

□""logo".jpg

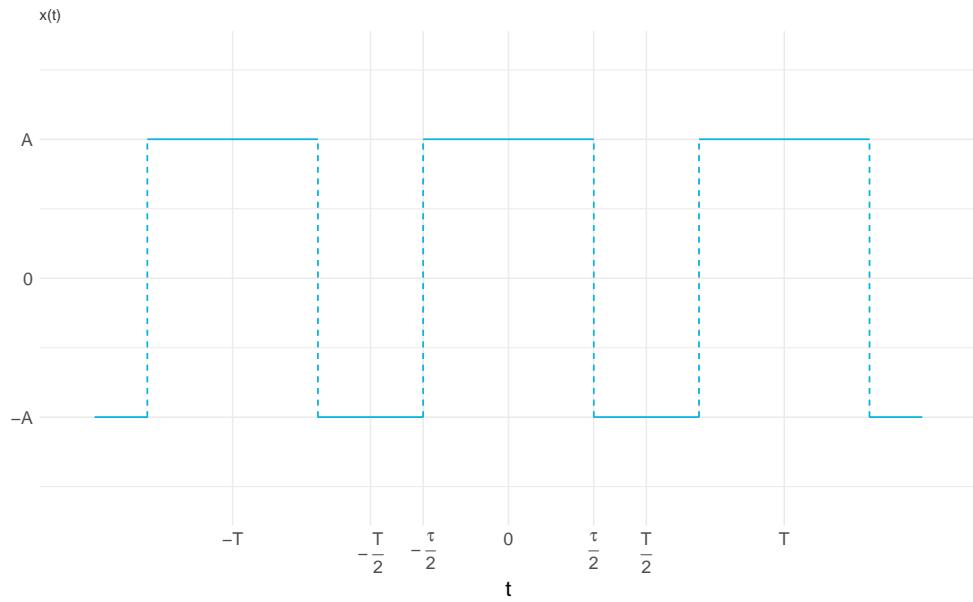
SIGNALE UND SYSTEME  
**Fourier-Reihe**

Studien- und Versuchsaufgaben

*Autor:* Richard GRÜNERT  
1.11.2019

# 1 Vorbereitungsaufgaben

## 1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \quad (1)$$

weshalb  $x(t)$  eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^{-\tau/2} \dots + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \end{aligned}$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \left[ 2 \int_0^{\tau/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt + 2 \int_{\tau/2}^{T/2} -A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{4A}{T} \left[ \int_0^{\tau/2} \cos(n\omega_0 t) dt - \int_{\tau/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0} \left[ \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} - \sin(n\omega_0 t) \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right]
\end{aligned}$$

mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ :

$$a_n = \frac{4A \cdot T}{T \cdot n2\pi} \left[ \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) - \left( \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{2A}{n\pi} \left[ \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \right]$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T/2} \left[ \int_0^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \\
&= \frac{2A}{T} \left[ t \Big|_0^{\tau/2} - t \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right] \\
&= \frac{2A}{T} \left[ \frac{\tau}{2} - \left( \frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \right] \\
&= \frac{2A}{T} \left[ \tau - \frac{T}{2} \right] \\
&= 2A \left[ \frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = A \left[ \frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]$$

---

Für das Tastverhältnis  $\frac{\tau}{T} = 0.5$  gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= A \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0 \\
a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi \frac{1}{2}) = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Abbildung 1: Betragsspektrum von  $x(t)$  für  $\frac{\tau}{T} = 0.5$

## **2 Versuchsaufgaben**