Grundlagen der Elektrotechnik II

Frequenzverhalten einfacher RLC-Netzwerke

Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard Grünert

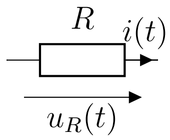
25.4.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \phi_i)$$

(3)

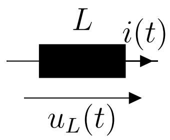


$$\begin{aligned} u_R(t) &= R \cdot i(t) \\ &= \underbrace{R \cdot \hat{I}}_{\hat{U}_R} \cdot \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

Da sich die Phase nicht ändert, gilt außerdem $\phi_i = \phi_u$ und somit:

$$\boxed{u_R(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \phi_u)}$$

(4)

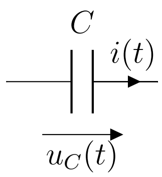


$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= L \cdot \hat{I} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\cos(\omega t + \phi_i)\right) \\ &= -\underbrace{\omega \cdot L \cdot \hat{I}}_{\hat{U}_L} \cdot \sin(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

Um die Spannung $(-\sin x)$ wieder durch $\cos x$ auszudrücken, muss auf den ursprünglichen Phasenwinkel $\pi/2$ addiert werden:

$$\boxed{u_L(t) = \hat{U}_L \cdot \cos(\omega t + \underbrace{\phi_i + \frac{\pi}{2}}_{\phi_u})}$$

(5)



$$\begin{aligned}
u_C(t) &= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \int_0^t \cos\left(\omega t + \phi_i\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \frac{1}{\omega}[\sin\left(\omega t + \phi_i\right)]_0^t + \underbrace{U_0}_{\text{initialer Ladezustand}} \\
&= \underbrace{\frac{\hat{I}}{C \cdot \omega}}_{\hat{U}_C}[\sin\left(\omega t + \phi_i\right) - \sin\left(\phi_i\right)] + U_0
\end{aligned}$$

Um die Spannung $(\sin x)$ wieder durch $\cos x$ auszudrücken, muss von dem ursprünglichen Phasenwinkel $\pi/2$ subtrahiert werden:

$$\boxed{u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \left(\cos(\omega t + \underbrace{\phi_i - \frac{\pi}{2}}_{\phi_u}) - \cos\left(\underbrace{\phi_i - \frac{\pi}{2}}_{\phi_u}\right)\right) + U_0}$$

1.2

(3)

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$
$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

(4)

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}i(t) = \frac{1}{L} \cdot u_L(t)\,\mathrm{d}t$$
$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t)\,\mathrm{d}t + i_0$$

(5)

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t$$
$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

1.3

Zur Anwendung der symbolischen Methode werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

- *Linearität*: Die Kenngrößen der Elemente R, L, C sind von den Kenngrößen der Erregung (U, I, ω) unabhängig
- Es liegt eine *harmonische Erregung* (sin / cos) vor

- Der *stationäre Zustand* ist erreicht, das System ist "eingeschwungen" und es treten keine Schaltvorgänge auf

1.4

Der *Betragsgang* ist die Funktion f(ω), die den Verlauf des Verhältnisses der Amplituden (komplexer Betrag) oder Effektivwerte zweier Größen (z.B. Aus -und Eingangssignal) mit der (Kreis-)Frequenz abbildet.

$$\mathrm{f}(\omega) = \frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{U_{2_{eff}}}{U_{1_{eff}}}$$

Der *Phasengang* $\phi(\omega)$ ist das von der (Kreis-)Frequenz abhängige Argument des komplexen Verhältnisses des Aus- und Eingangssignals.

$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)$$

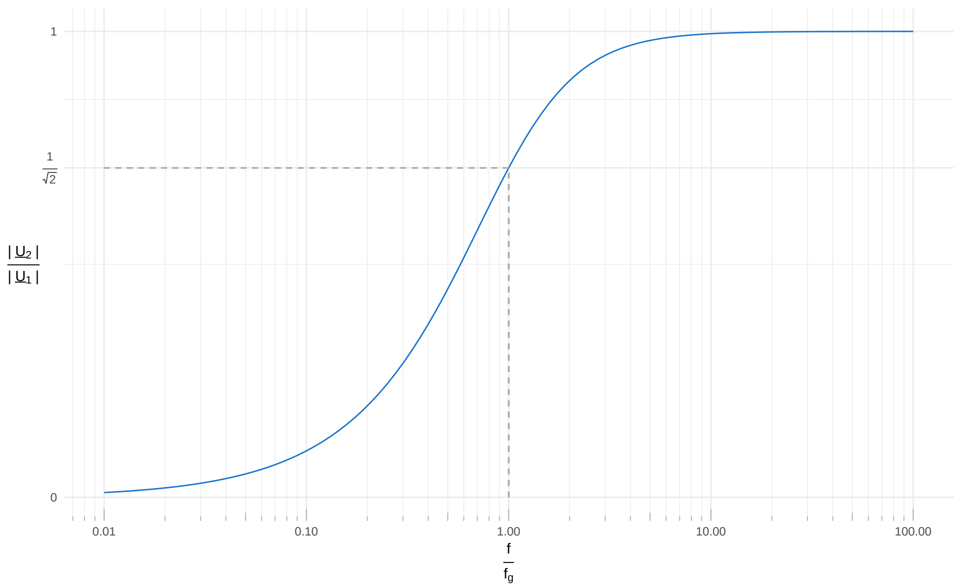
Sind Real- und Imaginärteil dieses komplexen Verhältnisses gleich, so wird das Amplitudenverhältnis $1/\sqrt{2}$ und die Phasenverschiebung 45°. Die dabei präsente Frequenz wird dann *Grenzfrequenz* genannt.

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

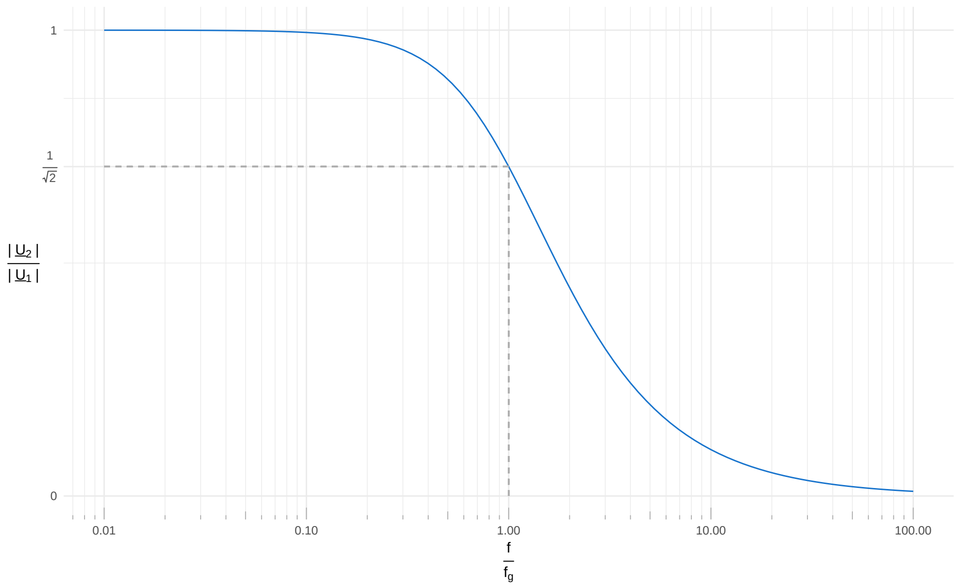
1.5

Im Folgenden wurden normierte Darstellungen der Betragsgänge gewählt, um von den Kenngrößen unabhängige Graphen zu erhalten. Zusätzlich sind die Abszissen dieser logarithmisch eingeteilt.

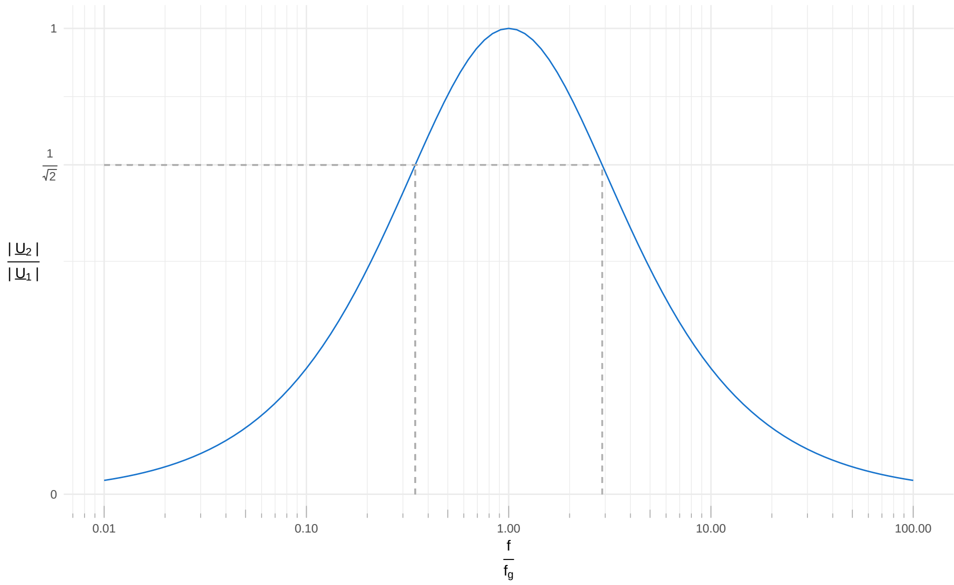
Hochpassfilter (HP)



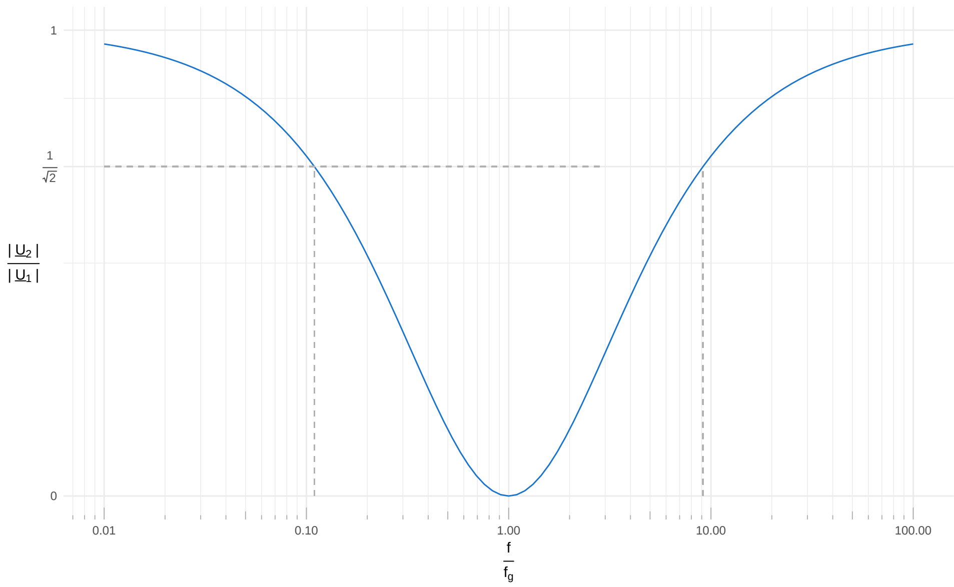
Tiefpassfilter (TP)



Bandpass (BP)

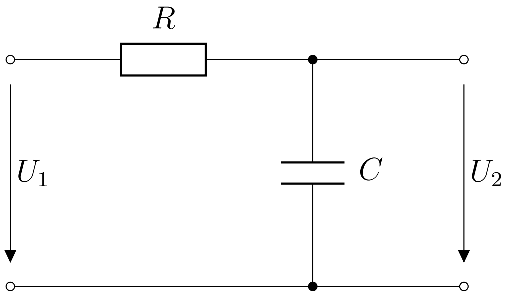


Bandsperre (BS)



1.6

RC-Tiefpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jR\omega C}$$

Amplitude:

$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{\mid 1 \mid}{\mid 1 + jR\omega C \mid} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\frac{\omega RC}{1} = -\arctan(\omega RC)$$

Grenzfrequenz:

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2} = \frac{\omega_g RC}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2}$$

$$\omega_g RC = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

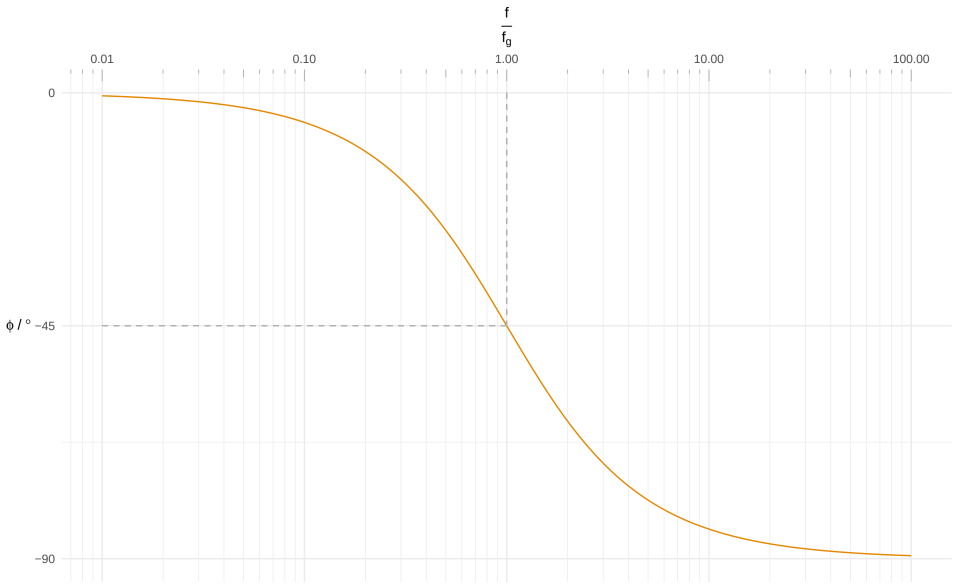
Normierung:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$$

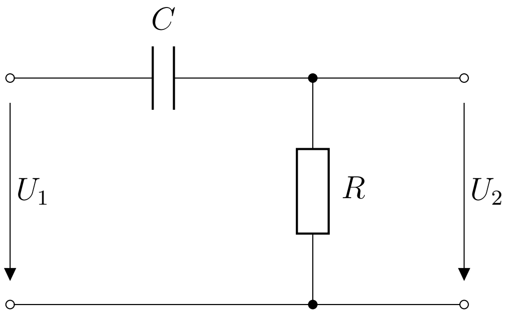
$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_g}$$

Betragsgang:
siehe 1.5: Tiefpassfilter

Phasengang:



RC-Hochpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}$$

Amplitude:

$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{\mid 1 \mid}{\mid 1 - j\frac{1}{\omega RC} \mid} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = \arctan\frac{1}{\omega RC}$$

Grenzfrequenz:

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C^2}} = \frac{\frac{1}{\omega_g RC}}{1 + \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C^2}}$$

$$\frac{1}{\omega_g RC} = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

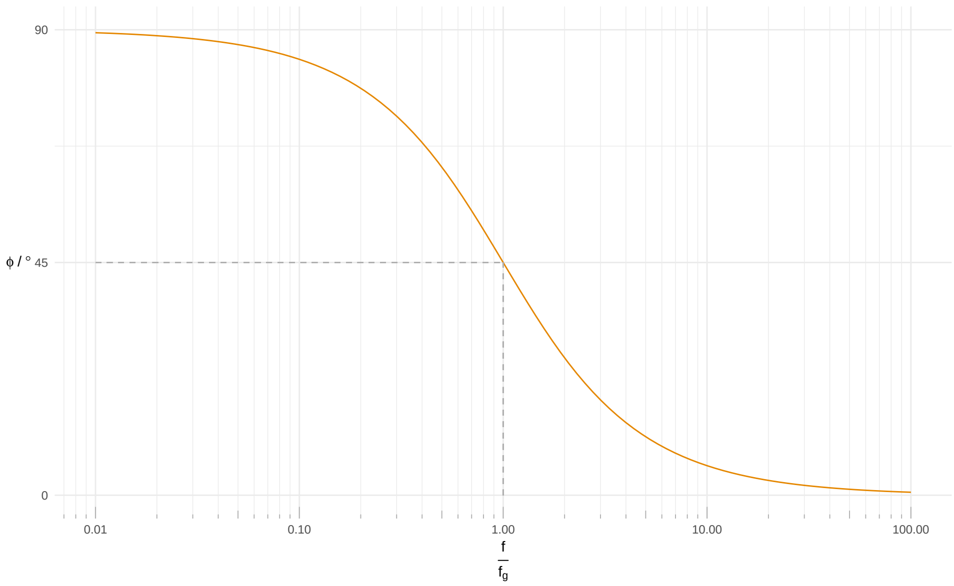
Normierung:

$$\frac{|\ \underline{U}_2\ |}{|\ \underline{U}_1\ |}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}}$$

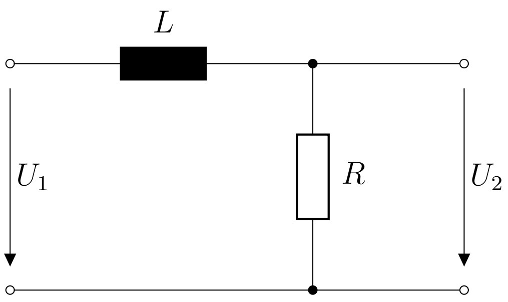
$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \arctan\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_g}}$$

Betragsgang:
siehe 1.5: Hochpassfilter

Phasengang:



RL-Tiefpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}$$

Amplitude:

$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{\mid 1 \mid}{\mid 1 + j\frac{\omega L}{R} \mid} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\frac{\frac{\omega L}{R}}{1} = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Grenzfrequenz:

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega_g^2 L^2}{R^2}} = \frac{\frac{\omega_g L}{R}}{1 + \frac{\omega_g^2 L^2}{R^2}}$$

$$\frac{\omega_g L}{R} = 1$$

$$\omega_g = \frac{R}{L}$$

Normierung:

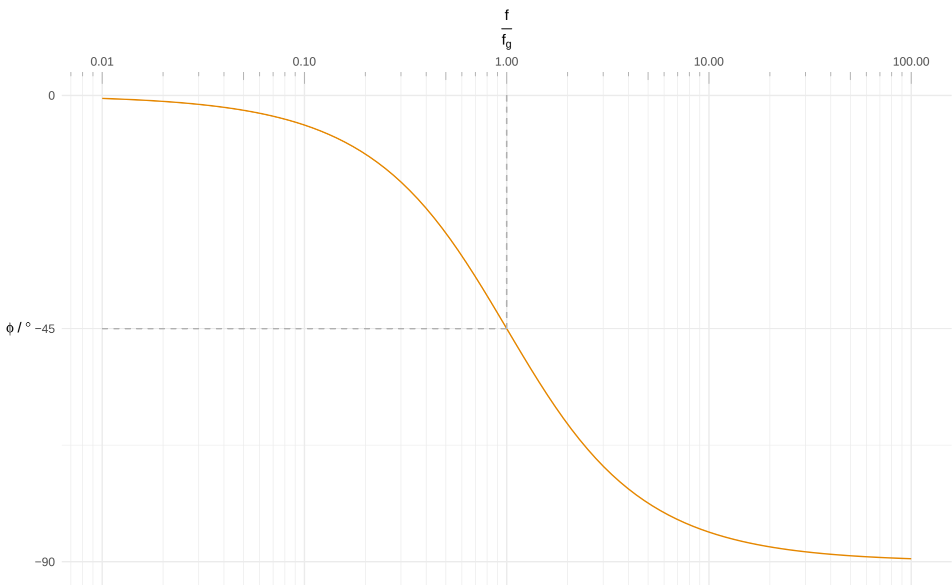
$$\frac{|\,\underline{U}_2\,|}{|\,\underline{U}_1\,|}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$$

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_g}$$

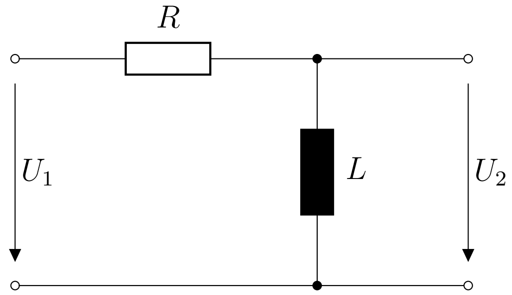
Betragsgang:

siehe 1.5: Tiefpassfilter

Phasengang:



RL-Hochpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$$

Amplitude:

$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{\mid 1 \mid}{\mid 1 - j\frac{R}{\omega L} \mid} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\left(-\frac{R}{\omega L}\right) = \arctan\frac{R}{\omega L}$$

Grenzfrequenz:

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \dfrac{R^2}{\omega_g^2 L^2}} = \frac{\frac{R}{\omega_g L}}{1 + \dfrac{R^2}{\omega_g^2 L^2}}$$

$$\frac{R}{\omega_g L} = 1$$

$$\omega_g = \frac{R}{L}$$

Normierung:

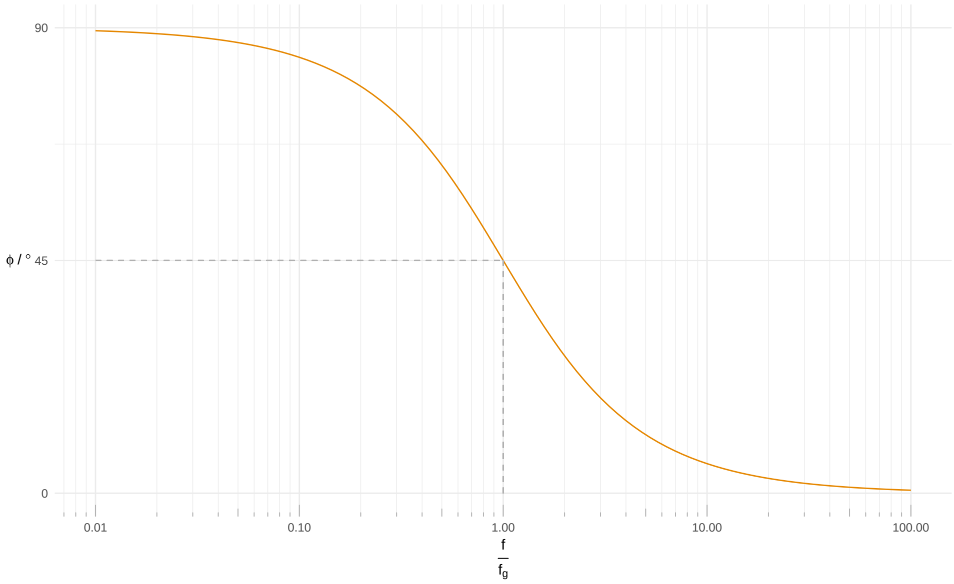
$$\frac{|\,\underline{U}_2\,|}{|\,\underline{U}_1\,|}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}}$$

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = \arctan\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_g}}$$

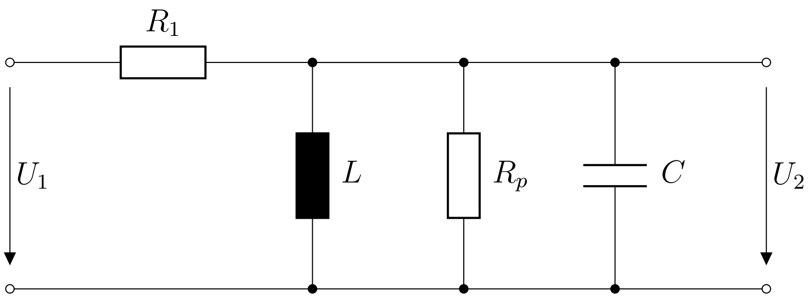
Betragsgang:

siehe 1.5: Hochpassfilter

Phasengang:



1.7



$$R_1 = 1\ \text{k}\Omega,\ R_p = 1\ \text{k}\Omega,\ L = 1\ \text{mH},\ C = 1\ \mu\text{F}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}$$

$$\frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}} = \frac{1}{jR_1\omega C + \frac{R_1}{j\omega L} + \frac{R_1}{R_p} + 1}$$

$$\frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_p} + j\left(\omega R_1 C - \frac{R_1}{\omega L}\right)}$$

Grenzfrequenzen:

$$\mid \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid = \mid \mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) \mid$$

$$R_1\left(\omega_{\pm 45}C - \frac{1}{\omega_{\pm 45}L}\right) = 1 + \frac{R_1}{R_p}$$

$$\omega_{\pm 45}C - \frac{1}{\omega_{\pm 45}L} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p}$$

$$\frac{1}{\omega_{\pm 45}}\left(\omega_{\pm 45}^2 C - \frac{1}{L}\right) = \frac{R_1 + R_p}{R_1 \cdot R_p}$$

$$\omega_{\pm 45}^2 C - \frac{1}{L} = \omega_{\pm 45}\frac{R_1 + R_p}{R_1 \cdot R_p}$$

$$\omega_{\pm 45}^2 - \omega_{\pm 45}\frac{R_1 + R_p}{C \cdot R_1 \cdot R_p} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_p}{2 \cdot CR_1R_p}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \pm \frac{R_1 + R_p}{2 \cdot CR_1R_p}$$

Mit den Beispielwerten:

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\left(\frac{1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega}{2 \cdot 1\mu\text{F} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 1\text{k}\Omega}\right)^2 + \frac{1}{1\text{mH} \cdot 1\mu\text{F}}} \pm \frac{1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega}{2 \cdot 1\mu\text{F} \cdot 1 \cdot \text{k}\Omega \cdot 1\text{k}\Omega}$$

$$\omega_{+45} = 32638.584\ \text{s}^{-1},\ f_{+45} = 5194.592\ \text{Hz}$$

$$\omega_{-45} = 30638.584\ \text{s}^{-1},\ f_{+45} = 4876.282\ \text{Hz}$$

$$B_\omega = \omega_{+45} - \omega_{-45} = 2000\ \text{s}^{-1}$$

$$B_f = 318.31\text{Hz}$$

Resonanzfrequenz:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0$$

$$\frac{\omega_0 R_1 C - \frac{R_1}{\omega_0 L}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + \left(\omega_0 R_1 C - \frac{R_1}{\omega_0 L}\right)^2} = 0$$

$$\omega_0 R_1 C = \frac{R_1}{\omega_0 L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\mathrm{mH} \cdot 1\mathrm{µF}}} = 31622.777 \ \mathrm{s}^{-1}$$

$$f_0 = 5032.921\mathrm{Hz}$$

Betrag:

$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Betrag bei der Resonanzfrequenz:

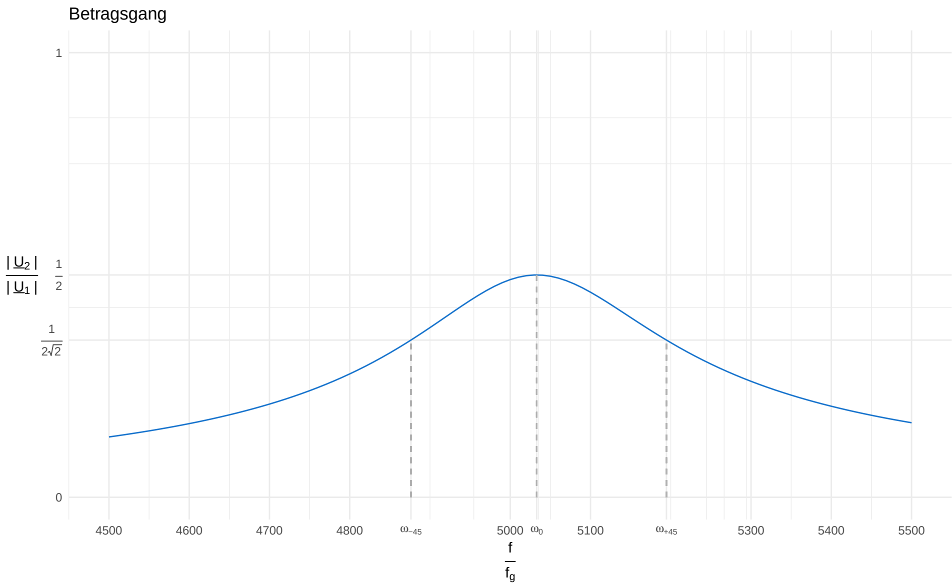
$$\frac{\mid \underline{U}_2 \mid}{\mid \underline{U}_1 \mid}(\omega = \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} C - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\frac{LC - \sqrt{LC}^2}{\sqrt{LC} L}\right)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_p}} = \frac{R_p}{R_1 + R_p}$$

Mit den Beispielwerten:

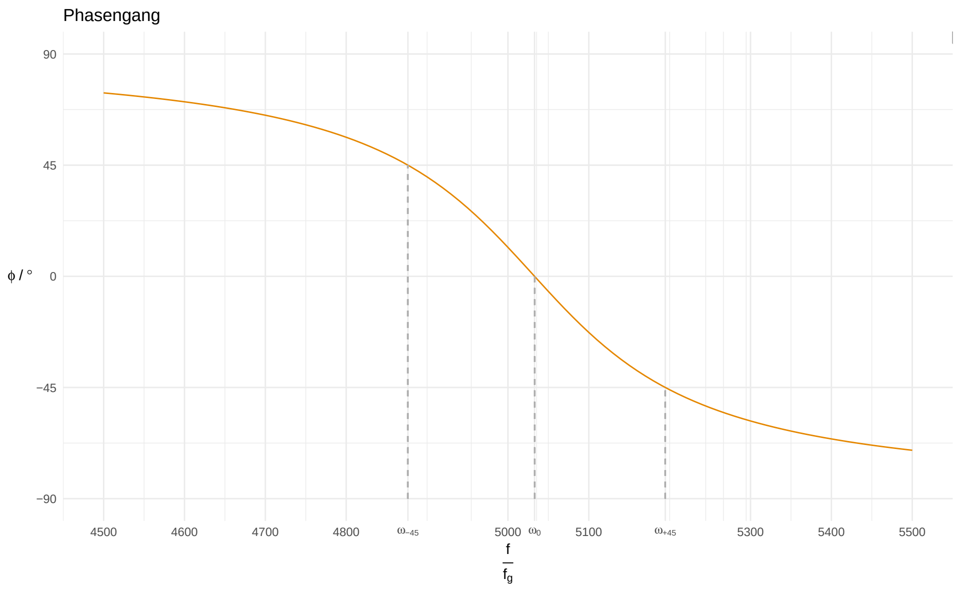
$$\frac{|\,\underline{U}_2\,|}{|\,\underline{U}_1\,|}(\omega = \omega_0) = \frac{1\mathrm{k}\Omega}{1\mathrm{k}\Omega + \mathrm{k}\Omega} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|\,\underline{U}_2\,|}{|\,\underline{U}_1\,|}(\omega = \omega_{\pm 45}) = \frac{R_p}{R_1 + R_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$



Phase:

$$\phi = 0 - \arctan\left(\frac{\omega R_1 C - \dfrac{R_1}{\omega L}}{1 + \dfrac{R_1}{R_p}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_p}}\right)$$



2 Versuchsaufgaben

2.1