



Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Universidad Abierta y a Distancia de México

**Programa de la asignatura:
Matemáticas discretas**

**Unidad 3:
Discretización**

Contenido nuclear



Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear



Tabla de contenido

Introducción.....	3
Discretización.....	3
Modelos matemáticos	6
Contenidos nuclear	7
Teoría de Gráficas.....	7
Definición de algoritmo	7
Algoritmo de Dijkstra	8
Algoritmo de Floyd-Warshall	11
Método de la ruta crítica	12
Cierre de la Unidad	17
Fuentes de consulta	18

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Introducción

Discretización

La palabra **discreto** proviene del latín *discretus*, que significa "separado". Tiene diferentes acepciones, en el ámbito de las matemáticas una función, variable o sistema se considera discreto -en contraposición a continuo- si es **divisible** sólo un número finito de veces (numerable). Así, el conjunto de los números naturales es un conjunto discreto. En el ámbito de la informática, discreto se refiere a la forma de codificar símbolos o "paquetes" de información.

La discretización consiste en transformar modelos y ecuaciones continuos en sus contrapartes discretos y numerables, lo cual permite hacer cálculos más fácilmente mediante aproximaciones. Por ejemplo, en la simulación del comportamiento de un sistema o ecuación que no se puede resolver analíticamente (modelado numérico para resolución).

La discretización permite el desarrollo de técnicas de análisis y algoritmos útiles para obtener soluciones numéricas a problemas modelados matemáticamente. Un modelo matemático es una dupla en la que por un lado se tiene un conjunto de ciertos objetos matemáticos y sus relaciones, y por el otro lado se tiene una situación o fenómeno de naturaleza no matemática.

Ejemplo:



La fotografía en película es el proceso de proyectar imágenes y capturarlas por medio del fijado en un medio sensible a la luz.

En la fotografía digital las imágenes capturadas se almacenan como mapa de bits en arreglos bidimensionales de $n \times m$, donde n es el número de columnas de píxeles (cuántos píxeles tiene la imagen a lo ancho) y m es la cantidad de filas de píxeles (cuántos píxeles tiene la imagen a lo alto).

La resolución de una imagen digital indica cuánto detalle puede observarse en ésta y depende del número de píxeles que contiene. Entre mayor resolución se tenga se obtendrá una imagen con mayor detalle y calidad visual.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear



Se puede hacer una analogía con el cine, considerando la grabación en película y el video digital, en ambos medios existe una discretización temporal (incluso en el caso del cine que no es un medio digital).

En el cine grabado en película, la unidad de discretización temporal es el fotograma (24 fotogramas/segundo), mientras que en el cine grabado en video digital la unidad de discretización se denomina con el término inglés *frame* (este valor suele ser de 25 ó 30 frames/segundo, según el sistema).

Por mconnors en <http://mrg.bz/hRXT1s>

Para todo proceso de conversión entre un medio analógico y uno digital (discretización) existe un proceso de modelación matemática, esto significa que de manera implícita o explícita se ha establecido una relación entre alguna idea matemática y una situación real.

Modelación matemática

Detrás de todo modelo matemático existe un proceso de modelación matemática. Analíticamente, es posible describir un proceso de modelación matemática que consiste en los siguientes seis subprocesos (**Blomhoj y Hojgaard Jensen, 2003**).

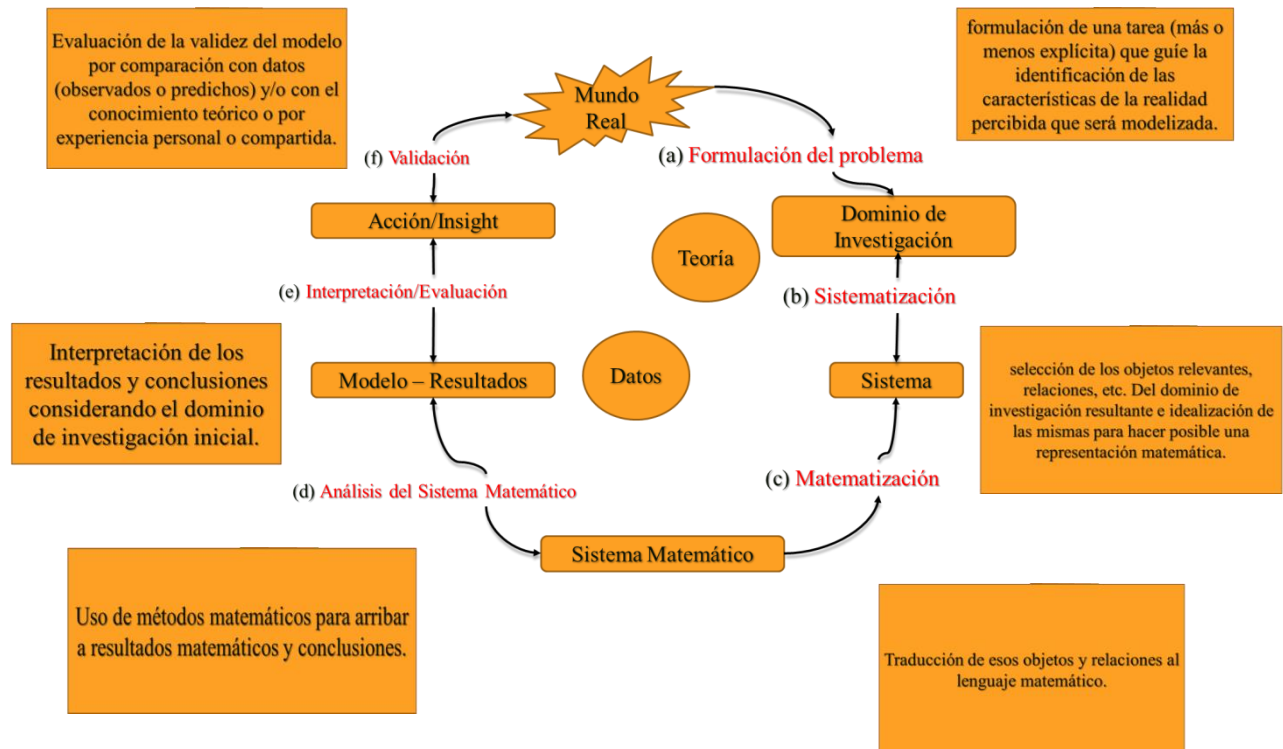
- i. **Formulación del problema:** formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelada.
- ii. **Sistematización:** selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.
- iii. **Traducción** de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
- iv. **Uso de métodos** matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
- v. **Interpretación** de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.
- vi. **Evaluación** de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

En el siguiente esquema se visualiza la formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelada.



De manera esquemática podríamos decir que la solución de un problema real cualquiera sea su naturaleza técnica, científica, económica, etc., pasa por distintas fases o etapas.

En primer lugar se elabora un modelo teórico teniendo en cuenta el ámbito científico al que se refiere el problema, sobre la base de una serie de teorizaciones relacionadas con el mismo. Para ello se efectúan medidas y se aplican técnicas de cuantificación, observando cuáles son los parámetros o variables más importantes que intervienen en el problema

Es la materialización del modelo teórico. Con el modelo teórico validado se hace una formulación simbólica o matemática de las distintas variables o parámetros del problema. Esta formulación matemática o modelo matemático está representado por un conjunto de relaciones o ecuaciones entre las variables o parámetros significativos del problema.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Modelos matemáticos

En muchos casos, los modelos matemáticos que representan problemas se formulan mediante ecuaciones diferenciales, integrales, etc. Lo que hace muy engorrosa su solución y a lo mejor es suficiente una solución tan aproximada como se quiera, discretizando el modelo continuo con tal de que los errores se mantengan dentro de ciertos límites preestablecidos. Con este objeto se discretizan los modelos matemáticos continuos, discretizando el comportamiento de las variables que intervienen en la formulación del modelo.

Relación de la unidad aritmética lógica con la informática

En primer lugar el cálculo numérico es una disciplina estrictamente matemática con conceptos y métodos propios que no solo desarrolla algoritmos para resolver problemas, sino que también analiza el grado de aproximación de los resultados para mejorar el procedimiento algorítmico.

En segundo lugar, podríamos decir que el cálculo numérico es impensable sin las computadoras o calculadora digitales, por la agilidad del cálculo, no es menos cierto que el desarrollo de hardware y software han sido influidos y orientados por las necesidades del cálculo numérico.

Al cálculo numérico le corresponde la **discretización de funciones**, el desarrollo de algoritmos numéricos, el estudio de errores, etc.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

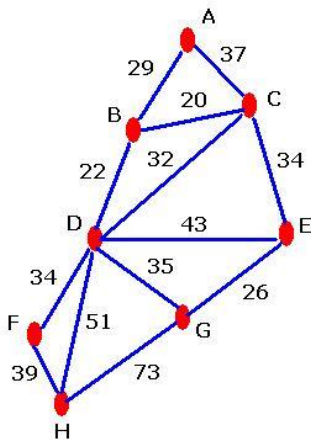
Contenido nuclear

Teoría de Gráficas

En la Teoría de gráficas, uno de los problemas más conocido es el del camino más corto según lo revisamos en la segunda unidad, consiste en encontrar un camino entre dos vértices (o nodos) de tal manera que la suma de los pesos de las aristas (trayectoria/ lados) que lo constituyen sea mínima.

Pensando en un símil para nosotros nuestros fines, los vértices serán poblaciones y los pesos de las aristas el tiempo que empleamos en desplazarnos de un sitio a otro.

La empresa **Mexpost** es experta en resolver este tipo de problemas, se requiere enviar un paquete que tenían desde Monterrey hasta el D.F, el mensajero transformó esa situación real en una situación matemática (a esto lo llamamos modelación), después lo resolvió matemáticamente y lo volvió a pasar al mundo real.



Lo primero que hizo, fue coger el mapa y modelar el problema. Como se representa del lado izquierdo

Donde cada nodo representa lugares porque puede ser factible el recorrido para llegar al Distrito Federal

Los números que hay sobre las aristas (carreteras) representan el tiempo que se tarda en desplazarse de un nodo a otro (de una población a otra).

1. ¿Qué camino tiene que tomar Mexpost para llevar un paquete desde Monterrey hasta el D.F?
2. ¿Cuál sería el camino si primero tiene que pasar por el nodo F para recoger a un compañero?

Para resolver este tipo de problemas se utiliza el algoritmo de **Dijkstra**, también llamado algoritmo de caminos mínimos.

Este algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen (A: Monterrey) y que llevan al último vértice (D.F.).

Definición de algoritmo

Define algoritmo como un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. Método y notación en las distintas fórmulas del cálculo.

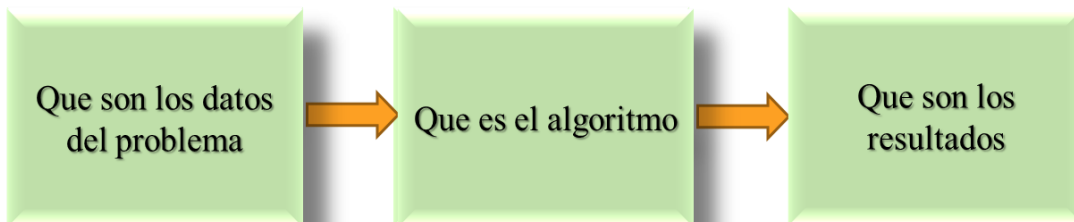
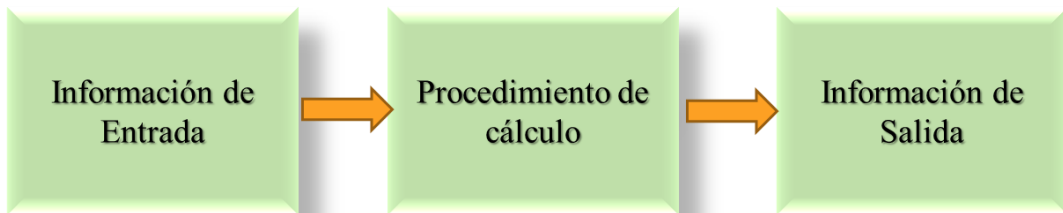
Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

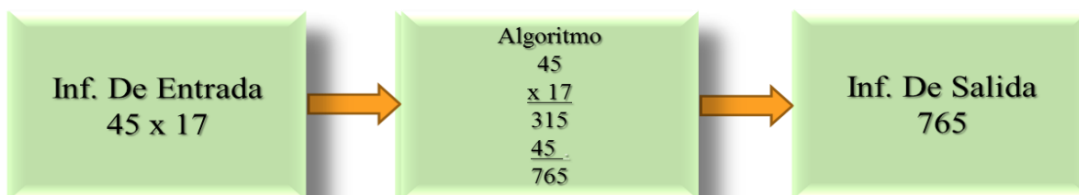
Contenido nuclear

El algoritmo representa *un método* para resolver un problema mediante una secuencia de pasos a seguir.

Aplicación de algoritmo como el método para la resolución del problema a partir de la información:



Ejemplo numérico de aplicación de un algoritmo para solución de cantidades a multiplicar



Algoritmo de Dijkstra

También llamado algoritmo de caminos mínimos, es un algoritmo para la determinación del camino más corto dado un vértice origen al resto de vértices en un grafo con pesos en cada arista. Su nombre se refiere a Edsger Dijkstra, quien lo describió por primera vez en 1959. La idea subyacente en este algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen y que llevan a todos los demás vértices; cuando se obtiene el camino más corto desde el vértice origen, al resto de vértices que componen el grafo, el algoritmo se detiene.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

El algoritmo es una especialización de la búsqueda de costo uniforme, y como tal, no funciona en grafos con aristas de costo negativo (al elegir siempre el nodo con distancia menor, pueden quedar excluidos de la búsqueda nodos que en próximas iteraciones bajarían el costo general del camino al pasar por una arista con costo negativo). Este algoritmo obtiene los caminos de longitud mínima desde un vértice s a los restantes vértices del grafo G . La idea básica es realizar una exploración en anchura "pesada" empezando en el vértice s . El algoritmo es de tipo "voraz", aumentando iterativamente una nube de vértices a partir de s , entrando los nuevos vértices en la nube en orden de su distancia al vértice s . En cada iteración se elige el vértice, exterior a la nube, que es el más cercano a s . El algoritmo termina cuando no quedan vértices fuera de la nube; en ese punto tendremos un camino mínimo desde s a cada uno de los restantes vértices del grafo.

Algoritmo Dijkstra

Paso 1. Inicialización

$$P = \{1\}, \quad T = \{2, 3, \dots, n\}$$

$$U_1 = 0$$

$$u_j = w_{ij}, \quad j \in \Gamma(1)$$

$$u_j = \infty, \quad j \notin \Gamma(1)$$

Paso 2. Designación de etiqueta variable como fija.

$$\text{Determinar } k \in T / u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$$

$$\text{Hacer } T := T \sim \{k\} \text{ y } P := P \cup \{k\}$$

Si $T = 0$, detenerse; u_j es el peso del camino más corto

De 1 a j , $j = 2, 3, \dots, n$

Paso 3. Actualización

$$\forall j \in \Gamma(k) \cap T, \quad u_j := \min \{u_j, U_k + U_{kj}\}$$

Ir al paso 2.

Algoritmo

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Teniendo un grafo dirigido ponderado de N nodos no aislados, sea x el nodo inicial, un vector D de tamaño N guardará al final del algoritmo las distancias desde x al resto de los nodos.

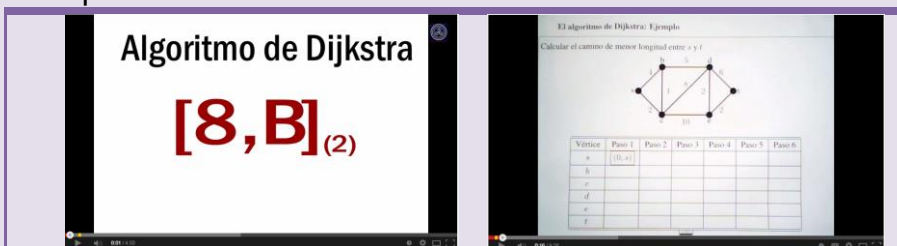
1. Inicializar todas las distancias en D con un valor infinito relativo ya que son desconocidas al principio, exceptuando la de x que se debe colocar en 0 debido a que la distancia de x a x sería 0.
2. Sea $a = x$ (tomamos a como nodo actual).
3. Recorremos todos los nodos adyacentes de a , excepto los nodos marcados, llamaremos a estos v_i .
4. Si la distancia desde x hasta v_i guardada en D es mayor que la distancia desde x hasta a sumada a la distancia desde a hasta v_i ; esta se sustituye con la segunda nombrada, esto es:
si $(D_i > D_a + d(a, v_i))$ entonces $D_i = D_a + d(a, v_i)$
5. Marcamos como completo el nodo a .
6. Tomamos como próximo nodo actual el de menor valor en D (puede hacerse almacenando los valores en una cola de prioridad) y volvemos al paso 3 mientras existan nodos no marcados. Una vez terminado el algoritmo, D estará completamente lleno.

Aprende observando

Algoritmo de Dijkstra

En este vídeo se muestra el Algoritmo de Dijkstra, de cteccocula (Archivo de vídeo) recuperado de

El segundo vídeo también corresponde al Algoritmo de Dijkstra de Juan Antonio Gómez (Archivo de Vídeo) recuperado de



Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Algoritmo de Floyd-Warshall

El algoritmo de Floyd-Warshall es un algoritmo de análisis de gráficas *para que, de forma eficiente y simultánea*, encuentre los caminos más cortos dentro de una gráfica en la cual las aristas tengan un costo (distancia entre nodo y nodo, duración del viaje entre nodos, etc.). Al ejecutar el algoritmo encontrara el camino menor o más corto de entre todos los pares de vértices, pero no devuelve los detalles de los caminos en sí. El algoritmo es un ejemplo de la Programación Dinámica y su variación más conocida fue publicada en 1962 por Robert Floyd.

El algoritmo de Floyd-Warshall compara todos los posibles caminos entre cada par de nodos. Esto se consigue para mejorar un estimado de la distancia entre dos nodos, hasta que el estimado es óptimo.

Aunque se pueden calcular los caminos más cortos entre todos los pares de vértices aplicando Dijkstra tomando como origen, en cada caso, cada uno de los vértices del grafo, el método de Floyd y Warshall es más eficiente en general para éste propósito.

Llamaremos u_{ij} al peso del camino más corto del vértice i al j . Utilizaremos las variables $u_{ij}^{(m)}$, que indican el peso del camino más corto del vértice i al j con la restricción de que dicho camino no contenga los vértices $m, m+1, \dots, n$ (exceptuando a los extremos i y j en su caso). Es decir, el camino que representa la variable $u_{ij}^{(m)}$ no debe contener como interno ninguno de los vértices $m, m+1, \dots, n$.

Estas variables pueden calcularse recursivamente utilizando las ecuaciones:

$$U_{ij}^{(1)} = w_{ij}, \quad \forall i, j$$

$$U_{ij}^{(m+1)} = \min \{ U_{ij}^{(m)}, U_{im}^{(m)} + U_{mj}^{(m)} \}, \quad \forall i, j,$$

$$m = 1, 2, \dots, n.$$

Es posible ver que:

$$U_{ij} = U_{ij}^{(n+1)},$$

Con lo que tendremos los pesos de los caminos más cortos entre todos los pares de vértices.

Para facilitar la construcción de los caminos más cortos una vez calculados sus pesos, se puede utilizar otra matriz

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]_{1 \leq i, j \leq n},$$

Donde $\theta_{ij}^{(m)}$ representa el vértice anterior a la j en el camino más corto del vértice i al j en la iteración m .

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Inicialmente $\theta_{ij}^{(1)} = i$, si $U_{ij}^{(1)} < +\infty$

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } U_{ij}^{(m+1)} = U_{ij}^{(m)} \\ \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } U_{ij}^{(m+1)} < U_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

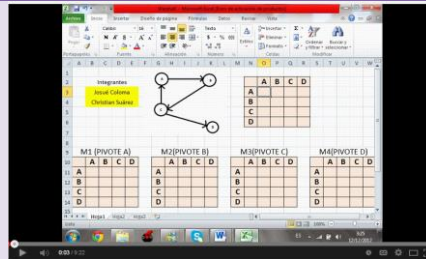
Tanto desde el modo de texto como desde el modo gráfico, **MaGraDa** resuelve este algoritmo desde la opción Floyd-Warshall del menú Algoritmos.

- Por pasos: Este método muestra cómo se van calculando las matrices $[U_{ij}^{(m)}]$ y $\Theta^{(m)}$, para cada iteración m .
- Entre dos vértices: Nos da directamente el camino más corto entre el par de vértices seleccionado. Desde el modo de texto nos da una pantalla donde debemos seleccionar dichos vértices y desde el modo gráfico tendremos que pinchar los vértices que van a ser extremos del camino.

Aprende observando

Algoritmo de Disjktra

En este vídeo se muestra el Algoritmo de Floyd Warshall de Josue Coloma (Archivo de Vídeo) recuperado de



Método de la ruta crítica

Para ser explícito con el método de la Ruta crítica, revisa el siguiente ejemplo que dará un panorama más claro del contenido.

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Ejemplo:

Construcción de una casa

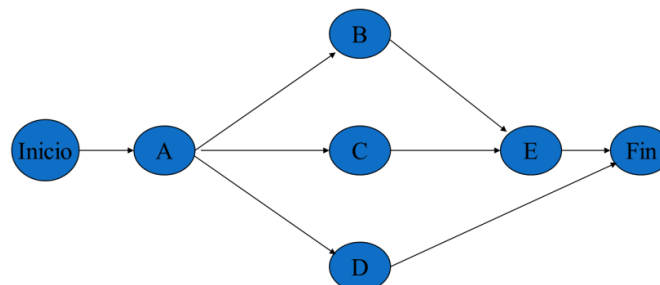
Se requiere de construir una casa habitación integrada por cimientos, paredes, plomería, instalación eléctrica, techo pintura exterior y pintura interior. Sin embargo en definitiva como inicio, debemos de entender que tiene prioridad colocar los cimientos después construir paredes sobre los cimientos, al final ya existirán otras opciones de seguir con la construcción de la casa

Paso 1. Colocar en forma de tabla matricial los procedimientos de construcción asignando letras mayúsculas para cada proceso o actividad, el nombre de cada proceso y el tiempo que tarda cada uno de las actividades.

Activ	Descripción	Predecesor	Durac. (sem)
A	Cimientos, paredes	-	4
B	Plomería, electricidad	A	2
C	Techos	A	3
D	Pintura exterior	A	1
E	Pintura interior	B, C	5

Paso 2. Expresar en forma de gráfica, en forma de diagrama de flujo colocando en cada la letra asignada de acuerdo a la matriz anterior y las flechas que conectan a manera de caminos de conecte entre actividades que le dan sentido a la construcción de la casa.

Red de actividades



Ruta crítica

- La Ruta Crítica es la ruta más larga a través de la red
- Determina la longitud del proyecto

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

- Toda red tiene al menos una ruta crítica
- Es posible que haya proyectos con más de una ruta crítica

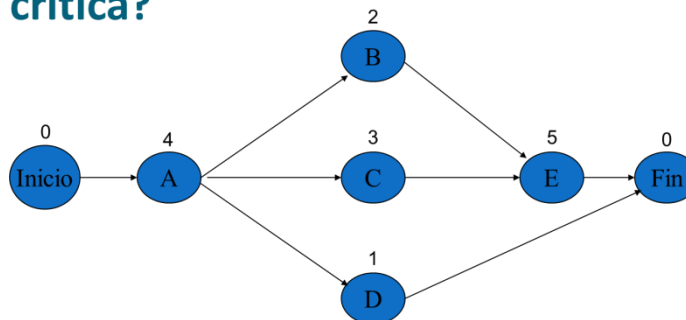
¿Cuál es la ruta crítica de la red anterior?

- Este proyecto tiene tres rutas posibles:
 - Inicio – A – B – E – Fin
 - Inicio – A – C – E – Fin
 - Inicio – A – D – Fin
- ¿Cuál es la duración de cada una?

¿Cómo se encuentra la ruta crítica?

- Es necesario agregar a la red los tiempos de cada actividad
- Los tiempos se agregarán en cada nodo
- Las flechas sólo representan la secuencia de las actividades

¿Cómo se encuentra la ruta crítica?



- Para cada actividad se calcularán 4 tiempos
- Se denotarán:

ES	EF
LS	LF

1. Tiempo de inicio temprano: Es el tiempo más temprano posible para iniciar una actividad
 - $ES = EF$ más alto de la(s) actividad(es) anterior(es)

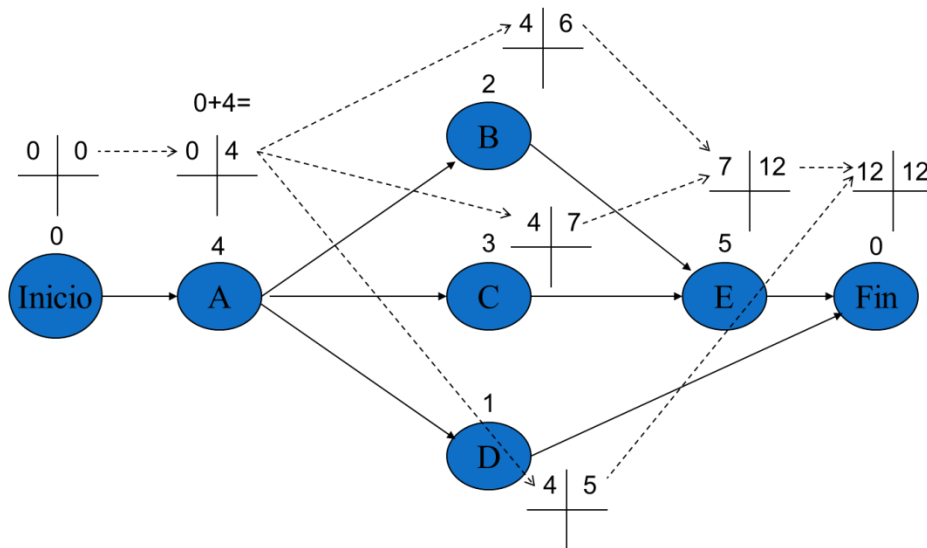
Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

2. Tiempo de terminación temprano: Es el tiempo de inicio temprano más el tiempo para completar la actividad

- $EF = ES$ de la actividad más duración de la actividad
- El ES y el EF se calculan recorriendo la red de izquierda a derecha.



3. Tiempo de terminación más lejano: Es el tiempo más tardío en que se puede completar la actividad sin afectar la duración total del proyecto

- $LF = LS$ más bajo de la(s) actividad(es) próxima(s)

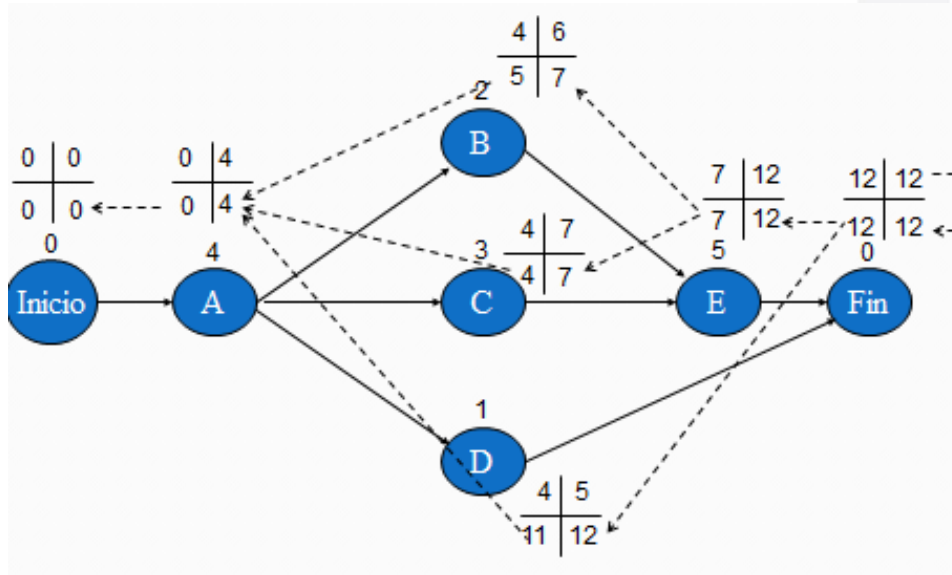
4. Tiempo de inicio más lejano: Es el tiempo de terminación más lejano de la actividad anterior menos la duración de la actividad

- $LS = LF$ de la actividad – duración de la actividad
- Para calcular LF y LS la red se recorre de derecha a izquierda

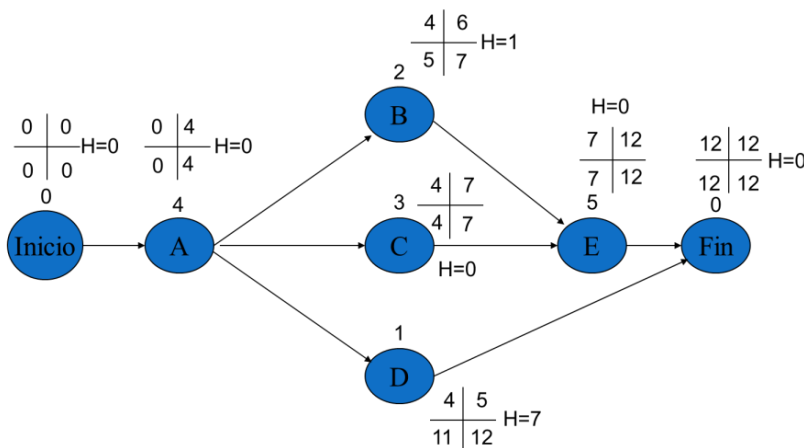
Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear



- Después de calculados los cuatro tiempos de cada actividad, se calculan las holguras
- La holgura es el tiempo que se puede atrasar una actividad sin afectar la duración total del proyecto
- $H = LF - EF$

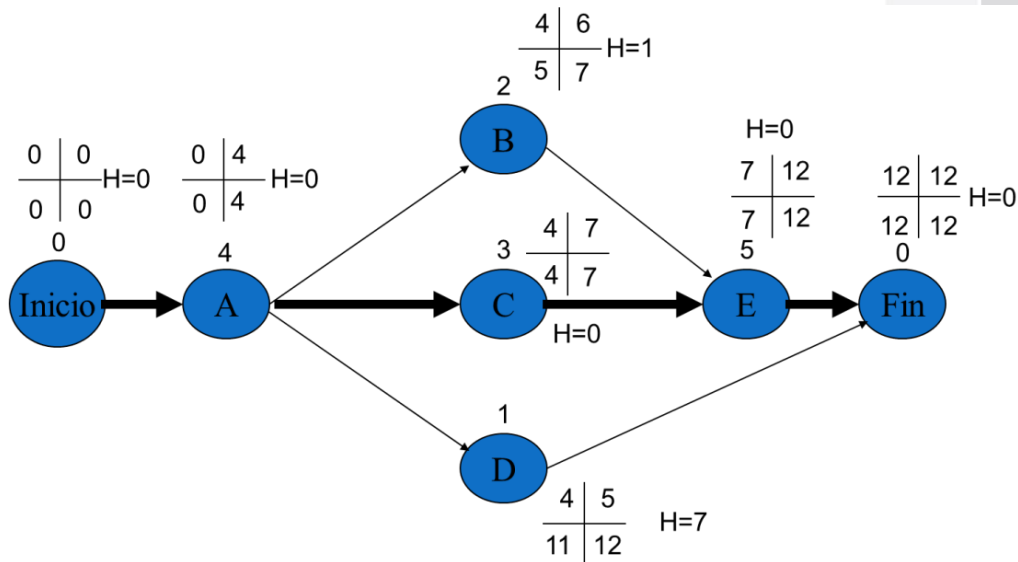


- La ruta crítica se encuentra como aquella ruta para la cual todas sus actividades tienen holgura igual a cero
- Generalmente se marca en la red la ruta crítica
- En este caso es la ruta:
 - Inicio – A – C – E – Fin

Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

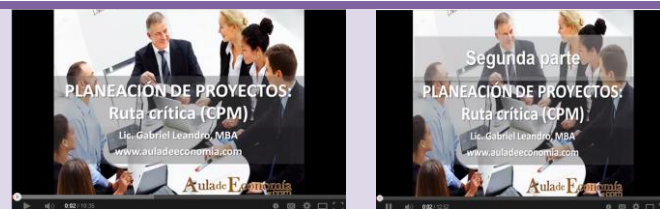
Contenido nuclear



Aprende observando

Método de la ruta crítica

En estos videos se muestra el Método de la ruta crítica Leandro G. (2014) (Archivo de vídeo) recuperado de




Marte (2014) (Archivo de vídeo) recuperado de



Cierre de la Unidad

En esta unidad asimilaste el concepto de discretización y los algoritmos para los caminos más cortos. Ahora cuentas con las herramientas para trabajar con las rutas de conexión.



Matemáticas discretas

Unidad 3. Discretización

Contenido nuclear

Fuentes de consulta

Grimaldi. R. (1990). *Matemática discreta y combinatoria*. 3ª edición. México. Editorial Pearson

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. (6ª Edición), México. Editorial Pearson