



DESARROLLO DE SOFTWARE SEMESTRE 2

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:
CÁLCULO DIFERENCIAL

UNIDAD 4.
APLICACIONES DE LA DERIVADA

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO DEL 2017

UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE
MÉXICO



UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

ÍNDICE

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA	3
PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD	3
PROPÓSITO	3
COMPETENCIA ESPECÍFICA.....	3
4.1. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO	4
4.2. RECTA TANGENTE A UNA CURVA.....	13
4.3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS	22
4.3.1. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA.....	22
4.3.2. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.....	33
4.4. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN	38
CIERRE DE LA UNIDAD.....	52
PARA SABER MÁS.....	53
FUENTES DE CONSULTA.....	53

UNIDAD 4. APlicaciones de la DERIVADA

UNIDAD 4. APlicaciones de la DERIVADA

PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

En esta unidad se presentan algunas de las aplicaciones más elementales de la derivada como son la razón de cambio, la recta tangente a una curva, los máximos y mínimos relativos y el método para graficar funciones.

Estas aplicaciones se desarrollan en diversos contextos, para ver las diversas áreas que abarca el Cálculo diferencial y de manera específica la derivada. En Física es común contextualizar la derivada como tal, por ejemplo, la razón de cambio que existe entre la velocidad a razón del tiempo.

Durante esta unidad, la intención es desarrollar ejercicios donde se refleje la razón de cambio, representarlos gráficamente, representar una recta tangente a una curva, así como encontrar máximos y mínimos, en problemas contextualizados.

PROPÓSITO

Identificar en un problema la variación de una cantidad con respecto a otra para interpretarla como la derivada de una función.

COMPETENCIA ESPECÍFICA

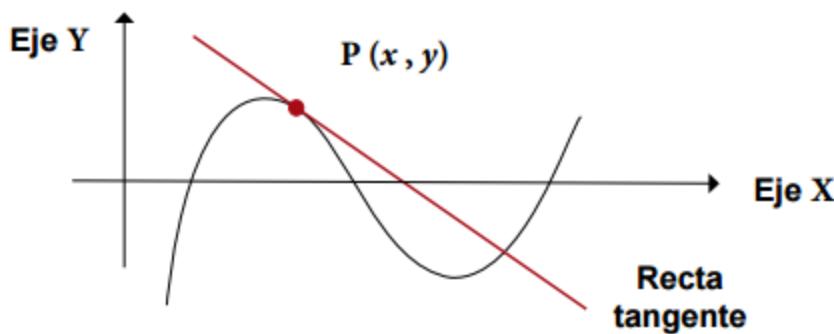
Utilizar las propiedades de la derivada para resolver problemas de aplicaciones, a través de la de la derivada como razón de cambio.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.1. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

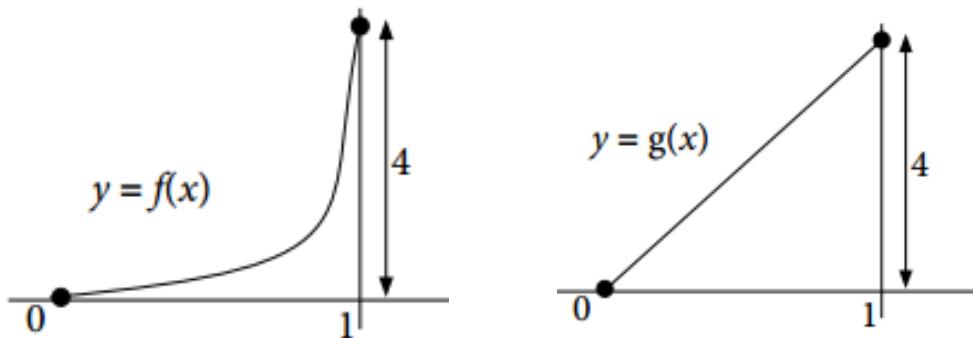
El concepto derivada, como caso particular de una razón de cambio, se relaciona con el concepto geométrico tangente para su interpretación geométrica, y con el concepto físico de velocidad instantánea para su interpretación física (Balabasquer, 1994). Aquí es importante, para efecto de profundizar en la conceptualización, que se calculen derivadas de funciones sencillas a partir de la definición de derivada, así como de hallar ecuaciones de rectas tangentes y normales a una curva dada. En resumen, estos nuevos conocimientos están muy asociados a problemas que han sido siempre muy importantes para el hombre, como son:

El problema de determinar la recta tangente a una curva cualquiera en un punto dado $P(x, y)$ de su gráfica, que es equivalente a hallar la pendiente de dicha curva en ese punto



La forma de cuantificar la rapidez, o razón de cambio, con la que cambia una magnitud, por ejemplo, la velocidad de un móvil en kilómetros por hora:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Ejemplo:

Cuando el precio de venta de un libro es \$100 se venden al mes 60 libros. Al aumentar el precio a \$110 se venden al mes 40 libros. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de las ventas mensuales con respecto al precio?

Resolución:

Sea “p” el precio de venta, y “n(p)” los libros vendidos al mes. Entonces la razón promedio es:

$$\Delta p = (110) - (100) = 10 \quad y \quad \Delta n = (40) - (60) = -20 \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta p} = \frac{(40) - (60)}{(110) - (100)} = \frac{-20}{10} = -2$$

En este caso, el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta n}{\Delta p} = -2$ significa que por cada peso que se incrementó el precio, se vendieron en promedio unos 2 libros menos.

Ejemplo

A las 10 horas hay 2000 bacterias en un frasco. A las 15 horas hay 12000 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población de bacterias con respecto al tiempo? Resolución: Sea “t” el tiempo en horas, y “p(t)” la población de bacterias en ese tiempo, entonces.

$$\begin{aligned} \Delta t &= (15) - (10) = 5 \quad y \quad \Delta p = (12000) - (2000) = 10000 \\ \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \frac{(12000) - (2000)}{(15) - (10)} = \frac{10000}{5} = 2000 \end{aligned}$$

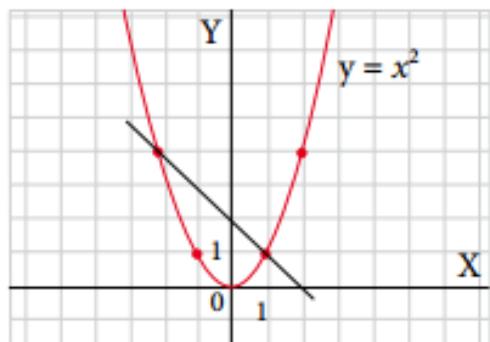
UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

En este caso, el cociente o la razón promedio $\frac{\Delta p}{\Delta t} = 2000$ significa que por cada hora que pasó el tiempo, la población creció en promedio unas 2000 bacterias. ¿Cuántas bacterias había entonces en promedio a las 12 y 14 horas?

Ejemplo:

Calcular la pendiente de la recta secante que cruza a la gráfica de la función cuadrática $y=x^2$ en los puntos P (1,1) y Q (x, y)

La pendiente está determinada por la siguiente razón de cambio promedio de "y" con respecto a "x":



$$\Delta x = x - 1 \Rightarrow \Delta y = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

La idea detrás de este tipo de problemas surge de la física, en mecánica se estudia la velocidad y la aceleración de una partícula en un determinado punto, la velocidad no es más que la variación de la distancia con respecto al tiempo y la aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, la primera se interpreta como la primera derivada y la segunda como la derivada de la velocidad, es decir, la segunda derivada.

Considera que una variable y depende de la variable x , es decir, se tiene que $y = y(x)$, además la variable x depende de algún parámetro t , en símbolos $x = x(t)$, a la variable t a veces suele llamársele tiempo. La regla de la cadena garantiza que:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

$$\frac{d}{dt}[y(x(t))] = \frac{d}{dx}y(x) \Big|_{x=y(x)} \frac{d}{dx}[x(t)]$$

Lo cual establece la velocidad con la que está variando y con respecto a t en términos de la velocidad de y con respecto a x y la velocidad de x con respecto a t .

Ejemplo

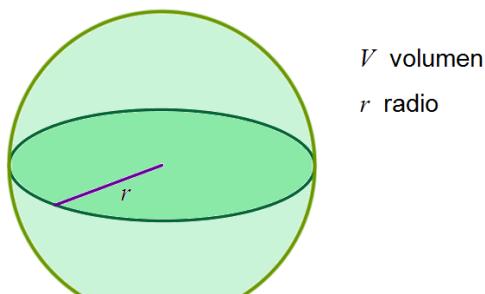
El volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ donde r es el radio de la esfera. Supóngase que el radio r varía con respecto al tiempo entonces el volumen de la esfera también tiene una variación con el tiempo, la regla de la cadena afirma que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dr}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=r(t)} \frac{d}{dt}(r(t)) = 4\pi(r(t))^2 \frac{d}{dt}(r(t))$$

Ejemplo

Hallar la razón con que una pelota esférica se desinfla sabiendo que cuando radio es 3cm este varia con una velocidad de 0.5 cm/min.

Solución: Antes que nada, es recomendable realizar un esquema que ejemplifique el ejercicio y que muestre las variables y constantes que estén en juego. En este caso se tiene lo siguiente:



Esquema ejemplo

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Después se presentan las relaciones entre las variables con el objetivo de observar las dependencias que hay entre ellas. En este caso el volumen de una esfera depende del radio de la misma con la relación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, observa que el radio r está en centímetros y que depende del tiempo t donde el tiempo está en minutos.

Luego hay que identificar las cantidades que están variando y representarlas como derivadas, en este ejercicio, se tiene que la frase “su radio varía con una velocidad de 0.5 cm/min ” se interpreta como $\frac{dr}{dt} = -0.5 \text{ cm/min}$ (recuerda que una derivada con signo negativo significa que la función decrece) además la frase “la razón con que una pelota esférica se desinfla” se interpreta como la velocidad con la que el volumen de la esfera está variando con respecto al tiempo, en símbolos se utiliza $\frac{dV}{dt}$, de forma más concreta se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

El resultado se obtiene sustituyendo $\frac{dr}{dt} = -0.5 \text{ cm/min}$ y $r = 3 \text{ cm}$ del siguiente modo:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi(3 \text{ cm})^2 (-0.5 \text{ cm/min}) = -18\pi \text{ cm}^3 / \text{min}.$$

Por lo tanto, el volumen de la pelota decrece a razón de $18\pi \text{ cm}^3 / \text{min}$.

Ejemplo

Una escalera de 4 m de longitud está apoyada contra una pared vertical, esta resbala alejándose de la pared a una velocidad constante de 0.6 m/seg. Cuando la escalera está a 3 m de la pared ¿Qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera hasta caer al suelo?

Solución

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Como se mencionó en el ejemplo anterior hay que realizar un diagrama ilustrativo, como lo muestra la siguiente figura:

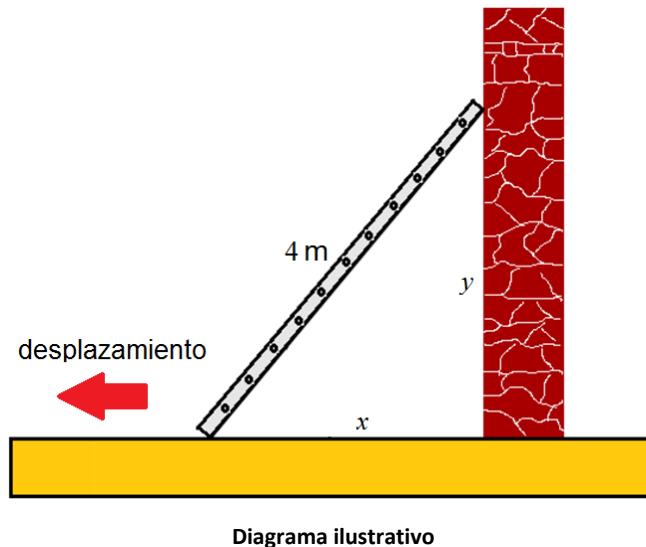


Diagrama ilustrativo

Como x y y son los catetos de un triángulo rectángulo, donde x y y están en metros, el teorema de Pitágoras afirma que $y = \sqrt{4^2 - x^2} = \sqrt{16 - x^2}$. Que la escalera resbala alejándose a una velocidad constante de 0.6 m/seg significa que $\frac{dx}{dt} = 0.6$ y la velocidad con la que se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera es $\frac{dy}{dt}$, observa que distancia x está en metros y que depende del tiempo t donde el tiempo está en segundos. Luego se tiene que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}(\sqrt{16 - x^2}) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \frac{d}{dx}(16 - x^2) \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \frac{dx}{dt}$$

Solo basta sustituir $\frac{dx}{dt} = 0.6$ y $x = 3$, de lo cual se obtiene:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \frac{dx}{dt} = -\frac{(3)}{\sqrt{16 - (3)^2}} (0.6) = -\frac{1.8}{\sqrt{16 - 9}} = -\frac{1.8}{\sqrt{7}}$$

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Por lo tanto, la velocidad con la que se desliza hacia abajo (recuerda lo que significa una derivada negativa) la parte superior de la escalera es de $-\frac{1.8}{\sqrt{7}}$ m/seg.

Como habrás observado en los primeros dos ejercicios hay un algoritmo para desarrollar un problema de razón de cambio, a manera de sugerencia se presenta el siguiente método:

- Paso 1. Define las variables de la ecuación que obtendrás especificando bien en que unidades se está trabajando.
- Paso 2. Escribe las relaciones que hay entre las variables y sus derivadas con respecto al tiempo.
- Paso 3. Identifica lo que tienes que calcular.
- Paso 4. Escribe la relación que hay entre las variables que dependen del tiempo.
- Paso 5. Deriva con respecto al tiempo la relación encontrada en el paso anterior.
- Paso 6. Sustituye los valores de las cantidades conocidas en la ecuación del paso anterior.
- Paso 7. Presenta la conclusión de todo lo realizado en los pasos anteriores.

Para exemplificar lo anterior se presenta lo siguiente:

Ejercicio: En un tambo de forma cilíndrica de 16m de altura y 4m de radio, se comienza a llegar con un líquido a razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$ ¿Qué tan rápido sube el nivel del líquido cuando se ha alcanzado 5m de altura?

Solución: Se procede como lo indica el algoritmo antes presentado:

Paso 1. Se definen las siguientes variables: sea t el tiempo en minutos, h la altura del cilindro, y

V el volumen del cilindro.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 2. El líquido fluye en el tambo a razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$ lo que implica que $\frac{dV}{dt} = 2$.

Paso 3. Se desea calcular la razón de cambio de la altura con respecto al tiempo $\frac{dh}{dt}$.

Paso 4. En cualquier instante, el volumen del tambo se expresa por $V = 16\pi h$ ya que el área del círculo de radio 4 es igual a $\pi(4)^2 = 16\pi$.

Paso 5. Derivando la relación anterior con respecto a t se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = 16\pi \frac{dh}{dt}.$$

Paso 6. Se sustituye $\frac{dV}{dt} = 2$ y $h = 5$ para obtener $2 = 16\pi \frac{dh}{dt}$, es decir $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{8\pi}$, observa que la relación anterior no depende de h .

Paso 7. Por lo tanto, la variación de altura con respecto al tiempo es de $\frac{1}{8\pi} \text{ m/min}$.

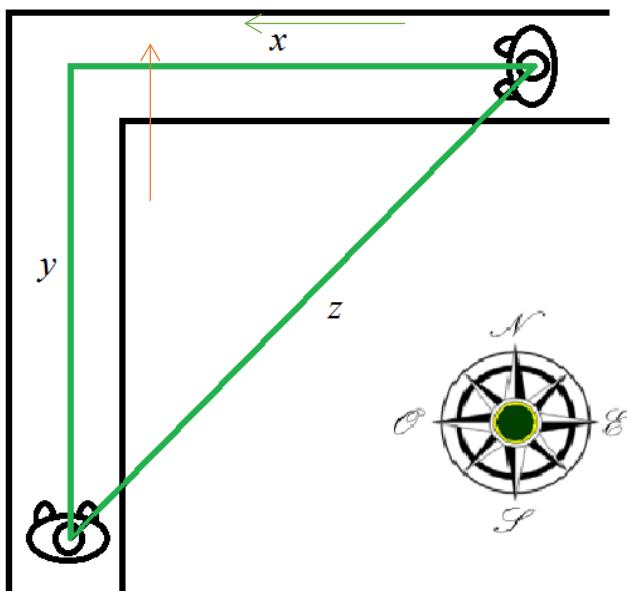
Ejemplo:

Dos personas van caminando, uno va hacia el oeste a una velocidad de 0.8 m/s y el otro va hacia el norte a 1.2 m/s , van hacia una misma esquina. ¿Con qué velocidad se está aproximando uno al otro en el momento en que la primera persona está a 12 m y la segunda se encuentra a 18 m de dicha esquina?

Solución: Se procede como lo indica el algoritmo antes presentado:

Paso 1. Se definen las siguientes variables:

Sea t el tiempo en segundos, x la distancia en metros que tiene que recorrer la primera persona, y la distancia en metros que tiene que recorrer la segunda persona, y z La distancia en metros que hay entre las dos personas.



Representación de variables 1

Paso 2. Como la primera persona se mueve con una velocidad de 0.8 m/s y la otra con

1.2 m/s se tiene que $\frac{dx}{dt} = -0.8$ y $\frac{dy}{dt} = -1.2$, signo negativos son porque x y y decrecen.

Paso 3. Se desea calcular $\frac{dz}{dt}$ en el instante cuando $x=12$ y $y=18$.

Paso 4. El teorema de Pitágoras garantiza que $x^2 + y^2 = z^2$.

Paso 5. Derivando la relación anterior con respecto a t se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dt}(z^2) \\ 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 2z\frac{dz}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \end{aligned}$$

La relación de Pitágoras afirma que cuando $x=12$ y $y=18$, se tiene que $z = \sqrt{(12)^2 + (18)^2} = 6\sqrt{13}$ y sustituyendo en la relación anterior se tiene lo siguiente:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{z} = \frac{(12)(-0.8) + (18)(-1.2)}{6\sqrt{13}} = -1.44$$

En dicho momento, las personas se acercan a una velocidad de 1.44 m/s .

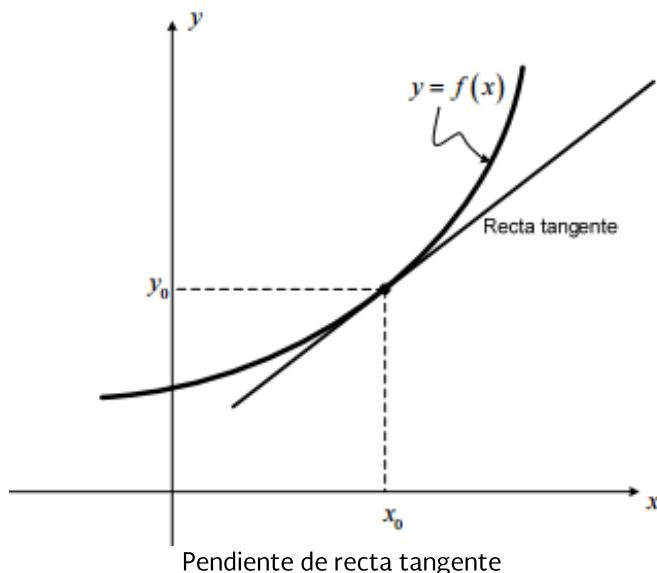
4.2. RECTA TANGENTE A UNA CURVA

La palabra tangente viene del latín *tangens*, que significa tocar (RAE, 2017) y hace referencia a “dos o más líneas o superficies: Que se tocan o tienen puntos comunes sin cortarse.”



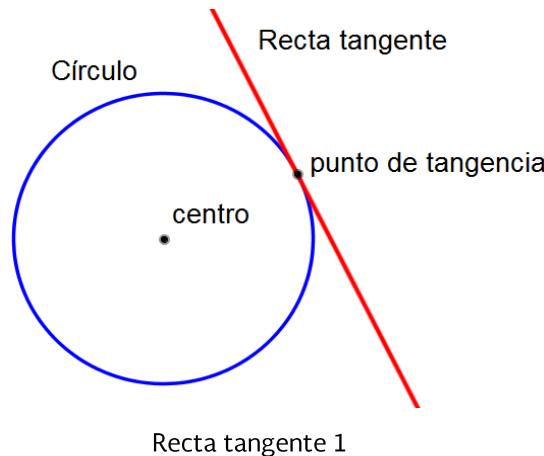
Tangente a una curva. Como se observa en la figura de la izquierda, la línea roja es tangente a la curva en el punto marcado con un punto rojo.

Pendiente de Recta tangente. Al plantear la ecuación de una recta tangente a la gráfica de una función f , en un punto $0 x$. A continuación se expresa la siguiente gráfica.

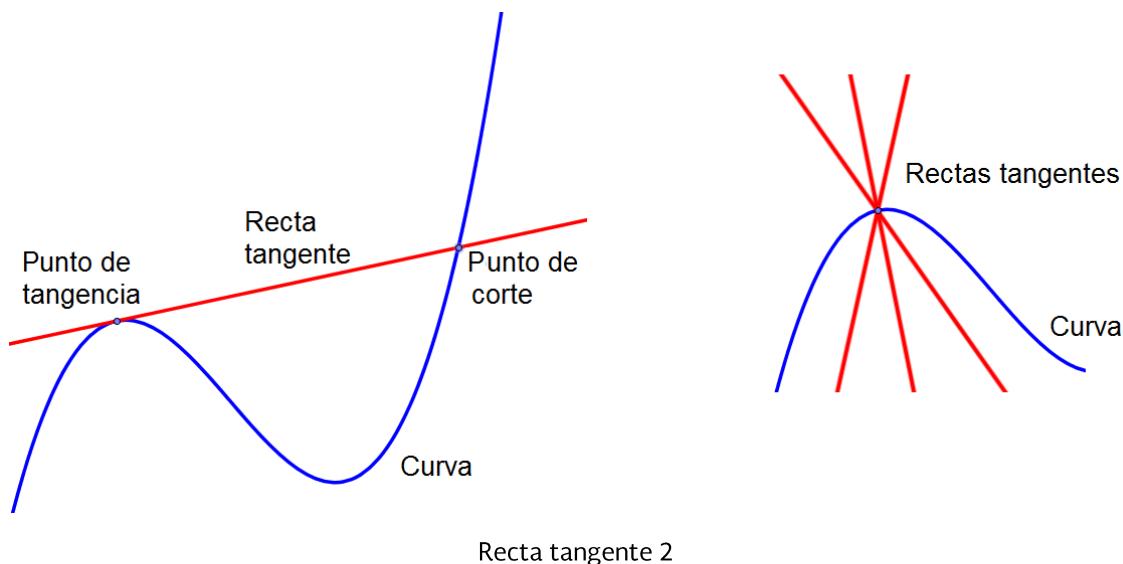


UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Una gran cantidad de problemas que se presentan en cálculo y física se resuelven encontrando la recta tangente a una curva en un determinado punto. El concepto de tangente a una curva tiene su origen en el estudio del círculo, aquí una recta tangente es aquella que toca al círculo en uno y sólo un punto, como lo muestra la figura siguiente:



Esta definición no es aplicable a cualquier curva, en algunos casos no se considerarían rectas tangentes y en otros casos no se podría determinar dicha recta, como lo muestran las siguientes figuras:



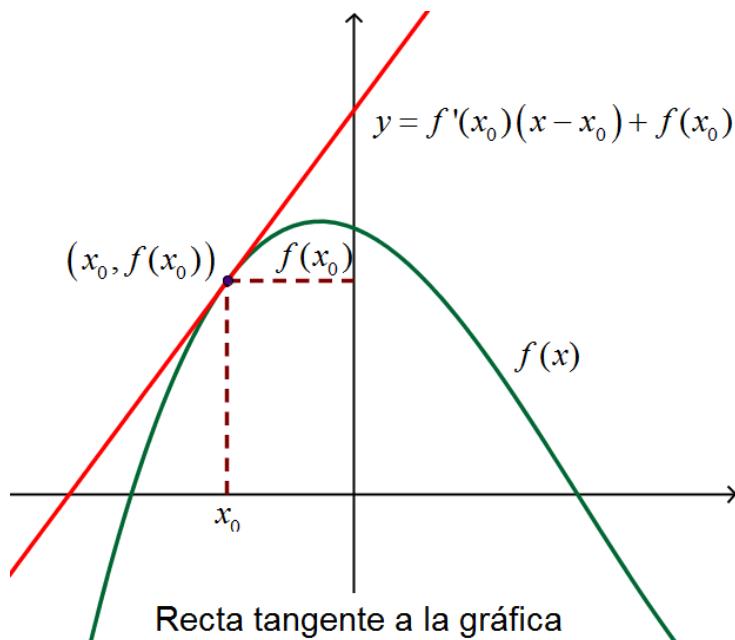
UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Para evitar ambigüedades como las presentadas en las figuras anteriores, se define la recta tangente a una curva en un punto de la siguiente manera:

Definición 4.2.1: Sea $f(x)$ una función derivable en algún intervalo que contenga a x_0 . La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por la relación:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dado que la gráfica de una función es única haciendo un abuso de lenguaje en vez de decir “la recta tangente a la gráfica” se suele decir “la recta tangente a la función”, gráficamente la recta tangente se presenta de la siguiente manera:



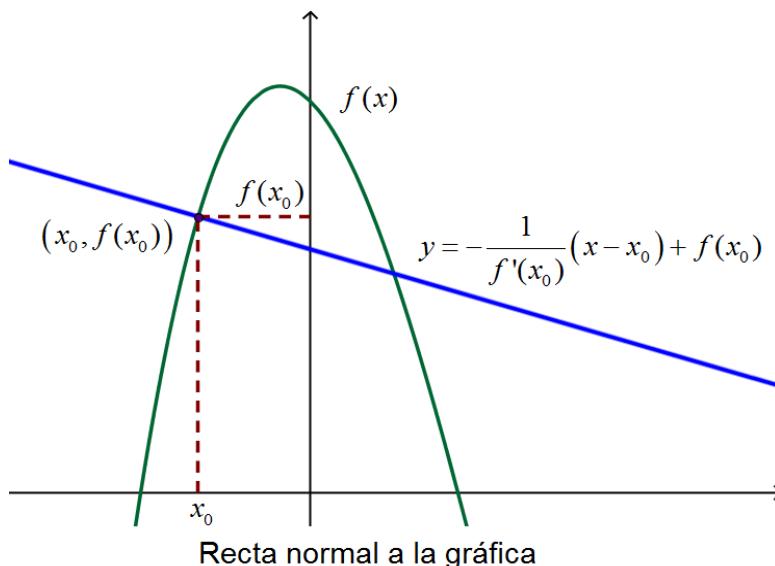
De manera similar, a la recta tangente se define la recta normal a una curva como se presenta a continuación:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Definición 4.2.2: Sea $f(x)$ una función derivable en algún intervalo que contenga a x_0 , con $f'(x_0) \neq 0$, la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por la relación:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

De manera similar al caso de la recta tangente se suele decir “la recta normal a la función”. Gráficamente la recta normal se presenta de la siguiente manera:



Debes observar que la recta tangente y la recta normal son ortogonales hay un ángulo de 90 grados entre su intersección. Además, cuando la recta tangente es horizontal la recta normal es vertical. También algo que debe tener en cuenta todo se basa en **tener el del punto de tangencia y el valor de la derivada en dicho punto.**

Ejemplo.

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a la función $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto $(1, -2)$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

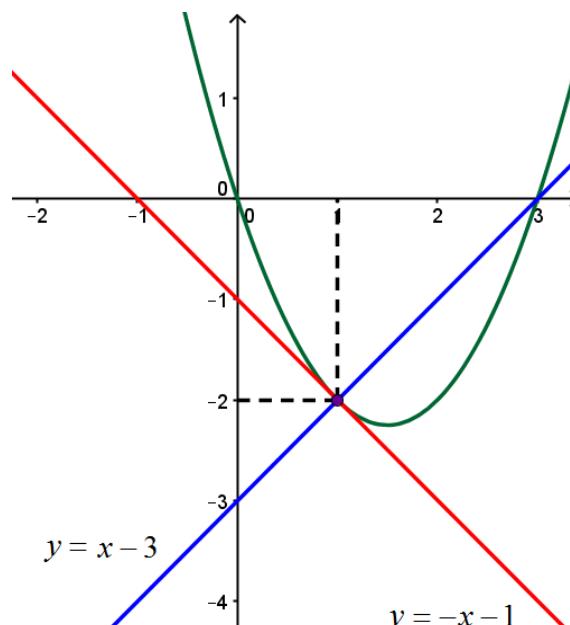
Solución: Utilizando la notación de la Definición 4.2.1 se tiene que $x_0 = 1$ y $f(x_0) = -2$, luego $f'(x) = 2x - 3$, en particular cuando $f'(1) = 2(1) - 3 = -1$ por consiguiente la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (-1)(x - 1) - 2 = -x - 1$$

Por otro lado, la ecuación de la recta normal es:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{(-1)}(x - 1) - 2 = x - 3$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Gráfica recta tangente 1

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $y = 9x - 4$.

Solución: Hay que observar que en este ejercicio no se proporciona las coordenadas del punto de tangencia, sin embargo se proporciona el valor de la derivada en dicho

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

punto ya que dos rectas en el plano son paralelas si y sólo sus pendientes son iguales significa que la recta $y=9x-4$ y la recta ℓ tangente la función tienen pendiente $m=9$

En consecuencia el problema se limite a encontrar todo x tales que la derivada de la $f(x)=x^3-3x$ sea igual a 9, es decir $y'=9$. Por consiguiente:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x) = 3x^2 - 3 = 9$$

Resolviendo algebraicamente:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 9 \\ 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Es decir, hay dos punto cuyas recta ℓ_1 y ℓ_2 que son tangentes a $f(x)=x^3-3x$ y que son paralelas a la recta $y=9x-4$. Consideramos los siguientes casos:

- Cuando $x=2$ se tiene que $f(2)=(2)^3-3(2)=2$, es decir, el punto tangencia es $(2,2)$ y la pendiente de la recta es $f'(2)=9$, lo que implica que:

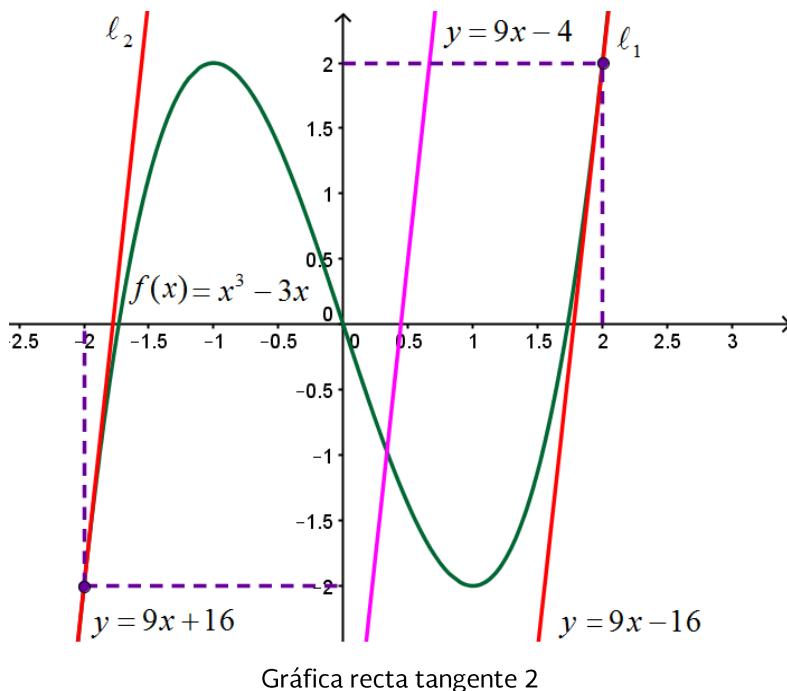
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16.$$

- Cuando $x=-2$ se tiene que $f(-2)=(-2)^3-3(-2)=-2$, es decir, el punto tangencia es $(-2,-2)$ y la pendiente de la recta es $f'(-2)=9$, lo que implica que:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16.$$

La representación gráfica de lo anterior es la siguiente:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Gráfica recta tangente 2

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2$ en el punto

$$\left(-\frac{1}{2}, -2\right).$$

Solución: Primero hay que observar que la información no proporciona ni los puntos de tangencia ni las pendientes de dichas rectas. Como se presentó al inicio de la sección la ecuación de la recta tangente a una curva tiene la forma:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Observa que $f'(x_0) = 2x_0$ y $f(x_0) = x_0^2$, lo que permite obtener la siguiente relación:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$$

Dado que las rectas tangentes pasan por el punto $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, este debe de satisfacer

la relación anterior, esto permite obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} y &= 2x_0x - x_0^2 \\ -2 &= 2x_0\left(-\frac{1}{2}\right) - x_0^2 \\ x_0^2 + x_0 - 2 &= 0 \\ (x_0 + 2)(x_0 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Entonces $x_0 = -2$ o $x_0 = 1$. Por lo cual tenemos los siguientes casos.

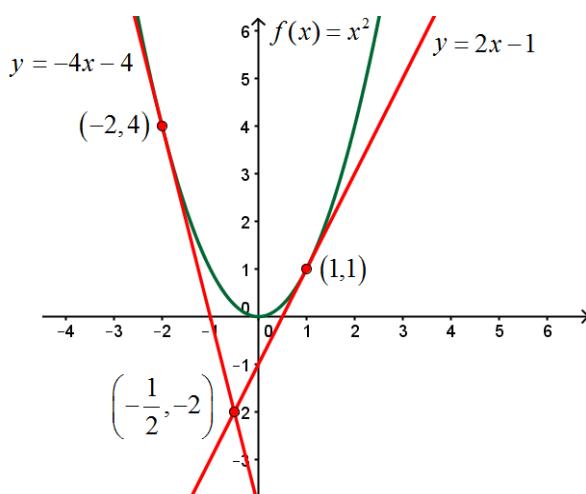
- Cuando $x_0 = -2$ se tiene que $f(2) = (2)^2 = 4$, es decir, el punto tangencia es $(-2, 4)$ y la pendiente de la recta es $f'(-2) = 2(-2) = -4$, lo que implica que:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -4(x + 2) + 4 = -4x - 4.$$

- Cuando $x_0 = 1$ se tiene que $f(1) = (1)^2 = 1$, es decir, el punto tangencia es $(1, 1)$ y la pendiente de la recta es $f'(1) = 2(1) = 2$, lo que implica que:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Gráfica recta tangente 3

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y + 3 = 0$ en el punto $(1, -2)$

Solución: En este tipo de ejercicio, primero hay que verificar si el punto verdaderamente pertenece a la curva, sustituyendo los valores asignado a las variables, en este caso $x=1$ y $y=-2$:

$$(1)^2 + 4(1)(-2) + (-2)^2 + 2(1) + (-2) + 3 = 1 - 8 + 4 + 2 - 2 + 3 = 0$$

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Esto muestra que el punto de tangencia es $(1, -2)$. Ahora se procede a calcular la derivada de la función implícita definida por la relación $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y + 3 = 0$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y + 3) &= \frac{d}{dx}(0) \\ 2x + \left[4x \frac{dy}{dx} + 4y \right] + 2y \frac{dy}{dx} + 2 + \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx}[4x + 2y + 1] &= -2x - 4y - 2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x + 4y + 2}{4x + 2y + 1} \end{aligned}$$

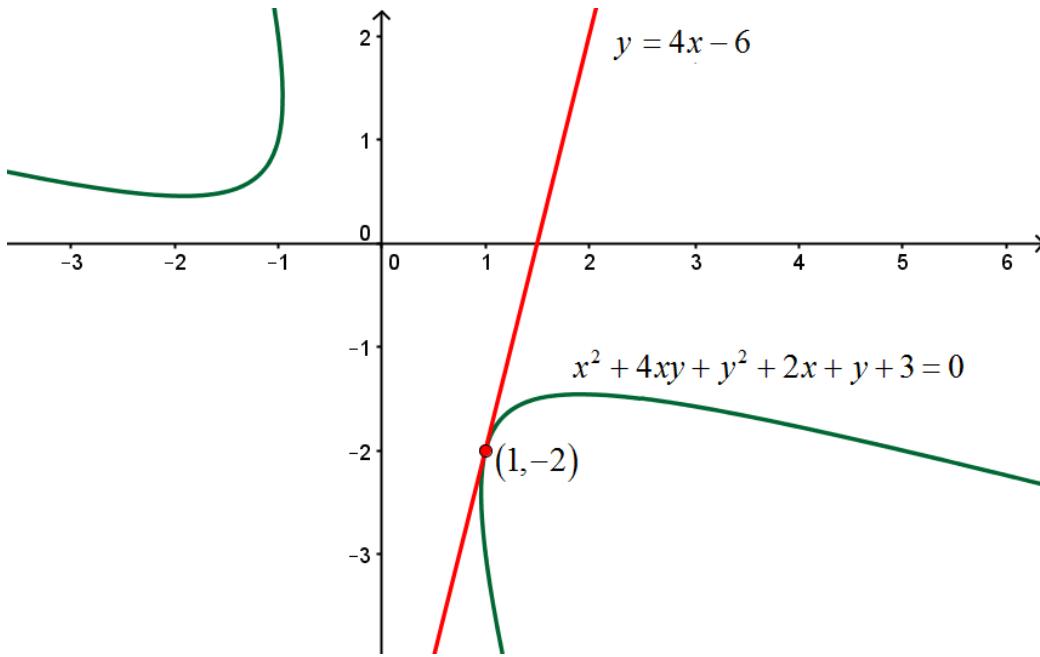
Sustituyendo $x=1$ y $y=-2$ se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(1) + 4(-2) + 2}{4(1) + 2(-2) + 1} = -\frac{2 - 8 + 2}{4 - 4 + 1} = -\frac{-4}{1} = 4$$

Finalmente se sustituye en la fórmula de la ecuación de la recta tangente:

$$y = 4(x - 1) - 2 = 4x - 6$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Gráfica recta tangente 4

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Imagina que tienes una empresa que fabrica de determinado producto, como dirigente te conviene obtener las mayores ganancias invirtiendo lo mínimo en la fabricación del producto, este es un ejemplo de un problema de máximos y mínimos. En esta sección se presentan importantes resultados los cuales relacionan la derivada con la optimización de funciones.

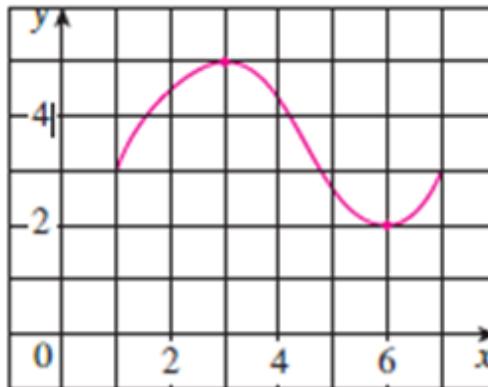
Algunas de las más importantes aplicaciones del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los que se nos pide hallar la forma óptima (la mejor) de hacer algo. Por ejemplo:

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice costos de manufactura?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial? (Ésta es una pregunta importante para los astronautas que tienen que resistir los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expulsa aire con más rapidez durante una tos?
- ¿A qué ángulo deben ramificarse los vasos sanguíneos para reducir al mínimo la energía consumida por el corazón al bombear sangre?

Estos problemas se pueden reducir a hallar valores máximos y mínimos de una función. Se explicará en primer lugar lo que se entiende por valores máximos y mínimos.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Se observa que el punto más alto en la gráfica de la función f mostrada en la Figura siguiente es el punto $(3, 5)$. En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Del mismo modo, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el máximo absoluto de f y $f(6) = 2$ es el mínimo absoluto.



Definiciones de máximo absoluto y mínimo absoluto:

Sea f una función con dominio D . Decimos que f tiene un valor máximo absoluto en D en un punto c si (Thomas, 2005, p. 244):

$$f(x) \leq f(c) \text{ para toda } x \text{ en } D$$

Y un valor mínimo absoluto en D en un punto c si

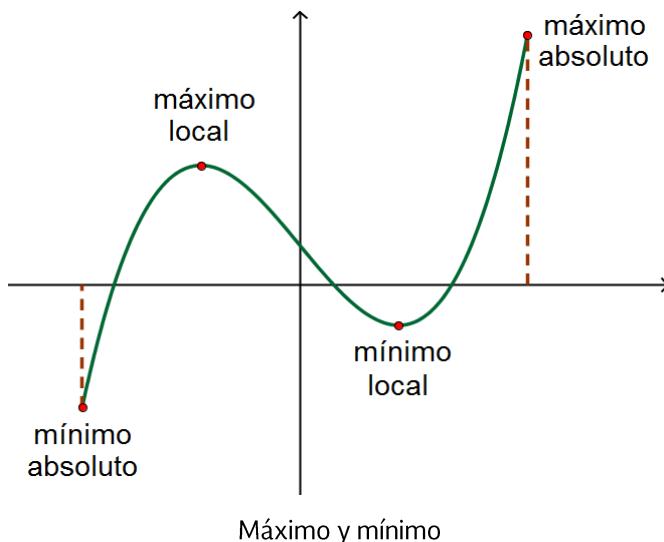
$$f(x) \geq f(c) \text{ para toda } x \text{ en } D$$

4.3.1. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

En el Teorema 3.1.9 afirma que cuando una función es derivable en un intervalo y tiene un máximo o mínimo entonces la derivada es nula en dichos puntos, de forma gráfica, la recta tangente a la curva en un punto máximo o mínimo es horizontal. Este teorema simplifica la buscada de los máximos o mínimos de una función.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

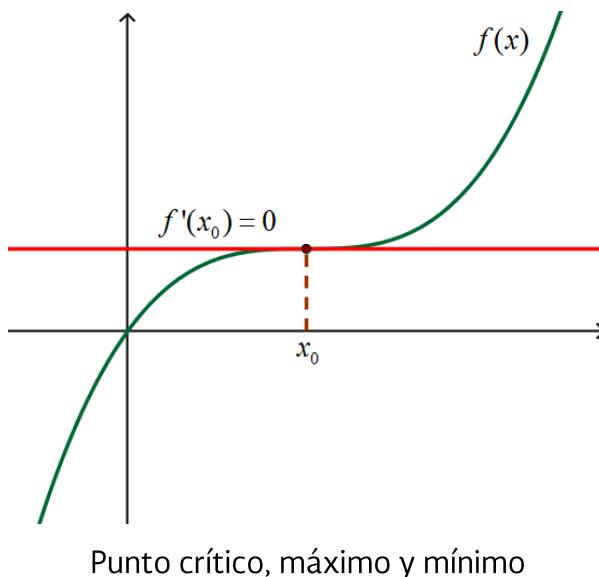
Los máximos y mínimo que se estudian en esta sección son de naturaleza local, esto quiere decir, que solo será válido alrededor de un pequeño intervalo, por consecuente se llaman máximo y mínimos **locales**. Los valores máximos y mínimos en todo el dominio de la función toman el nombre de máximo o mínimo **absolutos**. En lo sucesivo cuando se hable de máximo o mínimos se refiere a máximo y mínimos locales.



Definición 4.3.1. Dada una función $f(x)$ derivable en algún conjunto de punto. Se dice que x_0 es un **punto crítico de** $f(x)$ si y sólo si $f'(x_0)=0$.

El Teorema 3.1.9 afirma que los máximos y los mínimos de una función son puntos críticos, pero no todo punto crítico es un máximo o mínimo como lo muestra la siguiente figura:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Definición 4.3.2. Un punto crítico de $f(x)$ que no es ni máximo ni mínimo se llama **punto de inflexión**.

Recordando que, en una función derivable, si derivada positiva es creciente y si su derivada en negativa es decreciente, se tiene una clasificación de los puntos críticos de una función, conocido como **criterio de la primera derivada**.

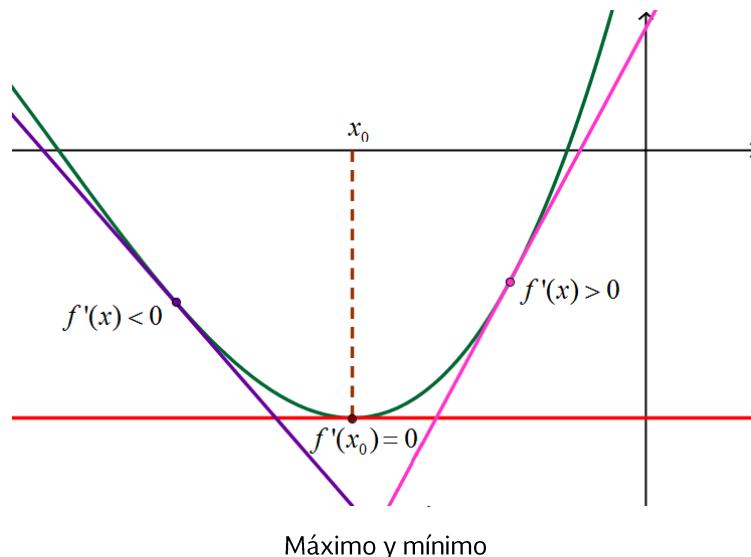
Teorema 4.3.3. Supóngase que $f(x)$ es derivable en un intervalo (a,b) que contenga al punto crítico x_0 de $f(x)$, entonces:

- (i). Si $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para $x_0 < x$, $f(x)$ toma un mínimo en x_0 .
- (ii). Si $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x_0 < x$, $f(x)$ toma un máximo en x_0 .
- (iii). Si $f'(x) < 0$ ó $f'(x) > 0$ para $x \neq x_0$, x_0 es un punto de inflexión de $f(x)$.

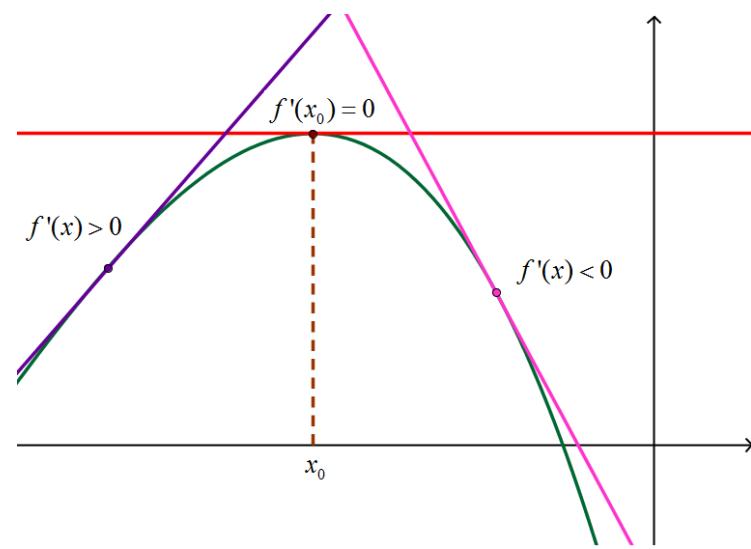
Demostración: Esto se obtiene aplicando el Teorema 3.5.4. y el Corolario 3.5.5 del siguiente modo:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

(i). Como $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ entonces $f(x)$ es decreciente y como $f'(x) > 0$ para $x > x_0$ entonces $f(x)$ es creciente, luego en x_0 la función deja de decrecer para comenzar a crecer entonces $f(x)$ toma un mínimo en x_0 .

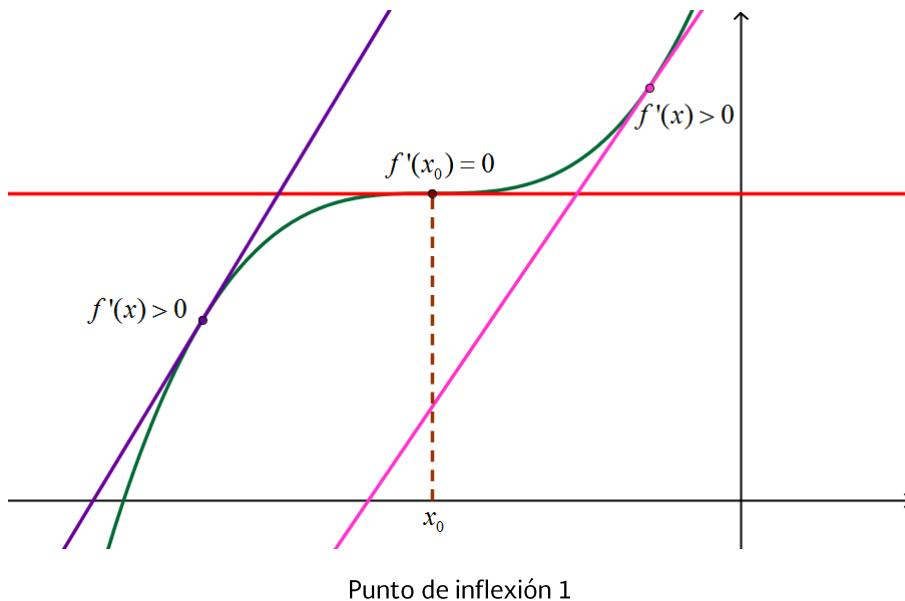


(ii). Como $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ entonces $f(x)$ es creciente y como $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ entonces $f(x)$ es decreciente, luego en x_0 la función deja de crecer para comenzar a decrecer entonces $f(x)$ toma un máximo en x_0 .



UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

(iii). Cuando $f'(x) > 0$ para $x \neq x_0$ entonces $f(x)$ creciente o cuando $f'(x) < 0$ para $x \neq x_0$ entonces $f(x)$ es decreciente, luego en x_0 la función $f(x)$ no deja de crecer o decrecer, así x_0 es un punto de inflexión de $f(x)$.



Lo que demuestra el teorema. \square

El teorema anterior afirma que para clasificar un punto crítico basta observar los cambios de signos que se presenta en la derivada para valores cercanos, uno menor y otro mayor, al punto crítico.

En resumen, para calcular los máximos o mínimos de funciones de una función derivable $f(x)$ se realizar el siguiente procedimiento:

Paso 1. Calcula el valor de $f'(x)$.

Paso 2. Encuentra los puntos críticos resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

Paso 3. Clasifica los puntos críticos.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ejemplo

Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: Se sigue el procedimiento antes mencionado:

Paso 1. Dado que $f(x) = x^3 - 3x$ implica que $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Paso 2. Tomando $f'(x) = 0$ implica que $3x^2 - 3 = 0$, de donde se obtiene que $x = \pm 1$.

Paso 3. Para $x_0 = -1$ se toma un valor cercano menor $x = -1.1$ y el valor cercano mayor $x = -0.9$ para observar:

$$f'(-1.1) = 3(-1.1)^2 - 3 = 0.63 \quad y \quad f'(-0.9) = 3(-0.9)^2 - 3 = -0.57$$

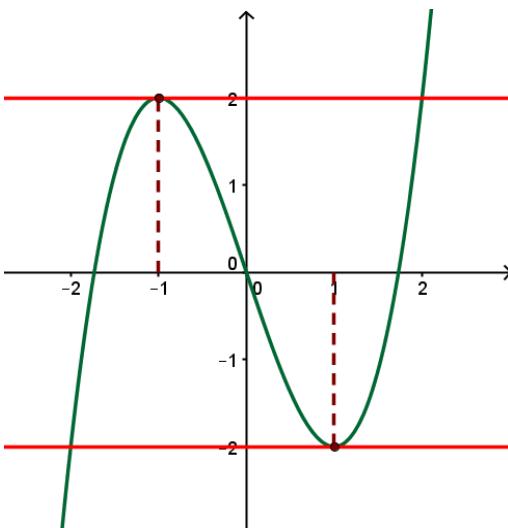
Es decir, la derivada pasa de un valor positivo a otro negativo, esto quiere decir que $f(x) = x^3 - 3x$ toma un máximo en $x_0 = -1$.

Para $x_0 = 1$ se toma un valor cercano menor $x = 0.8$ y el valor cercano mayor $x = 1.2$ para observar:

$$f'(0.8) = 3(0.8)^2 - 3 = -1.08 \quad y \quad f'(1.2) = 3(1.2)^2 - 3 = 1.32$$

Es decir, la derivada pasa de un valor negativo a otro positivo, esto quiere decir que $f(x) = x^3 - 3x$ toma un mínimo en $x_0 = 1$.

Gráficamente, se tiene lo siguiente:

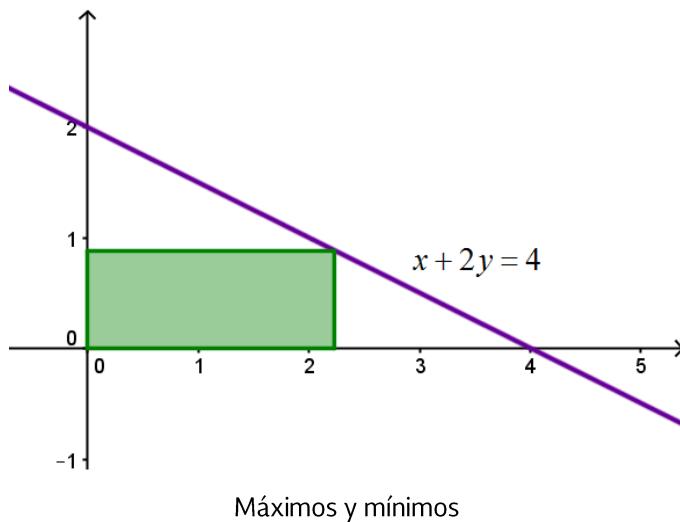


Máximo y mínimo de la función 1

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ejemplo

Considera la recta $x + 2y = 4$ y todos los rectángulos que se forman de manera similar al que muestra la siguiente figura:



Hallar el rectángulo de mayor área.

Solución

En este tipo de problemas hay que identificar claramente que se desea maximizar o minimizar, en este caso concreto se desea maximizar el área del rectángulo. Sean x y y la base y la altura del rectángulo respectivamente. En consecuencia, el área del mismo es igual a $A = xy$.

Por otro lado, hay que observar que un vértice está sobre la recta $x + 2y = 4$, lo que permite hacer depender una variable de la otra, sigamos $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (también se puede hacer depender x de y). Esto permite expresar el área del rectángulo con función de la variable x del siguiente modo $A = xy = x \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

La función a maximizar es $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, para ello se utiliza el procedimiento antes presentado:

Paso 1. Dado que $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ implica que $A'(x) = -x + 2$.

Paso 2. Tomando $A'(x) = 0$ implica que $-x + 2 = 0$, de donde se obtiene que $x = 2$.

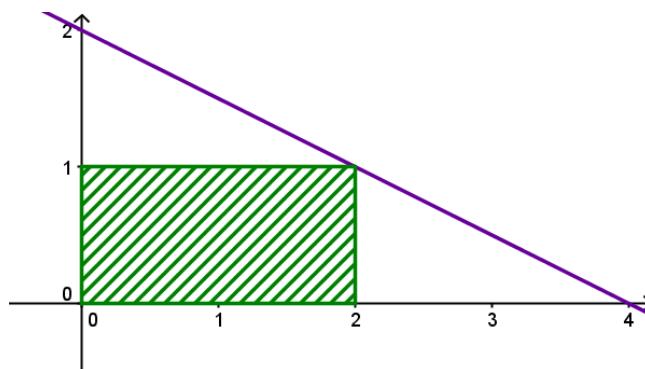
Paso 3. Para $x_0 = 2$ se toma un valor cercano menor $x = 1.5$ y el valor cercano mayor $x = 2.1$ para observar:

$$A'(1.5) = -(1.5) + 2 = 0.5 \quad y \quad A'(2.1) = -(2.1) + 2 = -0.1$$

Es decir, la derivada pasa de un valor positivo a otro negativo, esto quiere decir que

$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ toma un máximo en $x_0 = 2$.

Cuando $x = 2$ se tiene que $y = -\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}(2) + 2 = 1$, por consiguiente, el triángulo mostrado en la figura es quien tiene más área:



Rectángulo de mayor área

Ejemplo

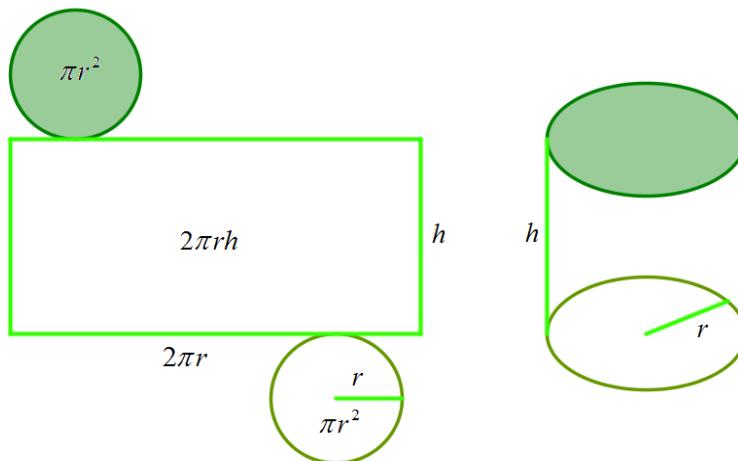
Se desea construir una lata de aluminio en forma de cilindro de tal forma que su superficie sea de 100 cm^2 y que tenga el volumen máximo.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Solución

Hay que observar que, aunque seas un experto en maximizar y minimizar funciones, si no se conoce como se construye un cilindro este ejercicio no lo podrás entender.

Primero hay que recordar que el desarrollo de un cilindro es el siguiente, donde r es el radio de la base y h su altura, observa que ambas variables están dadas en centímetros:



Esquema 1

La superficie del cilindro es igual a la suma de las áreas de los círculos con el rectángulo; cada una de las áreas de los círculos son igual πr^2 , hay que observar que la base del rectángulo y la circunferencia tienen que tener la misma longitud es igual a $2\pi r$, por consiguiente la superficie del desarrollo del cilindro es:

$$\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 100$$

Además, el volumen de un cilindro está dado por la fórmula $V = \pi r^2 h$, por consiguiente resolver la relación $\pi r^2 + \pi r h = 50$ en términos de h se tiene que $h = \frac{50 - \pi r^2}{\pi r}$ y esto permite expresar el volumen V como una función del radio r del siguiente modo:

$$V = \pi r^2 h = h = \pi r^2 \left[\frac{50 - \pi r^2}{\pi r} \right] = r(50 - \pi r^2) = 50r - \pi r^3$$

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

La función a maximizar es $V(r) = 50r - \pi r^3$. Para ello se realiza lo siguiente:

Paso 1. Dado que $V(r) = 50r - \pi r^3$ implica que $V'(r) = 50 - 3\pi r^2$.

Paso 2. Tomando $V'(r) = 0$ implica que $50 - 3\pi r^2 = 0$, de donde se obtiene que $r = \pm \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$

Paso 3. El valor $r_0 = -\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$ no se toma en cuenta ya que r es una distancia y no puede ser negativa. Para $r_0 = \sqrt{\frac{50}{3\pi}} = 2.303\dots$ se toma un valor cercano menor $r = 2$ y el valor cercano mayor $r = 2.5$ para observar:

$$V'(2) = 50 - 3\pi(2)^2 = 50 - 12\pi > 0 \quad \text{y} \quad V'(2.5) = 50 - 3\pi(2.5)^2 = 50 - 18.75\pi < 0$$

Es decir, la derivada pasa de un valor positivo a otro negativo, esto quiere decir que

$V(r) = 50r - \pi r^3$ toma un máximo en $r_0 = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$.

Cuando $r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$ se tiene que

$$h = \frac{50 - \pi \left(\sqrt{\frac{50}{3\pi}}\right)^2}{\pi \sqrt{\frac{50}{3\pi}}} = \frac{50 - \pi \left(\frac{50}{3\pi}\right)}{\pi \sqrt{\frac{50}{3\pi}}} = 10\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$$

Por lo tanto, el cilindro de superficie 100 cm^2 y que tiene volumen máximo se tiene

cuando el radio $r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}} \text{ cm}$ y su altura es $h = 10\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \text{ cm}$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.3.2. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

En la sección anterior se presentó un método para hallar los máximos y mínimos locales de funciones derivables, se observó que la clave de todo es clasificar los puntos críticos de la función, pero para clasificar un punto crítico se requiere de elegir un punto menor y otro mayor a tal punto, esto puede ser engañoso ya que una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿estoy tomando un valor cercano adecuadamente?, cuando la función es dos veces diferenciable, esta elección no será necesaria, como lo indica el siguiente resultado, conocido con el **criterio de la segunda derivada**.

Teorema 4.3.4. Supóngase x_0 es un punto crítico de $f(x)$ y que $f''(x_0)$ existe, entonces:

- (i). Si $f''(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ tiene un mínimo en x_0 .
- (ii). Si $f''(x_0) < 0$ entonces $f(x)$ tiene un máximo en x_0 .

Demostración: Aplicando la definición de segunda derivada en x_0 se tiene:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Por hipótesis como $f'(x_0) = 0$ se tiene que $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$.

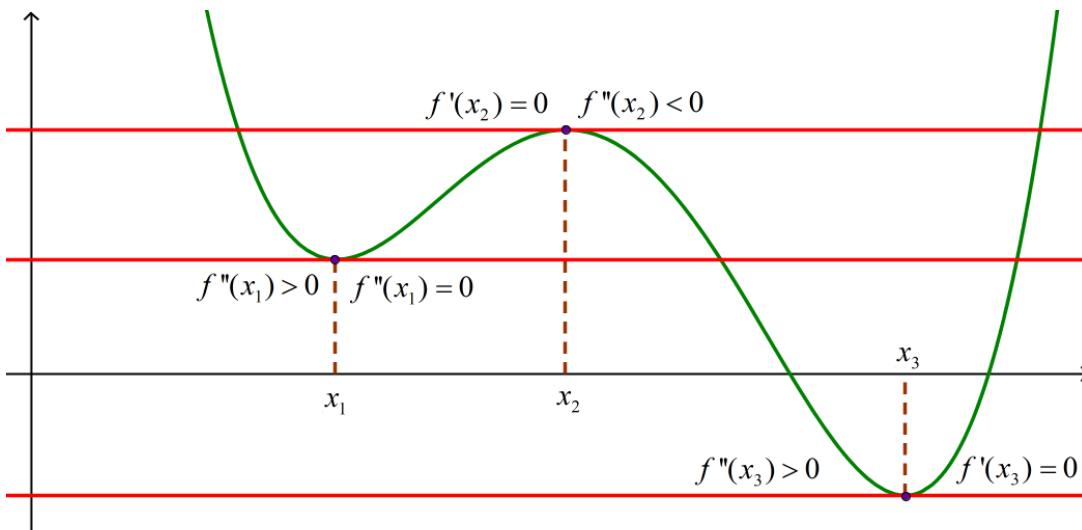
Los siguientes argumentos son considerados para valores x cercanos a x_0 :

Para (i) cuando $f''(x_0) > 0$ se tiene que cuando $x - x_0 < 0$ la ley de los signos implica que $f'(x) < 0$; de manera similar, cuando $x - x_0 > 0$, se tiene que $f'(x) > 0$, como la derivada varía de negativo a positivo, implica que $f(x)$ tiene un mínimo en x_0 .

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Para (ii) cuando $f''(x_0) < 0$ se tiene que cuando $x - x_0 < 0$ se asume que $f'(x) > 0$; luego, cuando $x - x_0 > 0$, se tiene que $f'(x) < 0$, como la derivada varía de positivo a negativo, implica que $f(x)$ tiene un máximo en x_0 . \square

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Máximo de una función 1

Para calcular los máximos o mínimos de funciones de una función derivable $f(x)$ utilizando el criterio de la segunda derivada se realizar el siguiente procedimiento:

Paso 1. Calcula el valor de $f'(x)$.

Paso 2. Encuentra los puntos críticos resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

Paso 3. Calcula el valor de $f''(x)$.

Paso 4. Clasifica los puntos críticos.

Ejemplo

Hallar los máximos y mínimo de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Solución

Se sigue el procedimiento antes mencionado, diferencia radica en la clasificación de los puntos críticos.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 1. Dado que $f(x) = x^4 - 4x^2$ implica que $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

Paso 2. Tomando $f'(x) = 0$ implica que $4x^3 - 8x = 0$, de donde se obtiene que $x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{2}$.

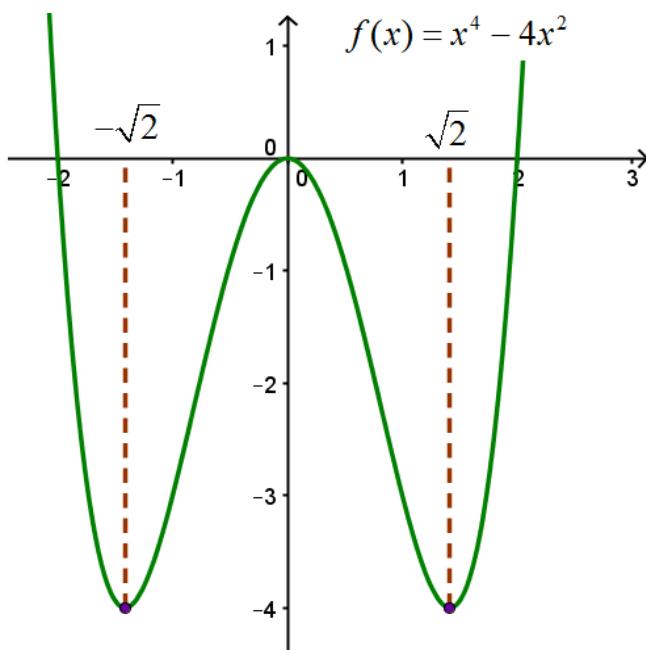
Paso 3. Dado que $f'(x) = 4x^3 - 8x$ se tiene que $f''(x) = 12x^2 - 8$.

Paso 4. Para $x_0 = 0$ se tiene que $f''(0) = 12(0)^2 - 8 = -8 < 0$, por consiguiente $f(x)$ tiene un máximo en $x_0 = 0$.

Para $x_0 = -\sqrt{2}$ se tiene que $f''(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0$, por consiguiente $f(x)$ tiene un mínimo en $x_0 = -\sqrt{2}$.

Para $x_0 = \sqrt{2}$ se tiene que $f''(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0$, por consiguiente $f(x)$ tiene un mínimo en $x_0 = \sqrt{2}$.

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Máximo y mínimo de la función 2

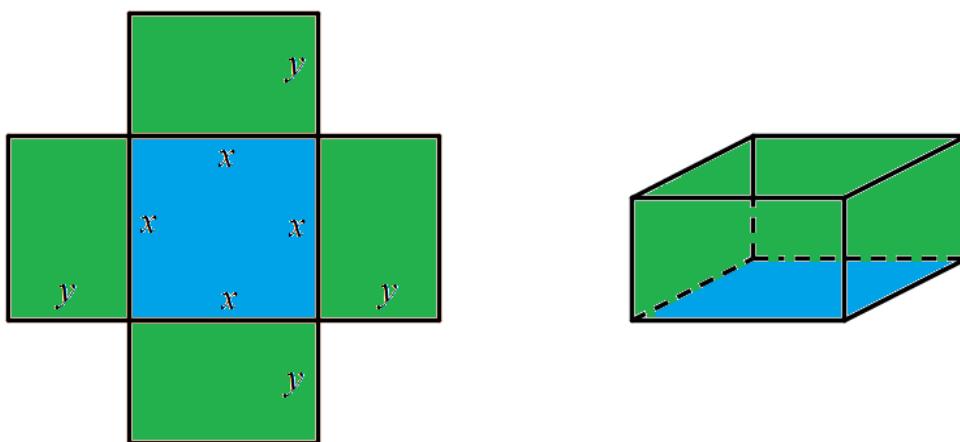
UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ejemplo

Se desea construir una caja de cartón sin tapa de base cuadrada que tenga 200 cm^3 de capacidad y que tenga un mínimo de superficie.

Solución

Primero considera la figura que describe el problema y las variables presentadas en la misma:



Esquema volumen de caja

El volumen de la caja está dado por la relación $V = x^2y$, donde x y y están centímetros, sustituyendo $V = 200$, se tiene que $y = \frac{200}{x^2}$. Por otro lado, la superficie está dada por la relación $S = 4xy + x^2$, lo que permite obtener $S(x) = 4x\left[\frac{200}{x^2}\right] + x^2 = \frac{800}{x} + x^2$, esta es la función a optimizar.

Paso 1. Dado que $S(x) = \frac{800}{x} + x^2$ implica que $S'(x) = -\frac{1600}{x^2} + 2x$.

Paso 2. Tomando $S'(x) = 0$ implica que $-\frac{1600}{x^2} + 2x = 0$, es decir $x = 2\sqrt[3]{100}$.

Paso 3. Dado que $S'(x) = -\frac{1600}{x^2} + 2x$ se tiene que $S''(x) = 2 + \frac{1600}{x^3}$.

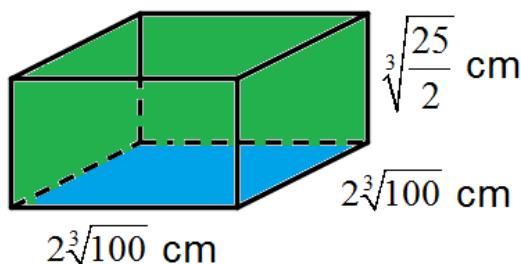
UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 4. Para $x_0 = 2\sqrt[3]{100}$ se tiene que $S''(x) = 2 + \frac{1600}{(2\sqrt[3]{100})^3} = 2 + \frac{1600}{800} = 4 > 0$, por

consiguiente $f(x)$ tiene un máximo en $x_0 = 2\sqrt[3]{100}$.

Cuando $x = 2\sqrt[3]{100}$ se tiene que $y = \frac{200}{(2\sqrt[3]{100})^2} = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$. Por lo tanto, las dimensiones de la

caja de superficie mínima están dadas en la siguiente figura:



Esquema dimensiones de superficie mínima

Ejemplo

Encontrar dos números cuya diferencia sea 200 y cuyo producto sea mínimo.

Solución

Sean x y y dichos números, entonces $x - y = 200$, además la función a maximizar es

$$f(x) = xy = x(x + 200) = x^2 + 200x, \text{ por consiguiente:}$$

Paso 1. Dado que $f(x) = x^2 + 200x$ implica que $f'(x) = 2x + 200$.

Paso 2. Tomando $f'(x) = 0$ implica que $2x + 200 = 0$, es decir $x = -100$.

Paso 3. Dado que $f'(x) = 2x + 200$ se tiene que $f''(x) = 2$.

Paso 4. Para $x_0 = -100$ se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, por consiguiente $f(x)$ tiene un mínimo en $x_0 = -100$.

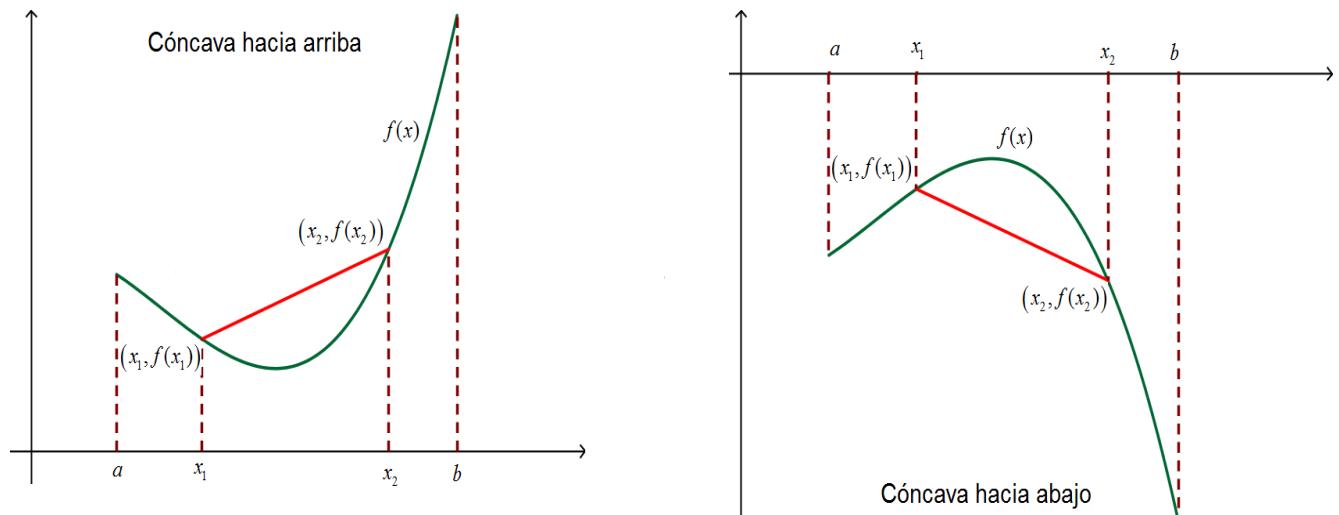
Cuando $x = -100$ se tiene que $y = x - 200 = -100 - 200 = -300$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.4. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

En la Unidad 2 se presentó un método para visualizar una función por medio de la gráfica de la misma, esta se construyó evaluando algunos elementos significativos del dominio, pero también se mostró que esto puede ser engañoso. En esta sección se presenta un método para graficar función que sean derivables a partir de ubicar unos cuantos puntos significativos.

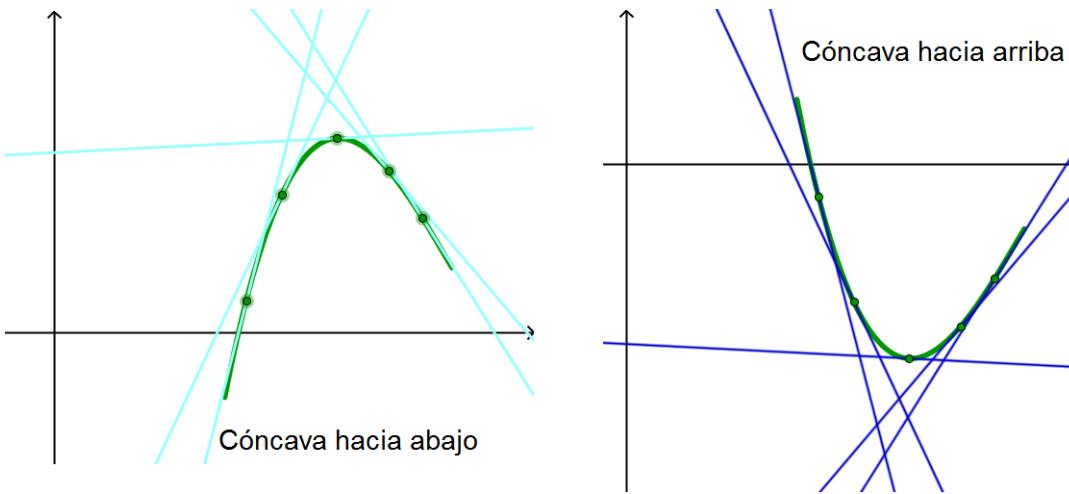
Definición 4.5.1. Sea $f(x)$ una función continua definida sobre un intervalo $[a,b]$, se dice que $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** si y sólo si el segmento que une a cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in [a,b]$ el segmento que uno a los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está por encima de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo. De forma similar $f(x)$ es **cóncava hacia abajo** si y sólo si el segmento que une a cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in [a,b]$ el segmento que une a los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está por debajo de la gráfica de $f(x)$.



Gráfica cóncava hacia abajo

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

De manera equivalente se tiene que **la gráfica de una función es cóncava hacia arriba** si para cada recta tangente, la gráfica de la función queda por debajo, de manera similar la **gráfica de una función es cóncava hacia abajo** si la gráfica de la función queda por debajo de las rectas tangentes, esto se presenta de la siguiente manera:



La segunda derivada permite caracterizar la concavidad de una curva dos veces derivable, dicha propiedad se presenta a continuación:

Teorema 4.5.1. Sea $f(x)$ una función continua definida sobre un intervalo $[a,b]$ tal que $f'(x)$ y $f''(x)$ existe para $x \in (a,b)$. Se dice que $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** si y sólo si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Similarmente, se dice que $f(x)$ es **cóncava hacia abajo** si y solo si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Demostración: Sea $x_0 \in (a,b)$, supóngase que $f''(x_0) > 0$ luego se tiene:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Luego existe un intervalo que contiene a x_0 tal que $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ para cualquier x en tal intervalo. Por otra parte se tiene que la recta ℓ_{x_0} tangente a la gráfica de $f(x)$ en x_0 esta dada por la relación $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Para x_1 cercano a x_0 sea $Q = (x_1, f(x_1))$ y $T = (x_1, y_1)$ donde $y_1 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$, observa que $Q \in \text{gra}(f)$ y $T \in \ell_{x_0}$ y que la distancia entre del segmento dirigido de TQ es igual a

$$f(x_1) - y_1 = f(x_1) - [f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)] = [f(x_1) - f(x_0)] - f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Luego, por el teorema del valor medio, existe d entre x_1 y x_0 tal que

$$f'(d) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

O equivalentemente $f(x_1) - f(x_0) = f'(d)(x_1 - x_0)$. Sustituyendo se tiene que:

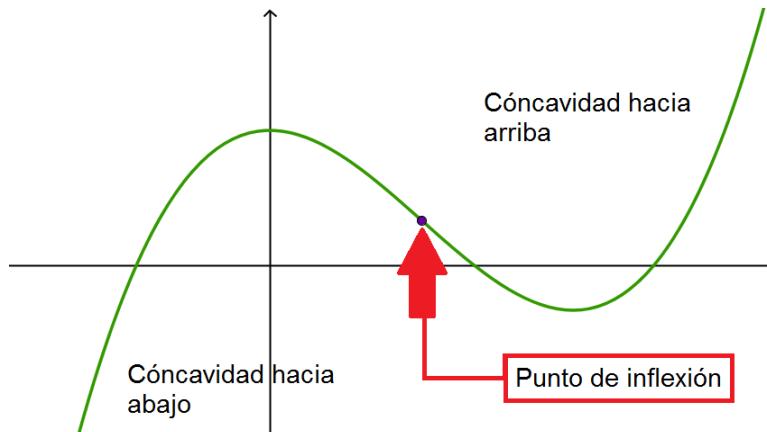
$$f(x_1) - y_1 = f'(d)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = [f'(d) - f'(x_0)](x_1 - x_0)$$

Como x_1 y d están del mismo lado con respecto a x_0 , de la definición de derivada se tiene que $\frac{f'(d) - f(x_0)}{d - x_0} > 0$. Si $x_1 > x_0$ implica que $d > x_0$ y que $f'(d) - f'(x_0) > 0$; si $x_1 < x_0$ implica que $d < x_0$ y que $f'(d) - f'(x_0) < 0$, en consecuencia las cantidades $x_1 - x_0$ y $f'(d) - f'(x_0)$ tienen los mismos signos por lo tanto la distancia dirigida de T a Q es positiva. Por lo tanto $f(x_1) > y_1$ en consecuencia la recta tangente está por debajo de la gráfica de $f(x)$ en un intervalo que contenga a x_0 . Lo que demuestra que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en x_0 para todo $x_0 \in (a, b)$. El caso $f''(x) < 0$ es similar. \square

Definición 4.5.2. Sea $f(x)$ una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que $f'(x)$ y $f''(x)$ existe para $x \in (a, b)$. Se dice que $x_0 \in (a, b)$ es un **punto de inflexión** de $f(x)$ si y sólo si $f''(x_0) = 0$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

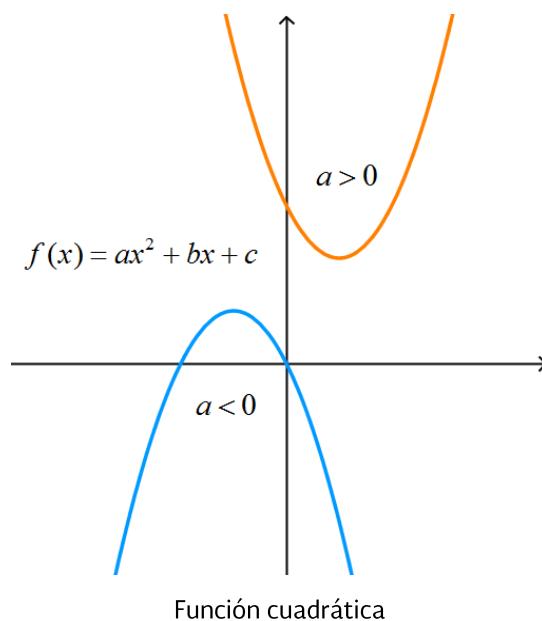
Gráficamente el punto de inflexión es donde la concavidad de la gráfica cambia, como lo muestra la siguiente imagen:



Gráfica del punto de inflexión

Ejemplo

Para la función cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene que $f'(x) = 2ax + b$ y que $f''(x) = 2a$ en consecuencia si $a > 0$ la parábola que representa a la función cuadrática tiene concavidad hacia arriba y cuando $a < 0$ tiene concavidad hacia abajo. Gráficamente se tiene lo siguiente:

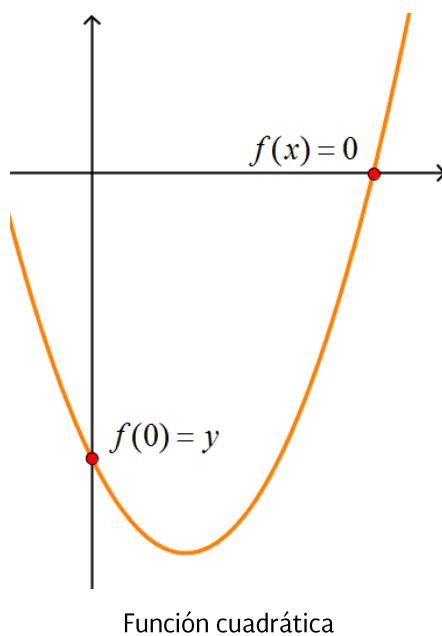


Función cuadrática

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

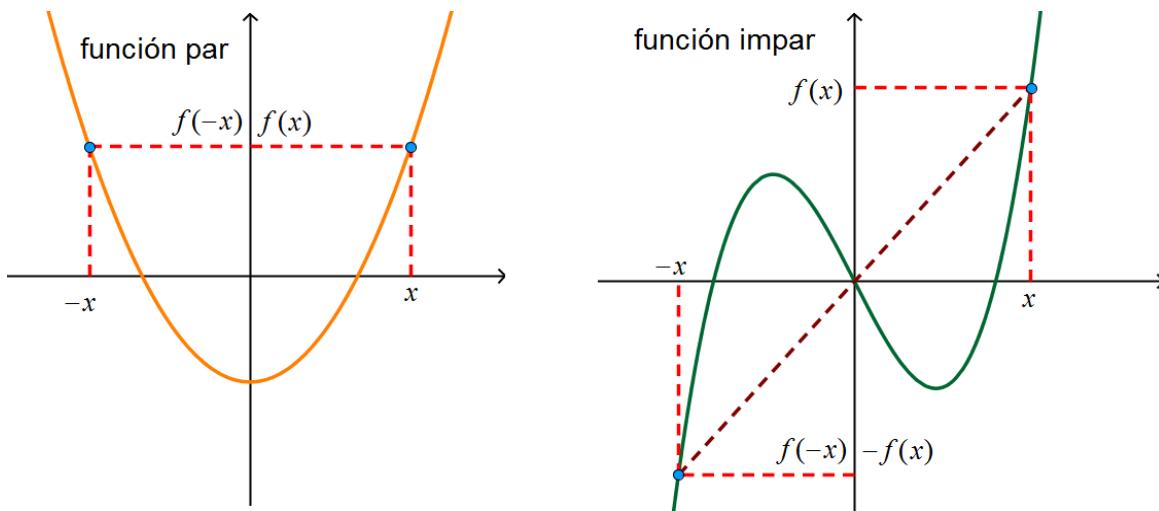
Antes de enunciar el método para graficar una función se presentan algunos conceptos relacionados con funciones.

Dada una función $f(x)$ la intersección de la gráfica con el eje horizontal se obtiene resolviendo la ecuación $f(x)=0$ y la intersección de la gráfica con el eje vertical se obtiene resolviendo la ecuación $f(0)=y$. Como lo muestra la siguiente imagen:



Dada una función $f(x)$ con dominio en \mathbb{R} , se dice que $f(x)$ es **par** si y solo si $f(-x)=f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De forma similar, se dice que $f(x)$ es **ímpar** si y solo si $f(-x)=-f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Gráficamente una función es par si y solo si su gráfica es simétrica con respecto al eje vertical y es impar si es simétrica con respecto al origen, como lo muestra la siguiente figura:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



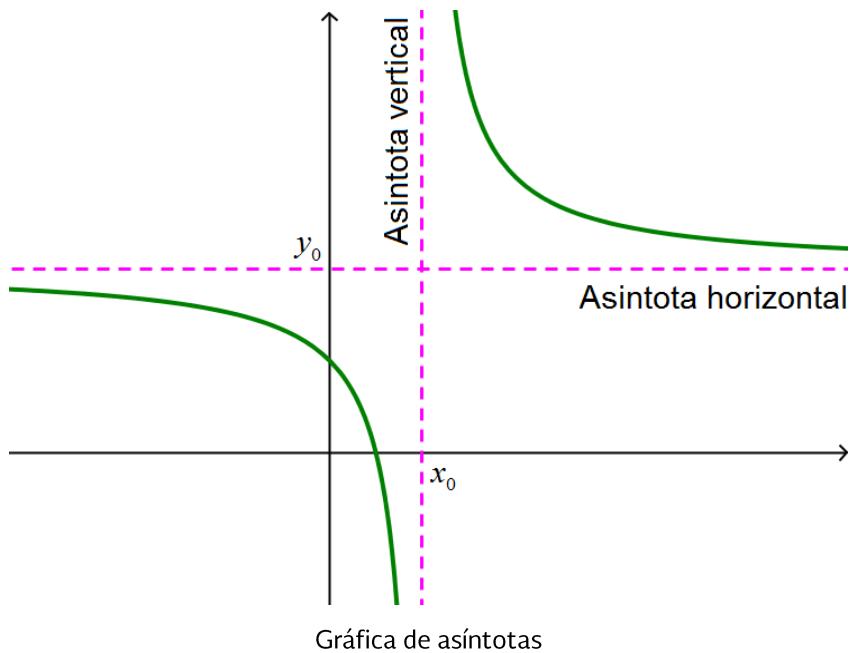
Dada una función $f(x)$ se dice que $f(x)$ tiene una **asíntota vertical en x_0** si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$$

De forma análoga, se dice que $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal en y_0** si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0.$$

Si representamos de manera gráfica las asíntotas quedarían de la siguiente forma:



UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

A continuación se presenta un método para graficar funciones dos veces derivables, es importante enfatizar que en este método se concentran los pasos a seguir para graficar una función:

- Paso 1. Determina el dominio de la función.
- Paso 2. Encuentra las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes coordenados.
- Paso 3. Determina la simetría con respecto al eje vertical y con respecto al origen de coordenadas.
- Paso 4. Determina las asíntotas horizontales y verticales de la función.
- Paso 5. Calcula la primera y segunda derivada.
- Paso 6. Encuentra los puntos críticos.
- Paso 7. Clasifica los puntos críticos.
- Paso 8. Determina los intervalos donde crece y decrece la función observando el signo de su derivada.
- Paso 9. Determina los puntos de inflexión.
- Paso 10. Verifica la concavidad de la función.

Ejemplo

Graficar la función $f(x) = x^4 - 4x^2$.

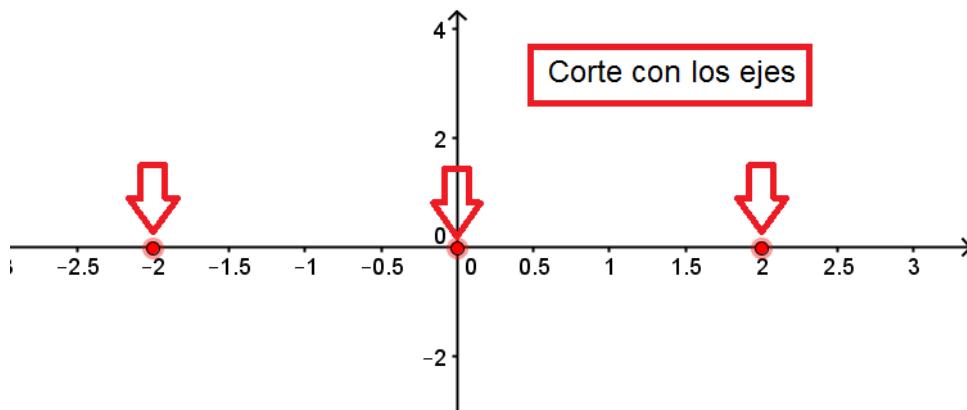
Solución

Siguiendo el método anterior se tiene lo siguiente:

Paso 1. La función $f(x) = x^4 - 4x^2$ es un polinomio, luego su dominio es \mathbb{R} .

Paso 2. Tomando $f(x) = 0$ implica que $x^4 - 4x^2 = 0$, así $x = 0$ ó $x = \pm 2$, luego la gráfica corta al eje horizontal en los puntos $(-2,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$. Observa que cuando la gráfica pasa por $(0,0)$ ya cortó al eje vertical.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Paso 3. Basta calcular $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$, así $f(x) = x^4 - 4x^2$ es simétrica con respecto al eje vertical.

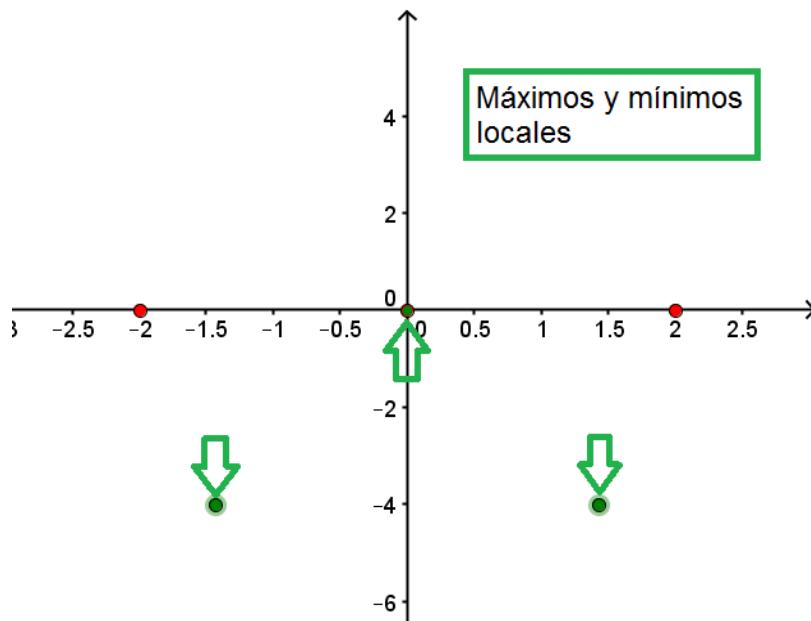
Paso 4. Como $f(x) = x^4 - 4x^2$ es un polinomio, no tiene asíntotas.

Paso 5. Para $f(x) = x^4 - 4x^2$ se tiene $f'(x) = 4x^3 - 8x$ y $f''(x) = 12x^2 - 8$.

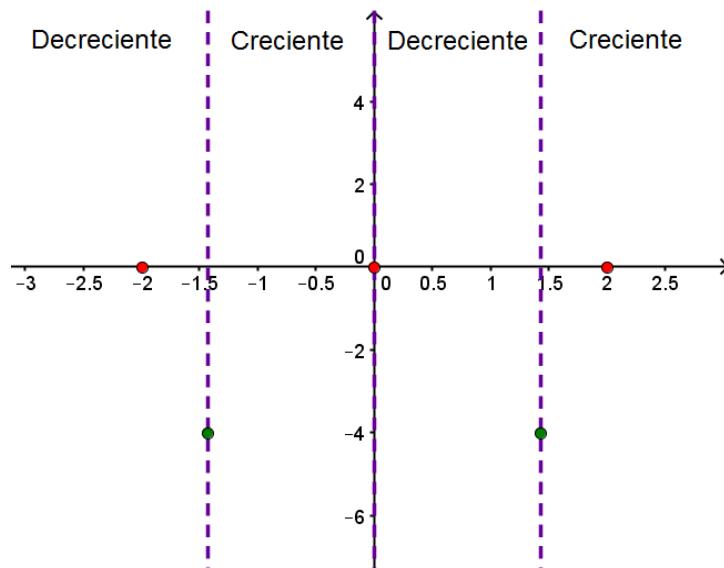
Paso 6. Cuando $f'(x) = 0$ implica que $4x^3 - 8x = 0$. Así $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$.

Paso 7. Para $x_0 = 0$ se tiene que $f''(0) = 12(0)^2 - 8 = -8 < 0$, luego en $x_0 = 0$ la función tiene un máximo cuando $f(0) = (0)^4 - 4(0)^2 = 0$. Para $x_0 = -\sqrt{2}$ se tiene $f''(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0$ es decir en $x_0 = -\sqrt{2}$ la función toma un mínimo cuando $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$. Finalmente cuando $x_0 = \sqrt{2}$ se tiene $f''(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0$ es decir en $x_0 = \sqrt{2}$ la función toma un mínimo cuando $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 = -4$. De donde se obtienen los siguientes puntos $(-\sqrt{2}, 4)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{2}, -4)$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Paso 8. Se tiene que cuando $f'(x) > 0$ se tiene que $4x^3 - 8x > 0$, esta desigualdad tiene solución $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, en consecuencia $f'(x) < 0$ se satisface en el conjunto $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

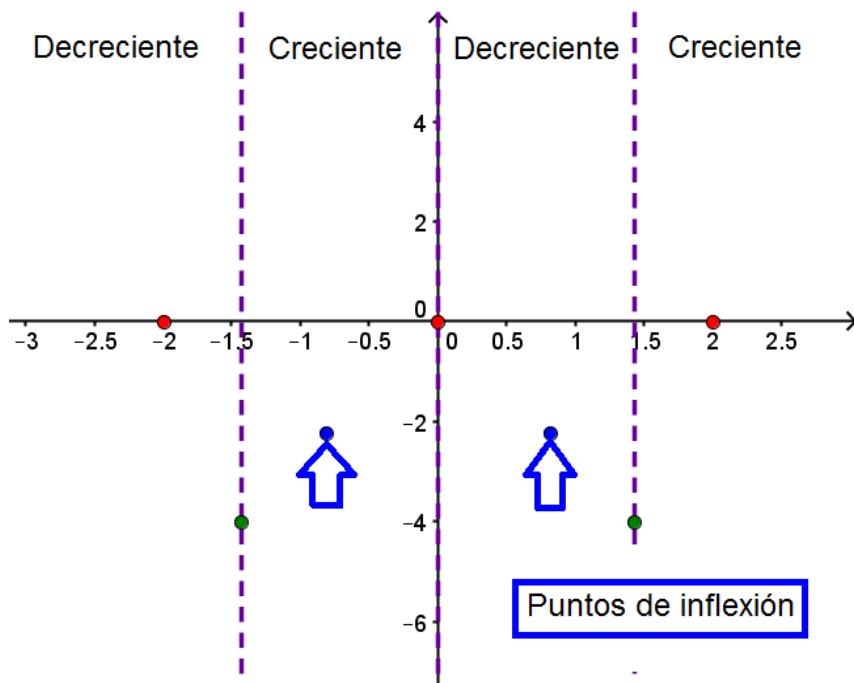


UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 9. Tomando $f''(x)=0$ implica $12x^2 - 8 = 0$, luego $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, evaluando en la

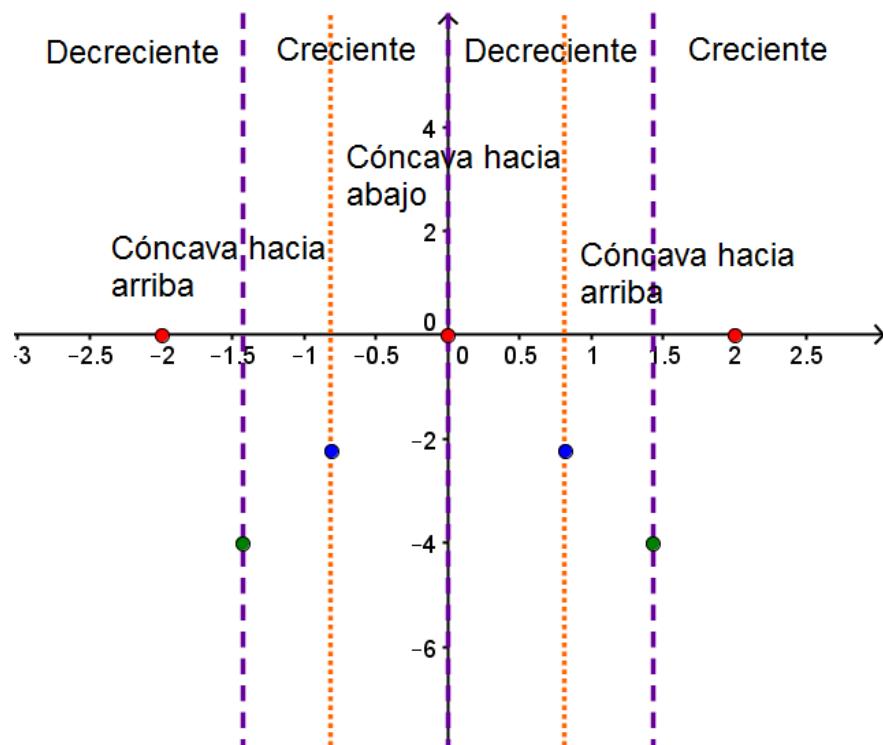
función se tiene lo siguiente $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = -\frac{20}{9}$,

obteniendo los puntos $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$.

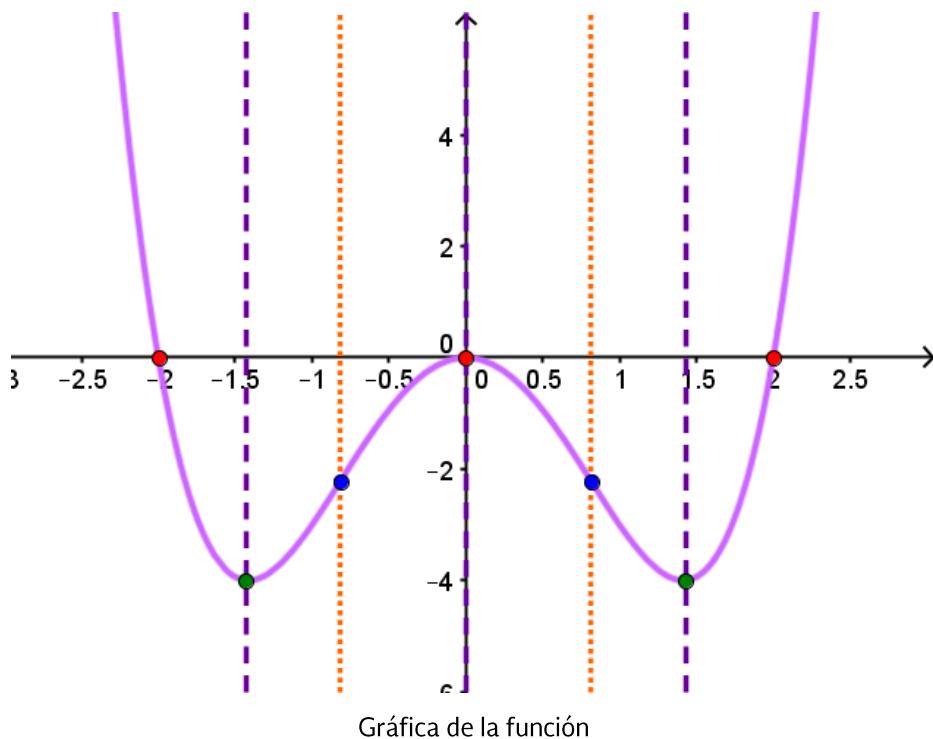


Paso 10. Para $f''(x) > 0$ implica que $12x^2 - 8 > 0$, esta desigualdad tiene solución en el conjunto $\left(-\infty, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$, en consecuencia $f''(x) < 0$ tiene solución en el conjunto $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



Recopilando toda la información presentada, se tiene que un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$ es:



UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

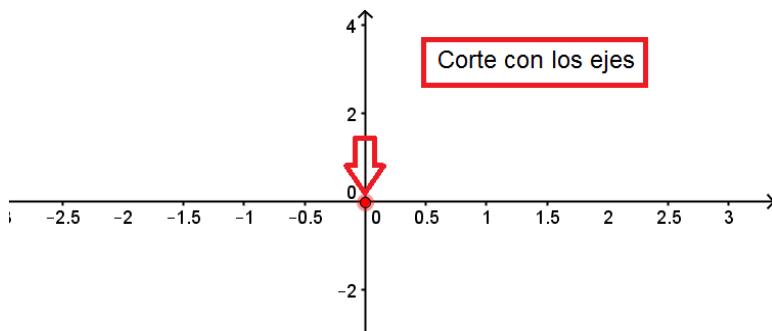
Ejemplo

Graficar a la función $f(x) = x + \sin(x)$.

Solución

Siguiendo el método anterior se tiene lo siguiente, a lo largo de este ejercicio se utilizan algunas propiedades de las funciones seno y coseno, se te recomienda que tengas presente la tabla donde se presentan el comportamiento de las mismas:

- Paso 1. La función $f(x) = x + \sin(x)$ es la suma de un es un polinomio y una función continua en todo \mathbb{R} , así el dominio de la función es \mathbb{R} .
- Paso 2. Tomando $f(x) = 0$ implica que $x + \sin(x) = 0$, así $x = 0$, luego la gráfica corta al eje horizontal en $(0,0)$. Observa que cuando la gráfica pasa por $(0,0)$ ya cortó al eje vertical.



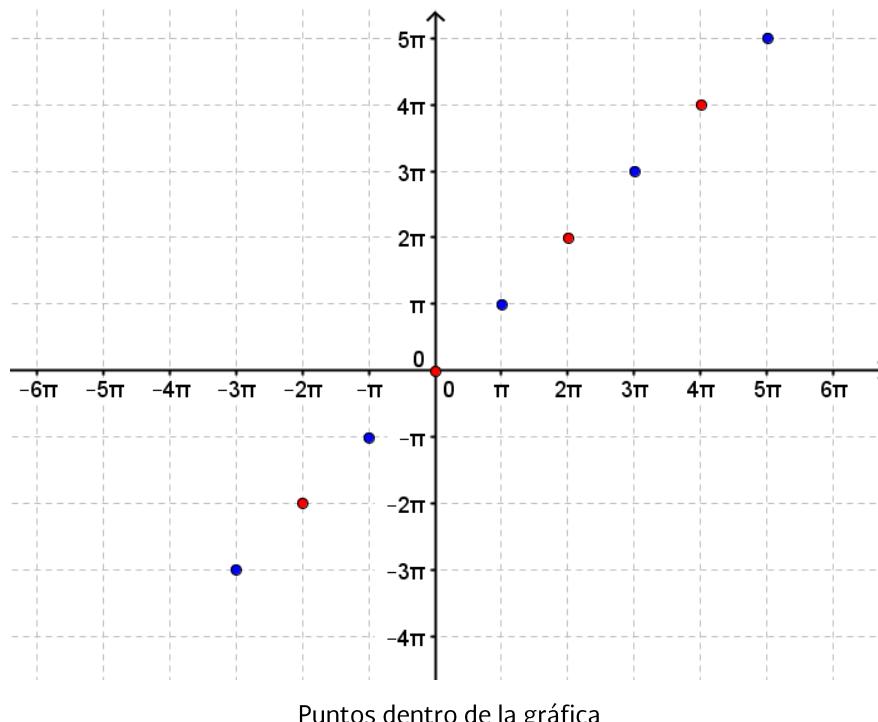
- Paso 3. Basta calcular $f(-x) = (-x) + \sin(-x) = -[x + \sin(x)] = -f(x)$, así $f(x) = x + \sin(x)$ es simétrica con respecto al origen.
- Paso 4. Como $f(x) = x + \sin(x)$ es la suma de un polinomio y una función continua en todo \mathbb{R} , no tiene asíntotas.
- Paso 5. Para $f(x) = x + \sin(x)$ se tiene $f'(x) = 1 + \cos(x)$ y $f''(x) = -\sin(x)$.
- Paso 6. Cuando $f'(x) = 0$ implica que $1 + \cos(x) = 0$. Así $x = (2k + 1)\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 7. Para $x_0 = (2k+1)\pi$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $f''((2k+1)\pi) = -\sin((2k+1)\pi) = 0$, es decir, la función $f(x) = x + \sin(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

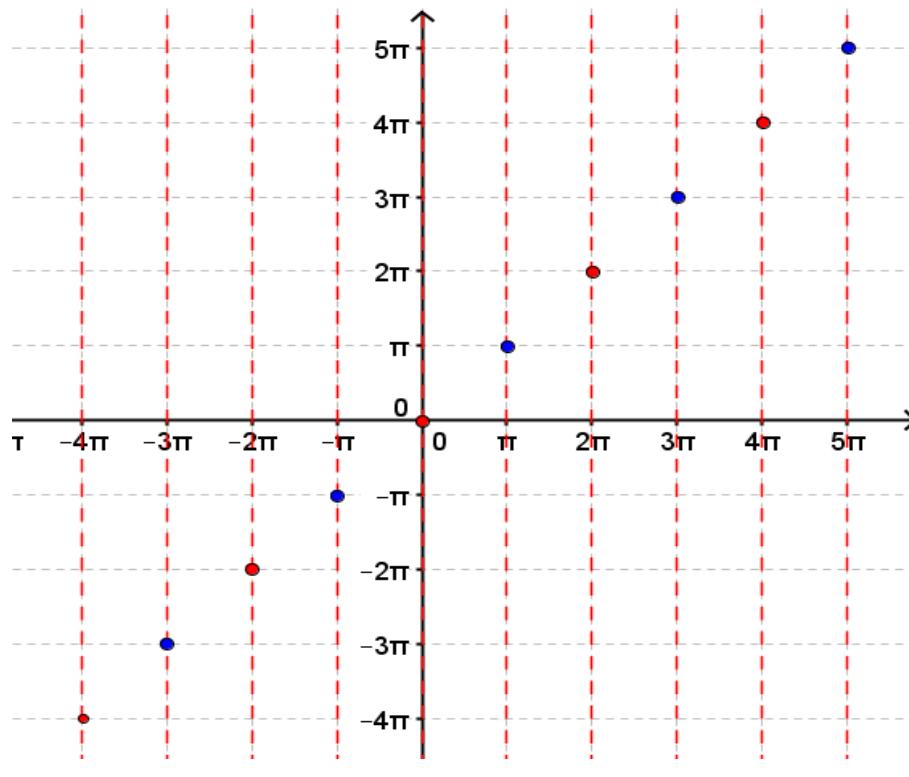
Paso 8. Se tiene que cuando $f'(x) > 0$ se tiene que $1 + \cos(x) > 0$, esta desigualdad tiene solución $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, en consecuencia $f'(x) < 0$ se satisface en el conjunto \emptyset , esto quiere decir, que la función siempre es creciente.

Paso 9. Tomando $f''(x) = 0$ implica $-\sin(x) = 0$, luego $x = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, evaluando en la función se tiene lo siguiente $f(\pi k) = (\pi k) + \sin(\pi k) = \pi k$, obteniendo los puntos $(\pi k, \pi k)$, con $k \in \mathbb{Z}$.



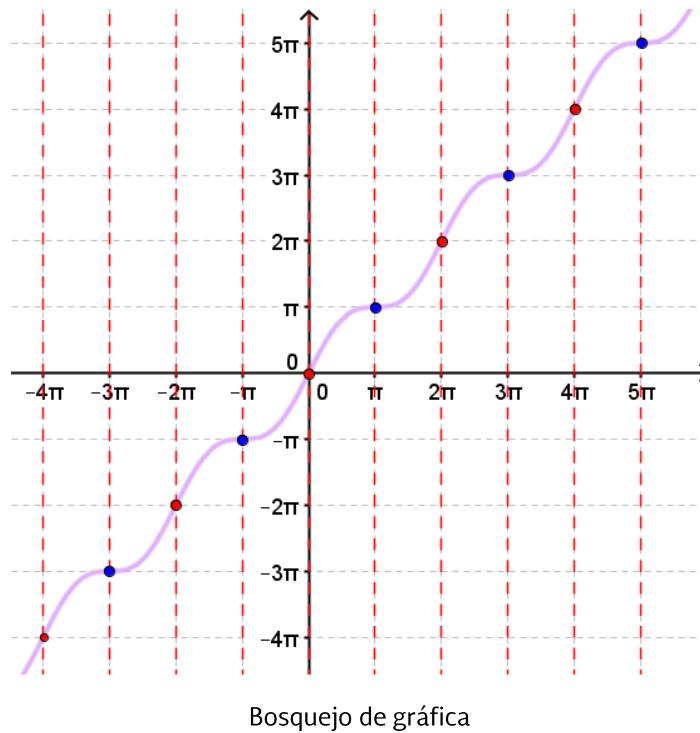
UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Paso 10. Para $f''(x) > 0$ implica que $-\sin(x) > 0$, esta desigualdad tiene solución en el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, en consecuencia $f''(x) < 0$ tiene solución en el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$.



Recopilando toda la información presentada, se tiene que un bosquejo de la gráfica de la función es:

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA



CIERRE DE LA UNIDAD

Durante esta unidad, se presentó el concepto de razón de cambio dentro de diversas aplicaciones de la derivada, los cuales en algunas ocasiones se utilizan sin darle un nombre específico o sin reflexionar sobre dichas acciones. Es importante que estos cambios se midan a través de modelos matemáticos.

Cada vez que se presenta un problema donde se nota la variación de una cantidad a otra, se está representando una aplicación de la derivada. Es por esto que esta unidad es de vital importancia para tu carrera, porque te permitirá crear las bases para nuevos conocimientos en asignaturas posteriores.

UNIDAD 4. APPLICACIONES DE LA DERIVADA

PARA SABER MÁS

En la siguiente liga que te recomiendo trata sobre la tangente de una curva, para que puedas reforzar los conocimientos obtenidos en esta unidad.

- http://www.fca.unam.mx/docs/apuntes_matematicas/28.%20Aplicaciones%20de%20la%20Derivada.pdf

A través de esta liga podrás revisar diversos ejercicios sobre razón de cambio, así como las reglas de derivación.

- <http://actividadesinfor.webcindario.com/derivadasaplicaciones.htm>

Este artículo está escrito en inglés, pero muestra una gran gama de aplicación de la derivada.

- http://www.khanacademy.org/math/calculus/derivative_applications

FUENTES DE CONSULTA

- Apostol, T. (1990). *Calculus. Vol. 1.* 2^a Ed. México: Reverté.
- Balabasquer, G. (1994). *El concepto derivada y sus aplicaciones.* Madrid: Torrejón de Ardoz: Akal D.L.
- Lang, S. (1986). *A First Course in Calculus. 5th edition.* Springer. N. Y.: Senge Lang.
- Larson, R. (2010). *Cálculo de una variable.* 9^a Ed. México: Mc Graw Hill.
- RAE Real Academia Española (2017). *Tangente.* Recuperado de <http://dle.rae.es/srv/fetch?id=Z56UoRp>

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

- Spivak, M. (2008). *Calculus. 4th edition.* México: Reverte.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo Conceptos y Contextos.* México, D.F.: Cengage Editores, S.A.
- Stewart, J. B. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contexto.* 4^aEd. México: Cengage Learning.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* Australia-México, D.F.: Servicios Editoriales, S.A. de C.V.
- Thomas, George B. Et. al. (2005). *Cálculo: una variable.* México: Pearson Educación.
- Zill, D. (2011). *Cálculo; Trascendentes tempranas.* 4^a Ed. México: Mc Graw Hill.