



SIGNALE UND SYSTEME
Fourier-Reihe

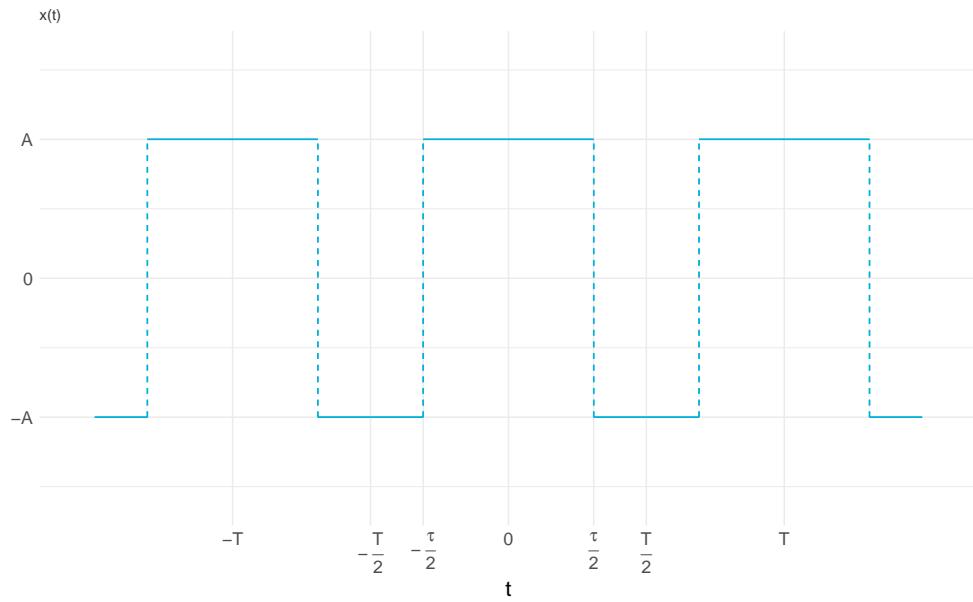
Studien- und Versuchsaufgaben

Autoren: Richard GRÜNERT
Stefan KLOBE

6.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \quad (1)$$

weshalb $x(t)$ eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-\tau/2} \dots + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \end{aligned}$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \left[2 \int_0^{\tau/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt + 2 \int_{\tau/2}^{T/2} -A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{4A}{T} \left[\int_0^{\tau/2} \cos(n\omega_0 t) dt - \int_{\tau/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0} \left[\sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} - \sin(n\omega_0 t) \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right]
\end{aligned}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$a_n = \frac{4A \cdot T}{T \cdot n2\pi} \left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) - \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{2A}{n\pi} \left[\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) \right]$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt$$

mithilfe von Gl. 1:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T/2} \left[\int_0^{\tau/2} \dots + \int_{\tau/2}^{T/2} \dots \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \left[t \Big|_0^{\tau/2} - t \Big|_{\tau/2}^{T/2} \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \left[\frac{\tau}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{4A}{T} \left[\tau - \frac{T}{2} \right] \\
 &= 4A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = 2A \left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2} \right]$$

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.5$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{2} &= 2A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0, \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi \frac{1}{2}) = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2}) \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

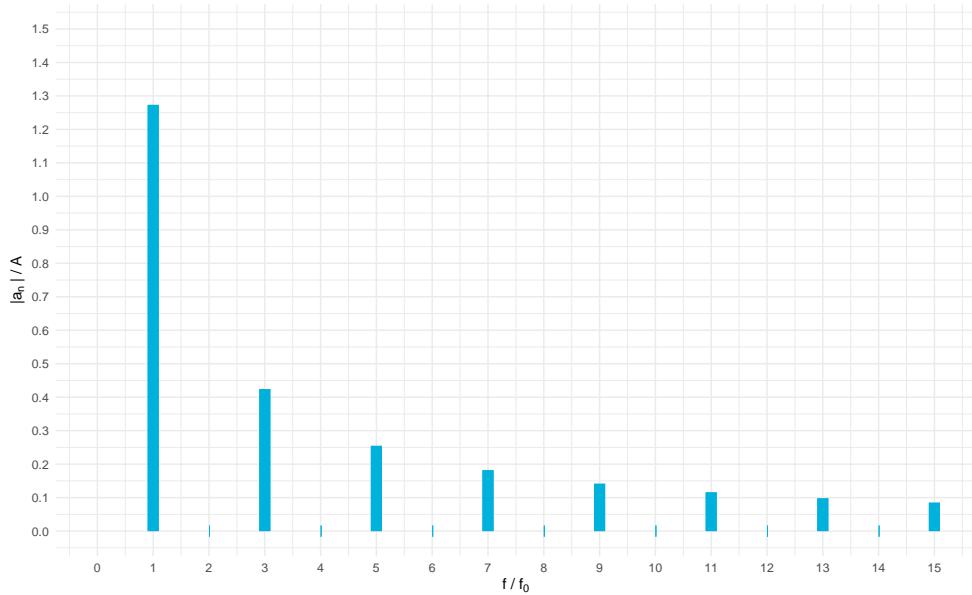


Abbildung 1: Betragsspektrum von $x(t)$ für $\frac{\tau}{T} = 0.5$

1.2

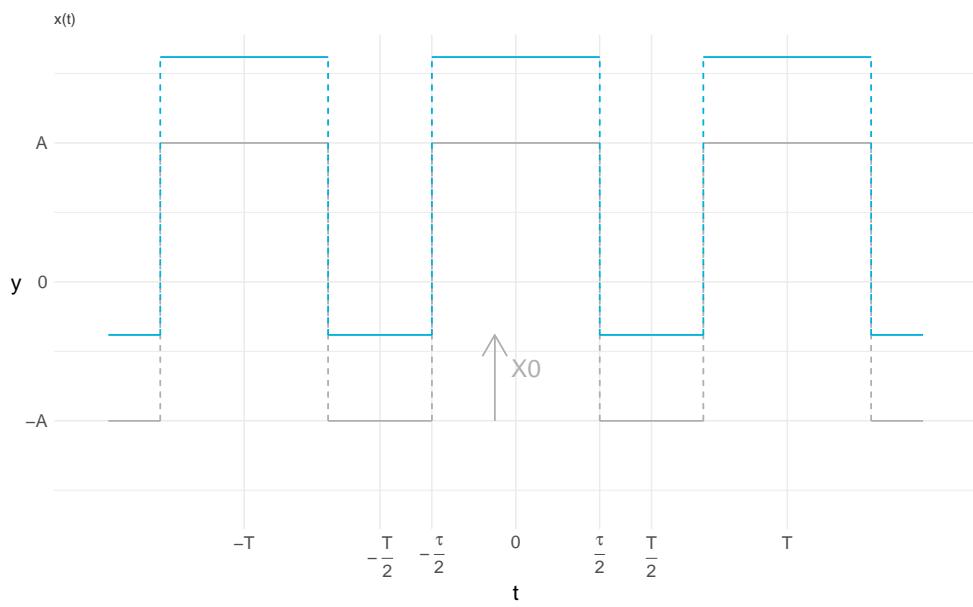


Abbildung 2: $x(t)$ mit dem Gleichanteil X_0 im Zeitbereich

Auswirkungen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_T (x(t) + X_0) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \underbrace{\int_T X_0 \cdot \cos(n\omega_0 t) dt}_{=0} \right] \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

→ Im Frequenzbereich finden keine Änderungen statt.

→ Nur der Gleichanteil ändert sich

1.3

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.25$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{2} &= 2A \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = -A, \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi \frac{1}{4}) \\
 a_n &= \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{4})
 \end{aligned}$$

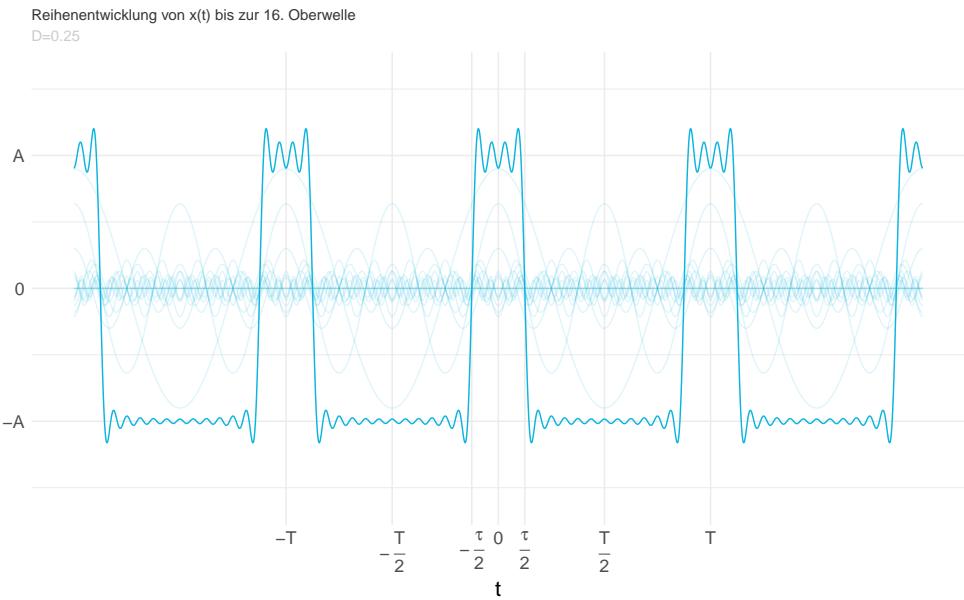
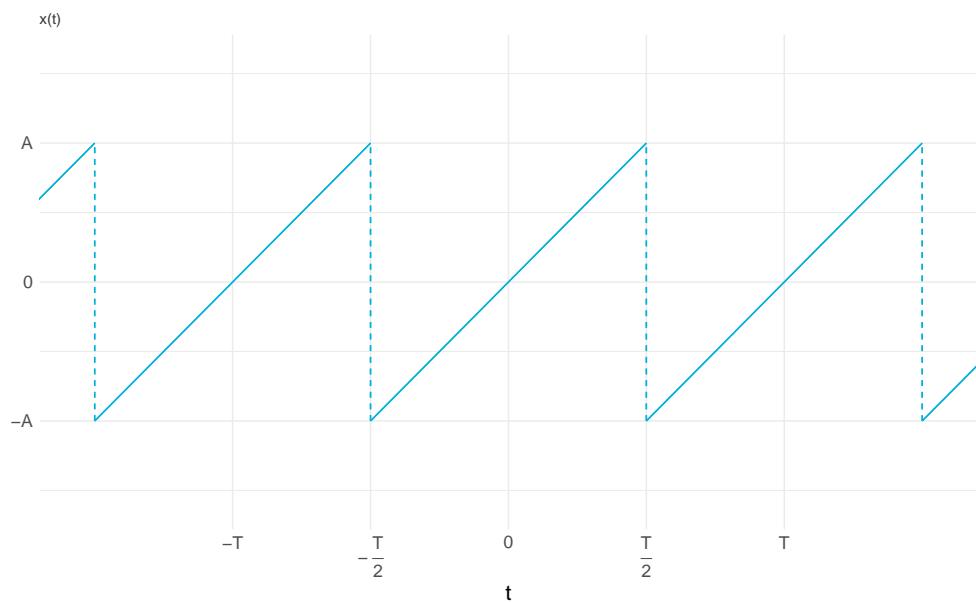


Abbildung 3: $x(t)$ als Summe der Einzelschwingungen

1.4



Es gilt:

$$x(-t) = -x(t), \quad (2)$$

weshalb $x(t)$ eine ungerade Funktion ist. Damit ist

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

und

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T/2} \cdot t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$u = t, u' = 1$$

$$v' = \sin(n\omega_0 t), v = -\frac{1}{n\omega_0} \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

$$b_n = \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot [t \cos n\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{n\omega_0} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot \left[\frac{T}{2} \cos\left(n\frac{2\pi T}{T^2}\right) - \left(-\frac{T}{2} \cos\left(-n\frac{2\pi T}{T^2}\right)\right) \right] + \frac{1}{n^2\omega_0^2} [\sin(n\omega_0 t)] \Big|_{-T/2}^{T/2} \right] \\
 &= \frac{4A}{T^2} \left[-\frac{1}{n\omega_0} \cdot \left[\frac{T}{2} \cos(n\pi) + \frac{T}{2} \cos(n\pi) \right] + \frac{1}{n^2\omega_0^2} \underbrace{\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right]}_{=0} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right] \\
 &= -\frac{4A}{T^2 n \omega_0} \cdot \frac{2T}{2} [\cos(n\pi)] \\
 &= -\frac{2A}{n\pi} (-1)^n
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

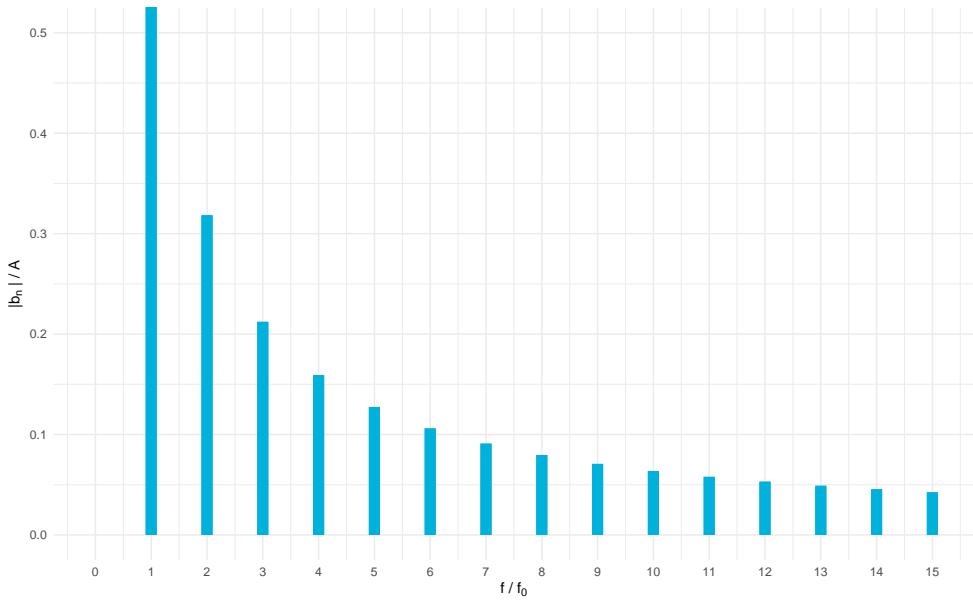


Abbildung 4: Betragsamplitudenspektrum von $x(t)$

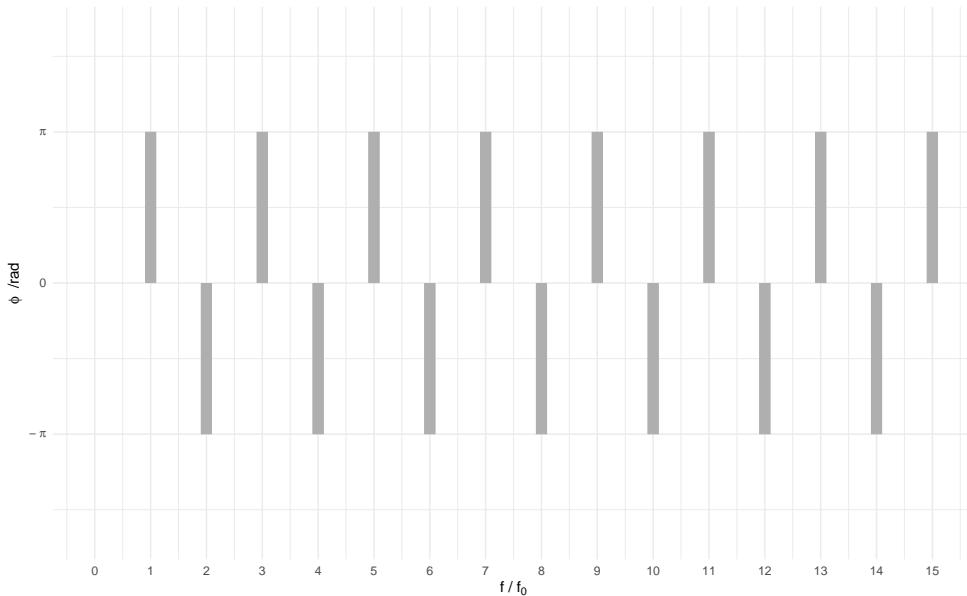


Abbildung 5: Phasenspektrum von $x(t)$

2 Versuchsaufgaben

2.1

Aufgrund des Verhaltens des Signalgenerators (Betriebssystem, Agilent VEE-Software, PC-Soundkarte), konnte keine genaue Amplitude des Sinussignals von ± 2 V eingestellt und dadurch auch nicht am Oszilloskop nachvollzogen werden. Daher lässt sich auch kein Vergleich der generierten und gemessenen Amplituden erstellen.

Aus Abbildung 6 kann man bei einer Einteilung von $200 \frac{\mu\text{s}}{\text{division}}$ eine Periodendauer von etwa $500 \mu\text{s}$ erkennen. Die Frequenz

$$f = \frac{1}{500 \mu\text{s}} = 2 \text{ kHz}$$

ist damit nachvollziehbar.

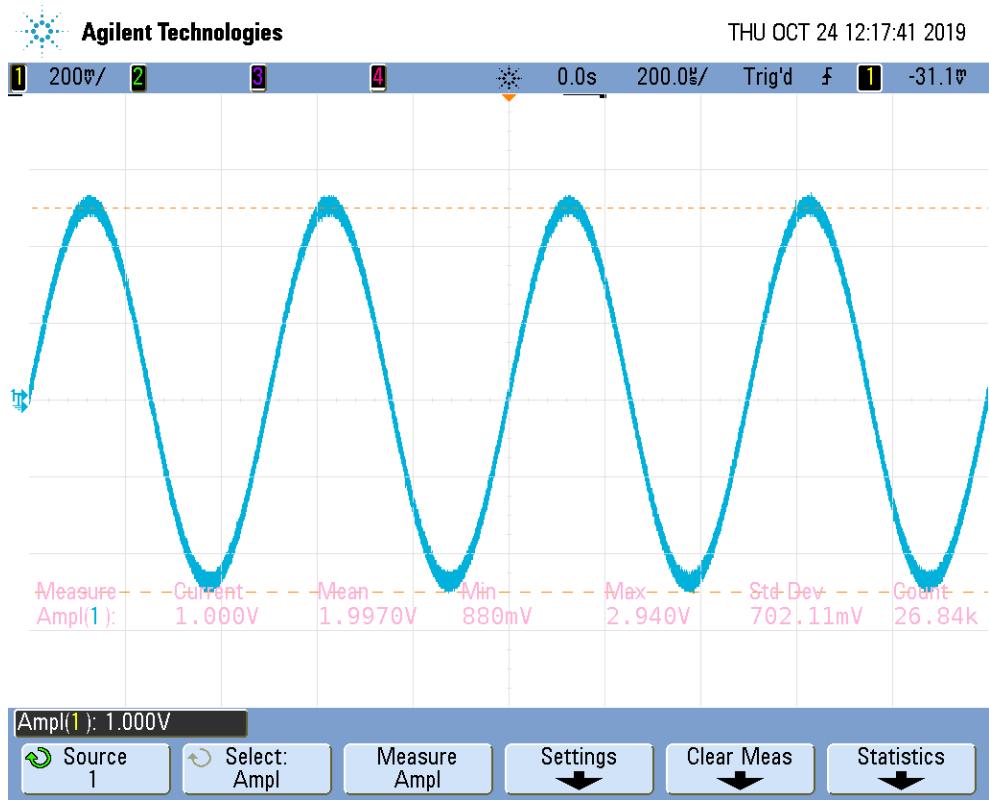


Abbildung 6: Screenshot des Sinussignals auf dem Oszilloskop

2.2

Analytische Bestimmung des Amplitudenspektrums, Aus 1.1 ergibt sich:

$$D = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = 0$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 2V}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	2.457	0
2	0	0
3	-0.849	0
4	0	0
5	0.509	0
6	0	0
7	-0.364	0
8	0	0
9	0.283	0
10	0	0

Tabelle 1: Fourierkoeffizienten $D = 0.5$

Aus Abbildung 7 kann man bei einer Einteilung von $200\frac{\mu\text{s}}{\text{division}}$ eine Periodendauer von etwa $1000 \mu\text{s}$ erkennen. Die Periodendauer ist also wie eingestellt. Wie in 2.1 bereits erwähnt lassen sich keine Rückschlüsse auf die Amplitude treffen. Die Impulsdauer ist mit $500 \mu\text{s}$ ebenfalls wie eingestellt und ergibt zusammen mit der Periodendauer ein Tastverhältnis von $D = 0.5$.

Des Weiteren ist das Überschwingen (*Gibbs'sches Phänomen*) deutlich aus dem Oszilloskopbild ersichtlich.

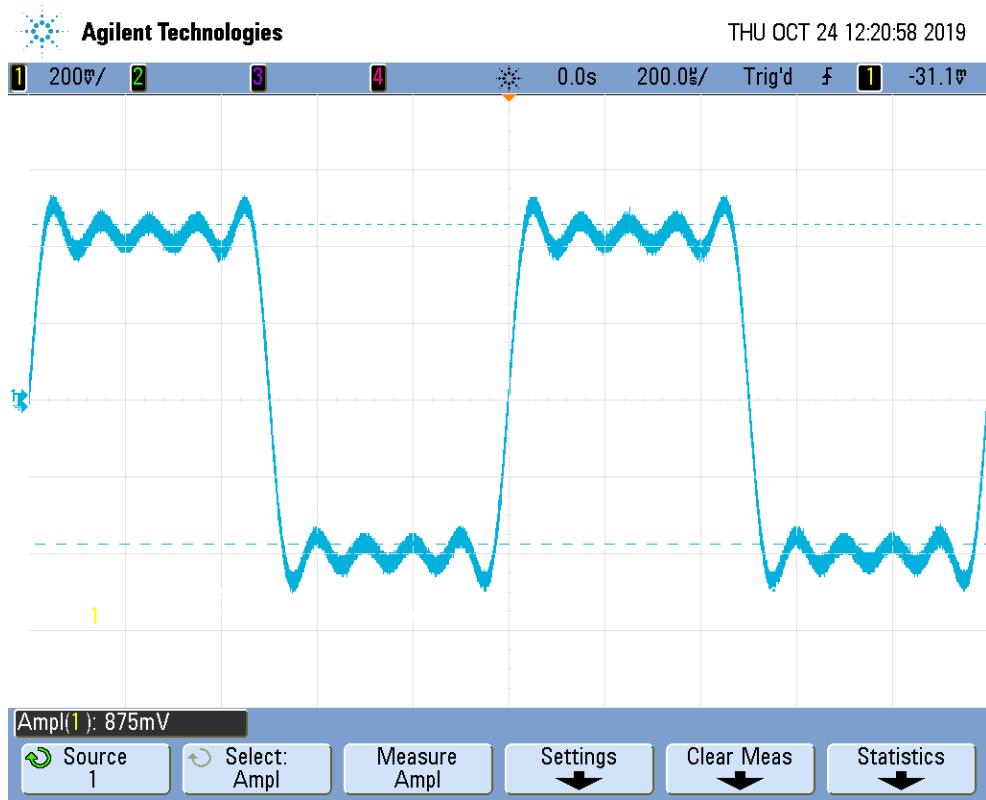


Abbildung 7: Screenshot des Rechtecksignals ($D = 0.5$) auf dem Oszilloskop

Die theoretische Fouriersynthese eines Signals besteht aus unendlich vielen Summengliedern. Da dies praktisch nicht möglich ist und man nur eine begrenzte Anzahl an Oberwellen synthetisieren kann, ist die Qualität des resultierenden Signals von dieser begrenzten Anzahl abhängig. Im Versuch wurden maximal 9 Oberwellen verwendet, wodurch die Approximation an das Rechtecksignal fehlerbehaftet ist.

Die Soundkarte des PCs filtert die im Programm eingestellten Gleichanteile, sodass sie in der Messung nicht erkennbar waren.

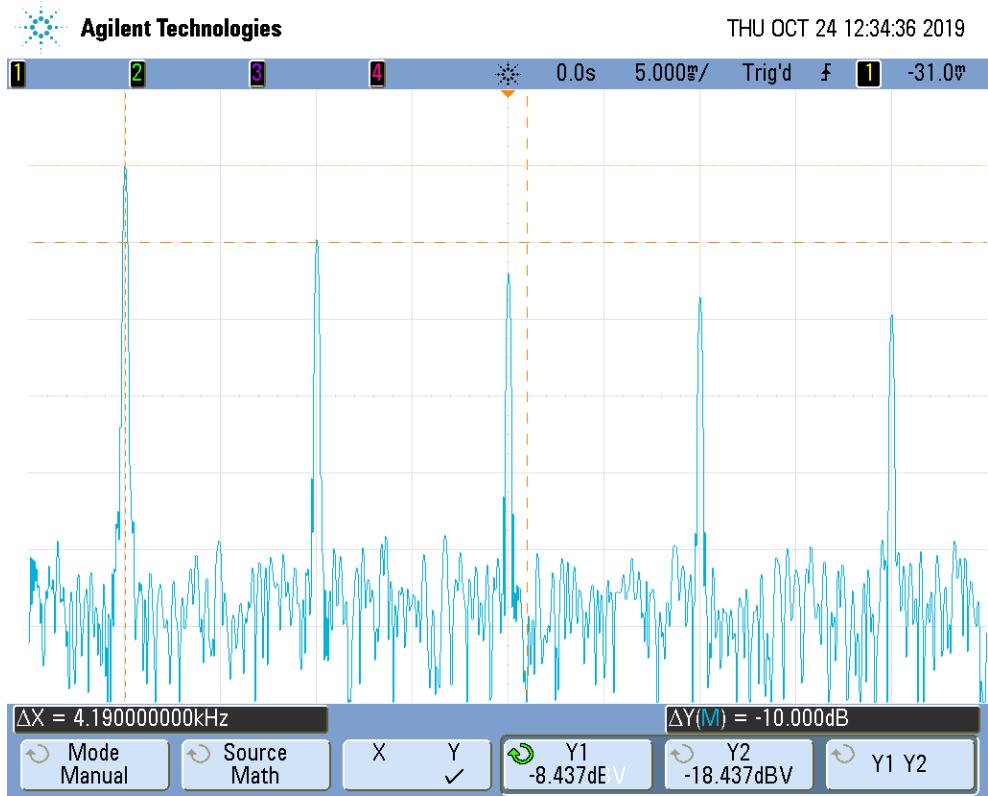


Abbildung 8: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

$n_1 - n_2$	$\Delta a_{\text{theoretisch}}/\text{dB}$	$\Delta a_{\text{gemessen}}/\text{dB}$	$\Delta a_{\text{theoretisch}} - \Delta a_{\text{gemessen}}/\text{dB}$
1-3	-9.229	-10	0.771
3-5	-4.444	-3.75	0.694
5-7	-2.912	-2.81	0.102
7-9	-2.004	-2.5	0.496

Tabelle 2: Messwerte der Aufgabe 6.2

Die Bestimmung der theoretischen Werte $\Delta a_{\text{theoretisch}}$ in dB erfolgte durch

$$\Delta a_{\text{theoretisch}} = 20 \cdot \log \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Die Abweichungen der gemessenen und theoretischen Amplitudendifferenzen sind nicht unerheblich. Die Ursache liegt u.a. bei dem willkürlichen

Anlegen des Cursors auf dem Oszilloskop sowie anderen zufälligen Messabweichungen.

(Anmerkung zur Messwertaufnahme bzgl. Tabelle 2: Durch Messung der Differenzen gegen eine konstanten Bezugspunkt (z.B. Cursor an a_1), hätte sich der Fehler minimieren lassen können.)

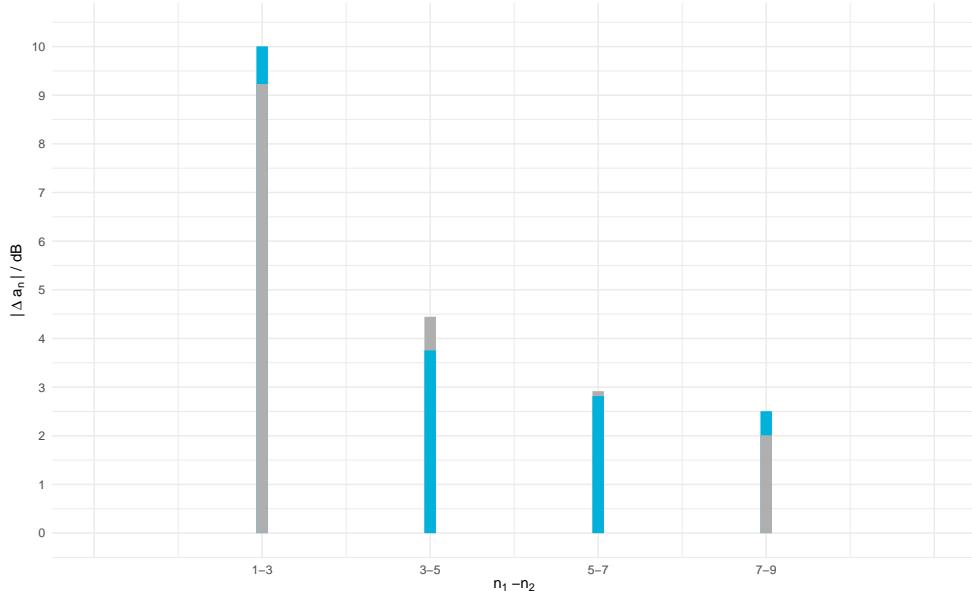


Abbildung 9: Vergleich der theoretischen (grau) und gemessenen (blau) Werte

2.3

Aus 1.3 folgt

$$\frac{a_0}{2} = -A = -2 \text{ V}$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 2V}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \frac{1}{4}\right)$$

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	1.801	0
2	1.273	0
3	0.600	0
4	0	0
5	-0.360	0
6	-0.424	0
7	-0.257	0
8	0	0
9	0.200	0
10	0.255	0

Tabelle 3: Fourierkoeffizienten $D = 0.25$

$n_1 - n_2$	$\Delta a_{\text{theoretisch}}/\text{dB}$	$\Delta a_{\text{gemessen}}/\text{dB}$	$\Delta a_{\text{theoretisch}} - \Delta a_{\text{gemessen}}/\text{dB}$
1-2	-3.013	-2.969	0.044
2-3	-6.534	-6.718	-0.184
3-5	-4.437	-4.375	0.062
5-6	1.421	1.094	0.327
6-7	-4.349	-3.75	-0.689
7-9	-2.178	-2.813	0.635

Tabelle 4: Messwerte der Aufgabe 6.3

Berechnungen und Fehler ergeben sich wie in 2.2.

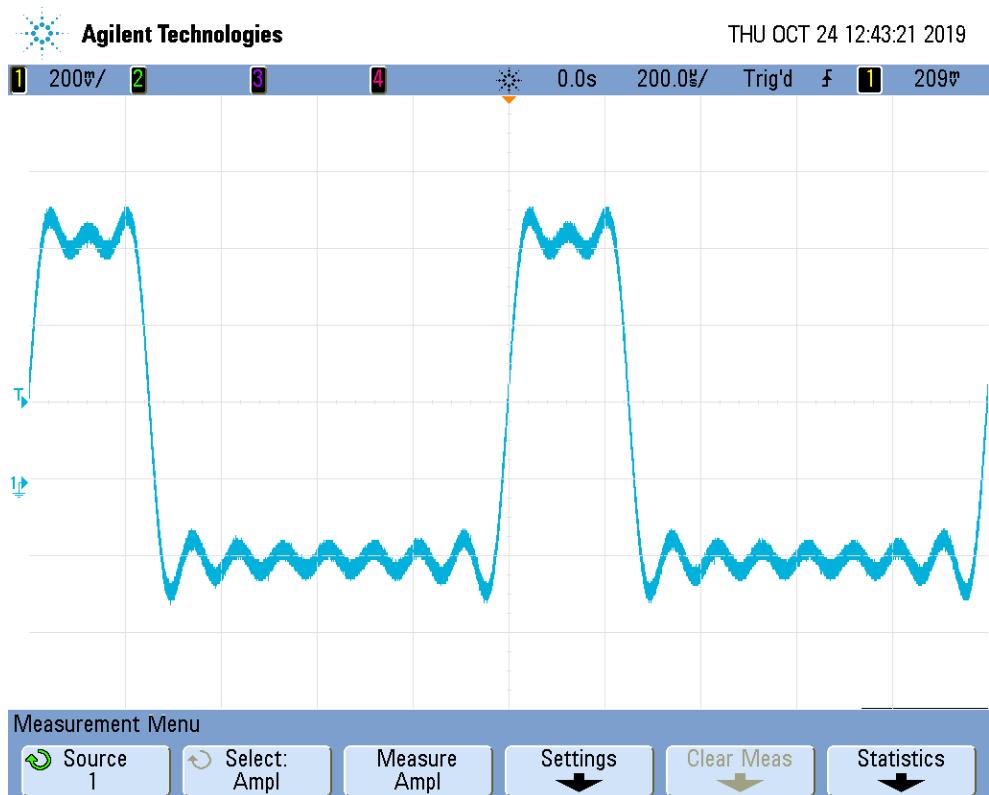


Abbildung 10: Screenshot des Rechtecksignals ($D = 0.25$) auf dem Oszilloskop



Abbildung 11: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

Aus Abbildung 11 lässt sich erkennen, dass sich bei verringertem Tastverhältnis die Dichte der spektralen Amplituden erhöht, wie es auch erwartet wurde.

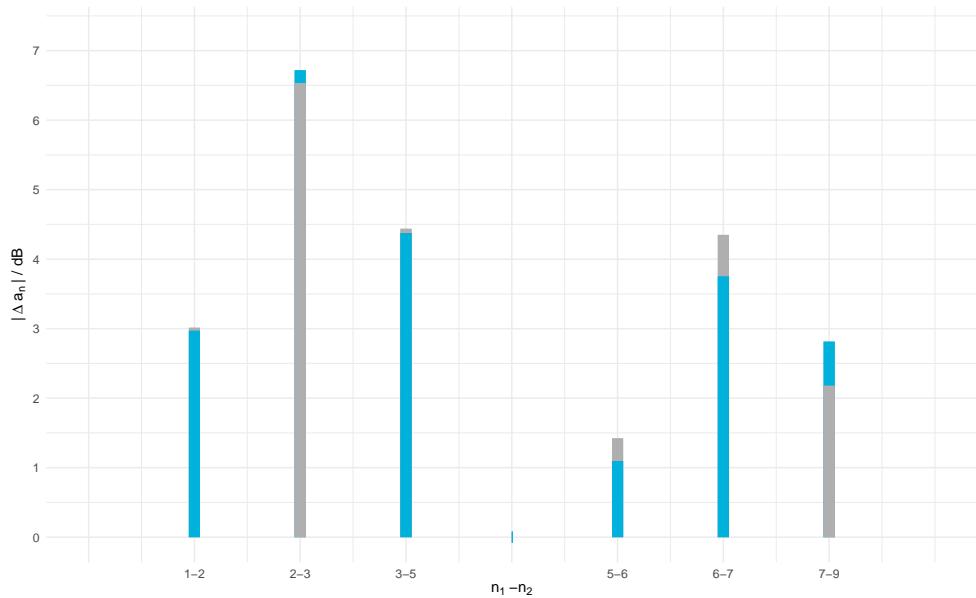


Abbildung 12: Vergleich der theoretischen (grau) und gemessenen (blau) Werte

2.4

f/kHz	a_n/V	b_n/V
1	0	1.273
2	0	-0.637
3	0	0.424
4	0	-0.318
5	0	0.255
6	0	-0.212
7	0	0.182
8	0	-0.159
9	0	0.141
10	0	-0.127

Tabelle 5: Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion

$n_1 - n_2$	$\Delta b_{\text{theoretisch}}/\text{dB}$	$\Delta b_{\text{gemessen}}/\text{dB}$	$\Delta b_{\text{theoretisch}} - \Delta b_{\text{gemessen}}/\text{dB}$
1-2	-6.010	-6.531	-0.521
2-3	-3.536	-3.094	0.442
3-4	-2.499	-2.75	-0.251
4-5	-1.918	-2.062	-0.144
5-6	-1.604	-1.75	0.146
6-7	-1.325	-1.531	0.206
7-8	-1.173	-1.094	-0.079
8-9	-1.044	-0.875	-0.169

Tabelle 6: Messwerte der Aufgabe 6.4

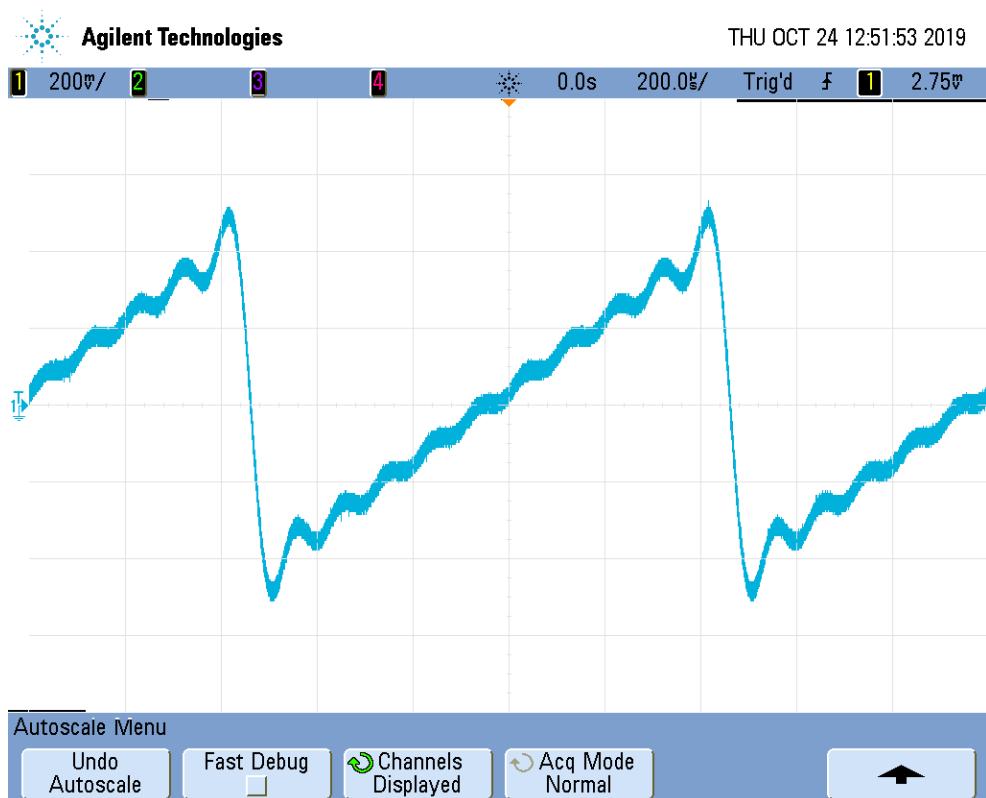


Abbildung 13: Screenshot des Sägezahnsignals auf dem Oszilloskop

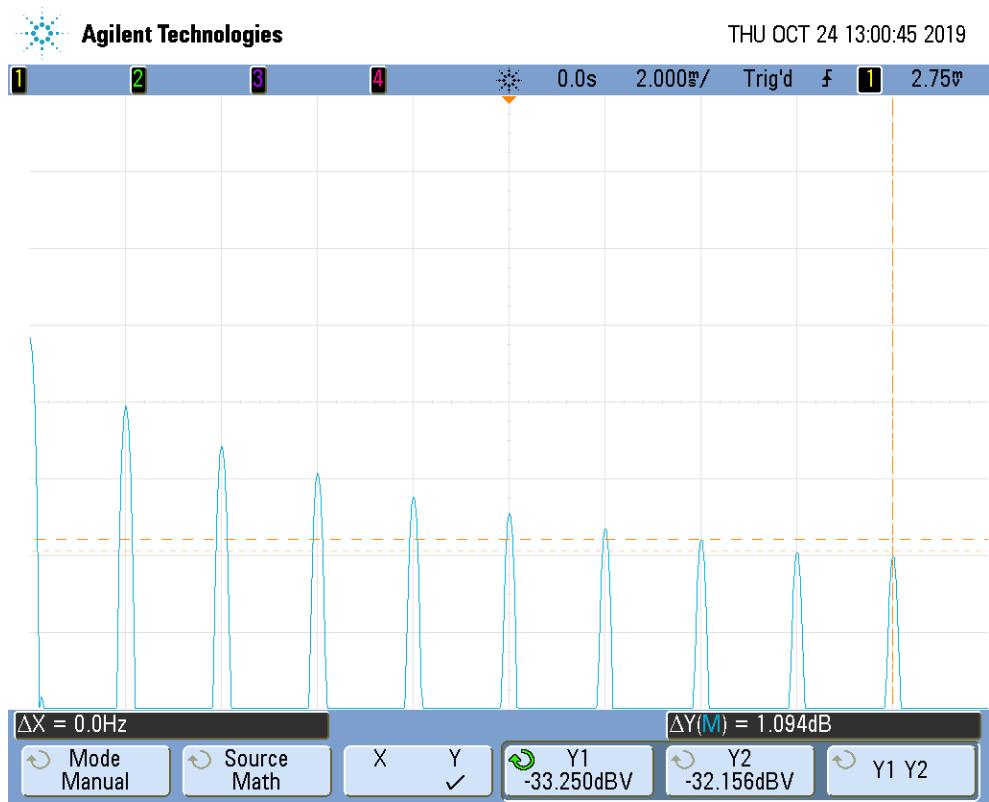


Abbildung 14: Screenshot des Amplitudenspektrums auf dem Oszilloskop

Wie erwartet fallen die spektralen Amplituden hyperbolisch ($\propto \frac{1}{n}$) ab. Die Abweichungen befinden sich wieder in der gleichen Größenordnung wie bei den Messungen zuvor.

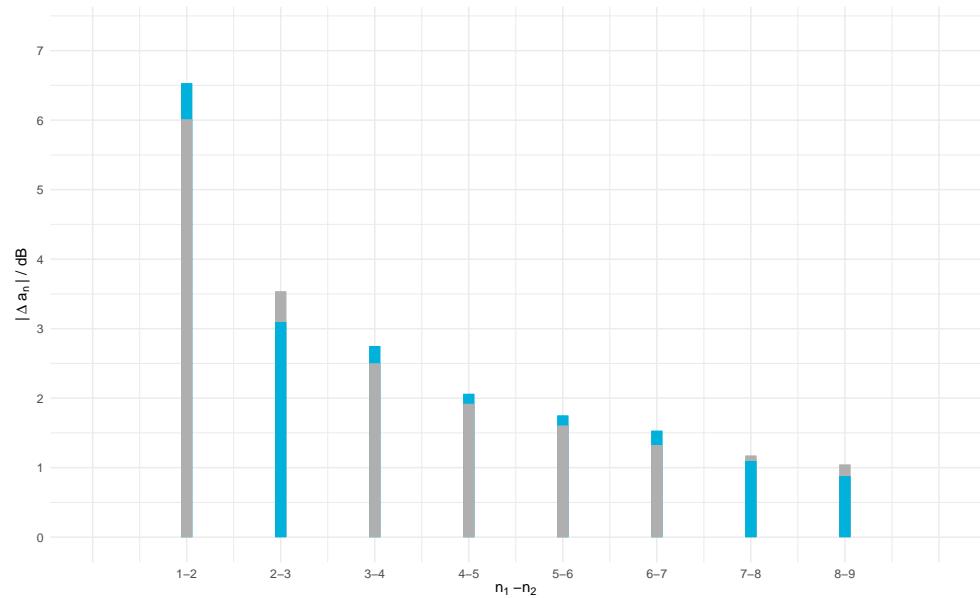


Abbildung 15: Vergleich der theoretischen (grau) und gemessenen (blau) Werte