una función de x .

Ejemplo: Dada la relación $x^2 + y^2 = 4$, calcular $\frac{dy}{dx}$ por ambos métodos.

Solución: Para el primer método, hay que resolver la relación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de la y , al inicio de la sección se presentó que $y = \sqrt{4 - x^2}$, aplicando la derivada se tiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{4 - x^2}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{4 - x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \frac{d}{dx}(4 - x^2) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Para el segundo método se comienza aplicando la derivada a la relación dada:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 4 && \text{Relación original} \\
 \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(4) && \text{Aplicando la derivada} \\
 \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= 0 && \text{Derivada de una suma} \\
 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 && \text{Regla de la cadena} \\
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} && \text{Resolviendo } \frac{dy}{dx}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Dada la función $3xy + y^2 = \tan(y)$ calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución: Hay que observar que en la relación $3xy + y^2 = \tan(y)$ no es fácil de resolver con respecto a y , así que se aplica el segundo método, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(3xy + y^2) &= \frac{d}{dx}(\tan(y)) \\
 \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\
 \left[3x \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(3x) \right] + 2y \frac{dy}{dx} &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\
 3x \frac{dy}{dx} + 3y + 2y \frac{dy}{dx} &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\
 3y = \sec^2 y \frac{dy}{dx} - 3x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} & \\
 3y = [\sec^2 y - 3x - 2y] \frac{dy}{dx} & \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{3y}{\sec^2 y - 3x - 2y}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Dada la función implícita $3x^4y + 2xy^3 + y^2 + 5 = \cos(2x) + 5x$ calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución: Hay que observar que el Método 1 no es fácil de aplicar a la función implícita $3x^4y + 2xy^3 + y^2 + 5 = \cos(2x) + 5x$ ya que resolver relación anterior con respecto a y requiere resolver una ecuación de grado 3. Utilizando el Método 2 se tiene lo siguiente:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(3x^4y + 2xy^3 + y^2 + 5) &= \frac{d}{dx}(\cos(2x) + 5x) \\
 \frac{d}{dx}(3x^4y) + \frac{d}{dx}(2xy^3) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(5) &= \frac{d}{dx}(\cos(2x)) + \frac{d}{dx}(5x) \\
 \left[3x^4 \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx}(3x^4) \right] + \left[2x \frac{d}{dx}(y^3) + y^3 \frac{d}{dx}(2x) \right] + 2y \frac{dy}{dx} + 0 &= -2\sin(2x) + 5 \\
 \left[3x^4 \frac{dy}{dx} + 12x^3y \right] + \left[2x \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + 2y^3 \right] + 2y \frac{dy}{dx} &= -2\sin(2x) + 5 \\
 3x^4 \frac{dy}{dx} + 12x^3y + 6xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y^3 + 2y \frac{dy}{dx} &= -2\sin(2x) + 5 \\
 \left[3x^4 + 6xy^2 + 2y \right] \frac{dy}{dx} &= -2\sin(2x) + 5 - 12x^3y - 2y^3 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-2\sin(2x) + 5 - 12x^3y - 2y^3}{3x^4 + 6xy^2 + 2y}
 \end{aligned}$$

3.5. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Para finalizar esta unidad se presenta el concepto de función inversa y su relación la derivada de una función. En la Unidad 1 se define a una **función** como terna (A, B, f) donde $A, B \neq \emptyset$ y f es una regla de correspondencia donde a cada elemento de $x \in A$ se corresponde con uno y solo un elemento $y \in B$, de manera visual, una recta vertical no puede cortar dos veces la gráfica de una función.

Después se mencionó que una función es **inyectiva** sí y solo si la función no repite asignaciones, de manera visual, una recta horizontal no corta dos veces a la gráfica de dicha función. Además, una función es **sobreyectiva** sí y solo sí todo elemento del contradominio es asignado bajo la función, de manera visual, cualquier recta horizontal corta a la gráfica de esta función. Finalmente una función es **biyectiva** sí y solo sí es inyectiva y sobreyectiva.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Definición 3.5.1. Dada una función $f:A \rightarrow B$ se dice que la función f es **invertible**

sí y solo sí existe $f:B \rightarrow A$ tal que $f(x)=y$ si y solo si $f^{-1}(y)=x$.

Equivalentemente, se tiene que $(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$ para todo $x \in A$ y $(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=y$ para todo $y \in B$.

El siguiente resultado se presenta en el estudio de la teoría de conjuntos, permite caracterizar a las funciones invertibles, el cual se enuncia sin demostración.

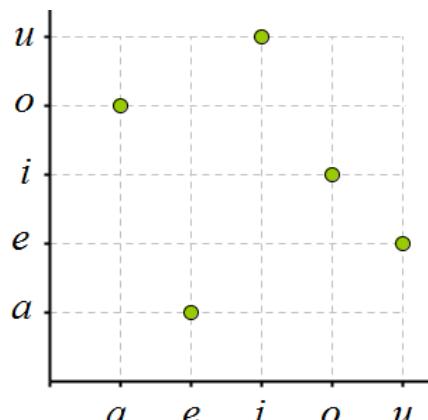
Lema 3.5.2. Una función es invertible si y solo si la función es biyectiva.

Cuando el dominio y el contradominio de una función invertible son el mismo conjunto, la función y su inversa se puede graficar en la misma en el mismo sistema, además se observa que las gráficas de ambas funciones resultan ser simétricas esto es debido a que la pareja $(x,y) \in \text{gra}(f)$ si y sólo si $(y,x) \in \text{gra}(f^{-1})$.

Ejemplo: Considera la función $f:\{a,e,i,o,u\} \rightarrow \{a,e,i,o,u\}$ donde se presenta la siguiente regla de asignación:

$$f(a)=o \quad f(e)=a \quad f(i)=u \quad f(o)=i \quad f(u)=e$$

En consecuencia se tiene que: $\text{gra}(f)=\{(a,o),(e,a),(i,u),(o,i),(u,e)\}$



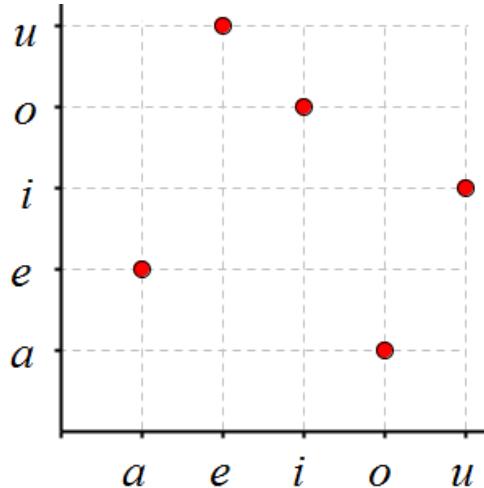
Gráfica regla de asignación 1

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

La función inversa $f^{-1} : \{a, e, i, o, u\} \rightarrow \{a, e, i, o, u\}$ tiene la siguiente correspondencia:

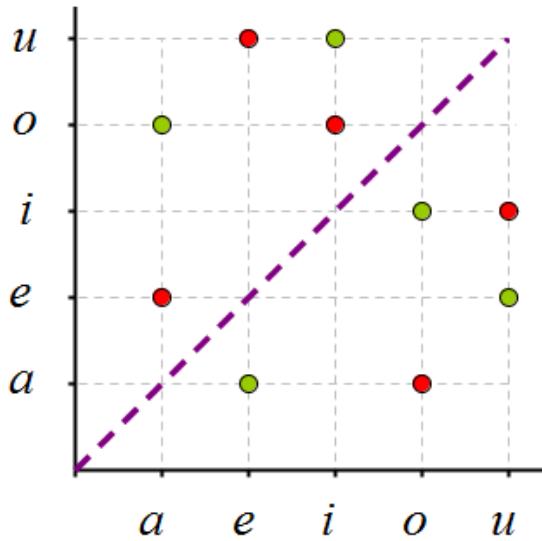
$$f^{-1}(a) = e \quad f^{-1}(e) = u \quad f^{-1}(i) = o \quad f^{-1}(o) = a \quad f^{-1}(u) = i$$

En consecuencia se tiene que: $\text{gra}(f^{-1}) = \{(a, e), (e, u), (i, o), (o, a), (u, i)\}$



Gráfica regla de asignación 2

Conjuntando las dos gráficas se tiene lo siguiente:



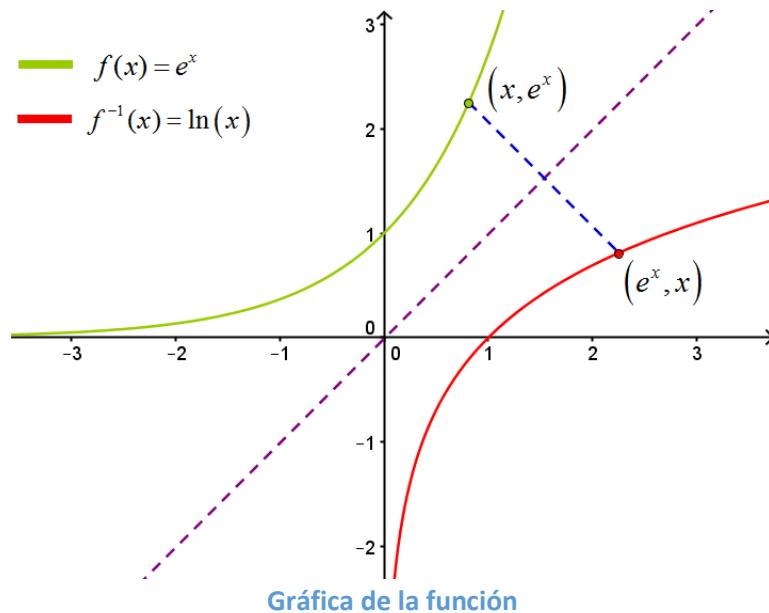
Gráfica regla de asignación 2

Donde claramente se ve la simetría, con respecto a la recta presentada, que hay entre los puntos de la gráfica de la función y su función inversa.

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

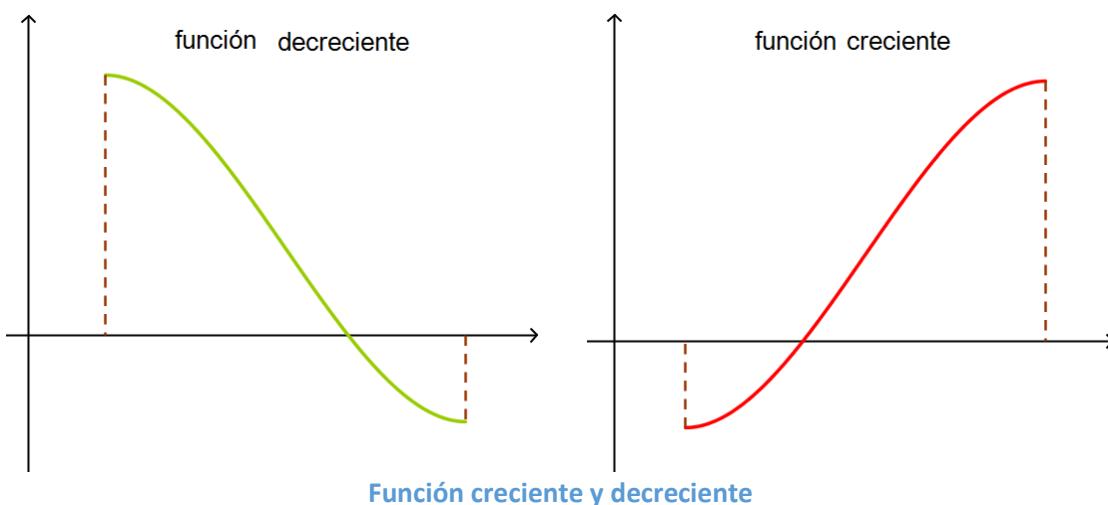
Ejemplo: La función $f(x) = e^x$ tiene como inversa a la función $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

Gráficamente se muestra de la siguiente manera:



Ahora se continúa con la siguiente definición.

Definición 3.5.3. Dada $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que $f(x)$ es **creciente en I** si y sólo si para cuales quiera $u, v \in I$ con $u < v$ se tiene que $f(u) < f(v)$. De manera similar $f(x)$ es **decreciente en I** si y sólo si para cuales quiera $u, v \in I$ con $u < v$ implica $f(u) > f(v)$



UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Obsérvese que cuando una función es continua e inyectiva esta función es creciente ó es decreciente, en consecuencia **las funciones continuas e invertibles son crecientes o decrecientes.**

En particular, para una función $f(x)$, definida en $[a,b]$, que sea continua, invertible y creciente, su imagen es el intervalo $[f(a),f(b)]$, de manera similar que $f(x)$ sea continua, invertible y decreciente, su imagen es el intervalo $[f(b),f(a)]$, esto es garantizado por el hecho de que toda función continua sobre un intervalo cerrado alcanza su máximo y su mínimo, en estos se obtienen en los extremos el intervalo.

Por observación anterior, basta encontrar los intervalos donde la función crece o decrece y para esto la derivada proporciona un buen criterio para estudiar el comportamiento de una función, como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 3.5.4. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es creciente en $[a,b]$.

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ entonces por el teorema del valor medio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, además $x_2 - x_1 > 0$ y $f'(c) > 0$ lo que implica que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ por lo tanto $f(x_1) < f(x_2)$, esto muestra que $f(x)$ es creciente en (a,b) , la continuidad de $f(x)$ en $[a,b]$ permite llevar el resultado a intervalo $[a,b]$. \square

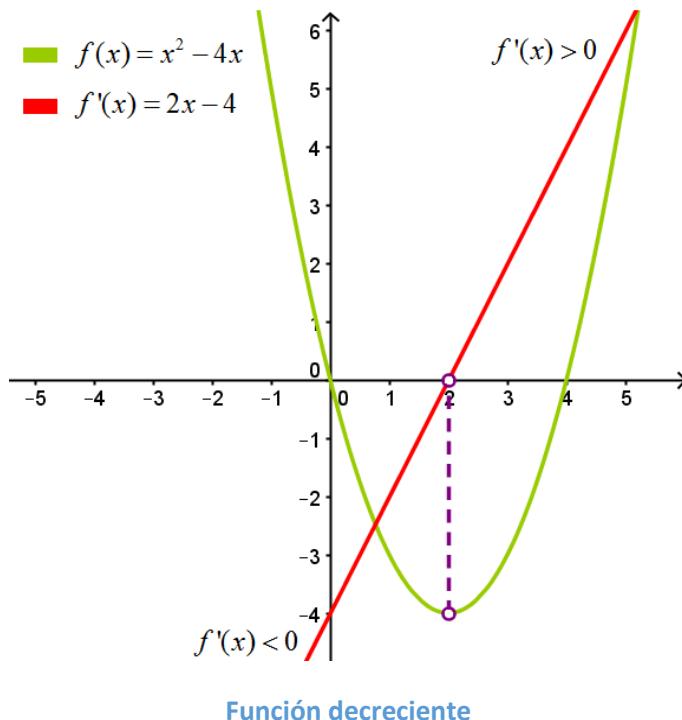
Cabe menciona que el teorema anterior también es válido cuando alguno de los extremos es ∞ o $-\infty$. Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene lo siguiente:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Corolario 3.5.5. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior a la función $-f(x)$. \square

Ejemplo: Considera la función $f(x) = x^2 - 4x$, entonces $f'(x) = 2x - 4$, luego $f'(x) > 0$ implica que $2x - 4 > 0$, luego $x > 2$, por consiguiente la función $f(x) = x^2 - 4x$ es creciente en el intervalo $(2, \infty)$. Por otro lado, que $f'(x) < 0$ implica que $2x - 4 < 0$, luego $x < 2$, por consiguiente la función $f(x) = x^2 - 4x$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



En consecuencia, el teorema de la función inversa plantea lo siguiente:

Teorema 3.5.6. Sea $f(x)$ una función definida en algún conjunto de números reales y supóngase que $f'(x)$ existe en algún intervalo que contenga a x_0 si $f'(x_0) \neq 0$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

existe un intervalo alrededor de x_0 donde $f(x)$ es invertible y en tal caso se tiene que $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.

Demostración: como $f(x)$ es derivable en x_0 entonces $f(x)$ es continua en x_0 , además como $f'(x_0) \neq 0$ se tiene que en un intervalo alrededor de x_0 la función $f(x)$ creciente o decreciente, en consecuencia $f(x)$ es invertible en dicho intervalo. Finalmente, para su derivada hay que aplicar la regla de la cadena y la derivación implícita a la relación $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ del siguiente modo:

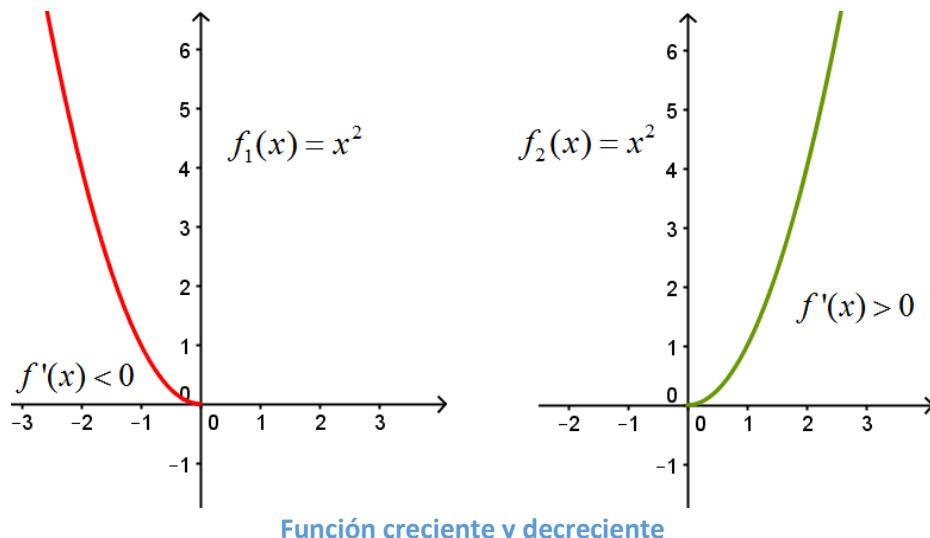
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(f^{-1}(x_0))] &= \frac{d}{dx}(x_0) \\ f'(f^{-1}(x_0)) \frac{d}{dx}[f^{-1}(x_0)] &= 1 \\ \frac{d}{dx}[f^{-1}(x_0)] &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

El teorema anterior garantiza en términos de la derivada la existencia de la función inversa, es decir, es un resultado de existencia para la función inversa, sin embargo no proporciona un método para encontrar la función inversa, además presenta la inversión de una función en forma local y el valor de su derivada.

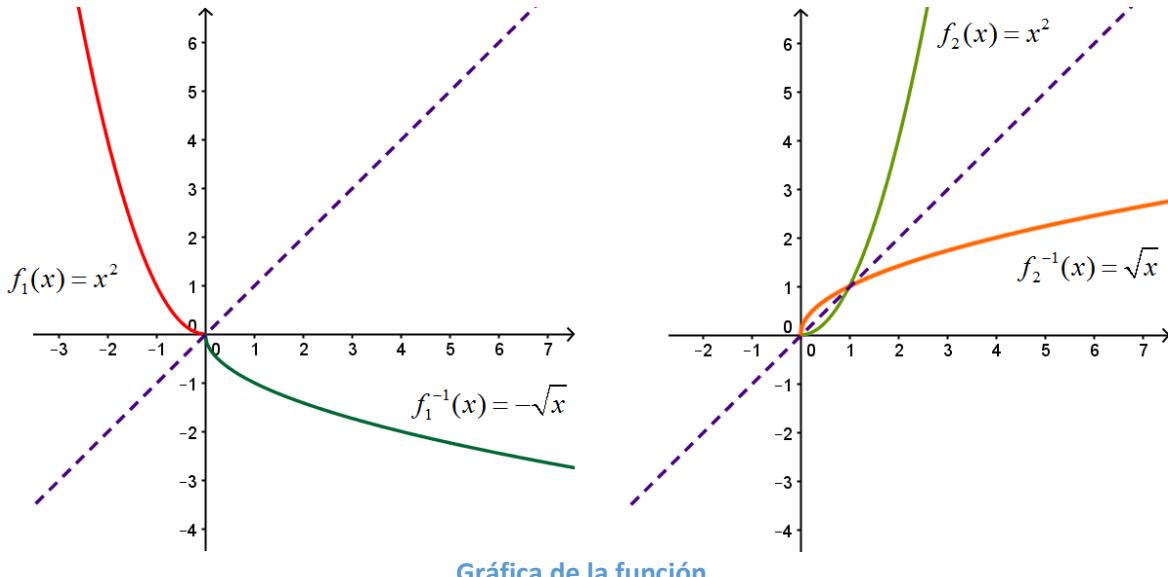
Dada un función $f(x)$ no siempre es invertible en todo su dominio, en tal caso se secciona el dominio de la función $f(x)$ de tal manera que en cada sección es una función invertible. En muchos casos la función inversa se encuentra realizando una serie de pasos algebraicos.

Ejemplo: Considera la función $f(x) = x^2$, su derivada es $f'(x) = 2x$, lo que implica que $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y $f'(x) > 0$ en $(0, \infty)$, por consiguiente la función $f(x) = x^2$ se secciona en dos funciones con lo muestra la siguiente figura:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN



Recuerda que $f(x)=y$ si y sólo si $f^{-1}(y)=x$, entonces $x^2=y$ sí y sólo si $x=-\sqrt{y}$ o $y=\sqrt{x}$. Esto implica que $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ y $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$, gráficamente se tiene lo siguiente:



Finalmente para calcular la derivada de $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ basta observar que $f_1'(x)=2x$, además:

$$\frac{d}{dx}(f_1^{-1}(x_0)) = \frac{1}{f'(f_1^{-1}(x_0))} = \frac{1}{f'(-\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2x|_{x=-\sqrt{x_0}}} = \frac{1}{2(-\sqrt{x_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

De manera similar para $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ basta observar que $f_2'(x) = 2x$

$$\frac{d}{dx}(f_2^{-1}(x_0)) = \frac{1}{f'(f_2^{-1}(x_0))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2x|_{x=\sqrt{x_0}}} = \frac{1}{2(\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ hallar los intervalos donde $f^{-1}(x)$ existe y hallar su inversa.

Solución: Hay que observar que para $x \neq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(2x+3) - (2x+3)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(2) - (2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Dado que $(x-1)^2 > 0$ para $x \neq 1$ se tiene que $f'(x) < 0$, así la función $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$. Ahora la función $f^{-1}(x)$ se calcula utilizando la relación $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ y realizando operaciones algebraicas, como se muestra a continuación:

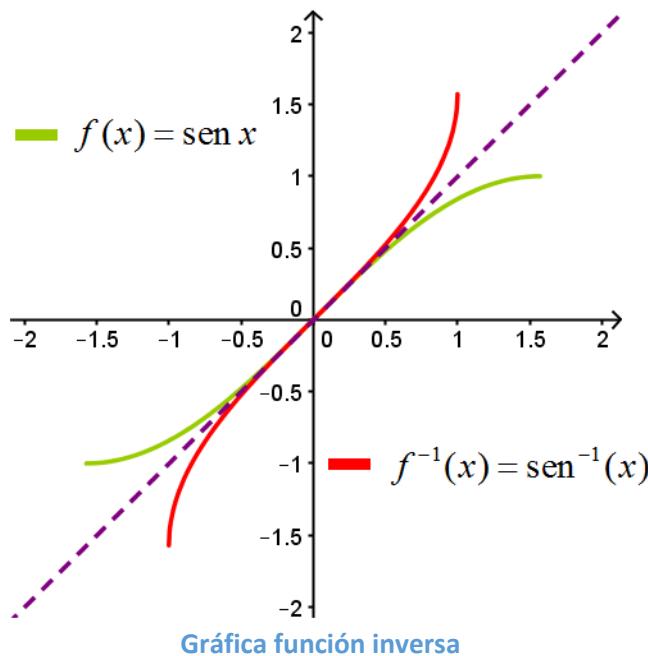
$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ \frac{2f^{-1}(x)+3}{f^{-1}(x)-1} &= x & x+3 &= xf^{-1}(x) - 2f^{-1}(x) \\ 2f^{-1}(x)+3 &= x(f^{-1}(x)-1) & x+3 &= (x-2)f^{-1}(x) \\ 2f^{-1}(x)+3 &= xf^{-1}(x)-x & f^{-1}(x) &= \frac{x+3}{x-2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Para las funciones trigonométricas sus funciones inversas se definen de la siguiente forma:

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

$\operatorname{sen}^{-1} x = y$	si y solo si	$\operatorname{sen} y = x$	para $x \in [-1,1]$ y $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x = y$	si y solo si	$\cos y = x$	para $x \in [-1,1]$ y $y \in [0, \pi]$
$\tan^{-1} x = y$	si y solo si	$\tan y = x$	para $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cot^{-1} x = y$	si y solo si	$\cot y = x$	para $x \in \mathbb{R}$ y $y \in [0, \pi]$
$\sec^{-1} x = y$	si y solo si	$\sec y = x$	para $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ y $y \in [0, \pi]$
$\csc^{-1} x = y$	si y solo si	$\csc y = x$	para $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ y $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En particular, tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ su función inversa es $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$, sus gráficas son las siguientes:



Para calcular la derivada de $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$, observa que $f'(x) = \cos x$ y se realiza lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{f'(\operatorname{sen}^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x))}$$

La expresión $\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x))$ se presenta de la siguiente forma: a partir de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ implica que $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, luego

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

Por lo tanto $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(x))$.

Solución: se procede como en el ejemplo anterior, tomando en cuenta que

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f^{-1}(x_0)) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{f'(\cos^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\cos^{-1}(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x))$.

Solución: se procede como en el ejemplo anterior, tomando en cuenta que $\frac{d}{dx}(\tan x) = -\sec^2 x$

se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f^{-1}(x_0)) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{f'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\tan x)} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

CIERRE DE LA UNIDAD

En esta unidad, se presentó el concepto de derivada, vista desde el punto matemático; al representar los puntos de una función por medio de una gráfica, ver los puntos cambiantes en cada momento de una recta, curva dentro de la misma gráfica.

Se revisó el cambio de variación en funciones trascendentales, utilizando la demostración por medio de los teoremas en las funciones exponenciales y

UNIDAD 3. DERIVACIÓN

logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. Estas a su vez auxilio a la determinación de sus derivadas de orden superior, implícita o inversa a través del teorema de función inversa.

En la unidad 4, revisarás las diversas aplicaciones que tienen la derivada, en diversos contextos. Así que te invito a revisarla y profundizar más en esta asignatura.

PARA SABER MÁS

Te recomiendo esta página web, donde podrás revisar diversos métodos de como derivar diferentes tipos de funciones

- <http://www.intmath.com/differentiation/differentiation-intro.php>
- <http://www.analyzemath.com/calculus/>
- <http://cow.math.temple.edu/>

FUENTES DE CONSULTA

- Apostol, T. (1990), *Calculus, Vol. 1*, Editorial Reverté.
- Lang, S. (1986), *A First Course in Calculus, 5th edition*, Springer. N. Y.
- Larson, R. (2010), *Cálculo de una variable*, Mc Graw Hill.
- Spivak, M. (2008), *Calculus, 4th edition*, Publish or Perish.
- Stewart, J. B. (2010), *Cálculo de una variable: Conceptos y contexto, cuarta edición*, Cengage Learning.
- Zill, D. (2011), *Cálculo; Trascendentes tempranas*, cuarta edición, Mc Graw Hill