



GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK II

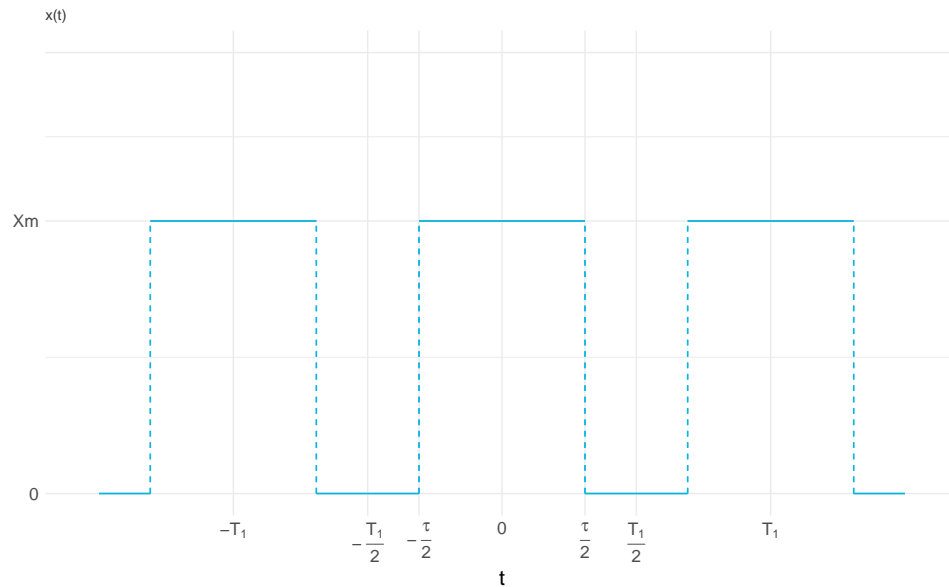
Frequenzanalyse periodischer Signale

Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard GRÜNERT
23.5.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



$$\begin{aligned}
 \underline{X}_\nu &= \frac{1}{T_1} \cdot \int_{T_1} x(t) \cdot e^{-(j\nu \cdot \omega_1 t)} dt \\
 &= \frac{1}{T_1} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} X_m \cdot e^{-(j\nu \cdot \omega_1 t)} dt \\
 &= -\frac{X_m}{T_1 \cdot j\nu \omega_1} \cdot \left[e^{-(j\nu \cdot \omega_1 t)} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= -\frac{X_m}{T_1 \cdot j\nu \omega_1} \cdot \left(e^{-j\nu \cdot \omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{j\nu \cdot \omega_1 \frac{\tau}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ und Erweiterung mit $\frac{-1}{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \underline{X}_\nu &= \frac{X_m}{2j\pi\nu} \cdot \left(e^{j\nu \cdot \pi \frac{\tau}{T_1}} - e^{-j\nu \cdot \pi \frac{\tau}{T_1}} \right) \\
 &= \frac{X_m}{\pi\nu} \cdot \frac{\left(e^{j\nu \cdot \pi \frac{\tau}{T_1}} - e^{-j\nu \cdot \pi \frac{\tau}{T_1}} \right)}{2j}
 \end{aligned}$$

mit $\frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j} = \sin(x)$ und $\frac{\tau}{T_1} = D$:

$$\underline{X}_\nu = \frac{X_m}{\pi\nu} \cdot \sin(\pi\nu D)$$

Erweitert man wieder mit $\frac{D}{D}$ erhält man das Bild einer Spaltfunktion $\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$\underline{X}_\nu = D \cdot X_m \cdot \frac{\sin(\pi\nu D)}{\pi\nu D} = D \cdot X_m \cdot \text{si}(\pi\nu D)$$

Als reelle Reihe:

$$x(t) = X_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{X}_\nu \cos(\nu \cdot \omega_1 t + \phi_\nu)$$

$$X_0 = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{T_1} x(t) dt = \frac{X_m}{2}$$

Aus der komplexen Reihendarstellung folgt

$$\hat{X}_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$$

$$\phi_\nu = \arccos \frac{a_\nu}{\hat{X}_\nu}$$

$$a_\nu = 2 \cdot \text{Re}(\underline{X}_\nu) = 2DX_m \cdot \text{si}(\pi\nu D)$$

$$b_\nu = -2 \cdot \text{Im}(\underline{X}_\nu) = 0$$

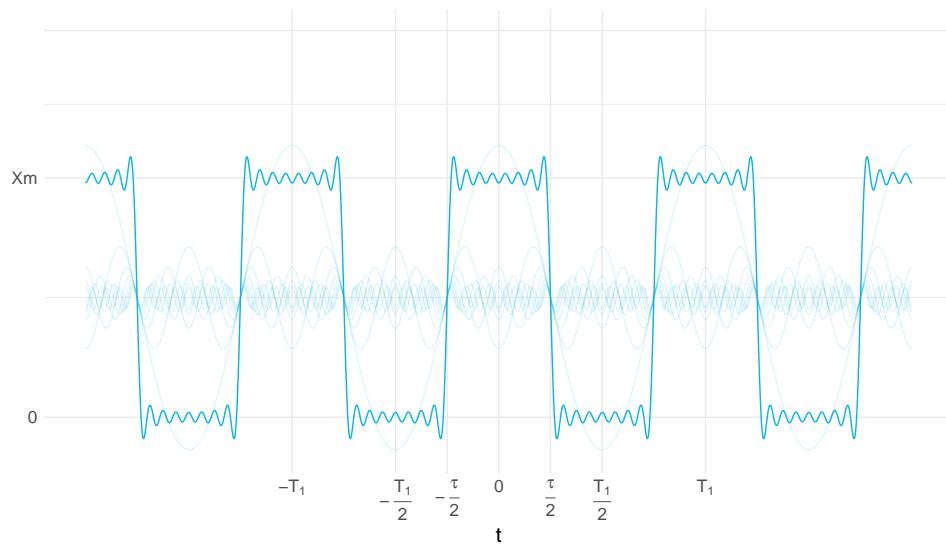
also

$$a_\nu = \hat{X}_\nu, \quad \phi_\nu = 0$$

Somit ist

$$x(t) = \frac{X_m}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2DX_m \cdot \text{si}(\pi\nu D) \cdot \cos\left(\nu \cdot \frac{2\pi}{T_1} \cdot t\right)$$

Reihenentwicklung von x(t) bis zur 16. Oberwelle
D=0.5



Effektivwert:

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T_1} \cdot \int_{T_1} x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{X_m^2}{T_1} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 dt}$$

$$X_{\text{eff}} = X_m \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T_1}} = X_m \cdot \sqrt{D}$$

$D = \frac{1}{2}$			
ν	\hat{X}_ν	ϕ_ν	X_{eff}
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
13			
14			
15			
16			

1.2

1.3

2 Versuchsaufgaben

2.1

2.2

2.3