Grundlagen der Elektrotechnik II

Wechselstromwiderstände und Brückenschaltungen

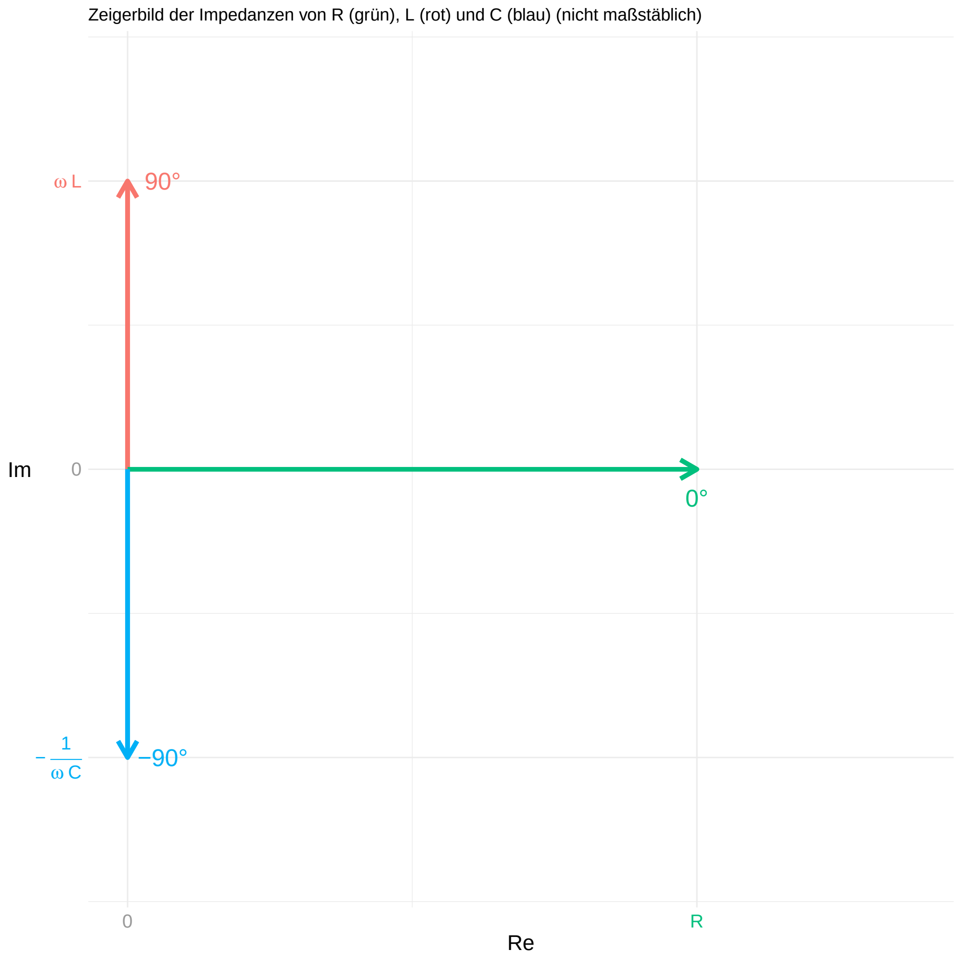
Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard Grünert

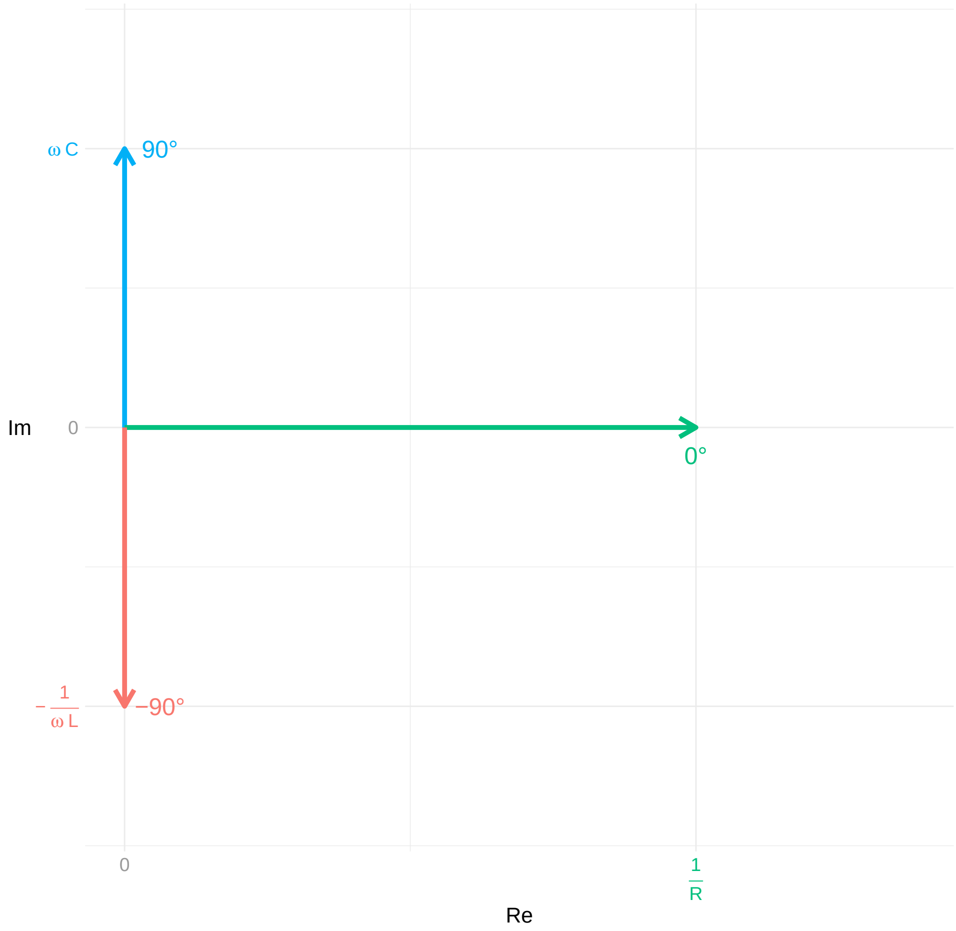
16.5.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

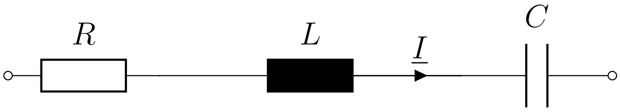
1.1



Zeigerbild der Admittanzen von R (grün), L (rot) und C (blau) (nicht maßstäblich)



1.2



$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \quad \underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \phi_u)}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{I} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \phi_u)}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Betrag:

$$\mid \underline{I} \mid = \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

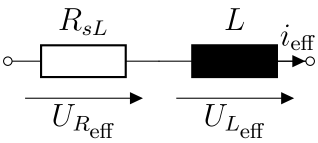
Phase:

$$\phi_i = \phi_u - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Gesamt:

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \phi_u - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)$$

1.3



$$I = 1.5\ \text{mA},\ \ R_{sL} = 200\Omega,\ \ L = 60\ \text{mH}$$

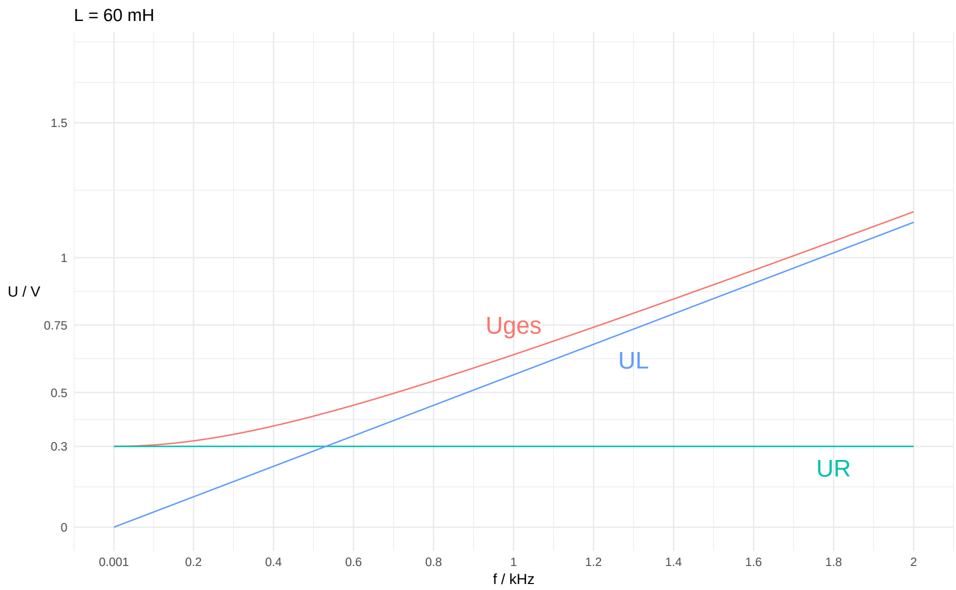
$$\underline{U}_{\text{ges}} = \underline{I} \cdot (R_{sL} + j\omega L)$$

$$\hat{U}_{\text{ges}} = \hat{I} \cdot \sqrt{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2}$$

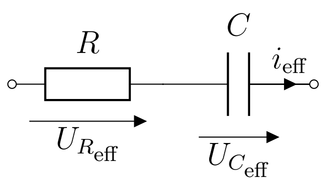
$$\hat{U}_{\text{ges}_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} = 1.5\text{mA} \cdot \sqrt{(200\Omega)^2 + 4\pi^2 f^2 \cdot (60\text{mH})^2}$$

$$U_{R_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot R = 1.5\text{mA} \cdot 200\Omega = 0.3\ \text{V}$$

$$U_{L_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot \omega L = 1.5\text{mA} \cdot 2\pi f \cdot 60\text{mH}$$



1.4



$$I = 1.5 \ \text{mA}, \quad R = 200\Omega, \quad C_1 = 0.5 \ \mu\text{F}, \quad C_2 = 1 \ \mu\text{F}$$

$$\underline{U}_{\text{ges}} = \underline{I} \cdot (R - j\frac{1}{\omega C})$$

$$\hat{U}_{\text{ges}} = \hat{I} \cdot \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

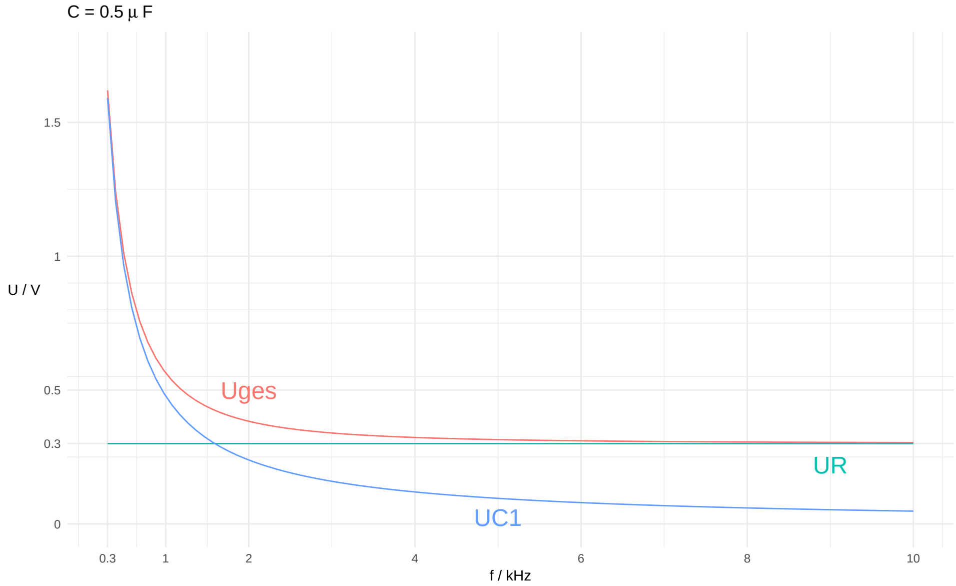
$$\hat{U}_{\text{ges}_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 1.5\text{mA} \cdot \sqrt{(200\Omega)^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}}$$

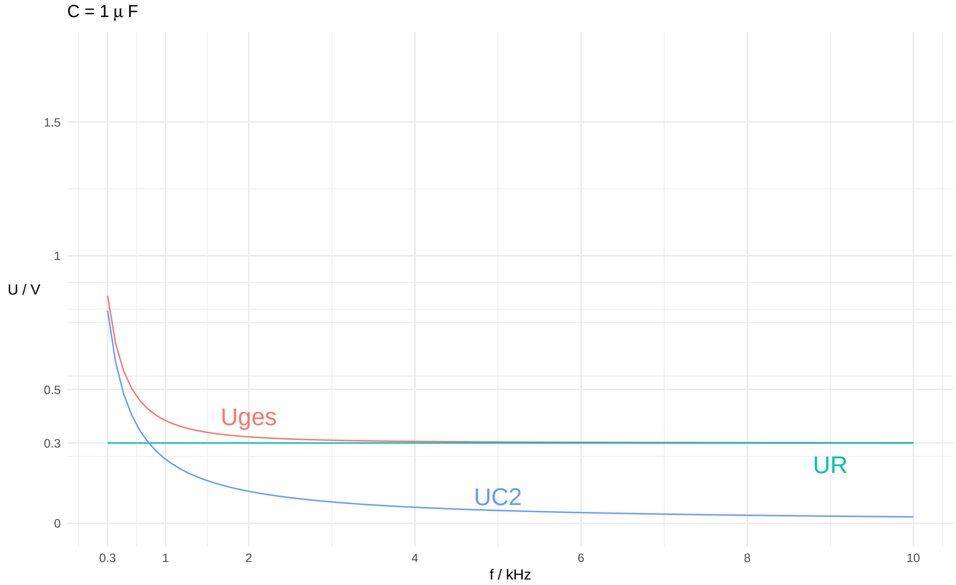
$$U_{R_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot R = 1.5\text{mA} \cdot 200\Omega = 0.3 \ \text{V}$$

$$U_{C_{\text{eff}}} = I_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$U_{C_{\text{eff}_1}} = I_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{\omega C_1} = 1.5\text{mA} \cdot \frac{1}{2\pi f \cdot 0.5\text{µF}}$$

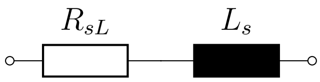
$$U_{C_{\text{eff}_2}} = I_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{\omega C_2} = 1.5\text{mA} \cdot \frac{1}{2\pi f \cdot 1\text{µF}}$$

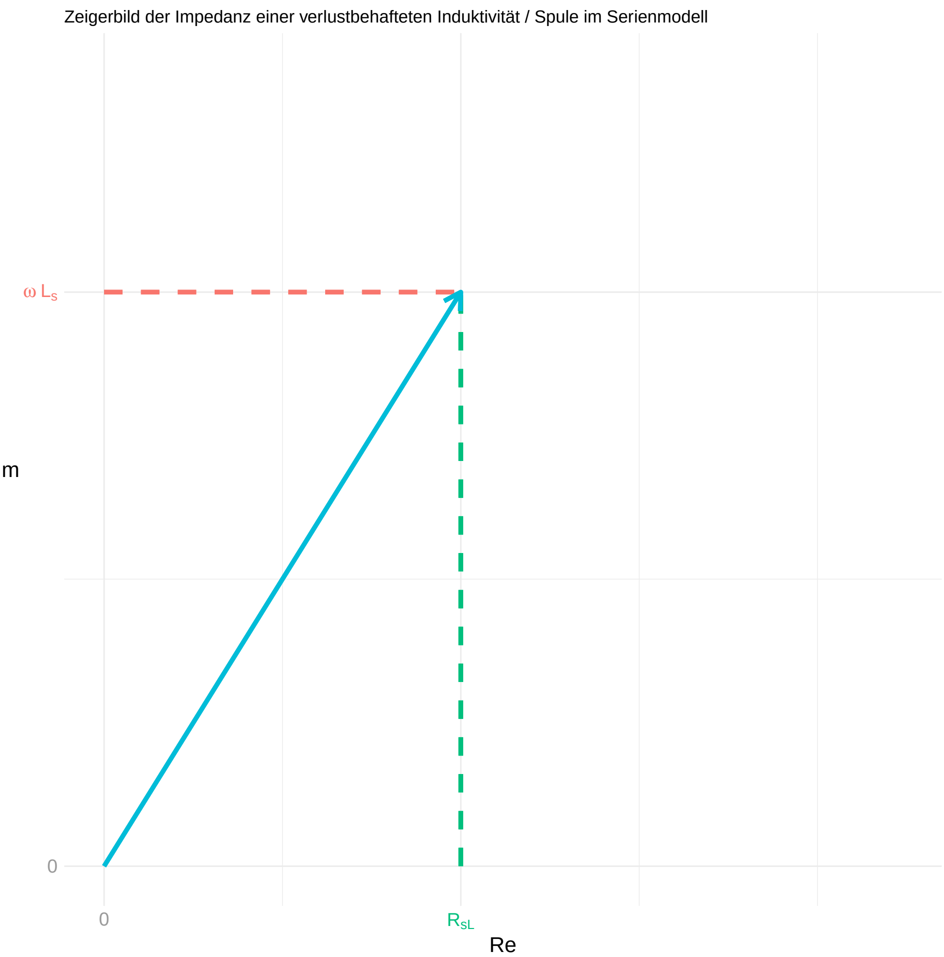




1.5

a) Spule



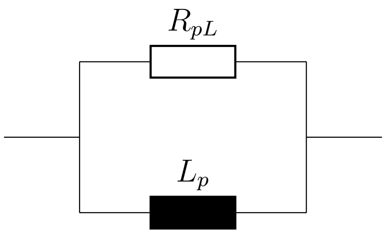


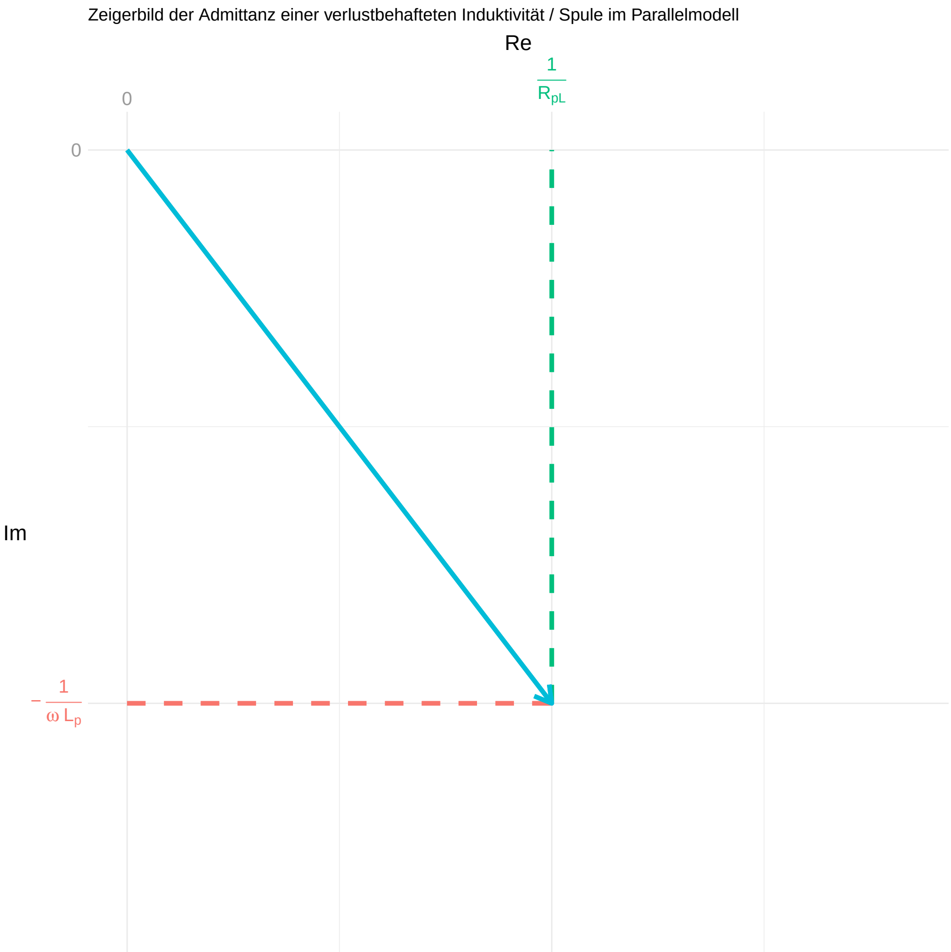
Der Winkel δ, den die Impedanz $\underline{Z}$ mit der imaginären Achse bildet, wird Verlustwinkel genannt. Der Verlustfaktor d ergibt sich dann aus:

$$d = \tan\delta = \frac{R_{sL}}{L_s}$$

Die Güte Q ist definiert als der Kehrwert des Verlustfaktors, also:

$$Q_{Ls} = \frac{1}{d} = \frac{\omega L_s}{R_{sL}}$$





Analog ist der Verlustwinkel δ der Winkel der Admittanz mit der imaginären Achse:

$$d = \tan\delta = \frac{\frac{1}{R_{pL}}}{\mid -\frac{1}{\omega L_p} \mid} = \frac{\omega L_p}{R_{pL}}$$

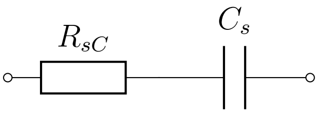
Demnach ist auch die Güte der Kehrwert des Verlustfaktors:

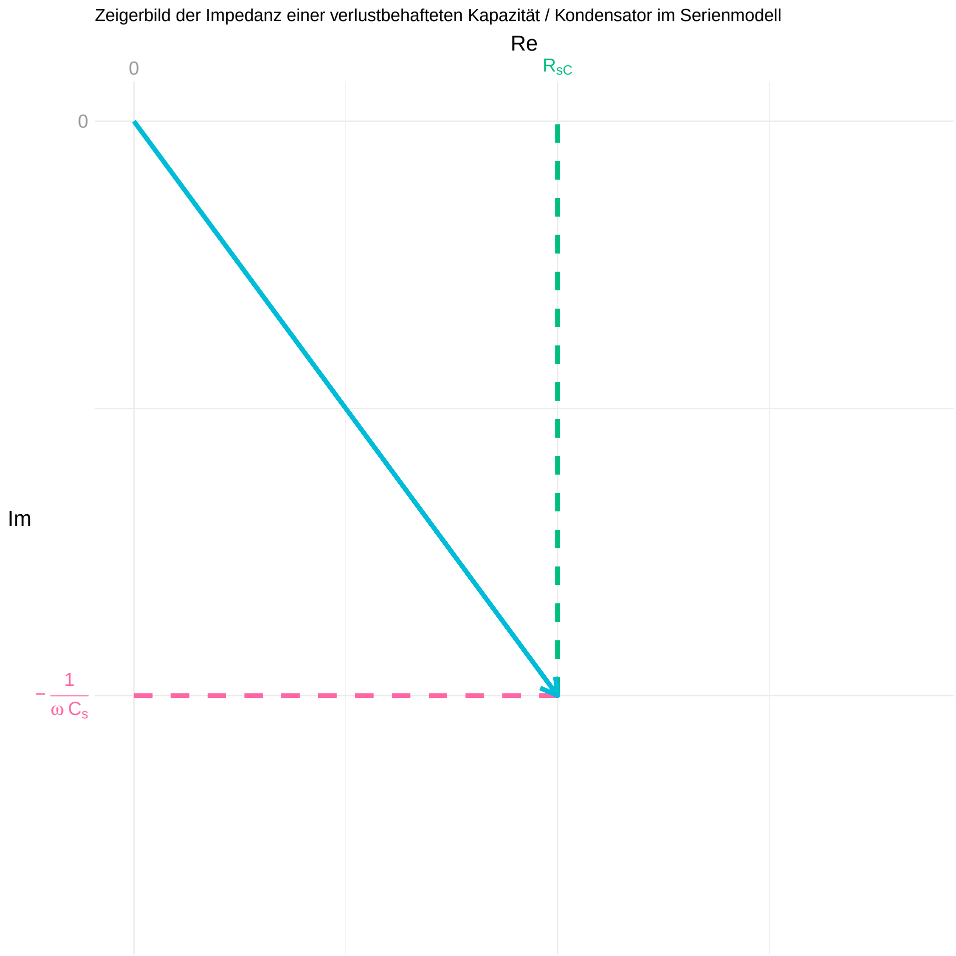
$$Q_{Lp} = \frac{1}{d} = \frac{R_{pL}}{\omega L_p}$$

Für die gleich Frequenz gilt damit:

$$Q_{L_s} = Q_{L_p} = Q_L$$

b) Kondensator



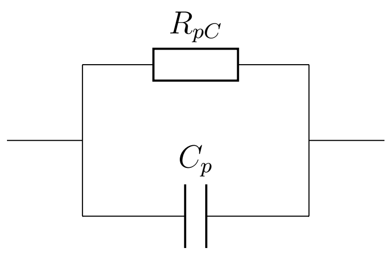


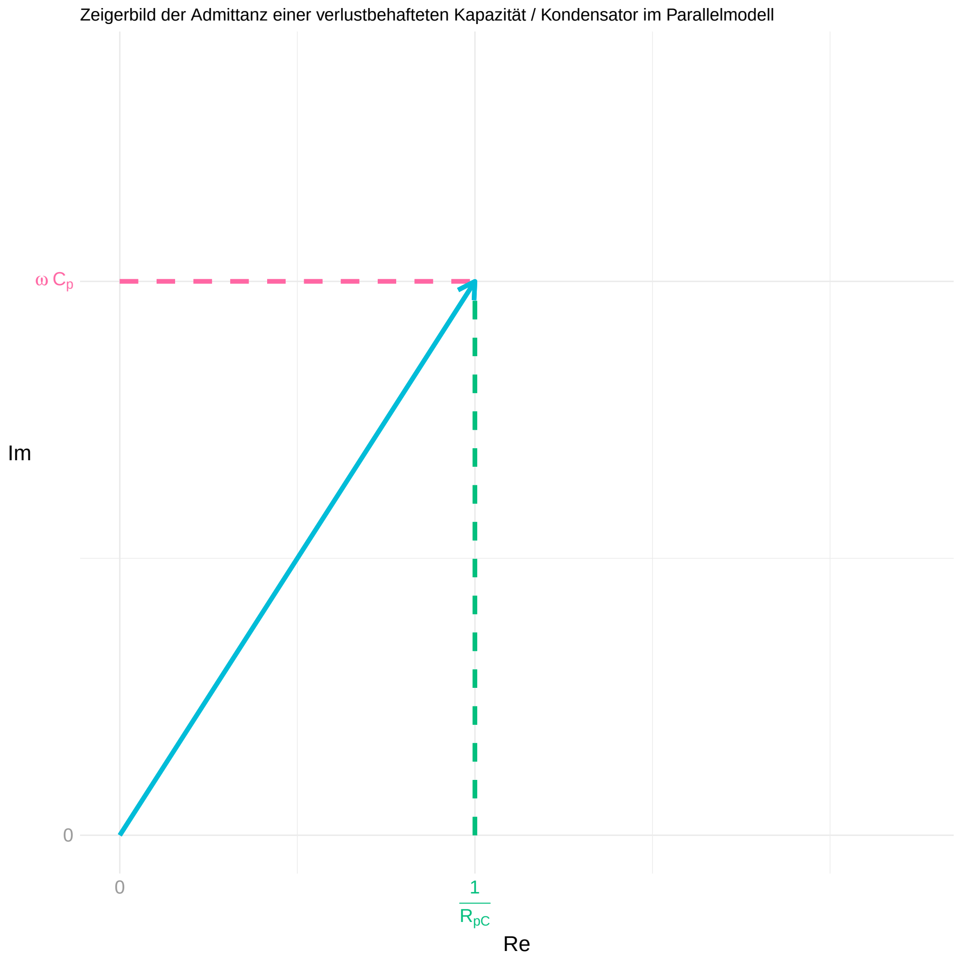
Der Winkel δ, den die Impedanz $\underline{Z}$ mit der imaginären Achse bildet, wird Verlustwinkel genannt. Der Verlustfaktor d ergibt sich dann aus:

$$d = \tan\delta = \frac{R_{sC}}{|-\frac{1}{\omega C_s}|} = R_{sC} \cdot \omega C_s$$

Die Güte Q ist definiert als der Kehrwert des Verlustfaktors, also:

$$Q_{Cs} = \frac{1}{d} = \frac{1}{\omega R_{sC} C_s}$$





Analog ist der Verlustwinkel δ im Parallelmodell der Winkel der Admittanz mit der imaginären Achse:

$$d = \tan\delta = \frac{\frac{1}{R_{pC}}}{\omega C_p} = \frac{1}{\omega R_{pC} C_p}$$

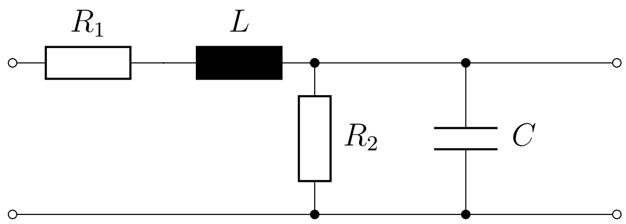
Demnach ist auch die Güte der Kehrwert des Verlustfaktors:

$$Q_{Cp} = \frac{1}{d} = \omega R_{pC} C_p$$

Für die gleich Frequenz gilt damit:

$$Q_{C_s} = Q_{C_p} = Q_C$$

1.6



$$R_1 = 25\ \text{k}\Omega,\ \ R_2 = 100\ \text{k}\Omega,\ \ C = 1\ \text{nF},\ \ L = 0.25\ \text{H},\ \ f = 800\ \text{Hz}$$

a)

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} = R_1 + j\omega L + \frac{\frac{1}{R_2} - j\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}$$

$$\underline{Z} = \underbrace{R_1 + \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}}_{\text{Realteil (Resistanz)}} + j \underbrace{\left(\omega L - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}\right)}_{\text{Imaginärteil (Reaktanz)}}$$

$$\mathrm{Re}(\underline{Z}) = 25\mathrm{k}\Omega + \frac{1}{100\mathrm{k}\Omega\left(\frac{1}{(100\mathrm{k}\Omega)^2} + (2\pi \cdot 800\mathrm{Hz} \cdot 1\mathrm{nF})^2\right)} = 104.83\ \ \mathrm{k}\Omega$$

$$\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 2\pi \cdot 800\mathrm{Hz} \cdot \left(0.25\mathrm{H} - \frac{1\mathrm{nF}}{\frac{1}{(100\mathrm{k}\Omega)^2} + (2\pi \cdot 800\mathrm{Hz} \cdot 1\mathrm{nF})^2}\right) = \underbrace{-38.87\ \ \mathrm{k}\Omega}_{\text{kapazitiv}}$$

$$\underline{Z} = 104.83\ \ \mathrm{k}\Omega - j38.87\mathrm{k}\Omega$$

b)

$$\mid \underline{Z} \mid = \sqrt{\left(R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \omega^2 C^2 R_2}\right)^2 + \left(\omega L - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}\right)^2}$$

$$\mid \underline{Z} \mid = 111.8\ \ \mathrm{k}\Omega$$

$$\phi_{\underline{Z}} = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \omega^2 C^2 R_2}}\right) = \arctan\left(\frac{-38.87\mathrm{k}\Omega}{104.83\mathrm{k}\Omega}\right)$$

$$\phi_{\underline{Z}} = 20.36\ \ ^\circ$$

1.7

Abgleich bei $U_2 = 0$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_x}{Z_N} = \frac{\dfrac{1}{\frac{1}{R_x} + j\omega C_x}}{\dfrac{1}{\frac{1}{R_N} + j\omega C_N}} = \frac{\frac{1}{R_N} + j\omega C_N}{\frac{1}{R_x} + j\omega C_x}$$

$$\frac{R_2}{R_x} + j\omega R_2 C_x = \frac{R_1}{R_N} + j\omega C_N$$

Realteilvergleich:

$$\frac{R_2}{R_x} = \frac{R_1}{R_N} \implies R_x = \frac{R_N \cdot R_2}{R_1}$$

Imaginärteilvergleich:

$$\omega R_2 C_x = \omega R_1 C_N \implies C_x = C_N \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

1.8

Abgleich bei $U_2 = 0$

$$\frac{R_2}{Z_N} = \frac{Z_x}{R_3}$$

$$\frac{R_2}{\dfrac{1}{\frac{1}{R_N} + j\omega C_N}} = \frac{R_x + j\omega L_x}{R_3}$$

$$\frac{R_2}{R_N} + j\omega R_2 C_N = \frac{R_x}{R_3} + j\frac{\omega L_x}{R_3}$$

Realteilvergleich:

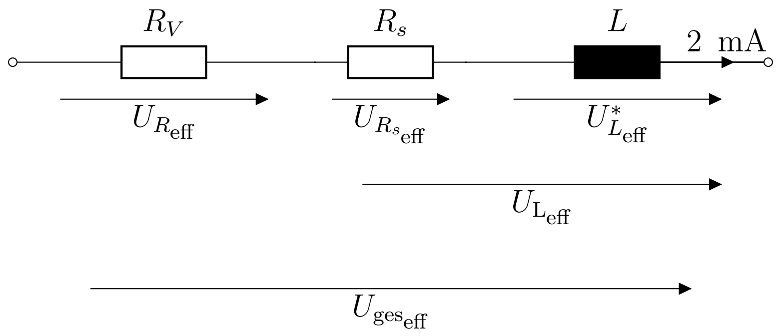
$$\frac{R_2}{R_N} = \frac{R_x}{R_3} \implies R_x = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_N}$$

Imaginärteilvergleich:

$$\omega R_2 C_N = \frac{\omega L_x}{R_3} \implies L_x = R_2 R_3 C_N$$

2 Versuchsaufgaben

2.1



a)

Bei einem konstanten Strom von 2 mA und einem Vorwiderstand von 1 kΩ wurden folgende Werte gemessen:

f/Hz	$U_{R_{\text{eff}}}$/V	$U_{L_{\text{eff}}}$/V	$U_{\text{ges}_{\text{eff}}}$/V
20	2.003	0.1281	2.102
60	2.002	0.2441	2.111
200	2	0.7413	2.223
300	2	1.1063	2.369
500	1.998	1.838	2.785
1000	1.997	3.677	4.229
1500	1.999	5.543	5.925

b)

Aus diesen wurden dann die folgenden Werte berechnet: (Frequenzen wie oben) mit:

$$U_L^* = \sqrt{U_L^2 - U_{R_s}^2}$$

$$U_{R_s} = \frac{U_{\text{ges}}^2 - U_R^2 - U_L^2}{2U_R}$$

$$\phi = \arctan \frac{U_L^*}{U_R}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$X_L = 2\pi f \cdot L$$

$$\mid \underline{Z}_L \mid = \sqrt{R_s^2 + X_L^2}$$

$U_{R_{s_{\text{eff}}}}/\text{V}$	U_L^*/V	R_s/Ω	$\phi/°$	Q	$Q_{\text{theoretisch}}$	L/H
0.09735	0.08326	48.67516	40.53971	0.85528	0.77450	0.33129
0.09709	0.22396	48.54298	66.56364	2.30685	2.32984	0.29704
0.09805	0.73479	49.02541	82.39929	7.49394	7.68971	0.29236
0.09707	1.10203	48.53266	84.96647	11.35352	11.65167	0.29232
0.09659	1.83546	48.29542	86.98760	19.00243	19.51485	0.29212
0.09417	3.67579	47.08350	88.53251	39.03484	40.03431	0.29251
0.09624	5.54216	48.12094	89.00514	57.58579	58.75683	0.29402

$\delta/°$	X_L/Ω	$\mid \underline{Z}_L \mid /\Omega$
49.46029	41.63089	41.63101
23.43636	111.98117	111.98121
7.60071	367.39343	367.39344
5.03353	551.01679	551.01680
3.01240	917.73011	917.73011
1.46749	1837.89700	1837.89701
0.99486	2771.08221	2771.08221

c)

$$\underline{Y}_s = \frac{1}{R_s + j\omega L} = \frac{R_s - j\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\underline{Y}_p = \underbrace{\frac{1}{R_p}}_{\text{Konduktanz}} - j \underbrace{\frac{1}{\omega L_p}}_{\text{Suszeptanz}}$$

$$\underline{Y}_s = \underline{Y}_p$$

$$\frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L}$$

$$\implies R_p = R_s + \frac{\omega^2 L^2}{R_s^2}$$

$$\implies L_p = L \cdot \left(1 + \frac{1}{Q_s^2}\right)$$

Beispiel 1: $f = 20\ \text{Hz}$

$$R_p = 48.67516\Omega + \frac{2\pi \cdot 20\text{Hz} \cdot 0.33129\text{H}}{(48.67516\Omega)^2} \approx 48.69\ \Omega \implies \frac{1}{R_p} \approx 0.02054\ \text{S}$$

$$X_{L_p} = 2\pi \cdot 20\text{Hz} \cdot 0.33129\text{H} \cdot \left(1 + \frac{1}{0.85528^2}\right) \approx 98.543\ \Omega \implies \frac{1}{\omega L_p} \approx 0.01015\ \text{S}$$

Beispiel 2: $f = 1000\ \text{Hz}$

$$R_p = 47.08350\Omega + \frac{2\pi \cdot 1000\text{Hz} \cdot 0.29251\text{H}}{(47.08350\Omega)^2} \approx 47.91\ \Omega \implies \frac{1}{R_p} \approx 0.02087\ \text{S}$$

$$X_{L_p} = 2\pi \cdot 1000\text{Hz} \cdot 0.29251\text{H} \cdot \left(1 + \frac{1}{39.03484^2}\right) \approx 1839.1007\ \Omega \implies \frac{1}{\omega L_p} \approx 0.0005437\ \text{S}$$

2.2