Nachrichtentechnik

PCM

Studien- und Versuchsaufgaben

Autoren: Richard Grünert
Pascal Hamaidia
Stefan Klobe

25.3.2020

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

Da ein periodisches Signal vorliegt, kann es mithilfe der Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

in seine diskreten Frequenzanteile a_n und b_n bei $n \cdot \omega_0$ zerlegt werden.

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

Die Rechteckfolge ist eine gerade Funktion, $x(t) = x(-t)$, weshalb die Koeffizienten $b_n = 0$ sind.

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} ... = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 \cdot \cos n\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \int_0^{\tau/2} \cos n\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{n\omega_0} \cdot \sin n\omega_0 \cdot \frac{\tau}{2}$$

mit $\omega_0 = 2\pi/T$

$$a_n = \frac{2U_0}{n\pi} \cdot \sin(n\pi \cdot \frac{\tau}{T})$$

durch Erweiterung mit τ/T in die Form $\sin(x)/x = Si(x)$

$$\boxed{a_n = 2U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot Si(n\pi \cdot \frac{\tau}{T})}$$

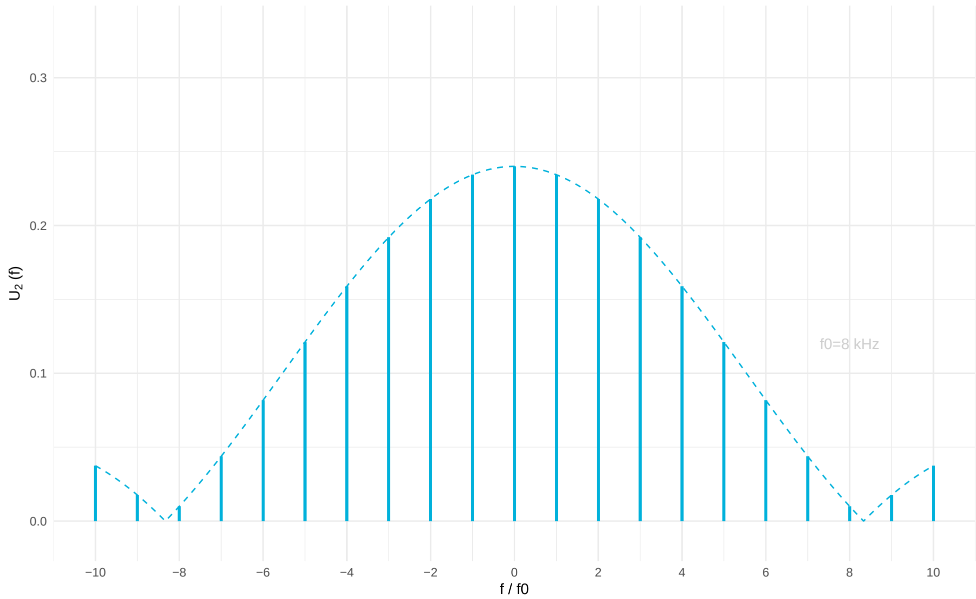

Abbildung 1: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/8\,\mathrm{ms}$

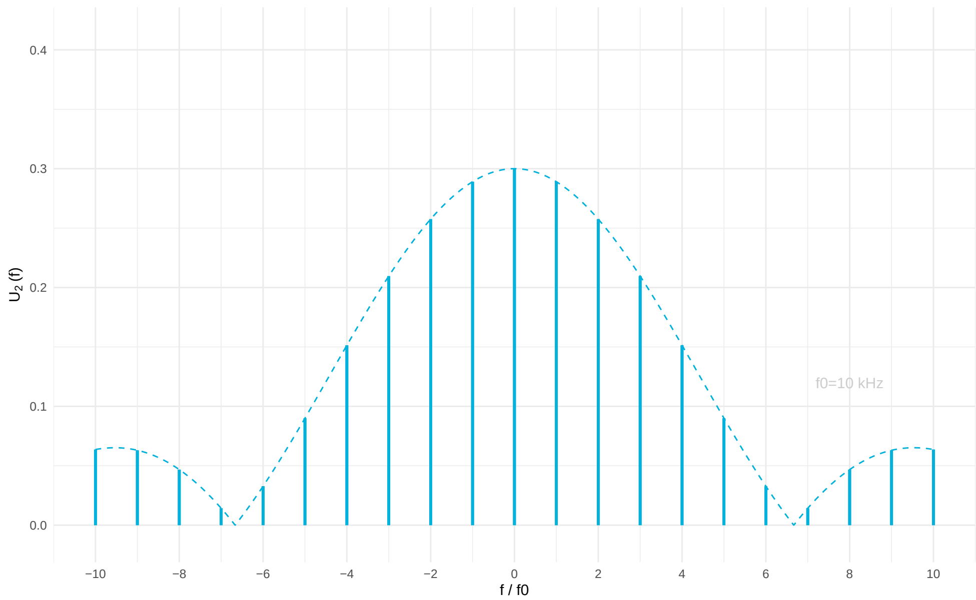

Abbildung 2: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/10\,\mathrm{ms}$

1.2

Für die fehlerlose Signalabtastung muss die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so groß sein wie die maximal im Signal auftretende Frequenz f_{SMax} (Nyquist-Theorem).

$$f_A \geq 2 \cdot f_{SMax}$$

1.3

Die Multiplikation des Eingangssignals $u_1(t)$ mit dem Diracimpulskamm $u_0(t)$ führt auf eine Faltung im Zeitbereich.

$$U_2(f) = U_1(f) * U_0(f)$$

Die Fouriertransformation des Dirac-Kammes $U_0(f)$ führt ebenfalls auf einen mit der Abtastperiode gedämpften Dirac-Kamm

$$u_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{T_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot \frac{1}{T_a})$$

Die Faltung einer Funktion $f(x)$ mit einem Diracimpuls $\delta(x)$ führt zur Verschiebung dieser Funktion an die Stelle des Diracs B und Wichtung der Funktion mit dem Faktor a

$$f(x) * a \cdot \delta(x - B) = a \cdot f(x - B) \tag{1}$$

Da ein Diracimpulskamm lediglich eine Summe mehrerer Diracimpulse ist, kann man die Linearität des Faltungsintegrals ausnutzen

$$U_2(f) = U_1(f) * U_0(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_1(F) \cdot U_0(F - f)\, \mathrm{d}F$$

$$= \frac{1}{T_a} \cdot \int U_1(F) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta((F - f) - k \cdot \frac{1}{T_a})\, \mathrm{d}F$$

$$= \frac{1}{T_a} \cdot \left(\cdots + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta(F - f)}_{\text{Gl. (1)}} + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta((F - f) - \frac{1}{T_a})}_{\text{Gl. (1)}} + \cdots \right)$$

Es ergibt sich also die Summe der Faltungen der Funktion $U_1(f)$ mit den einzelnen Diracimpulsen des Kammes, also im Falle des Frequenzbereiches die periodische Verschiebung des Spektrums $U_1(f)$ um die Werte $k \cdot 1/T_a$.

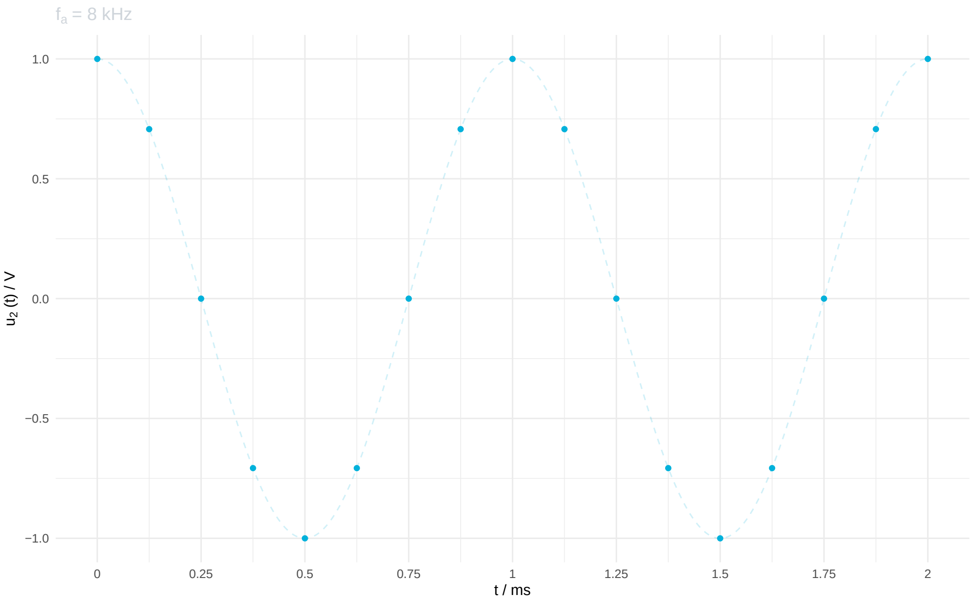

Abbildung 3: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 8\,\mathrm{kHz}$

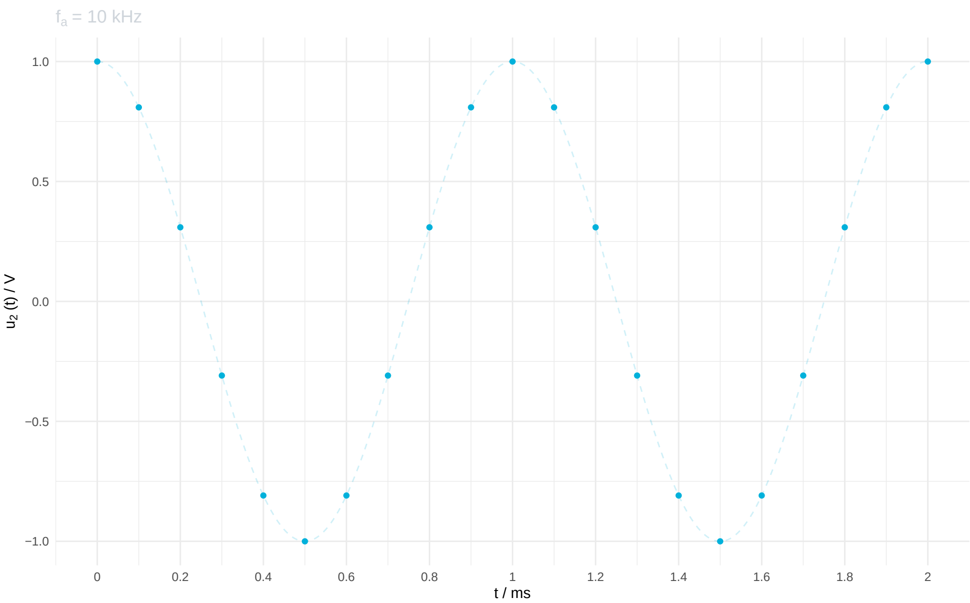

Abbildung 4: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 10\,\mathrm{kHz}$

2 Versuchsaufgaben