



# GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK II

## Schwingkreise

Studien- und Versuchsaufgaben

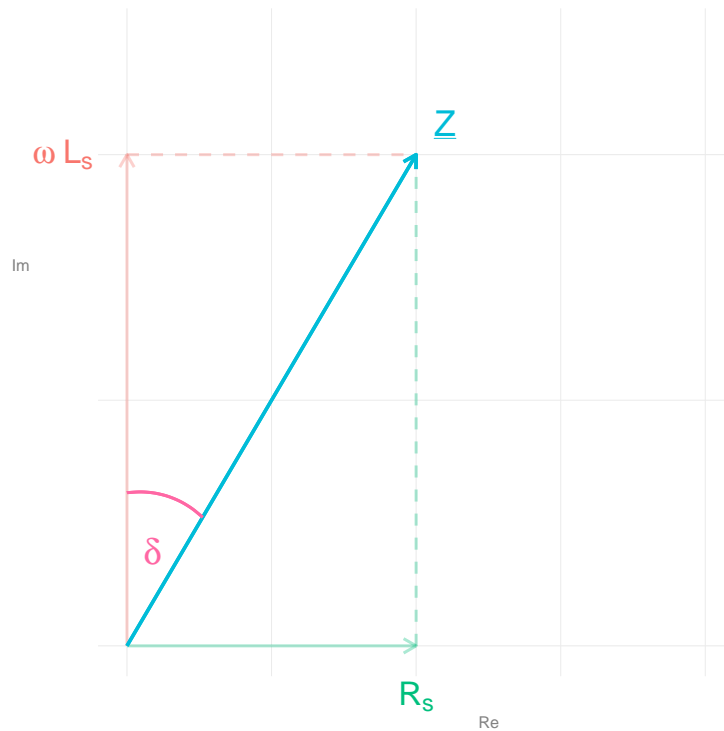
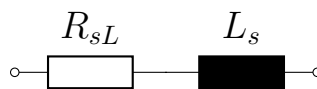
*Autor:* Richard GRÜNERT  
11.6.2019

# 1 | Vorbereitungsaufgaben

## 1.1

### Spule

Reihenmodell



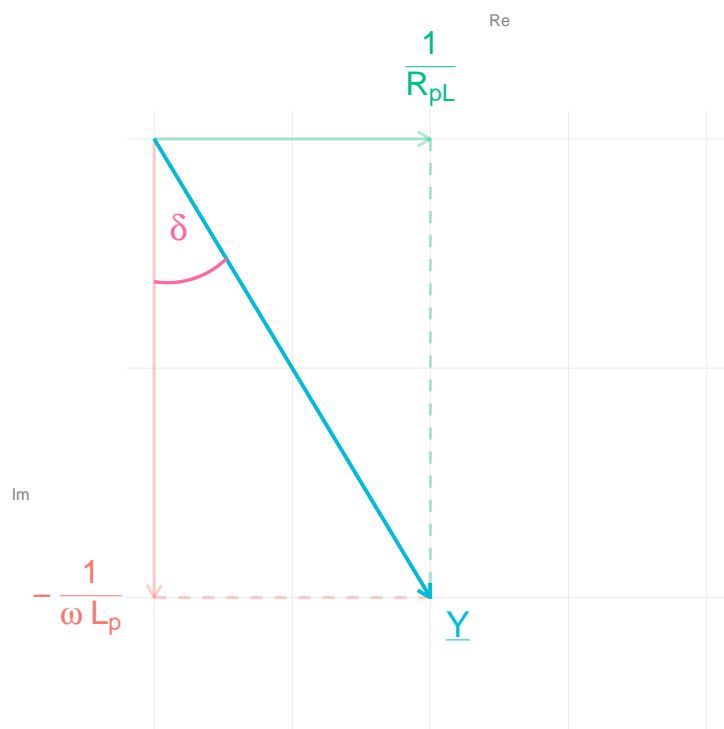
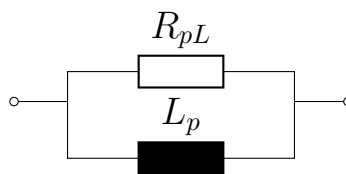
Der Verlustwinkel  $\delta$  ist der Winkel der Spulenimpedanz  $\underline{Z}$  mit der imaginären Achse der gaußschen Zahlenebene.  $\tan \delta$  wird auch Verlustfaktor  $d$  genannt.

$$\tan \delta = \frac{\omega L_s}{R_{sL}}$$

Die Güte  $Q$  der realen Induktivität ist demnach als Kehrwert des Verlustfaktors definiert:

$$Q_{Ls} = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{R_{sL}}{\omega L_s}$$

### Parallelmodell



Der Verlustwinkel  $\delta$  ist der Winkel der Spulenadmittanz  $\underline{Y}$  mit der imaginären Achse der gaußschen Zahlenebene (Betrag).

$$|\tan \delta| = \frac{\frac{1}{R_{pL}}}{\frac{1}{\omega L_p}} = \frac{\omega L_p}{R_{pL}}$$

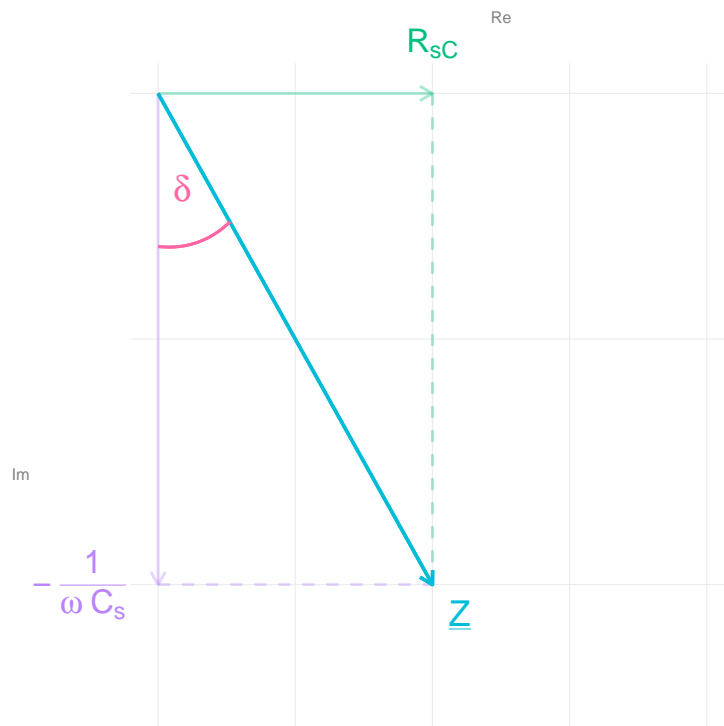
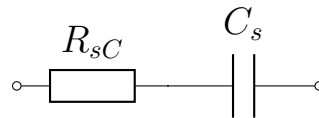
Kehrwert des Verlustfaktors:

$$Q_{Lp} = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{R_{pL}}{\omega L_p}$$

$$Q_{Lp} = Q_{Ls} = \frac{R_{pL}}{\omega L_p} = \frac{\omega L_s}{R_{sL}}$$

## Kondensator

### Reihenmodell



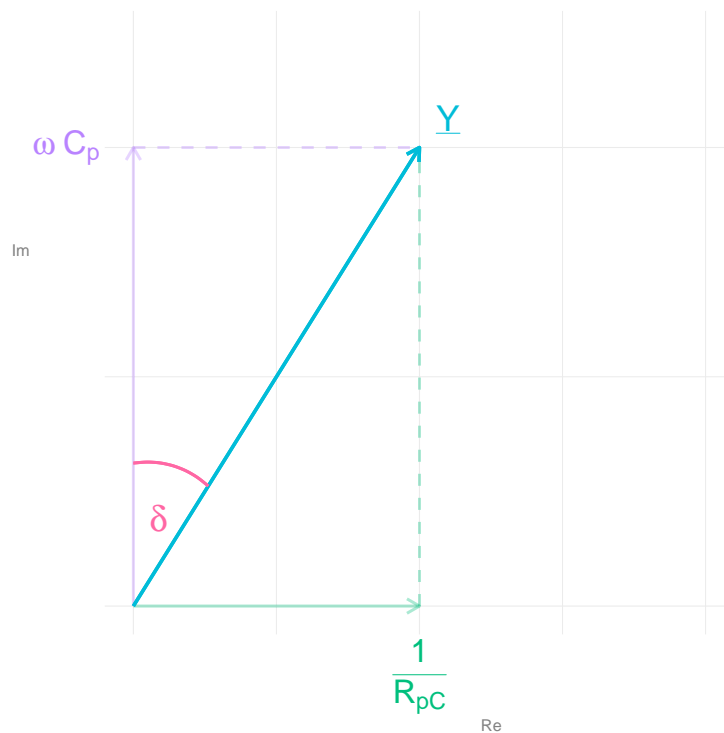
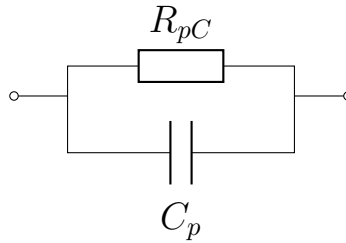
Der Verlustwinkel  $\delta$  ist der Winkel der Kondensatorimpedanz  $\underline{Z}$  mit der imaginären Achse der gaußschen Zahlenebene (Betrag).

$$|\tan \delta| = \frac{R_{sC}}{\frac{1}{\omega C_s}} = R_{sC} \cdot \omega C_s$$

Somit ist die Kondensatorgüte des Reihenmodells:

$$Q_{C_s} = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{1}{R_{sC} \cdot \omega C_s}$$

## Parallelmodell



Der Verlustwinkel  $\delta$  ist der Winkel der Kondensatoradmittanz  $\underline{Y}$  mit der imaginären Achse der gaußschen Zahlenebene.

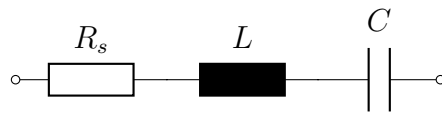
$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{R_{pC}}}{\omega C_p} = \frac{1}{R_{pC} \cdot \omega C_p}$$

Kehrwert des Verlustfaktors:

$$Q_{Cp} = \frac{1}{\tan \delta} = R_{pC} \cdot \omega C_p$$

$$Q_{Cs} = Q_{Cp} = \frac{1}{R_{sC} \cdot \omega C_s} = R_{pC} \cdot \omega C_p$$

## 1.2



Gleichung (4):

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_s + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R_s + jX \\ &= |\underline{Z}| \cdot e^{j\phi_Z} \end{aligned} \tag{4'}$$

Gleichung (5):

$$\begin{aligned} \phi_Z = \arg(\underline{Z}) &= \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_s}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{X}{R_s}\right) \end{aligned} \tag{5'}$$

Gleichung (6):

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R_s^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{6'}$$

Gleichung (7):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7')$$

Gleichung (8):

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (8')$$

Gleichung (9):

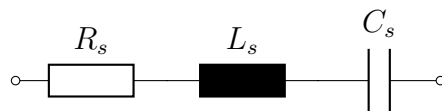
$$\begin{aligned} |\underline{I}| &= \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} \\ &= \frac{|\underline{U}|}{\sqrt{R_s^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{aligned} \quad (9')$$

Gleichung (10):

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot G_s = \frac{\underline{U}}{R_s} \quad (10')$$

## 1.3

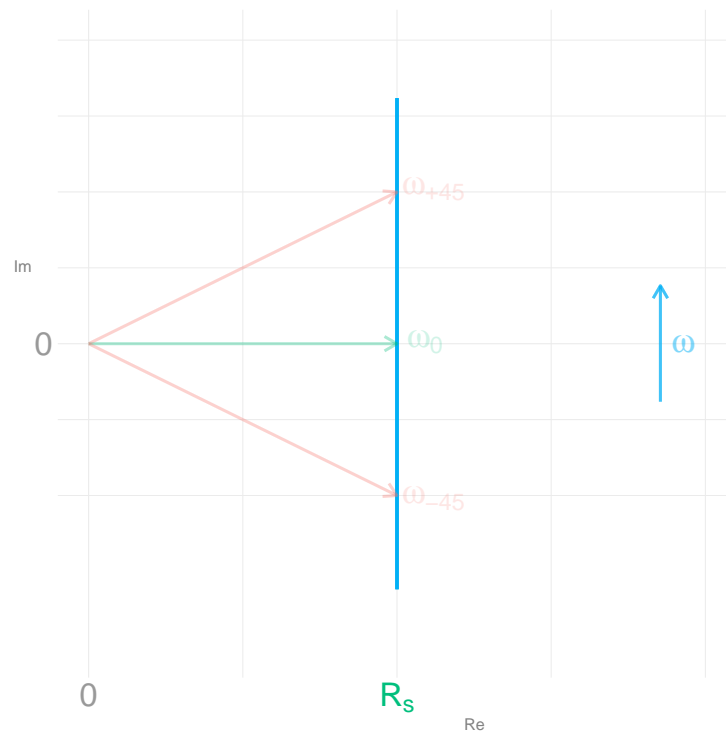
### Reihenschwingkreis



Impedanzortskurve

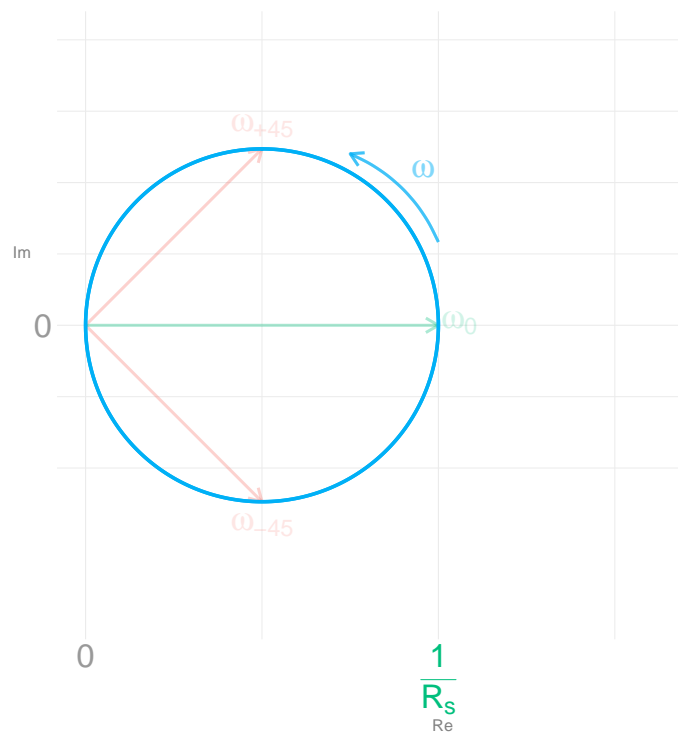


$$\underline{Z} = R_s + j(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s})$$

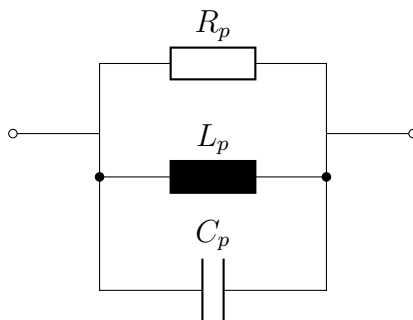


Admittanzortskurve

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_s + j(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s})}$$

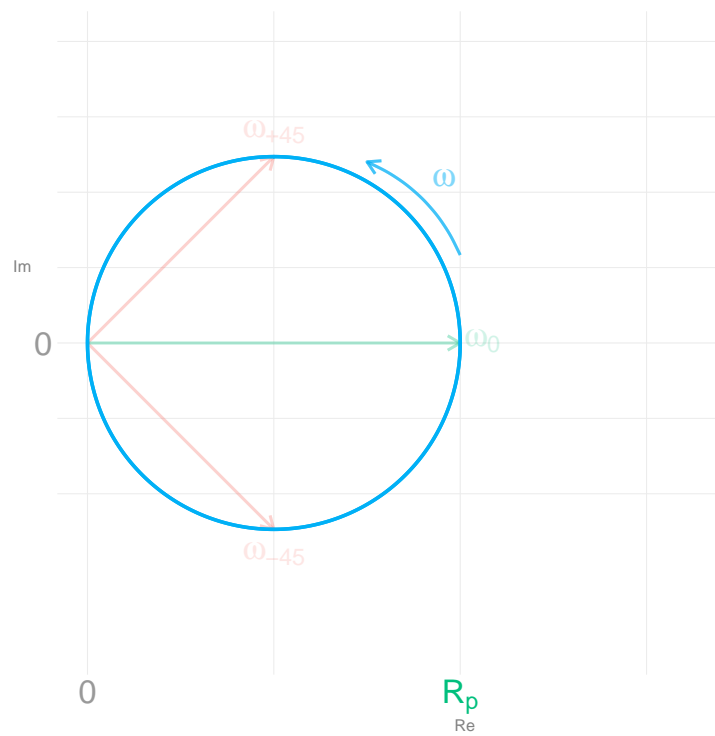


### Parallelschwingkreis



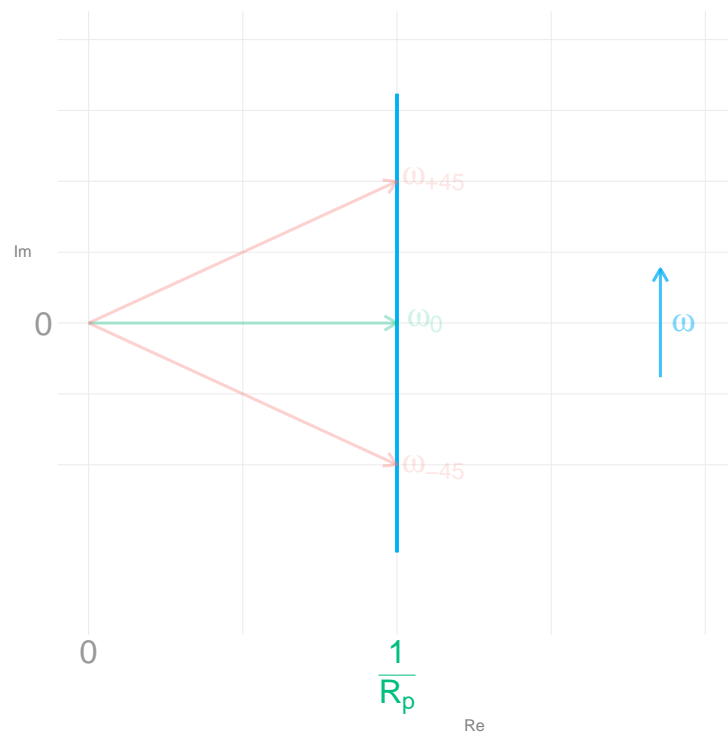
### Impedanzortskurve

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p})}$$

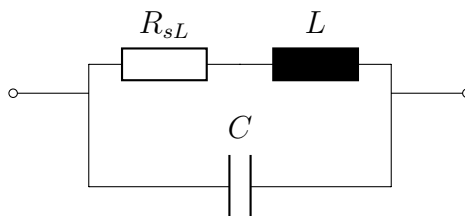


Admittanzortskurve

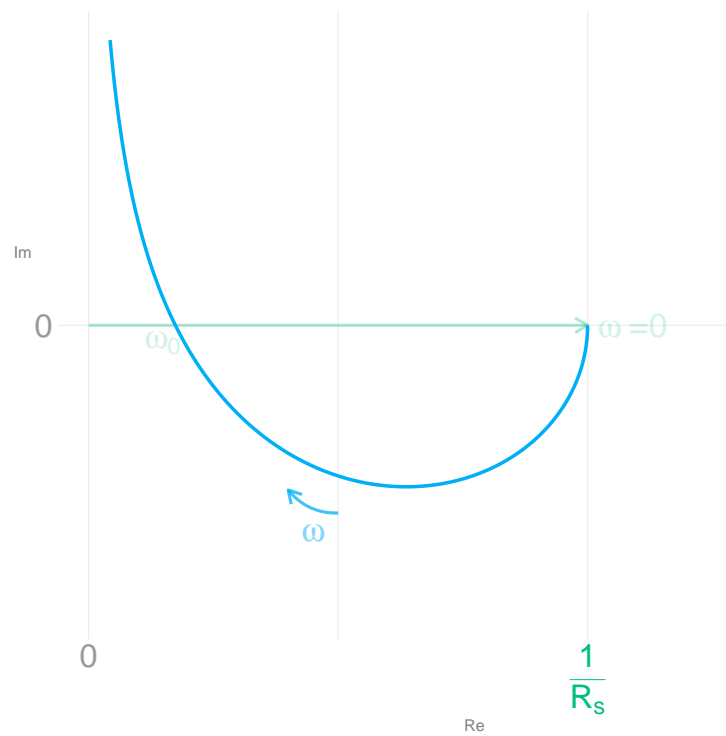
$$\underline{Y} = \frac{1}{R_p} + j(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p})$$



## 1.4



$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{R_{sL} + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \left( C - \frac{L}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} \right)\end{aligned}$$



Resonanzfrequenz:

$$\text{Im}(\underline{Y}) = 0$$

$$\omega'_0 C - \frac{\omega'_0 L}{R_{sL}^2 + \omega_0'^2 + L^2} = 0$$

$$R_{sL}^2 \cdot C + \omega_0'^2 + L^2 \cdot C^2 = L$$

$$\omega'_0 = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} - \frac{R_{sL}^2}{L^2}}$$

$$\boxed{\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R_{sL}}{\omega_0^2 \cdot L^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_L^2}}}$$

## 1.5

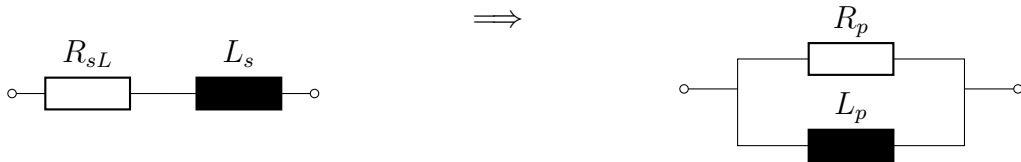
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1.3\text{H} \cdot 22.5\text{nF}}} = 5834.1 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0' = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R_s L^2}{\omega_0^2 \cdot L^2}} = 5834.1 \text{ s}^{-1} \cdot \sqrt{1 - \frac{(100\Omega)^2}{(5834.1 \text{ s}^{-1})^2 \cdot (1.3\text{H})^2}}$$

$$\omega_0' = 5833.6 \text{ s}^{-1}$$

$\Rightarrow$  geringe Differenz  $\Rightarrow$  hohe Spulengüte

Zur Berechnung von Güte und Bandbreite wird der Schwingkreis in einen idealen Parallelschwingkreis umgewandelt:



$$\underline{Y}_s = \underline{Y}_p$$

$$\frac{1}{R_s + j\omega_0 L_s} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega_0 L_p}$$

$$\frac{R_s}{R_s^2 + \omega_0^2 L_s^2} - j \frac{\omega_0 L_s}{R_s^2 L_s + \omega_0^2 L_s} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega_0 L_p}$$

Realteilvergleich:

$$R_p = 1 + \frac{\omega_0^2 L_s^2}{R_s^2} = 1 + Q_L^2$$

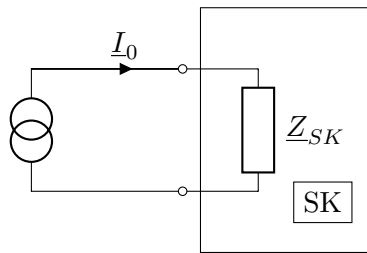
Imaginärteilvergleich:

$$L_p = L_s \left( 1 + \frac{R_s^2}{\omega_0^2 L_s^2} \right) = 1 + \frac{1}{Q_L^2}$$

$$R_p = 575.3 \text{ k}\Omega, \quad L_p = 1.30023 \text{ H} \approx L_s$$

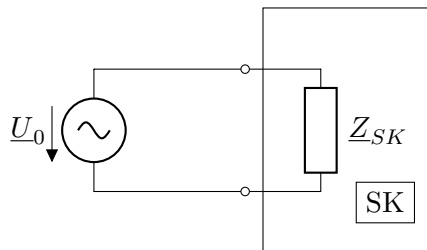
## 1.6

### Stromspeisung



$$\underline{U} = \underline{Z}_{SK} \cdot \underline{I}_0, \quad \underline{I}_0 = \text{konst.} \implies \underline{U} \sim \underline{Z}_{SK}$$

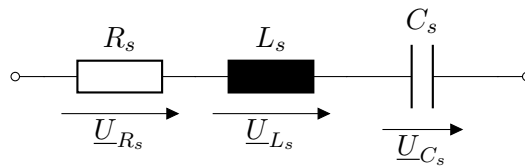
### Spannungsspeisung



$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_{SK}, \quad \underline{U}_0 = \text{konst.} \implies \underline{I} \sim \underline{Y}_{SK}$$

## 1.7

### Spannungsüberhöhung (Nur im Reihenschwingkreis)



$R_s$ :

$$\underline{U}_{R_s} = \frac{\underline{U} \cdot R_s}{R_s + j \left( \omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \right)}$$

$L_s$ :

$$\underline{U}_{L_s} = \frac{\underline{U} \cdot j\omega L_s}{R_s + j \left( \omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \right)}$$

$C_s$ :

$$\underline{U}_{C_s} = \frac{\underline{U}}{j\omega C_s \left( R_s + j \left( \omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \right) \right)}$$

bei  $\omega = \omega_0$ :

$$\underline{U}_{R_s} = \frac{\underline{U} \cdot R_s}{R_s} = \underline{U}$$

$$\underline{U}_{L_s} = j\underline{U} \cdot \frac{\omega_0 L_s}{R_s} = j\underline{U} \cdot Q_L$$

$$\underline{U}_{C_s} = -j\underline{U} \cdot \frac{1}{\omega_0 C_s R_s}$$

Beträge bei  $\omega_0$ :

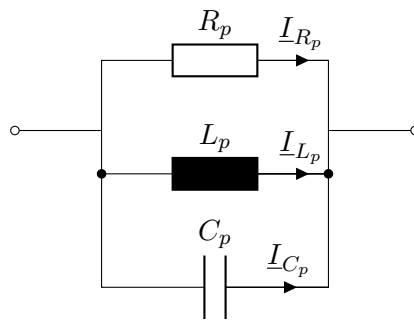


$$\hat{U}_{R_s} = \hat{U}$$

$$\hat{U}_{L_s} = Q_L \cdot \underline{U}$$

$$\hat{U}_{C_s} = Q_C \cdot \underline{U}$$

## Stromüberhöhung (Nur im Parallelschwingkreis)



$R_p$ :

$$\underline{I}_{R_p} = \frac{\underline{I} \cdot \frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_p} + j \left( \omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)}$$

$L_p$ :

$$\underline{I}_{L_p} = \frac{\underline{I}}{j\omega L_p \left( \frac{1}{R_p} + j \left( \omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \right)}$$

$C_p$ :

$$\underline{I}_{C_p} = \frac{\underline{I} \cdot j\omega C_p}{\frac{1}{R_p} + j \left( \omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)}$$

bei  $\omega = \omega_0$ :

$$\underline{I}_{R_p} = \underline{I}$$

$$\underline{I}_{L_p} = j\underline{I} \cdot \frac{R_p}{\omega_0 L_p} = j\underline{I} \cdot Q_L$$

$$\underline{I}_{C_p} = -j\underline{I} \cdot \omega_0 R_p C_p = j\underline{I} \cdot Q_C$$

Beträge bei  $\omega_0$ :

$$\hat{I}_{R_p} = \hat{I}$$

$$\hat{I}_{L_p} = Q_L \cdot \underline{I}$$

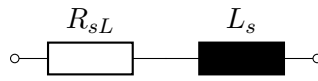
$$\hat{I}_{C_p} = Q_C \cdot \underline{I}$$

Die Strom- bzw. Spannungsüberhöhungen betragen demnach bei Resonanz das  $Q_{L/C}$ -fache der Quellgrößen.

## 1.8

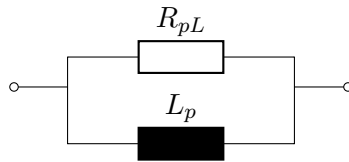
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.1\text{H} \cdot 100\text{nF}}} = 10000 \text{ s}^{-1} \implies f_0 = 1.592 \text{ kHz}$$

Spule



$$Q_L = \frac{\omega_0 L_s}{R_{sL}}$$

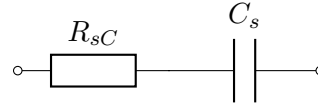
$$R_{sL} = \frac{\omega_0 L_s}{Q_L} = 20 \text{ } \Omega$$



$$Q_L = \frac{R_{pL}}{\omega_0 L_p}$$

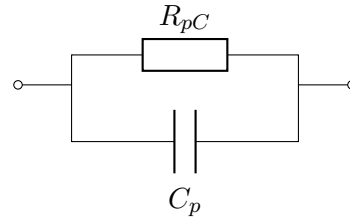
$$R_{pC} = Q_L \cdot \omega_0 L_p = 50 \text{ k}\Omega$$

Kondensator



$$Q_C = \frac{1}{\omega_0 R_{sC} C_s}$$

$$R_{sC} = \frac{1}{\omega_0 Q_C C_s} = 3.3 \text{ } \Omega$$



$$Q_C = \omega_0 R_{pC} C_p$$

$$R_{pC} = \frac{Q_C}{\omega_0 C_p} = 300 \text{ k}\Omega$$

$$Q_{SK} = \frac{1}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_L}} = \frac{Q_C \cdot Q_L}{Q_C + Q_L}$$

$$Q_{SK} = \frac{300}{7} \approx 42.86$$

$$B_\omega = \frac{\omega_0}{Q_{SK}} = \frac{10000 \text{ s}^{-1}}{42.86} = 232.3 \text{ s}^{-1}$$

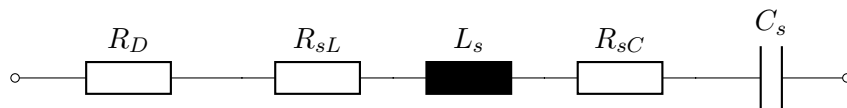
$$B_f = \frac{223.2 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 37.14 \text{ Hz}$$

Messfrequenz:

$$f_0 = 1.59 \text{ kHz} \implies \text{geringere Güte} \implies B_f = 116.6 \text{ Hz}$$

$$Q_{\text{mess}} = \frac{f_0}{B_f} = 13.64$$

Modell:



$$B_\omega = \frac{R_{\text{res.}}}{L_s} \implies R_{\text{res.}} = 2\pi \cdot B_f \cdot L_s = 73.26 \text{ } \Omega$$

$$R_D = R_{\text{res.}} - R_{sC} - R_{sL} = 49.9 \text{ } \Omega \approx 50 \text{ } \Omega$$

## 1.9

Anwendungen von Schwingkreisen:

- Filter
- Blindstromkompensation

## 2 | Versuchsaufgaben

### 2.1

$C$	$R_{pC}$	$R_{sC}$	$Q_C$	$\phi_C$
995.97 nF	4.7278 k $\Omega$	213.42 m $\Omega$	153.374233	89.624°

Werte des Kondensators

$L$	$R_{sL}$	$R_{pL}$	$Q_L$	$\phi_L$
1.0263 mH	1.0466 $\Omega$	994.19 $\Omega$	30.838	88.14°

Werte der Spule

Reihenschwingkreis:

$$\omega_0 = 31278.1 \text{ s}^{-1}$$

$$Q_{RSK} = \frac{153.37 \cdot 30.838}{153.37 + 30.838} = 25.74$$

$$B_\omega = \frac{31278.1 \text{ s}^{-1}}{25.74} = 1215.15 \text{ s}^{-1}$$

Parallelschwingkreis:

$$\omega_0 = 31278.1 \text{ s}^{-1}$$

$$Q_{PSK} = \frac{153.37 \cdot 30.838}{153.37 + 30.838} = 25.74$$

$$B_\omega = \frac{31278.1 \text{ s}^{-1}}{25.74} = 1215.15 \text{ s}^{-1}$$

## 2.2

(a)

Für die Resonanzfrequenz wurde  $f_0 = 5000$  Hz ermittelt. Die Grenzfrequenzen wurden zu  $f_{+45} = 5200$  Hz und  $f_{-45} = 4830$  Hz messtechnisch ermittelt. Zur Konstanthaltung des Stromes wurde die Spannung über  $R_V = 1 \text{ } \Omega$  auf 1 V eingestellt und gemessen.

$f$ in Hz	$U_V$ in V	$U$ in V	$\phi$ in $^\circ$
2500	1.0076	0.0215	83.4
3000	1.0078	0.02965	82
3500	1.0075	0.004296	79.9
4000	1.0212	0.06958	75.3
4500	1.0572	0.13935	63.3
4830	1.2505	0.3148	33.8
5000	1.447	0.4452	0
5200	1.2432	0.3148	-36.5
5500	1.0711	0.16457	-61.79
6000	1.0205	0.0878	-75.2
6500	1.0132	0.06084	-80.1
7000	1.0062	0.04674	-82.2
7500	1.0061	0.0384	-84.3

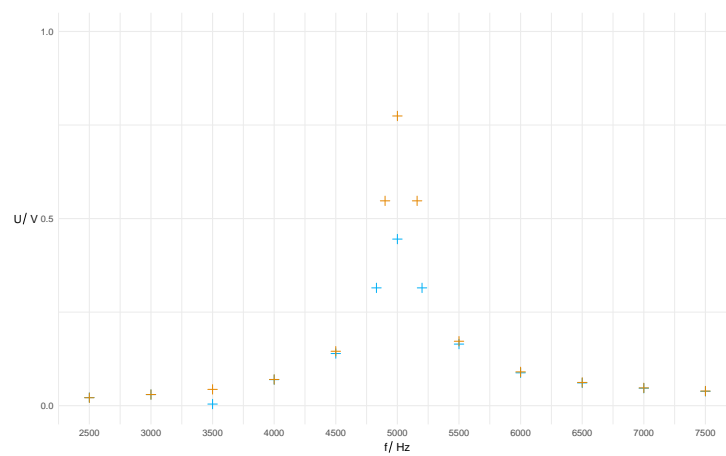
Messwerte aus (a)

(b)

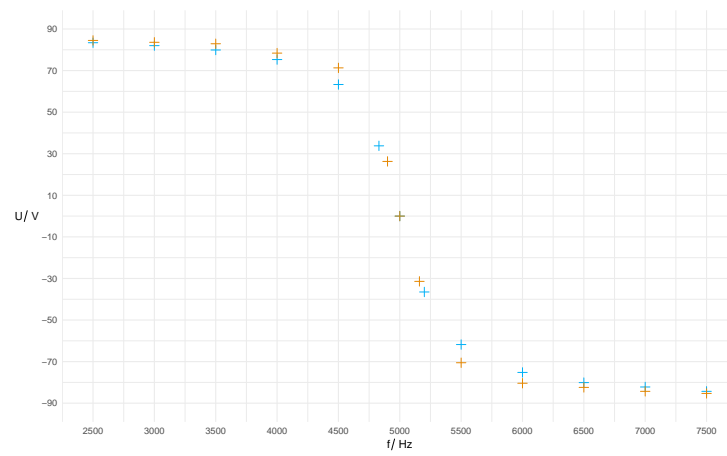
$f$ in Hz	$U_V$ in V	$U$ in V	$\phi$ in $^\circ$
2500	1.0074	0.02124	84.5
3000	1.0073	0.02974	83.6
3500	1.0073	0.04356	82.9
4000	1.0142	0.07003	78.4
4500	1.043	0.14542	71.3
4900	1.4921	0.5474	26.3
5000	1.768	0.7742	0
5160	1.421	0.5474	-31.4
5500	1.0494	0.1722	-70.54
6000	1.0133	0.0903	-80.4
6500	1.0065	0.0621	-82.4
7000	1.0058	0.0475	-84.3
7500	1.0054	0.0391	-85.3

Messwerte aus (b)

(c)



Spannungsverlauf. Blau: (a), orange: (b)



Phasenverlauf. Blau: (a), orange: (b)

(d)

**2.3**

**2.4**

**2.5**