



SIGNALE UND SYSTEME

Fourier-Reihe

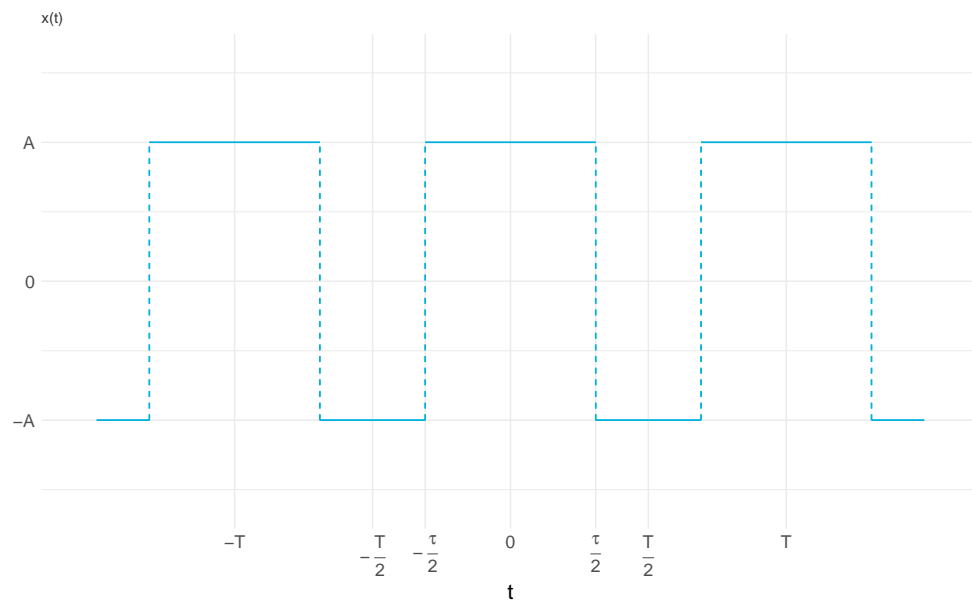
Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard GRÜNERT

1.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \quad (1)$$

weshalb $x(t)$ eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-\tau/2} \dots + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \end{aligned}$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \left[2 \int_0^{\tau/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt + 2 \int_{\tau/2}^{T/2} -A \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \left[\int_0^{\tau/2} \cos(n\omega_0 t) \, dt - \int_{\tau/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \, dt \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0} \left[\sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} - \sin(n\omega_0 t) \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right]
 \end{aligned}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4A \cdot T}{T \cdot n2\pi} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) - \left(\sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{2}\right) \right) \right] \\
 &= \frac{2A}{n\pi} \left[\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T/2} \left[\int_0^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \\&= \frac{4A}{T} \left[t \Big|_0^{\tau/2} - t \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right] \\&= \frac{4A}{T} \left[\frac{\tau}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \right] \\&= \frac{4A}{T} \left[\tau - \frac{T}{2} \right] \\&= 4A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = 2A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]$$

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.5$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= 2A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0, \\a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin \left(n\pi \frac{1}{2} \right) = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin \left(n\frac{\pi}{2} \right) \\a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

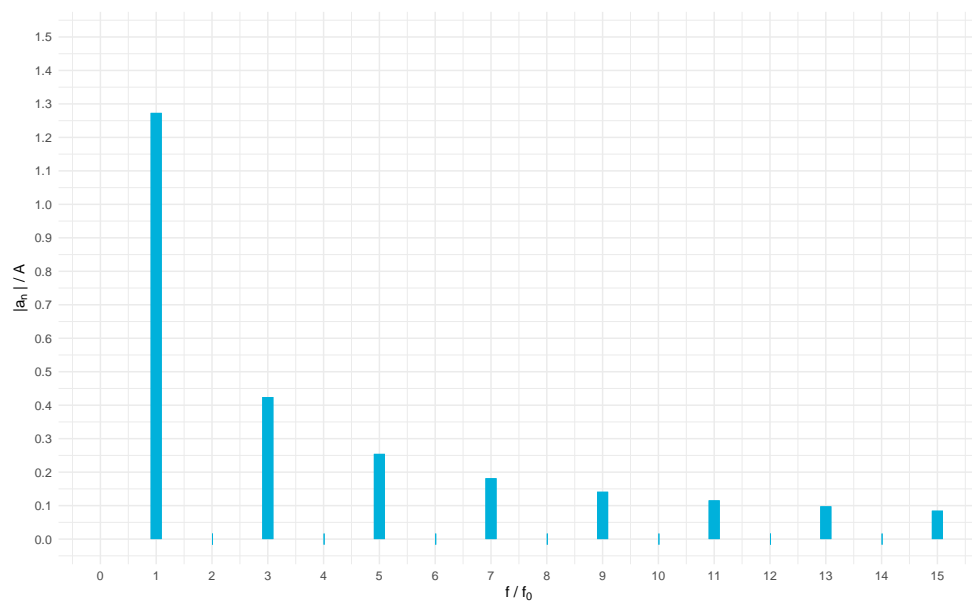


Abbildung 1: Betragsspektrum von $x(t)$ für $\frac{\tau}{T} = 0.5$

1.2

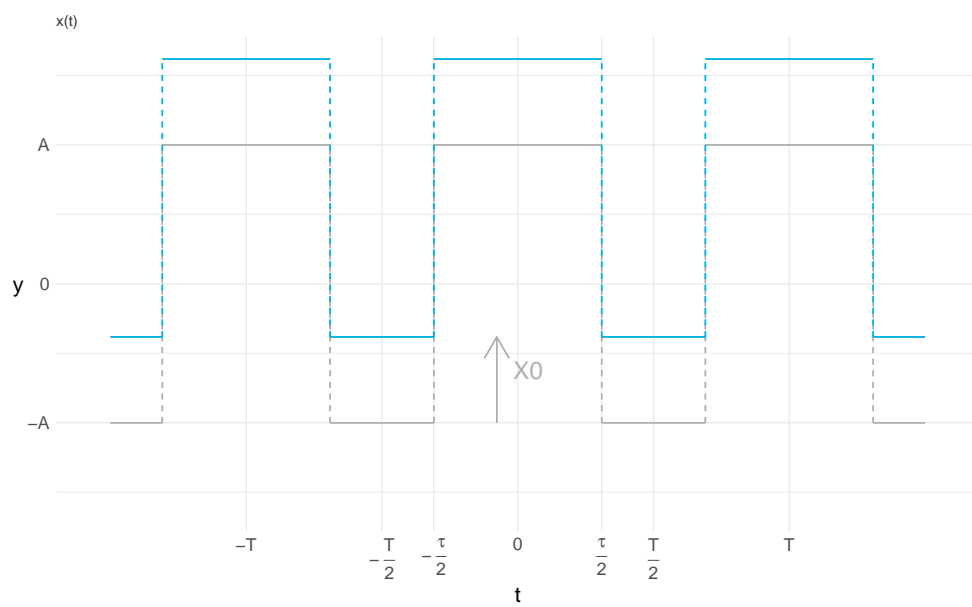


Abbildung 2: $x(t)$ mit dem Gleichanteil x_0 im Zeitbereich

Auswirkungen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_T (x(t) + X_0) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \underbrace{\int_T X_0 \cdot \cos(n\omega_0 t) dt}_{=0} \right] \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

→ Im Frequenzbereich finden keine Änderungen statt.

→ Nur der Gleichanteil ändert sich

1.3

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.25$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{2} &= 2A \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = -A, \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \frac{1}{4}\right) \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

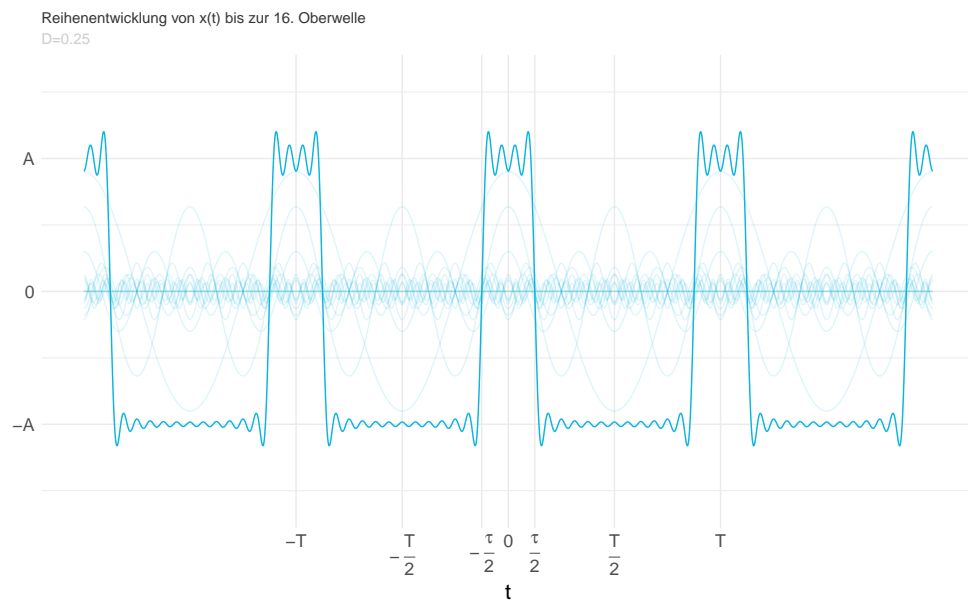
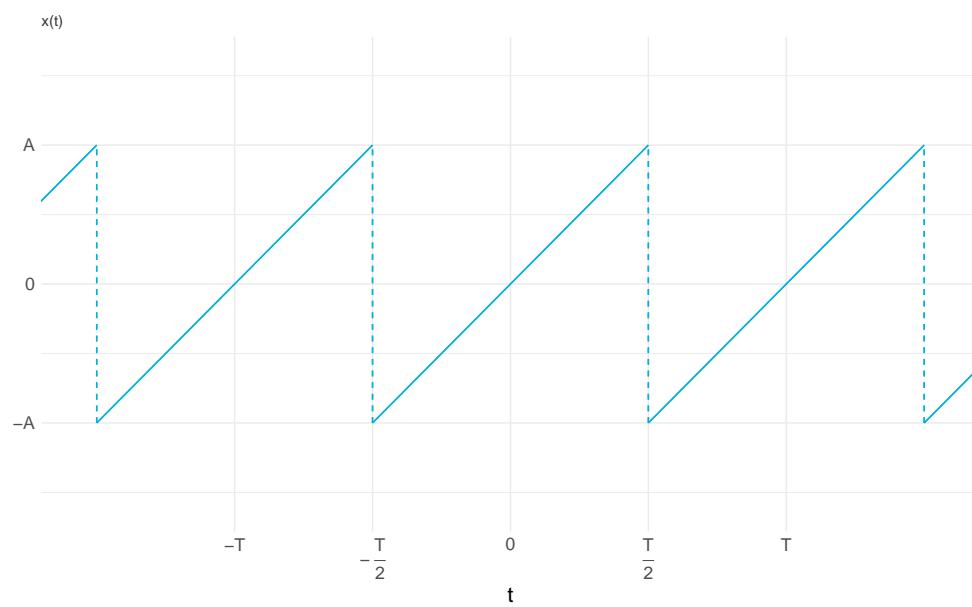


Abbildung 3: $x(t)$ als Summe der Einzelschwingungen

1.4



Es gilt:

$$x(-t) = -x(t), \quad (2)$$

weshalb $x(t)$ eine ungerade Funktion ist. Damit ist

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

und

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T/2} \cdot t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$u = t, u' = 1$$

$$v' = \sin(n\omega_0 t), v = -\frac{1}{n\omega_0} \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

$$b_n = \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot [t \cos n\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{n\omega_0} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot \left[\frac{T}{2} \cos\left(n\frac{2\pi T}{T2}\right) - \left(-\frac{T}{2} \cos\left(-n\frac{2\pi T}{T2}\right)\right) \right] + \frac{1}{n^2\omega_0^2} [\sin(n\omega_0 t)] \right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot \left[\frac{T}{2} \cos(n\pi) + \frac{T}{2} \cos(n\pi) \right] + \frac{1}{n^2\omega_0^2} \underbrace{\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_{-T/2}^{T/2}}_{=0} \right] \\
&= -\frac{4A}{T^2 n\omega_0} \cdot \frac{2T}{2} [\cos(n\pi)] \\
&= -\frac{2A}{n\pi} (-1)^n
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

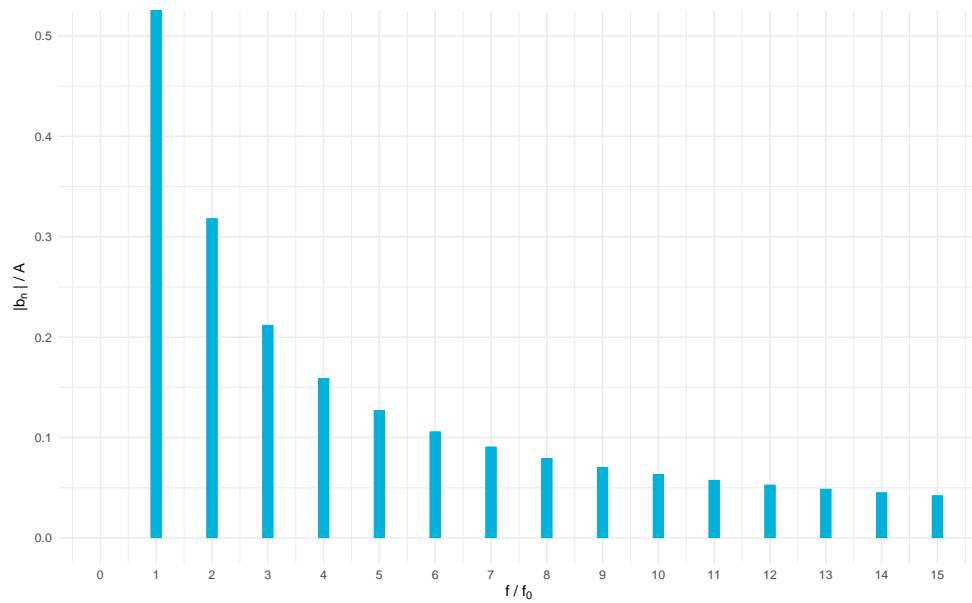


Abbildung 4: Betragsamplitudenspektrum von $x(t)$

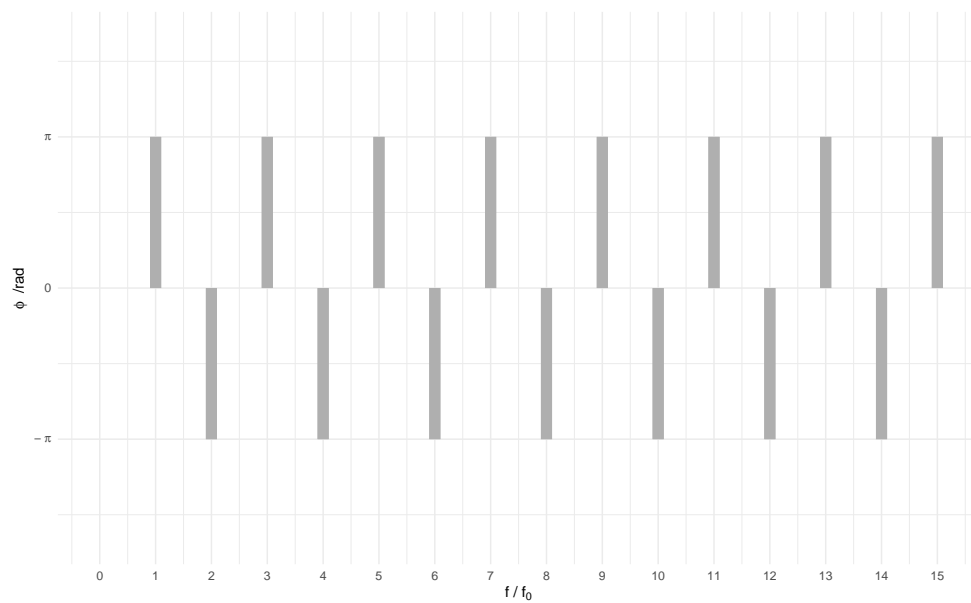


Abbildung 5: Phasenspektrum von $x(t)$

2 Versuchsaufgaben

2.1

Diagramm eingestellte/gemessene amplitudenwerte

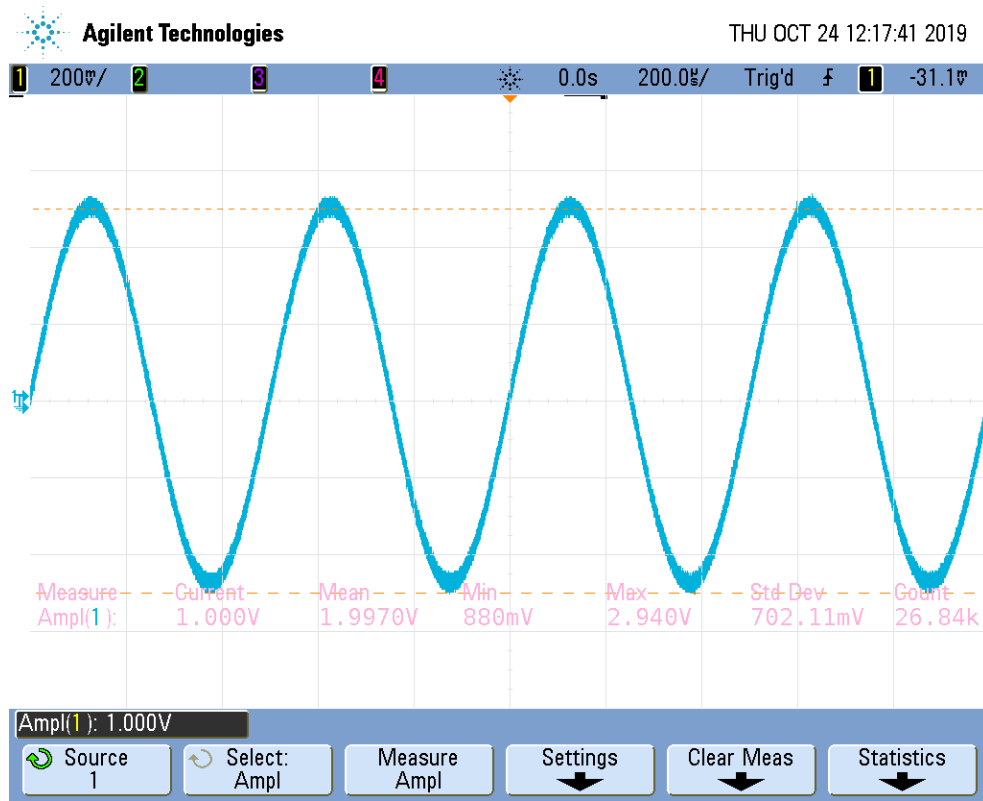


Abbildung 6: Screenshot des Sinussignals auf dem Oszilloskop

2.2

Analytische Bestimmung des Amplitudenspektrums, Aus 1.1 ergibt sich:

$$D = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 2V}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	2.457	0
2	0	0
3	-0.849	0
4	0	0
5	0.509	0
6	0	0
7	-0.364	0
8	0	0
9	0.283	0
10	0	0

Tabelle 1: Fourierkoeffizienten $D = 0.5$

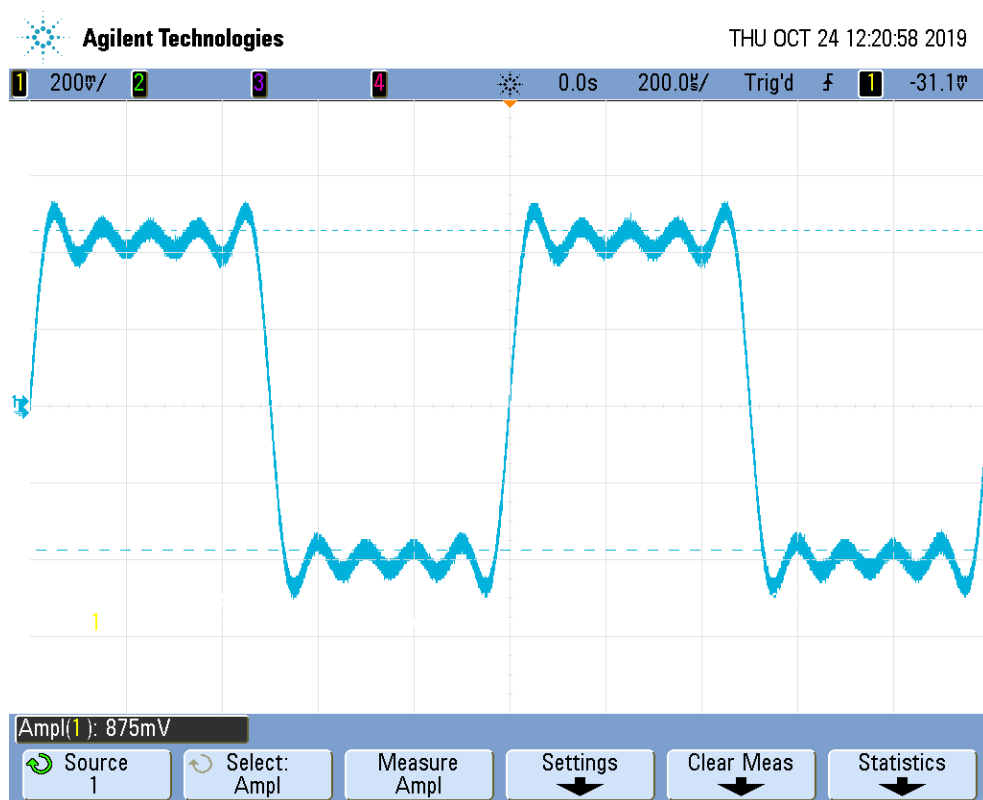


Abbildung 7: Screenshot des Rechtecksignals ($D = 0.5$) auf dem Oszilloskop

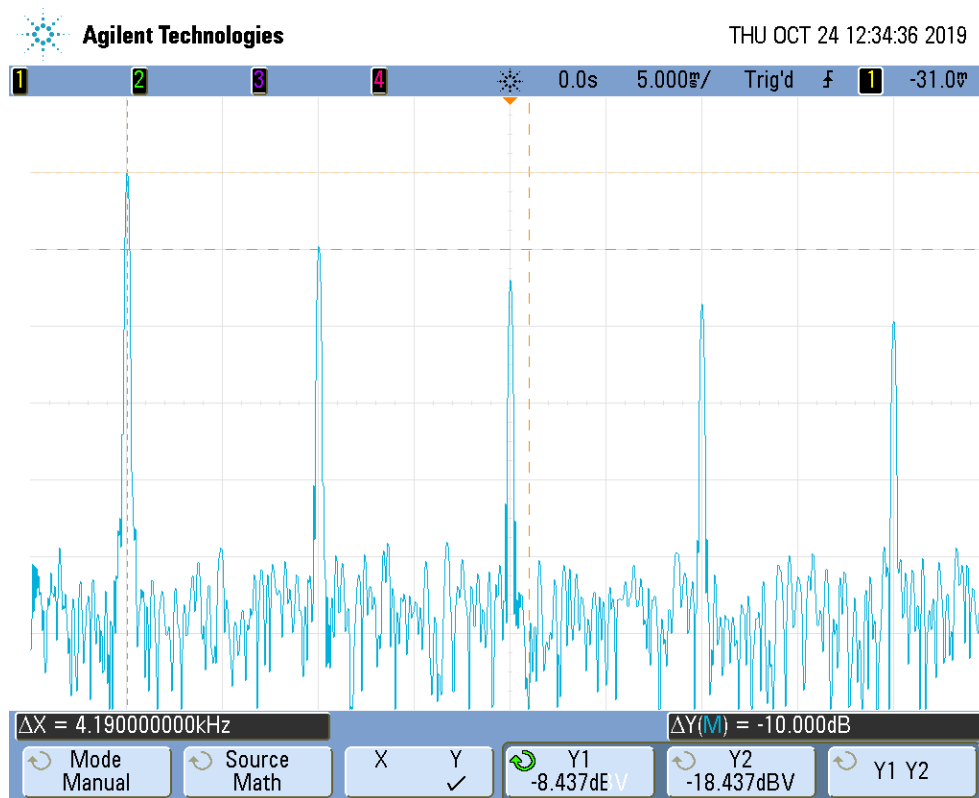


Abbildung 8: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

$n_1 - n_2$	$\Delta a/V$	$\Delta a/dB$	Abweichung
1-3		-10	
3-5		-3,75	
5-7		-2.812	
7-9		-2.5	

Tabelle 2: Messwerte der Aufgabe 6.2

Die Bestimmung von Δa_n erfolgte durch

$$\Delta a_n = \frac{1}{a_1} \cdot 10^{\frac{\Delta a_{n_{dB}}}{20}}$$

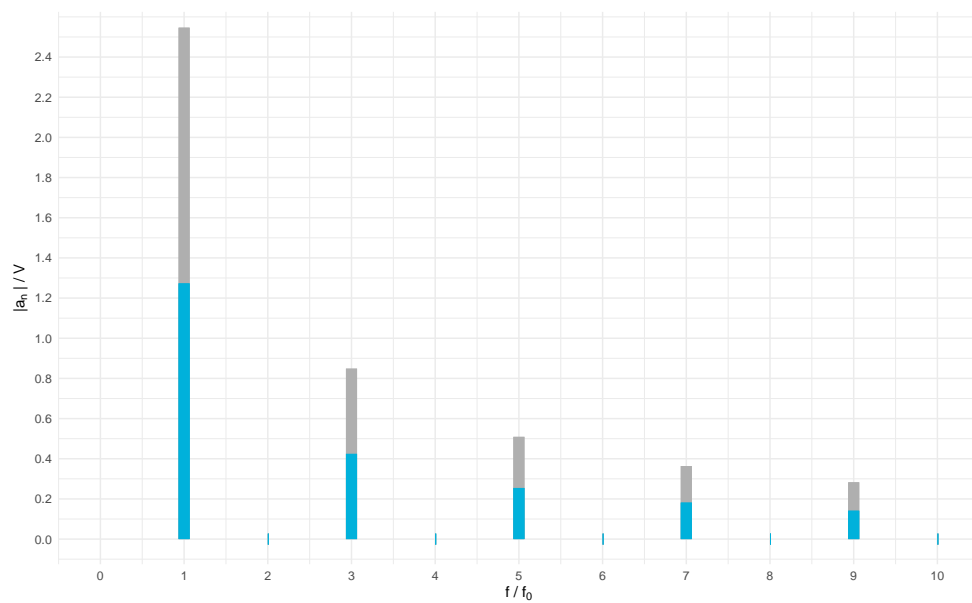


Abbildung 9: Vergleich der theoretischen (grau) und gemessenen (blau) Werte

2.3

Aus 1.3 folgt

$$\frac{a_0}{2} = -A = -2 \text{ V}$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 2V}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \frac{1}{4}\right)$$

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	1.801	0
2	1.273	0
3	0.600	0
4	0	0
5	-0.360	0
6	-0.424	0
7	-0.257	0
8	0	0
9	0.200	0
10	0.255	0

Tabelle 3: Fourierkoeffizienten $D = 0.25$

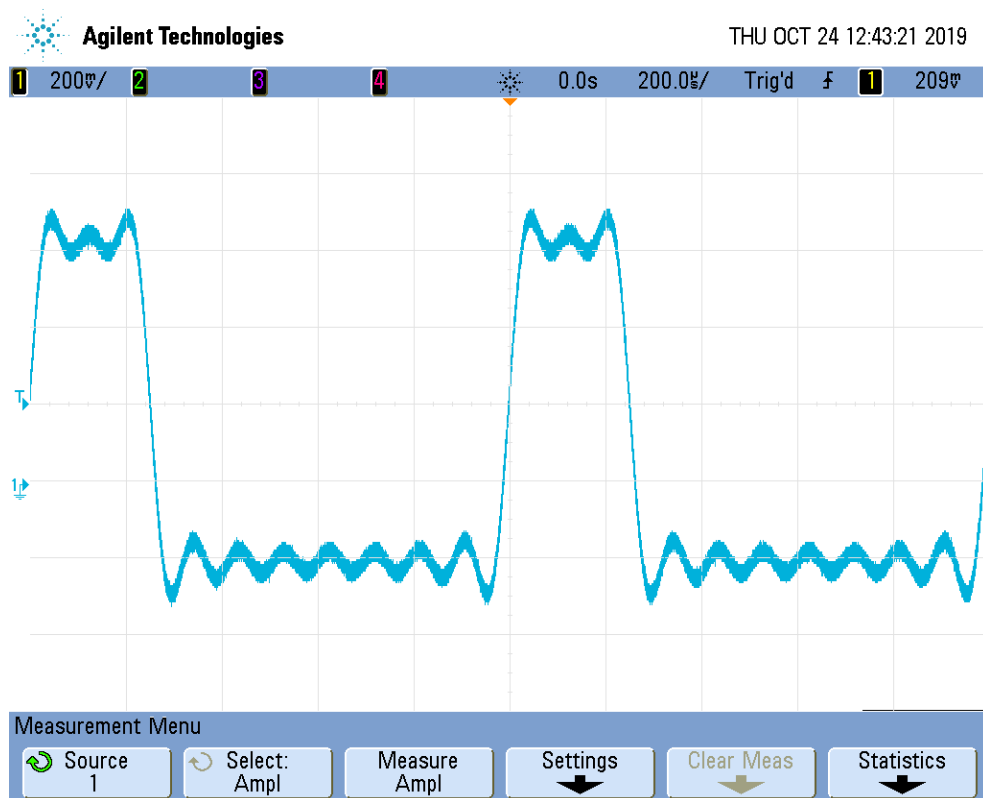


Abbildung 10: Screenshot des Rechtecksignals ($D = 0.25$) auf dem Oszilloskop

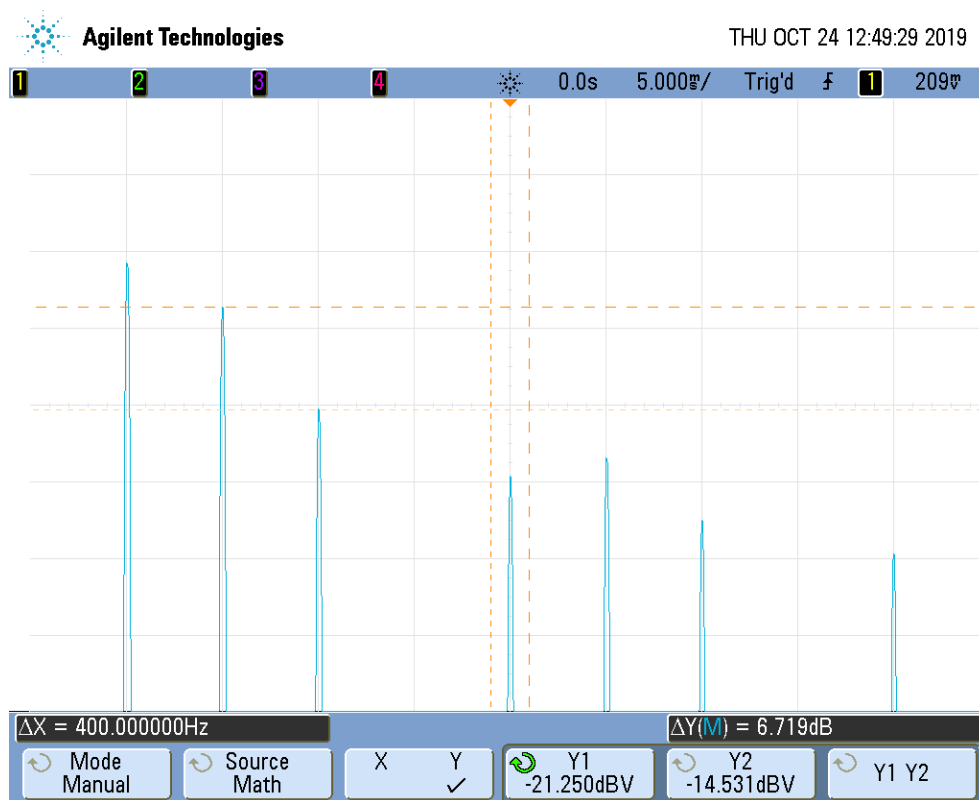


Abbildung 11: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

2.4

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	0	1.273
2	0	-0.637
3	0	0.424
4	0	-0.318
5	0	0.255
6	0	-0.212
7	0	0.182
8	0	-0.159
9	0	0.141
10	0	-0.127

Tabelle 4: Fourierkoeffizienten $D = 0.25$

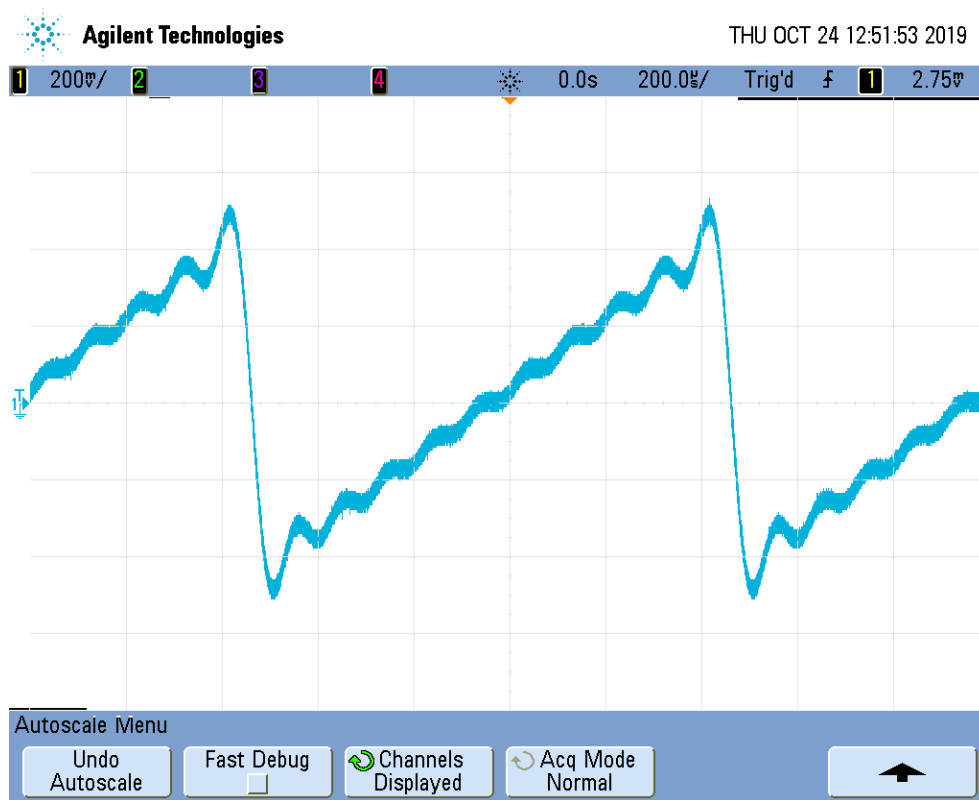


Abbildung 12: Screenshot des Sägezahnsignals auf dem Oszilloskop

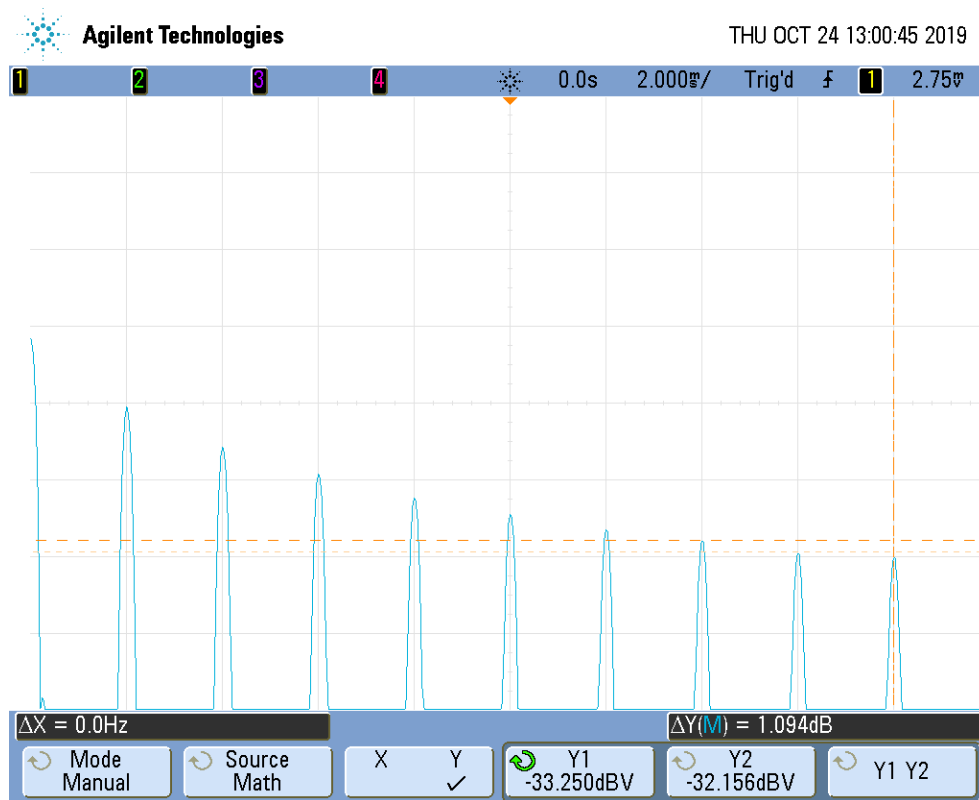


Abbildung 13: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop