



NACHRICHTENTECHNIK

PCM

Studien- und Versuchsaufgaben

Autoren: Richard GRÜNERT
Pascal HAMADIA
Stefan KLOBE

25.3.2020

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

Da ein periodisches Signal vorliegt, kann es mithilfe der Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

in seine diskreten Frequenzanteile a_n und b_n bei $n \cdot \omega_0$ zerlegt werden.

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \, dt$$

Die Rechteckfolge ist eine gerade Funktion, $x(t) = x(-t)$, weshalb die Koeffizienten $b_n = 0$ sind.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \dots = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \int_0^{\tau/2} \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{n\omega_0} \cdot \sin n\omega_0 \cdot \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

mit $\omega_0 = 2\pi/T$

$$a_n = \frac{2U_0}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)$$

durch Erweiterung mit τ/T in die Form $\sin(x)/x = Si(x)$

$$a_n = 2U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \text{Si}(n\pi \cdot \frac{\tau}{T})$$

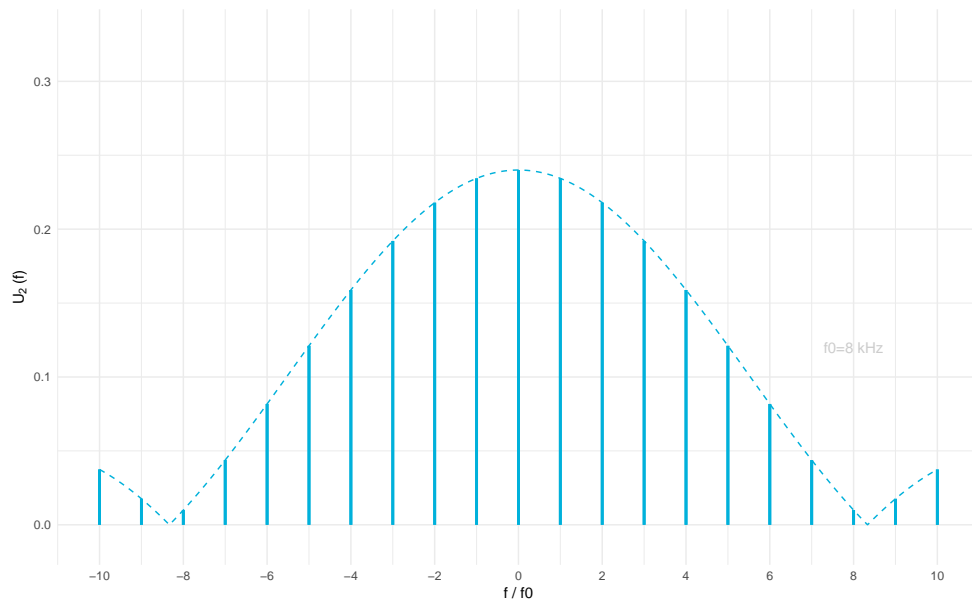


Abbildung 1: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/8 \text{ ms}$

Der Gleichanteil a_0 ist

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t) \, dt \\ &= \frac{U_0}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \, dt = \frac{U_0}{T} \cdot \left[\frac{\tau}{2} - \left(-\frac{\tau}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$a_0 = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{\tau}{T}$$

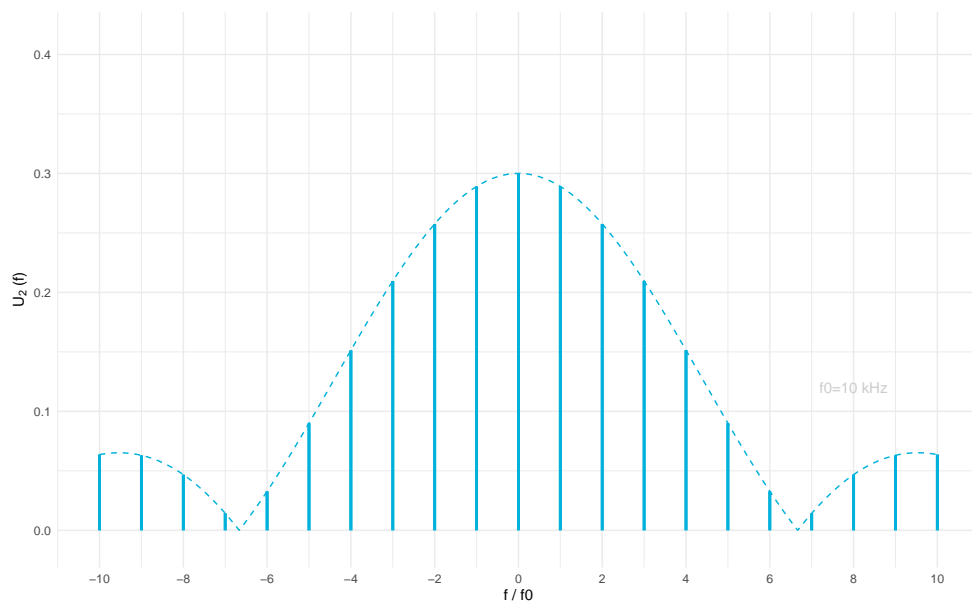


Abbildung 2: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/10 \text{ ms}$

1.2

Für die fehlerfreie Signalabtastung muss die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so groß sein wie die maximal im Signal auftretende Frequenz f_{SMax} (Nyquist-Theorem).

$$f_A \geq 2 \cdot f_{SMax}$$

1.3

Die Multiplikation des Eingangssignals $u_1(t)$ mit dem Diracimpulskamm $u_0(t)$ führt auf eine Faltung im Zeitbereich.

$$U_2(f) = U_1(f) * U_0(f)$$

Die Fouriertransformation des Dirac-Kammes $U_0(f)$ führt ebenfalls auf einen mit der Abtastperiode gedämpften Dirac-Kamm

$$u_0(t) \circ \bullet \frac{1}{T_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot \frac{1}{T_a})$$

Die Faltung einer Funktion $f(x)$ mit einem Diracimpuls $\delta(x)$ führt zur Verschiebung dieser Funktion an die Stelle des Diracs B und Wichtung der Funktion mit dem Faktor a

$$f(x) * a \cdot \delta(x - B) = a \cdot f(x - B) \quad (1)$$

Da ein Diracimpulskamm lediglich eine Summe mehrerer Diracimpulse ist, kann man die Linearität des Faltungsintegrals ausnutzen

$$\begin{aligned} U_2(f) &= U_1(f) * U_0(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_1(F) \cdot U_0(F - f) \, dF \\ &= \frac{1}{T_a} \cdot \int U_1(F) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta((F - f) - k \cdot \frac{1}{T_a}) \, dF \\ &= \frac{1}{T_a} \cdot \left(\cdots + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta(F - f)}_{\text{Gl. (1)}} + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta((F - f) - \frac{1}{T_a})}_{\text{Gl. (1)}} + \cdots \right) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Summe der Faltungen der Funktion $U_1(f)$ mit den einzelnen Diracimpulsen des Kammes, also im Falle des Frequenzbereiches die periodische Verschiebung des Spektrums $U_1(f)$ um die Werte $k \cdot 1/T_a$ sowie die Skalierung mit $1/T_a$.

(Das Spektrum des Eingangssignals $u_1(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$ stellt zwei Spektrallinien bei $-f_1$ und $+f_1$ dar)

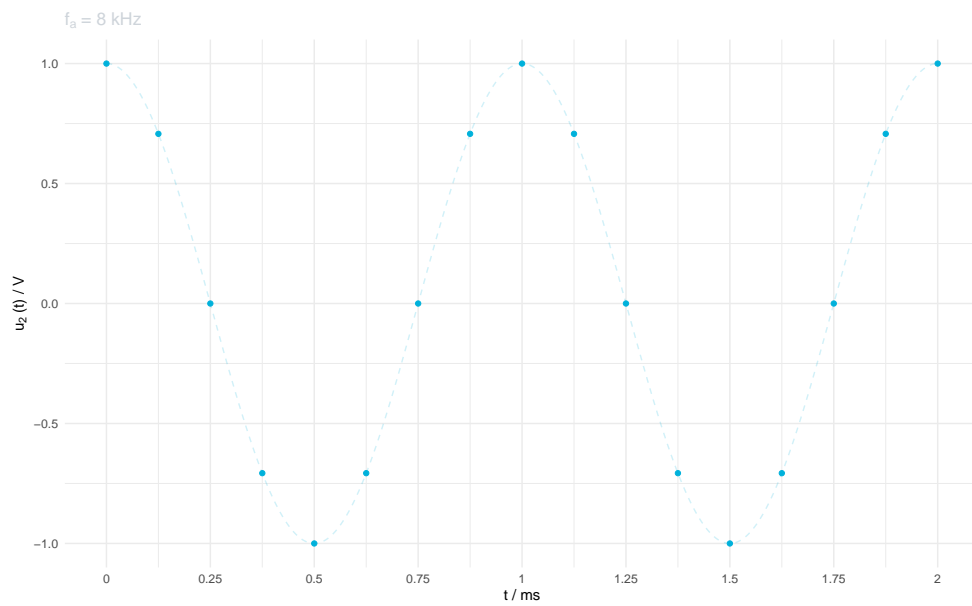


Abbildung 3: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 8 \text{ kHz}$

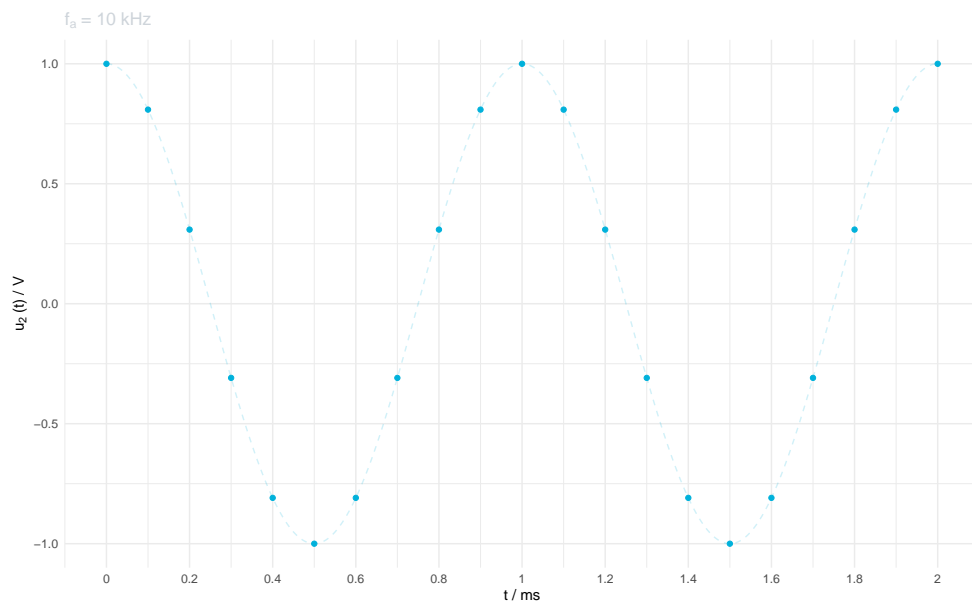


Abbildung 4: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 10 \text{ kHz}$

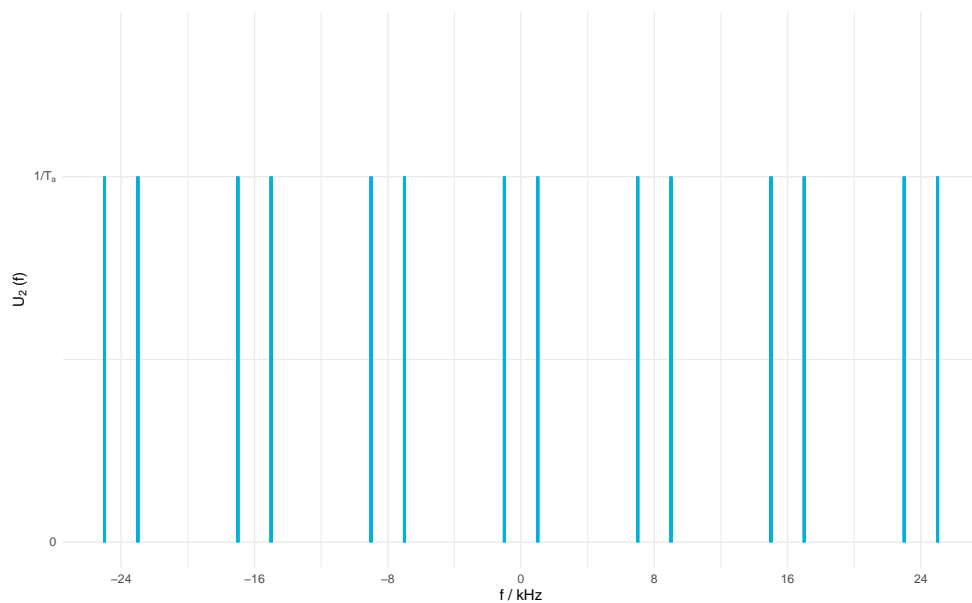


Abbildung 5: Ausschnitt des Spektrums bei Abtastung mit $f_a = 8$ kHz

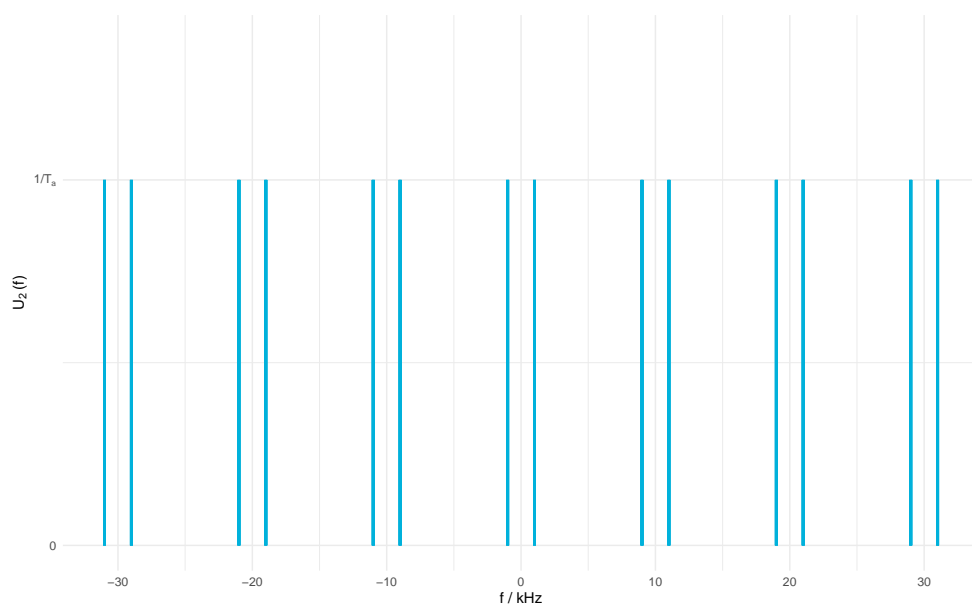


Abbildung 6: Ausschnitt des Spektrums bei Abtastung mit $f_a = 10$ kHz

Wird die Rechteckfolge aus 4.1. zur Abtastung verwendet, entsteht im Zeitbereich eine stückweise kontinuierliche Funktion (Abb.).

Im Frequenzbereich entsteht die Faltung ähnlich wie bei der Abtastung mit dem Dirackamm, nur dass das Spektrum mit dem gefaltet wird das diskrete Spektrum aus Abb. 1 bzw. Abb. 2 ist. Die Verschiebungen des Eingangssignalspektrums entstehen daher immernoch zu $k \cdot 1/T_a$, die Wichtung der einzelnen Spektrallinien ist jedoch nicht mehr konstant, sondern folgt der einhüllenden Si-Funktion des Spektrums der Rechteckfolge.

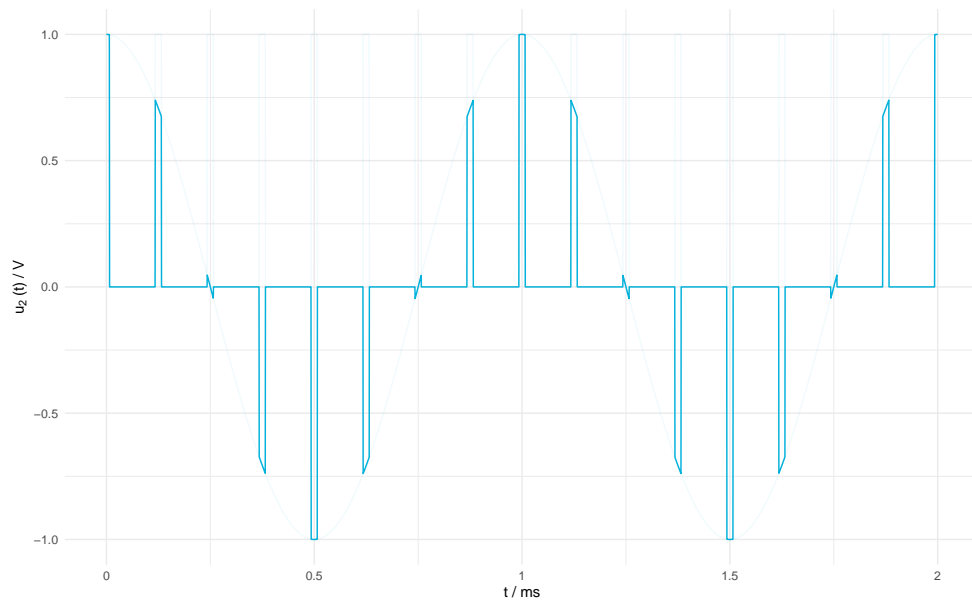


Abbildung 7: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit der periodischen Rechteckfolge aus 4.1 ($T = 1/8$ ms)

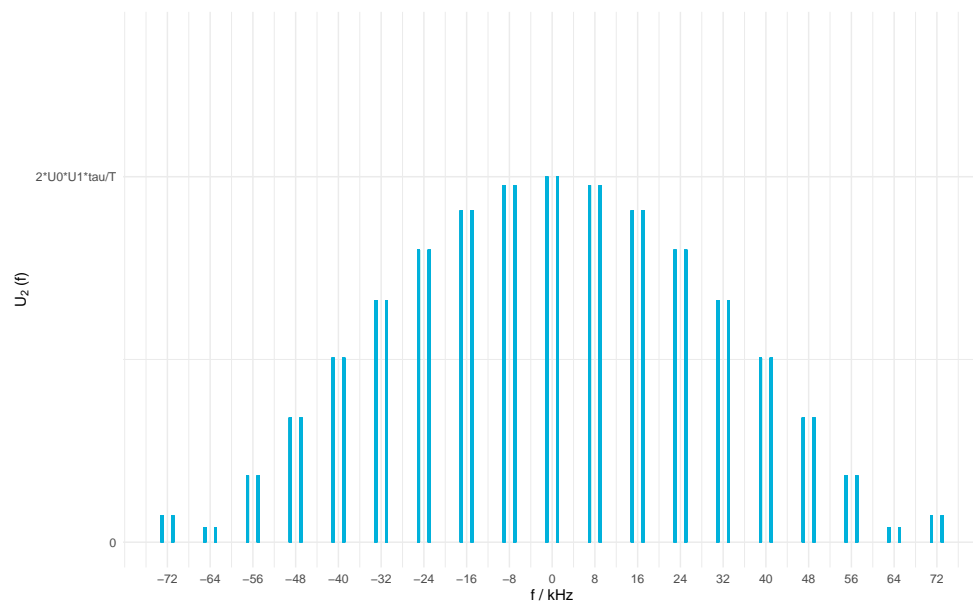


Abbildung 8: Teil des Spektrums bei Abtastung mit der Rechteckfolge aus 4.1 ($f_a = 8 \text{ kHz}$)

2 Versuchsaufgaben