Signale und Systeme

Fourier-Reihe

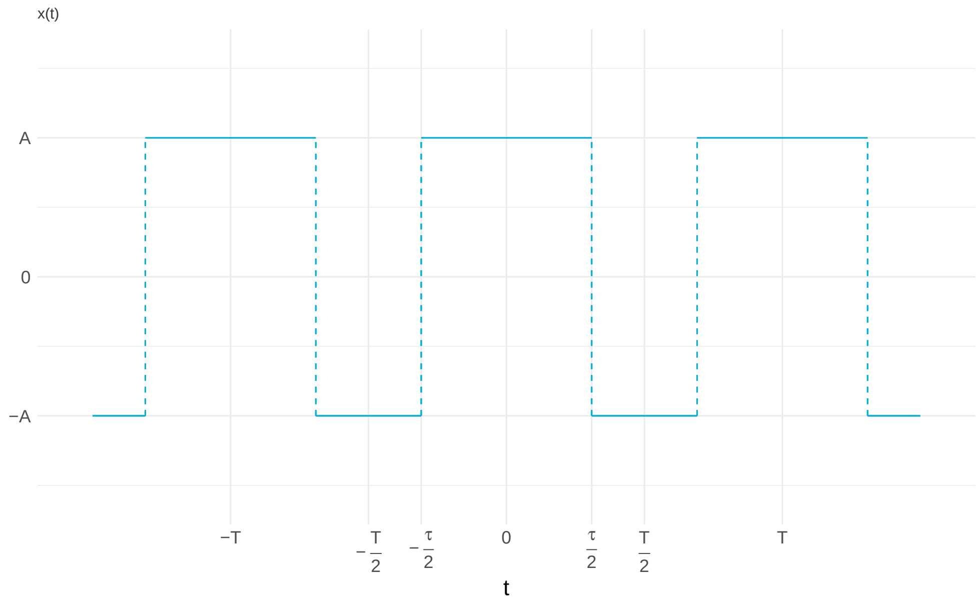
Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard Grünert

1.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1



Hier gilt

$$x(t) = x(-t), \tag{1}$$

weshalb x(t) eine gerade Funktion ist. Damit ist

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{-\tau/2} ... + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} ... + \int_{\tau/2}^{T/2} ... \right]$$

mithilfe von Gl. 1:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\left[2\int_0^{\tau/2} A \cdot \cos\left(n\omega_0 t\right) \mathrm{d}t + 2\int_{\tau/2}^{T/2} -A \cdot \cos\left(n\omega_0 t\right) \mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{4A}{T}\left[\int_0^{\tau/2} \cos\left(n\omega_0 t\right) \mathrm{d}t - \int_{\tau/2}^{T/2} \cos\left(n\omega_0 t\right) \mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{4A}{T} \cdot \frac{1}{n\omega_0}\left[\sin\left(n\omega_0 t\right)\Big|_0^{\tau/2} - \sin\left(n\omega_0 t\right)\Big|_{\tau/2}^{T/2}\right]
\end{aligned}
$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4A \cdot T}{T \cdot n2\pi}\left[\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right) - \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{\tau}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{2A}{n\pi}\left[\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) - \underbrace{\sin\left(n\pi\right)}_{=0} + \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}
$$

$$
a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,\mathrm{d}t
$$

mithilfe von Gl. 1:

$$a_0 = \frac{1}{T/2}\left[\int_0^{\tau/2} ... + \int_{\tau/2}^{T/2} ...\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[t\Big|_0^{\tau/2} - t\Big|_{\tau/2}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{\tau}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\tau - \frac{T}{2}\right]$$

$$= 2A\left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = A\left[\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right]}$$

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.5$ gilt:

$$\frac{a_0}{2} = A\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0,$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin{(n\pi\frac{1}{2})} = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin{(n\frac{\pi}{2})}$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

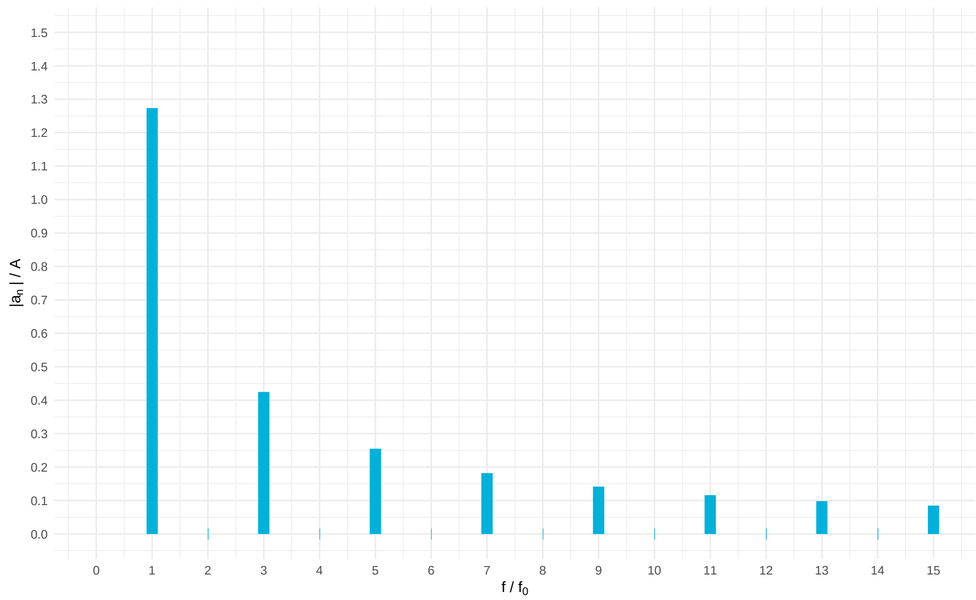


Abbildung 1: Betragsspektrum von x(t) für $\frac{\tau}{T} = 0.5$

1.2

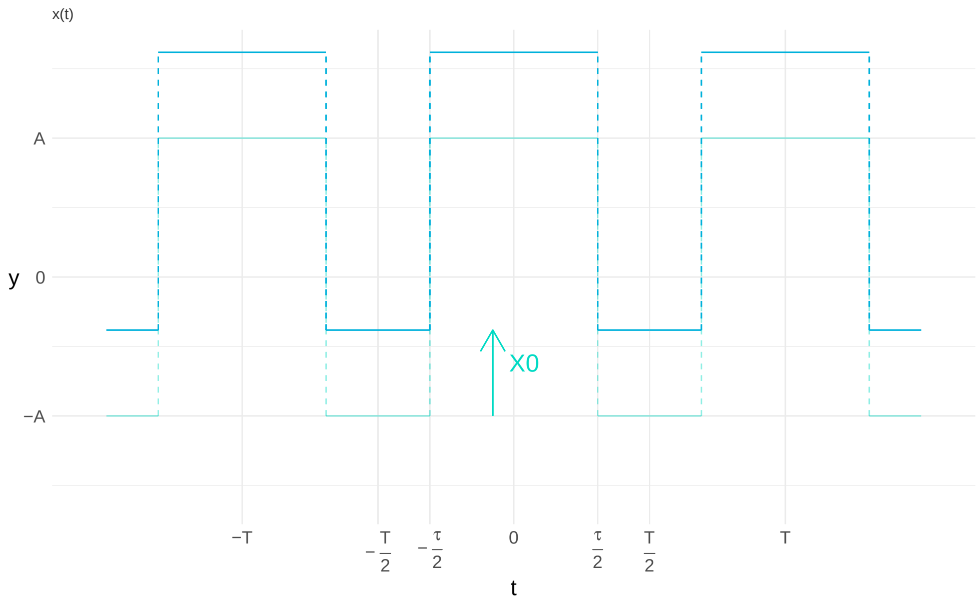


Abbildung 2: x(t) mit dem Gleichanteil X0 im Zeitbereich

Auswirkungen im Frequenzbereich:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T (x(t) + X0) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) \, \mathrm{d}t + \underbrace{\int_T X0 \cdot \cos(n\omega_0 t) \, \mathrm{d}t}_{=0} \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, \mathrm{d}t$$

$\rightarrow$ Im Frequenzbereich finden keine Änderungen statt.

$\rightarrow$ Nur der Gleichanteil ändert sich

1.3

Für das Tastverhältnis $\frac{\tau}{T} = 0.25$ gilt:

$$\frac{a_0}{2} = 2A \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = -A,$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\pi \frac{1}{4})$$

$$a_n = \frac{4A}{n\pi} \cdot \sin(n\frac{\pi}{4})$$

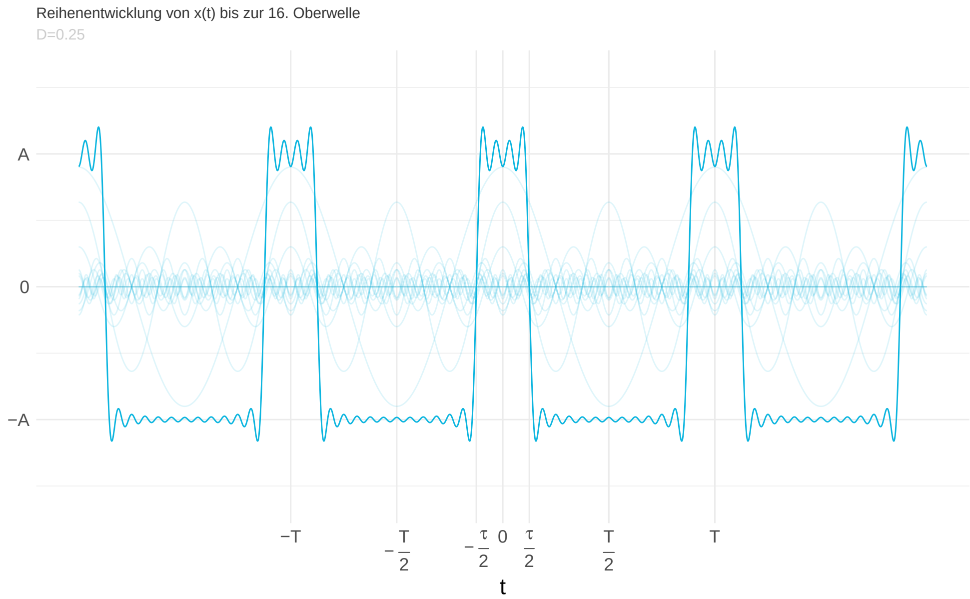
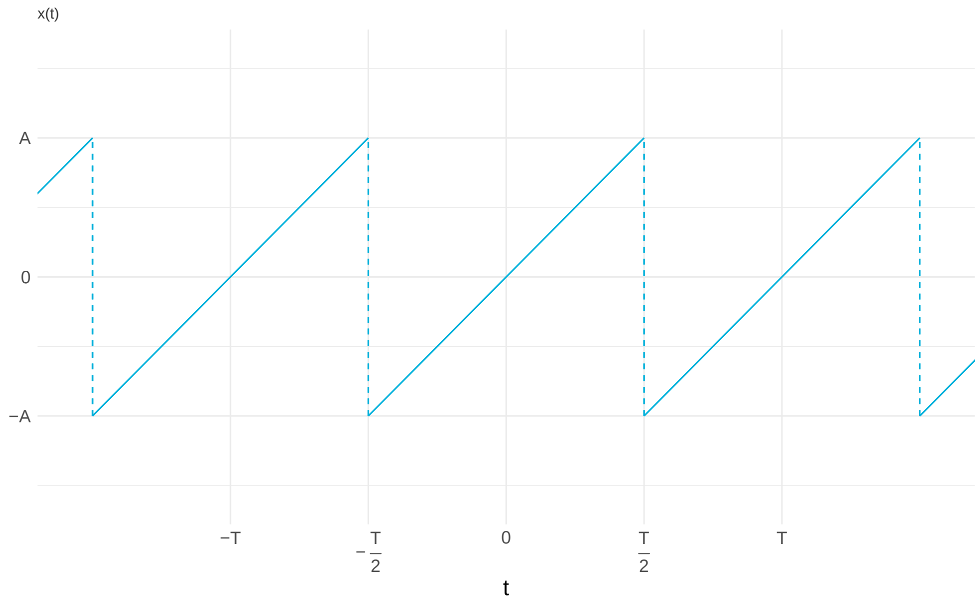


Abbildung 3: x(t) als Summe der Einzelschwingungen

1.4



2 Versuchsaufgaben