Signale und Systeme

Fourier-Reihe

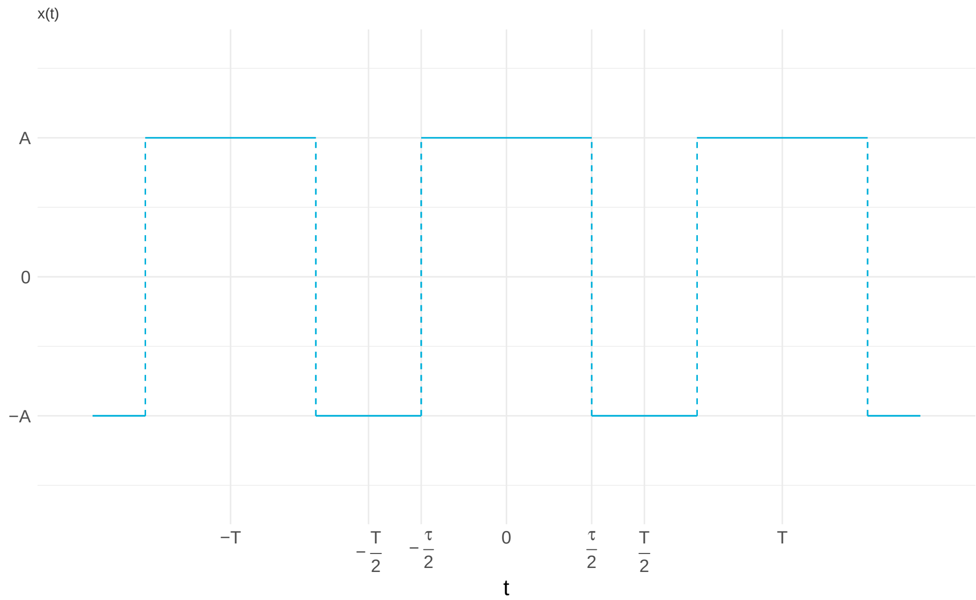
Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard Grünert

1.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \tag{1}$$

weshalb x(t) eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-\tau/2} ... + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} ... + \int_{\tau/2}^{T/2} ... \right]$$

mithilfe von Gl. 1:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\left[2\int_0^{\tau/2} A\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t + 2\int_{\tau/2}^{T/2} -A\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{4A}{T}\left[\int_0^{\tau/2}\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t - \int_{\tau/2}^{T/2}\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{4A}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_0}\left[\sin\left(n\omega_0 t\right)\Big|_0^{\tau/2} - \sin\left(n\omega_0 t\right)\Big|_{\tau/2}^{T/2}\right]
\end{aligned}
$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4A\cdot T}{T\cdot n2\pi}\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) - \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)\right)\right]\\
&= \frac{2A}{n\pi}\left[\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin\left(n\pi\right)}_{=0} + \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{a_n = \frac{4A}{n\pi}\cdot\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}
$$

- - - - - - - - - - - -

$$
a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,\mathrm{d}t
$$

mithilfe von Gl. 1:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T/2}\left[\int_0^{\tau/2} ... + \int_{\tau/2}^{T/2} ...\right] \\
&= \frac{4A}{T}\left[t\Big|_0^{\tau/2} - t\Big|_{\tau/2}^{T/2}\right] \\
&= \frac{4A}{T}\left[\frac{\tau}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\right] \\
&= \frac{4A}{T}\left[\tau - \frac{T}{2}\right] \\
&= 4A\left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = 2A\left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right]}$$

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.5$ gilt:

$$\frac{a_0}{2} = 2A\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0,$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi\frac{1}{2}) = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2})$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

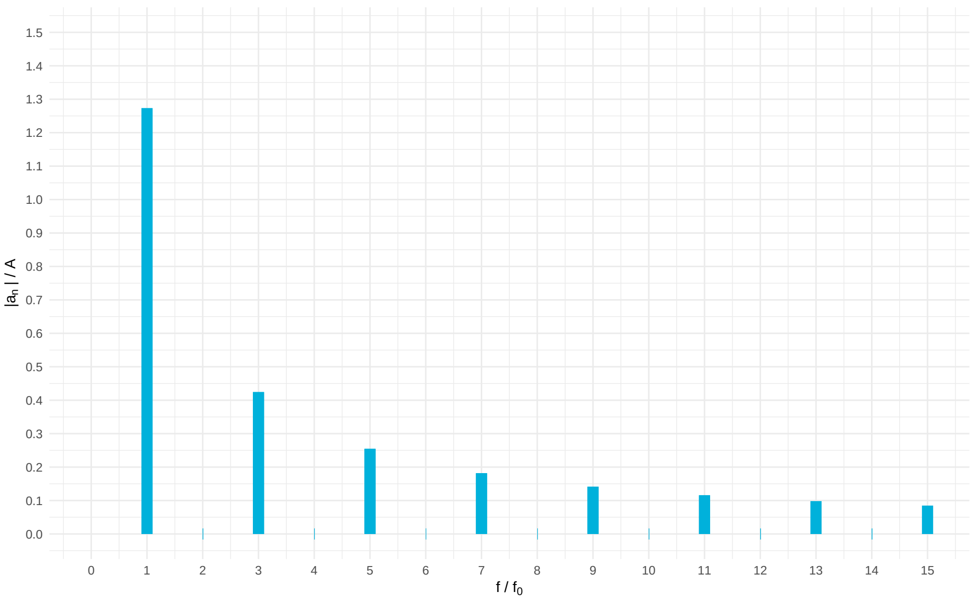


Abbildung 1: Betragsspektrum von x(t) für $\frac{\tau}{T} = 0.5$

1.2

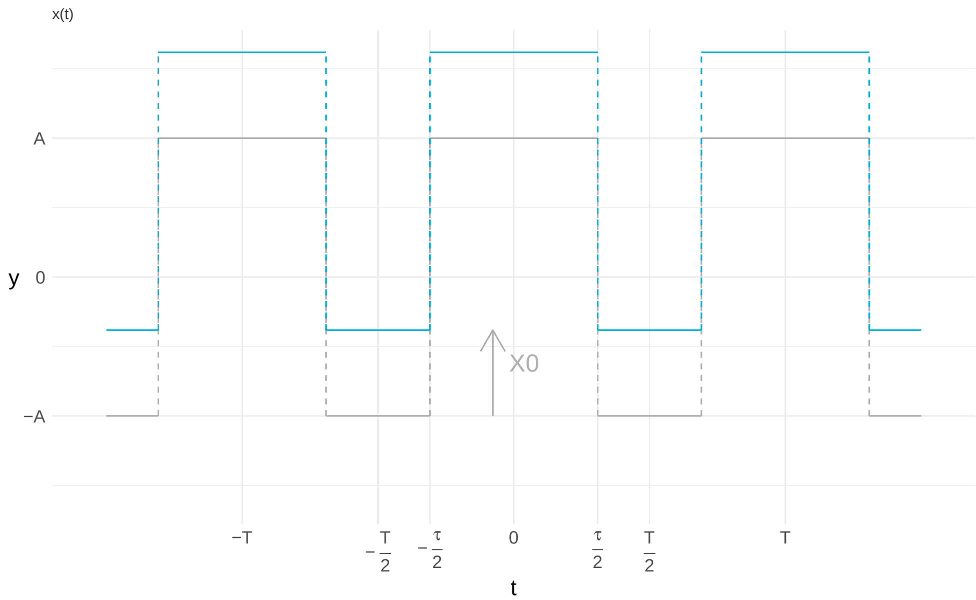


Abbildung 2: x(t) mit dem Gleichanteil X0 im Zeitbereich

Auswirkungen im Frequenzbereich:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T (x(t) + X0) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_T X0 \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{=0}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

→ Im Frequenzbereich finden keine Änderungen statt.

→ Nur der Gleichanteil ändert sich

1.3

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.25$ gilt:

$$\frac{a_0}{2} = 2A\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -A,$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi\frac{1}{4})$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{4})$$

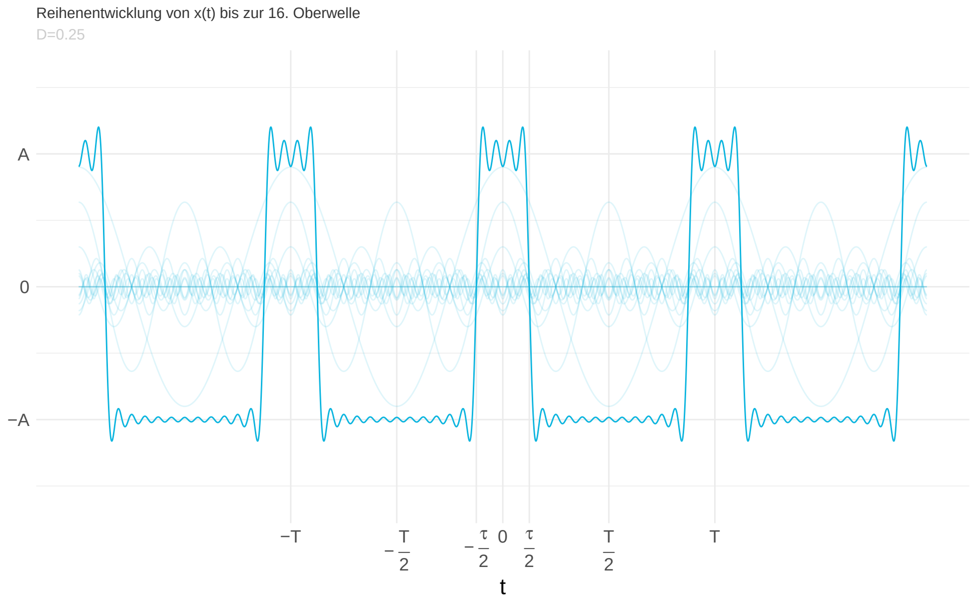
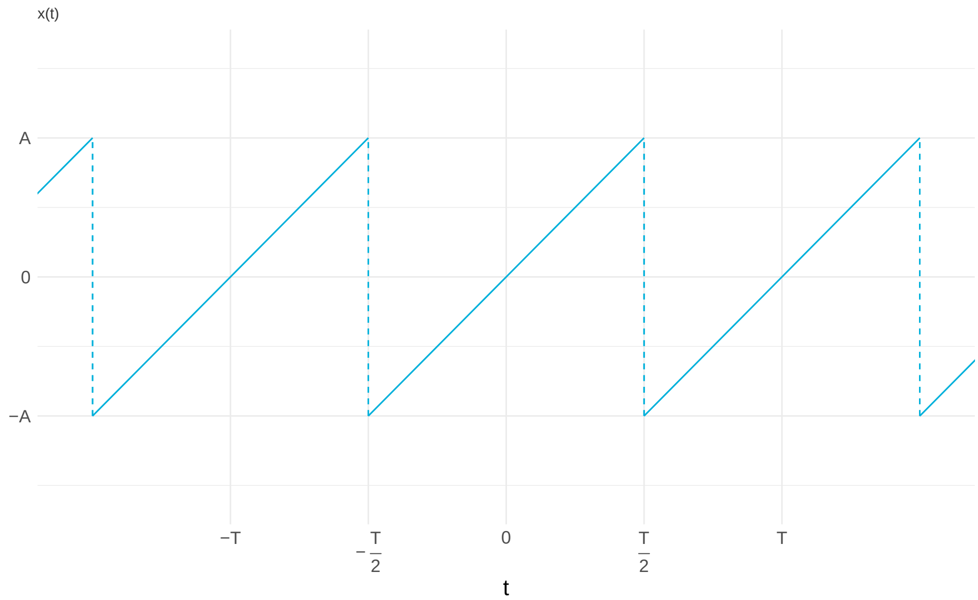


Abbildung 3: x(t) als Summe der Einzelschwingungen

1.4



Es gilt:

$$x(-t) = -x(t), \tag{2}$$

weshalb $x(t)$ eine ungerade Funktion ist. Damit ist

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0$$

und

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T/2} \cdot t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$u = t, u' = 1$$

$$v' = \sin(n\omega_0 t), v = -\frac{1}{n\omega_0} \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

$$b_n = \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot [t \cos n\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{n\omega_0} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{4A}{T^2}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\cdot\left[\frac{T}{2}\cos{(n\frac{2\pi T}{T2})} - (-\frac{T}{2}\cos{(-n\frac{2\pi T}{T2}))}\right] + \frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[\sin{(n\omega_0 t)}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{4A}{T^2}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\cdot\left[\frac{T}{2}\cos{(n\pi)} + \frac{T}{2}\cos{(n\pi)}\right] + \underbrace{\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left[\sin{(n\frac{2\pi}{T}t)}\right]\Big|_a -T/2^{T/2}}_{=0}\right]$$

$$= -\frac{4A}{T^2 n\omega_0}\cdot\frac{2T}{2}\left[\cos{(n\pi)}\right]$$

$$= -\frac{2A}{n\pi}(-1)^n$$

$$\boxed{b_n = \frac{2A}{n\pi}\cdot(-1)^{n+1}}$$

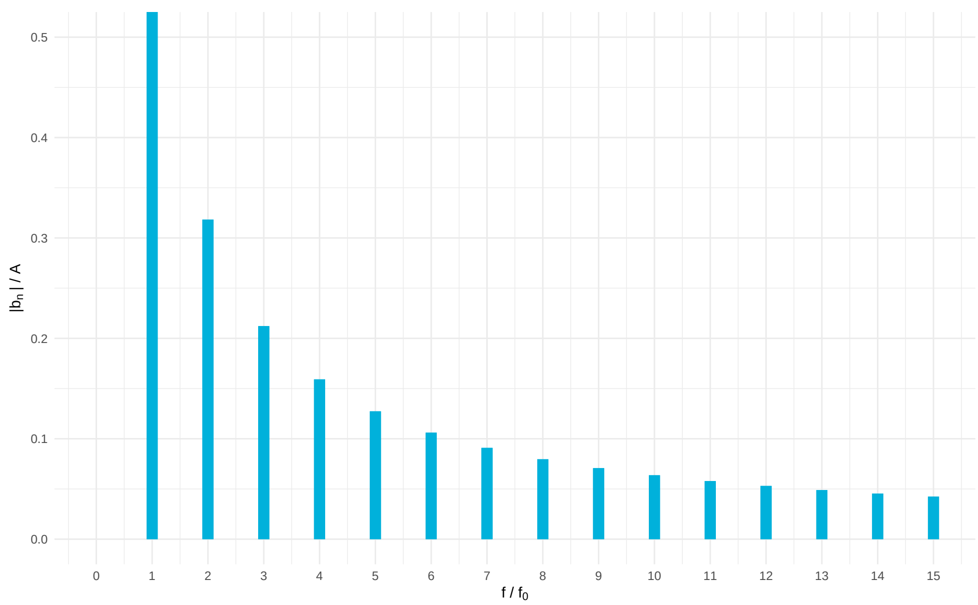


Abbildung 4: Betragsamplitudenspektrum von x(t)

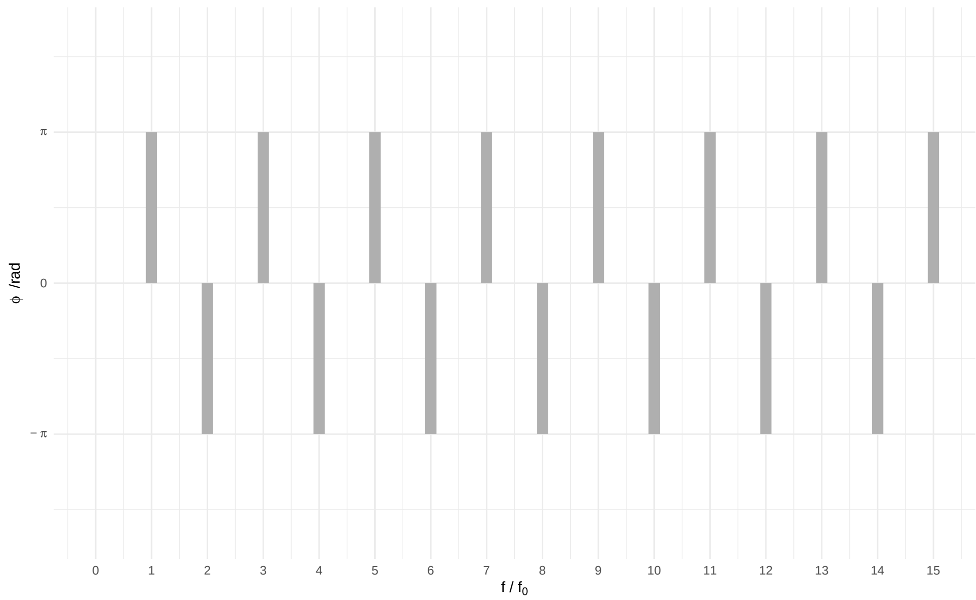


Abbildung 5: Phasenspektrum von x(t)

2 Versuchsaufgaben

2.1

Diagramm eingestellte/gemessene amplitudenwerte

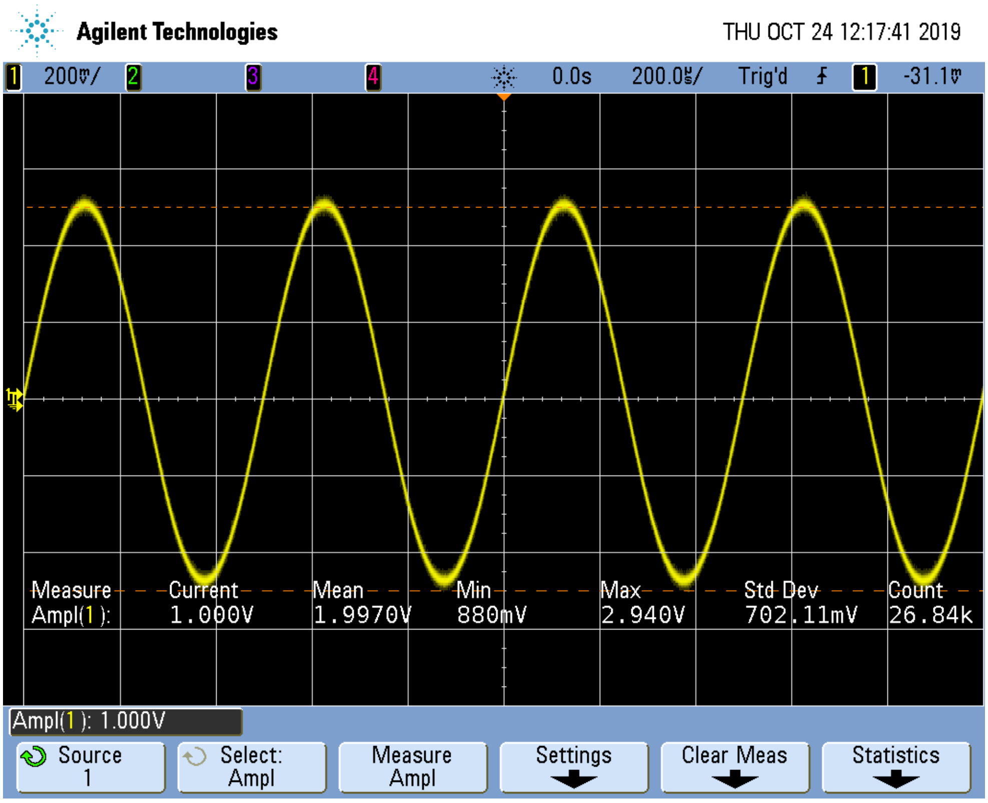


Abbildung 6: Screenshot des Sinussignals auf dem Oszilloskop

2.2

Analytische Bestimmung des Spektrums

Aus 1.1 ergibt sich:

$$D = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 2\text{V}}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

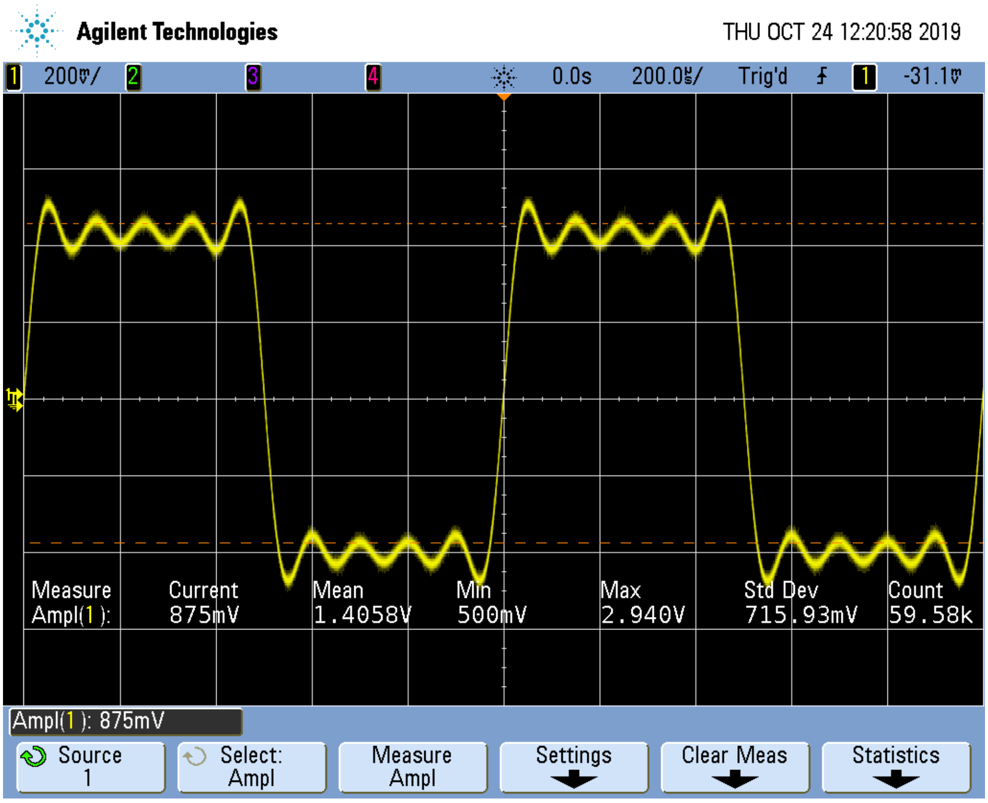


Abbildung 7: Screenshot des Rechtecksignals auf dem Oszilloskop

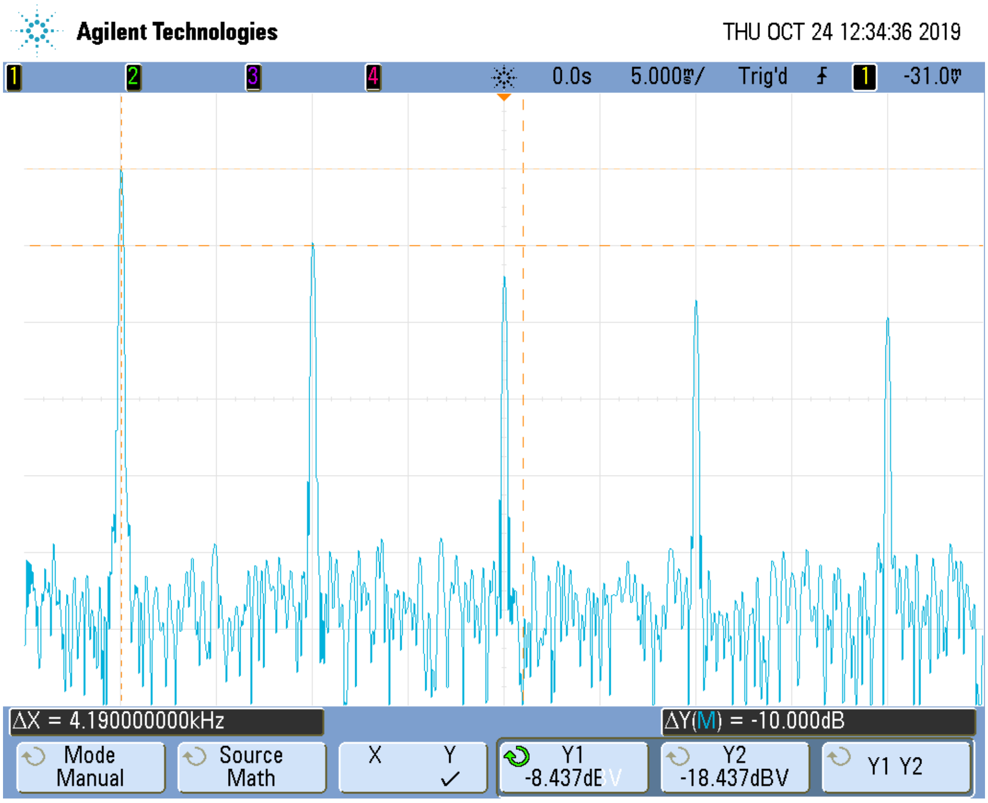


Abbildung 8: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

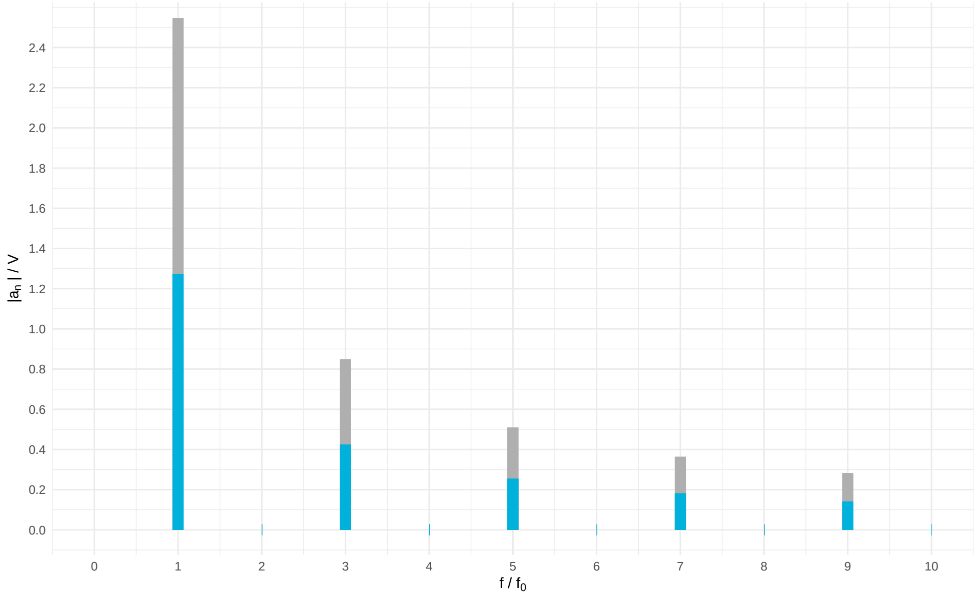


Abbildung 9: Vergleich der theoretischen (grau) und gemessenen (blau) Werte

2.3

2.4