Signale und Systeme

Multiplikation von Zeitsignalen

Studien- und Versuchsaufgaben

Autoren: Richard Grünert
Tim Corleis

19.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

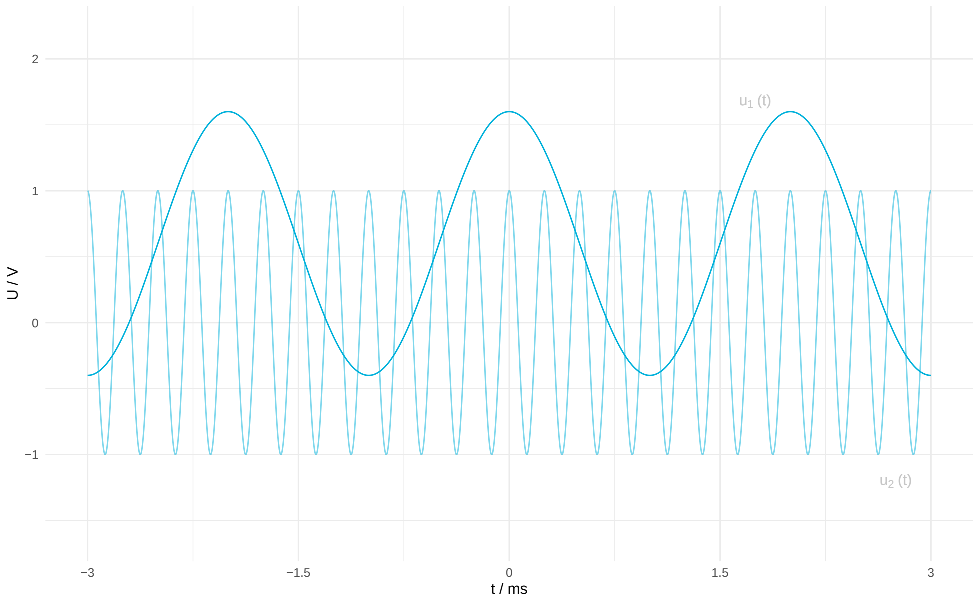

Abbildung 1: $u_1(t)$ und $u_2(t)$

$$
\begin{aligned}
u_3(t) &= u_1(t) \cdot u_2(t) \\
&= (U_0 + U_1 \cos(\omega_1 t)) \cdot U_2 \cos(\omega_2 t) \\
&= U_0 U_2 \cos(\omega_2 t) + U_1 U_2 [\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)]
\end{aligned}
$$

mithilfe der Gleichung aus "theoretische Grundlagen" ergibt sich

$$
u_3(t) = U_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{U_1 U_2}{2} \cdot [\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t)]
$$

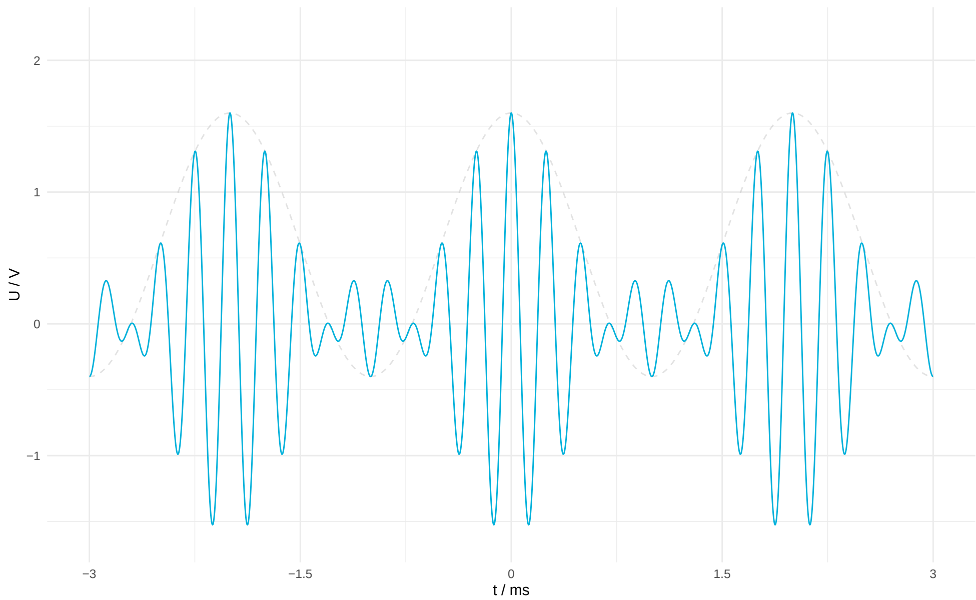

Abbildung 2: $u_3(t)$; $u_1(t)$ ist als einhüllende Funktion erkennbar

Fouriertransformation:

$$U_3(\omega) = U_0 U_2 \cdot \mathcal{F}\{\cos(\omega_2 t)\} + \frac{U_1 U_2}{2} \cdot [\mathcal{F}\{\cos((\omega_1 - \omega_2)t)\} + \mathcal{F}\{\cos((\omega_1 + \omega_2)t)\}]$$

mit

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \tag{1}$$

ergibt sich

$$U_3(\omega) = \frac{U_0 U_2}{2} \cdot [\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)]$$
$$+\frac{U_1 U_2}{4} \cdot [\delta(\omega - (\omega_1 - \omega_2))$$
$$+\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2)$$
$$+\delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2))$$
$$+\delta(\omega + \omega_1 + \omega_2)]$$

mit den vorgegebenen Werten:

$$U_3(f) = 0.3 \cdot [\delta(f - 4\text{kHz} + \delta(f + 4\text{kHz})]$$
$$+\frac{1}{4} \cdot [\delta(f + 3.5\text{kHz})$$
$$+\delta(f - 3.5\text{kHz})$$
$$+\delta(\omega - 4.5\text{kHz})$$
$$+\delta(\omega + 4.5\text{kHz})]$$

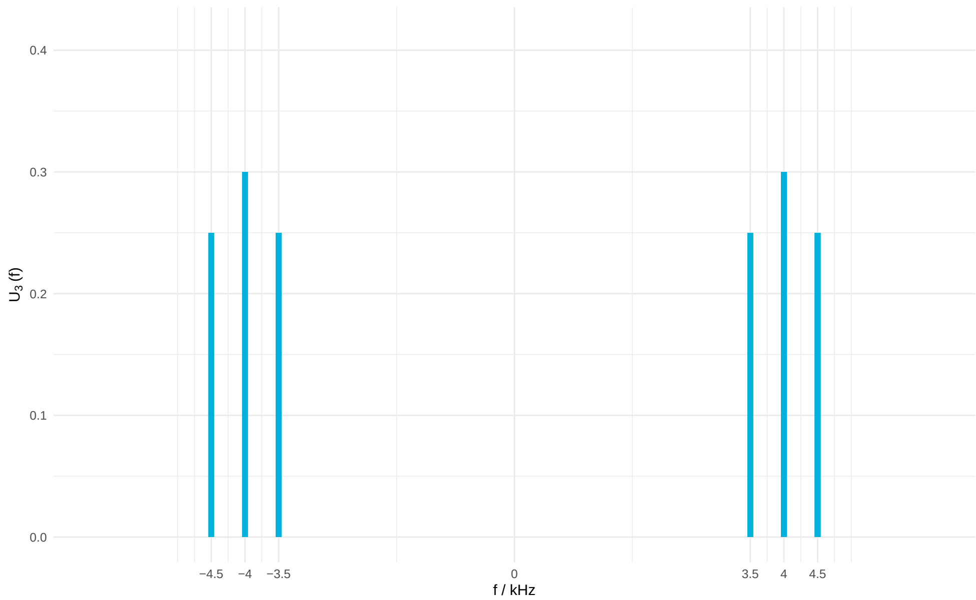

Abbildung 3: Amplitudendichtespektrum von $u_3(t)$

1.2

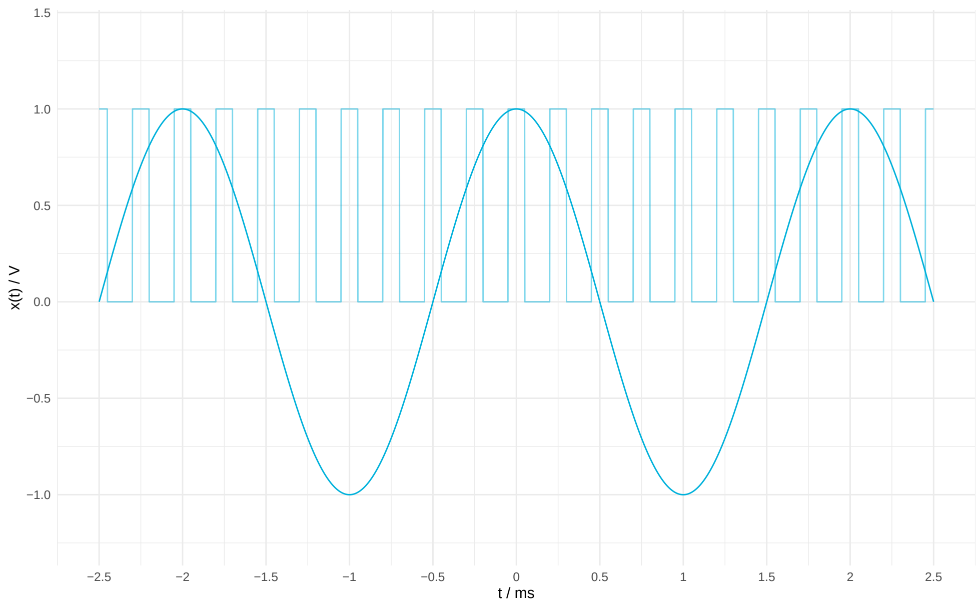

Abbildung 4: $u_1(t)$ und $u_2(t)$

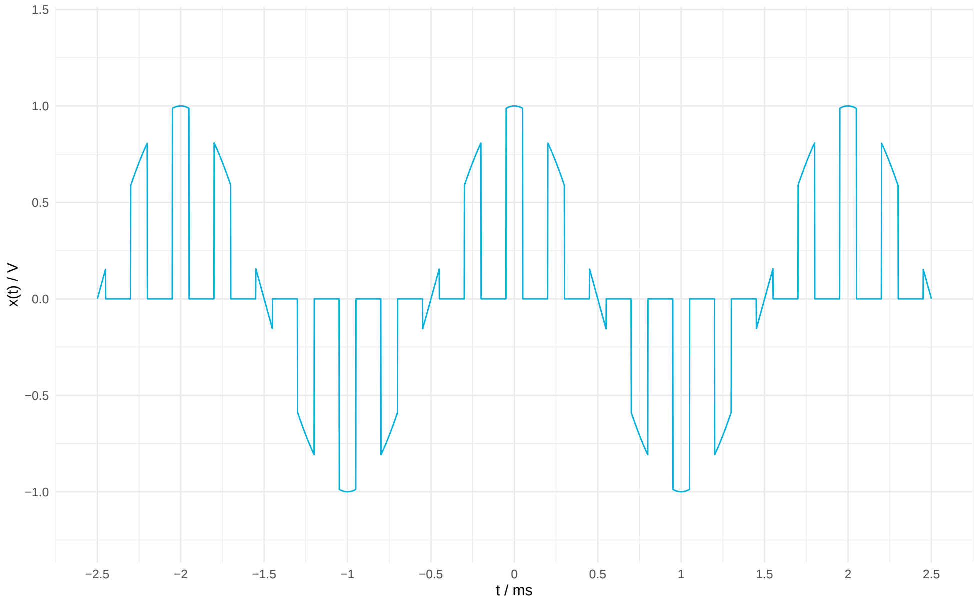

Abbildung 5: $u_3(t)$ aus der Multiplikation von $u_1(t)$ mit dem Träger $u_2(t)$

Fouriertransformation:

Das Trägersignal $u_2(t)$ ist eine *periodische* Rechteckfolge und hat demnach ein *diskretes* Spektrum, dessen Einhüllende die Si-Funktion ist (Abbildung 6).

Die multiplikative Verknüfung der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ im Zeitbereich lässt sich in eine Faltung im Frequenzbereich überführen. Da dies analytisch nicht so einfach ist, wird hier auf eine grafische Lösung zurückgegriffen. Dazu die Vorüberlegung:

$$X_3(f) = X_1(f) * X_2(f)$$

$$X_2(f) = A \cdot \delta(f - f_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \; x_2(t) = Ae^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$$

(Verschiebungssatz)

$$X_3(f) = X_1(f) * A \cdot \delta(f - f_0) = A \cdot X_1(f - f_0)$$

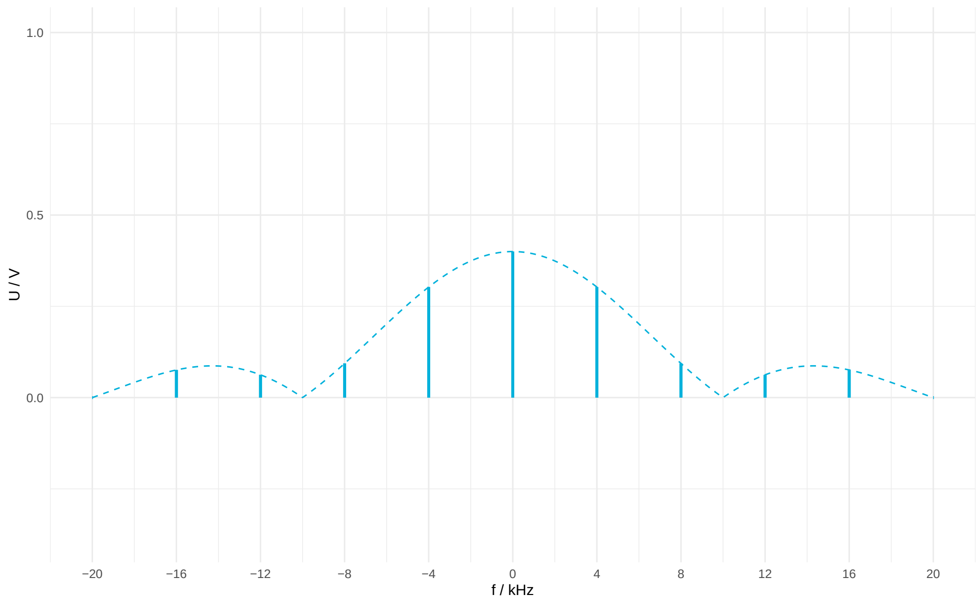

Abbildung 6: Spektrum von $u_2(t)$, Einhüllende ist die Si-Funktion (Betrag)

Die einzelnen Spektrallinien des Rechtecksignals können in der Faltung beider Funktionen im Frequenzbereich als Dirac-Impulse aufgefasst werden. Da diese sich jeweils bei $n \cdot 4\,\mathrm{kHz}$ wiederholen, wird die Transformation des Nachrichtensignals durch die Faltung um die Frequenz des Trägersignals periodisch verschoben.

1.3 Praktische Anwendungsmöglichkeiten

Die Multiplikation von Zeitsignalen findet Anwendung in der Nachrichtenübertragung. Dort kann das zu übertragene Signal mit einem *Trägersignal* multipliziert werden, um zum einen das Signal in einen für die Antennentechnik brauchbaren[1] Frequenzbereich zu bringen und zum anderen das Signal am Empfänger von anderen Signalen in der Frequenz unterscheiden zu können (vgl. 1.1).

Außerdem nutzen Oszilloskope die Multiplikation mit einem Recht-

[1] Änderung der Übertragungseigenschaften des Signals mit der Frequenz

ecksignal um ein Fenster des aufgenommenen Signals zu erhalten, welches dann fourieranalysiert werden kann.

2 Versuchsaufgaben

2.1

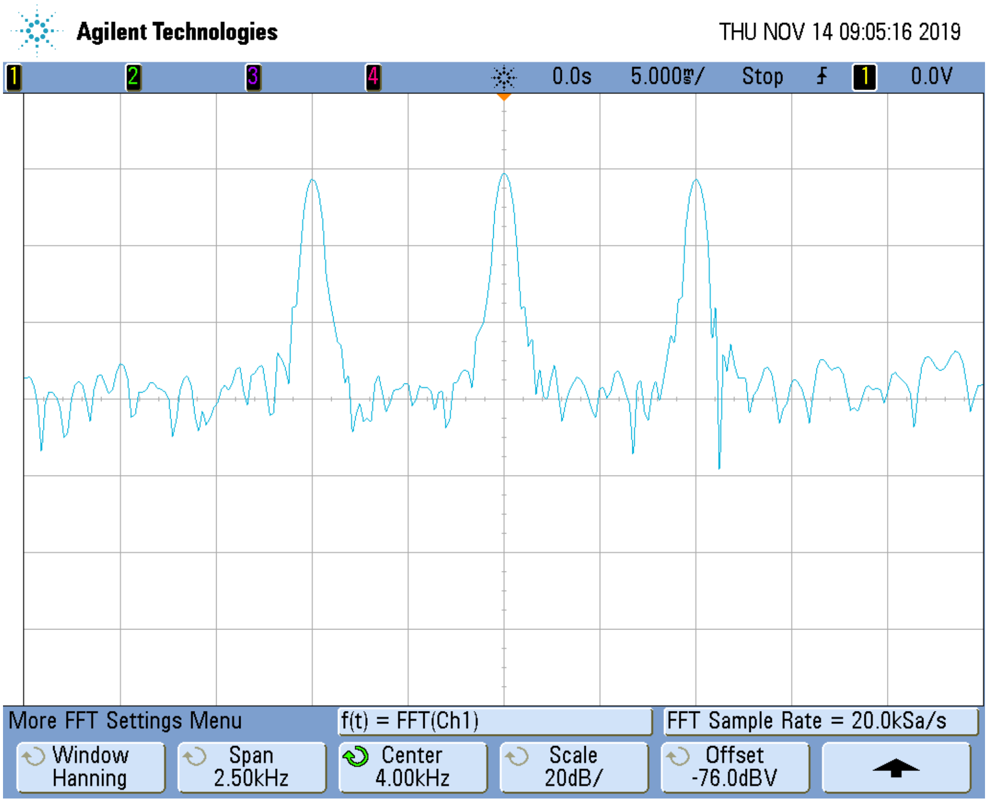

Abbildung 7: FFT von $u_3(t)$ analog Aufgabe 1

Wie in Abbildung X zu sehen, stimmen die ermittelten Frequenzen mit denen der Vorbereitungsaufgabe überein. Durch die Limitierungen des Oszilloskops (z.B. Fensterung) und der Soundkarte sowie Störeinflüsse sieht man keine exakt diskreten Amplitudenlinien, die Maxima sind jedoch klar bei den berechneten Frequenzen erkennbar.

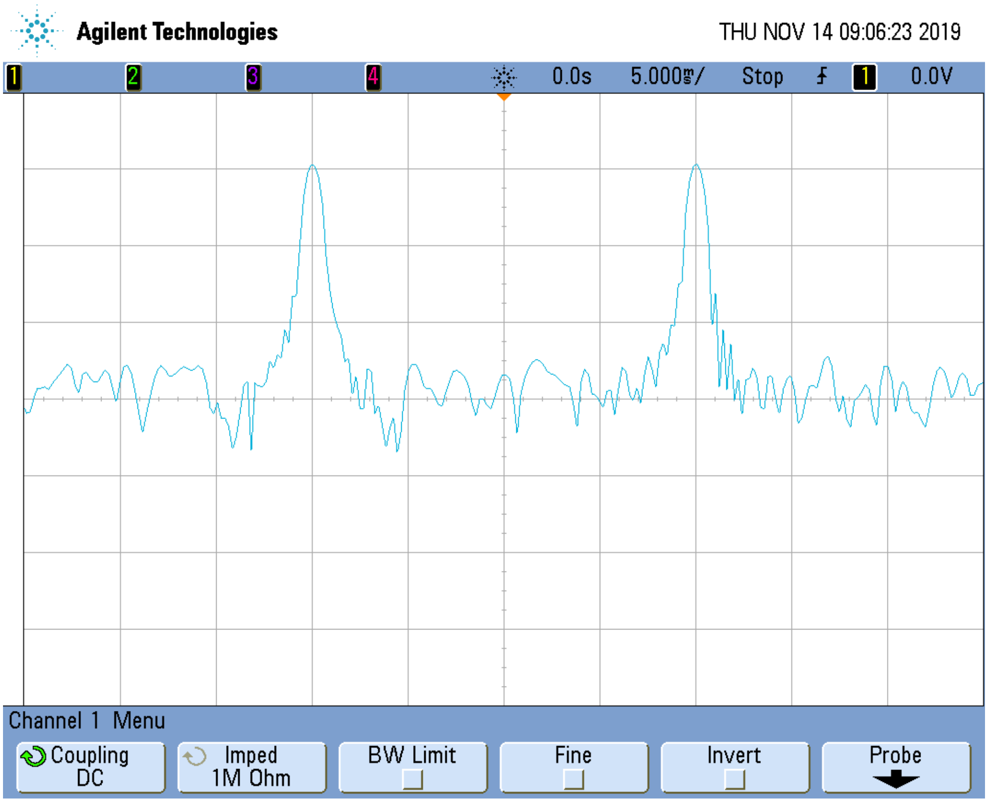

Abbildung 8: FFT von $u_3(t)$ ohne Gleichanteil der Nachricht

Nach Entfernen des Gleichanteils des Nachrichtensignals verschwindet die Frequenz des Träges aus dem Betragsspektrum des übertragenen Signals (Abbildung X). Der Gleichanteil der Nachricht lässt also den Träger erscheinen.

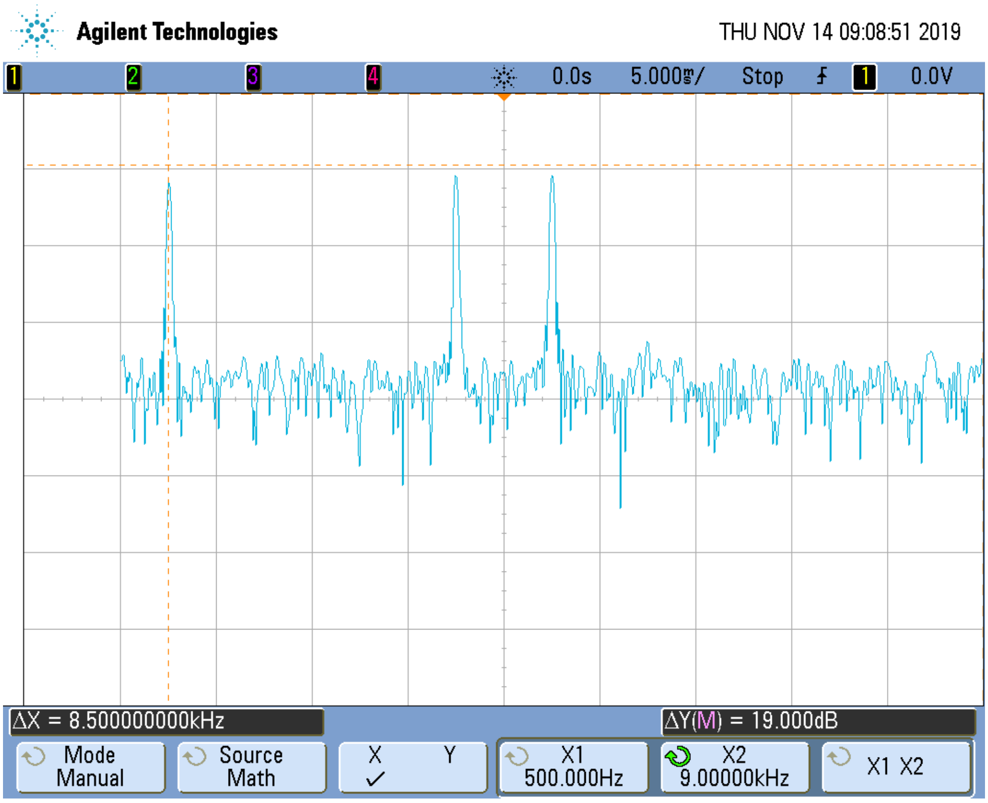

Abbildung 9: FFT von $u_3(t)$ mit Gleichanteil im Träger

Wird nun das Trägersignal mit einem Gleichanteil versehen, wird die Originalfrequenz des Nachrichtensignals mitübertragen. Der Gleichanteil des Trägersignals lässt die Frequenz(en) des Nachrichtensignals erscheinen.

Erhöht man jetzt die Frequenz des Nachrichtensignals, rücken diese und die untere Frequenz des ursprünglich gefalteten Signals immer näher zusammen (Abbildung X). Die beiden ursprünglichen Frequenzen rücken dabei weiter auseinander. Bei einer Frequenz von 2 kHz überlappen sich die Originalfrequenz und die ursprüngliche Faltungsfrequenz und sind nicht mehr unterscheidbar.

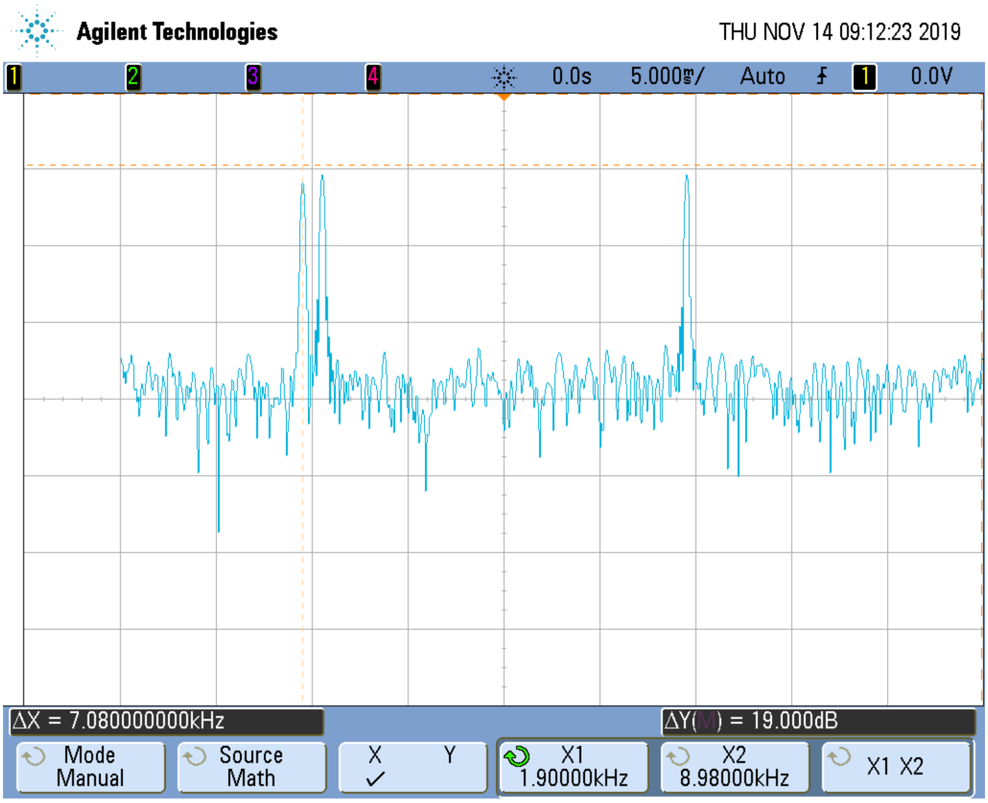

Abbildung 10: Frequenzen nahe der Überschneidung

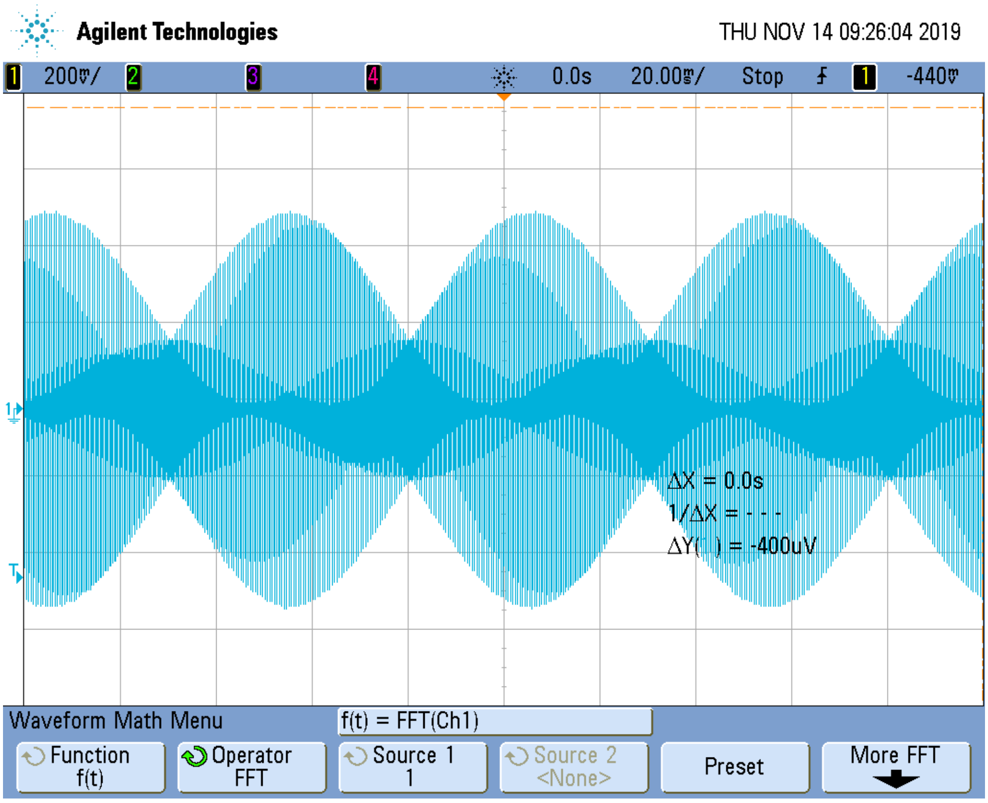

Abbildung 11: Zeitsignal bei Annäherung der Frequenzen von $u_1(t)$ und $u_3(t)$

Bei Frequenzen, die sehr nahe an der Überschneidungsfrequenz sind (z.B. 1990 Hz) entstehen Schwebungen im Zeitbereich wie in Abb. x zu sehen.

2.2

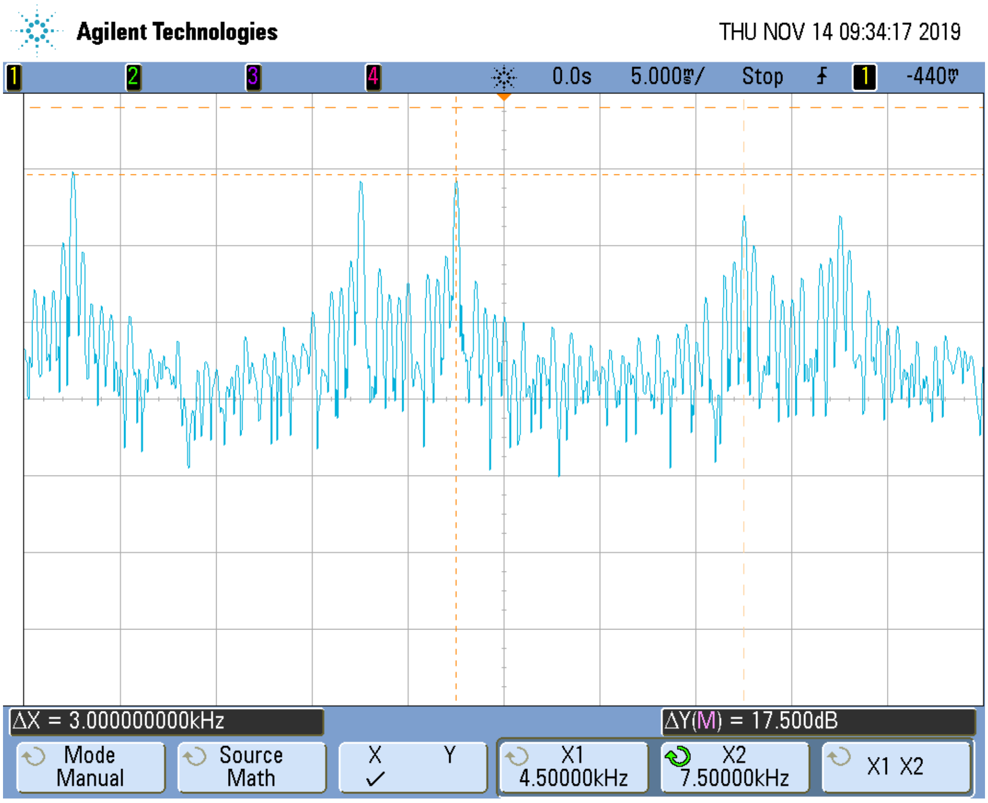

Abbildung 12: FFT von $u_3(t)$ analog Aufgabe 2

Wie in Abbildung x zu sehen, stimmen die ermittelten Frequenzen mit denen der Vorbereitungsaufgabe überein. Durch die limitierte Fensterung und Abtastung des Signals durch das Oszilloskop sieht man keine diskreten Amplitudenlinien, sondern 222

Bei Frequenzerhöhung rücken, wie auch in Versuchsaufgabe 2.1, die untere multiplizierte Frequenz und die Frequenz des Nachrichtensignals näher aneinander, bis sie sich bei 2 kHz treffen.

Die periodisch auftretenden Frequenzbreiten um 7777 können z.B. als Sender bei einer bestimmten Trägerfrequenz aufgefasst werden, welche zudem eine bestimmte Bandbreite für die zu übertragenen Nachrichtensignale benötigen. Die in Versuchsaufgabe 1 und 2 dargestellte Problematik der Überlappung von Frequenzanteilen zeigt, dass in der Praxis ein minimaler Frequenzabstand zwischen zwei Sendern notwendig ist, da sonst kein Filter realisierbar wäre, der es ermöglicht die einzelnen Signale in der Frequenz unterscheiden zu können.

Wie auch in der Versuchsaufgabe 2.1 lässt ein hinzugefügter Gleichanteil im Träger- bzw. Nachrichtensignal die Originalfrequenz des jeweils anderen Signals im Spektrum erscheinen.