



SIGNALE UND SYSTEME

Fourier-Reihe

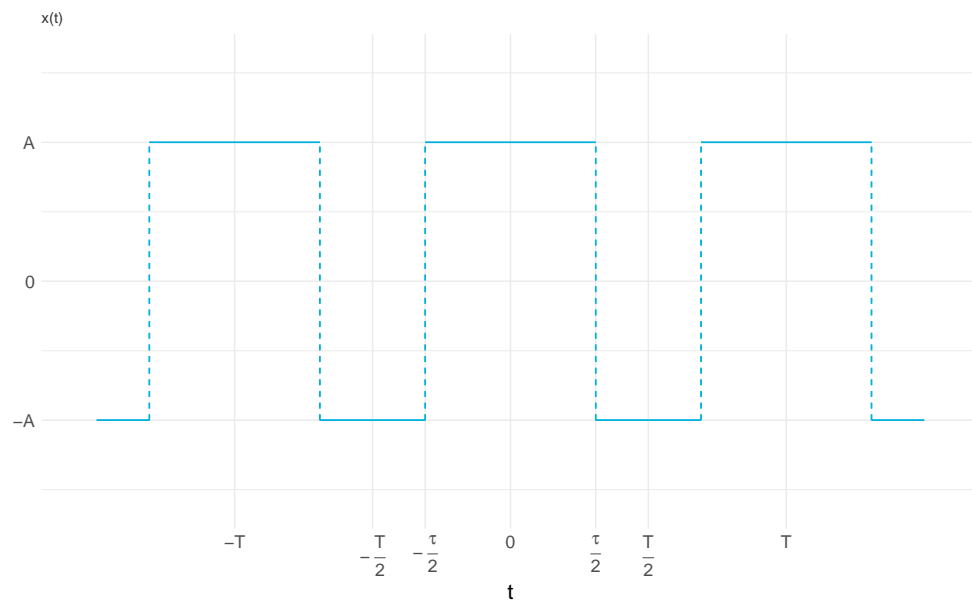
Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard GRÜNERT

1.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \quad (1)$$

weshalb $x(t)$ eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-\tau/2} \dots + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \end{aligned}$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \left[2 \int_0^{\tau/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt + 2 \int_{\tau/2}^{T/2} -A \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \left[\int_0^{\tau/2} \cos(n\omega_0 t) \, dt - \int_{\tau/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \, dt \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0} \left[\sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} - \sin(n\omega_0 t) \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right]
 \end{aligned}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4A \cdot T}{T \cdot n2\pi} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) - \left(\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) \right) \right] \\
 &= \frac{2A}{n\pi} \left[\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T/2} \left[\int_0^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \\
 &= \frac{2A}{T} \left[t \Big|_0^{\tau/2} - t \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right] \\
 &= \frac{2A}{T} \left[\frac{\tau}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{2A}{T} \left[\tau - \frac{T}{2} \right] \\
 &= 2A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]$$

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.5$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{2} &= A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0 \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin \left(n\pi \frac{1}{2} \right) = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin \left(n\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

Abbildung 1: Betragsspektrum von $x(t)$ für $\frac{\tau}{T} = 0.5$

2 Versuchsaufgaben