Laplace Transformation

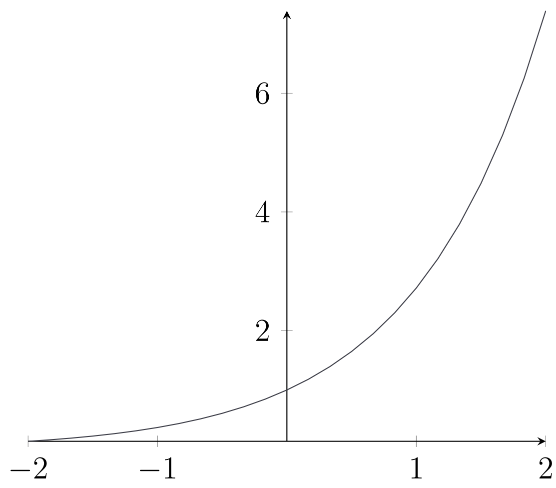
Ausgangslage

Die Fourieranalyse stellt die Konvergenzbedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x(t) \mid \cdot dt < \infty$$

Das bedeutet, dass Signale im undendlichen konvergieren / beschränkt sein müssen, um eine Fouriertransformation auf ihnen anwenden zu können. Beispiele sind $\cos t$, e^{-t}, $\delta(t)$.

Sind die zu analysierenden Signale jedoch unbeschränkt/(über alle Grenzen wachsend), ist die Konvergenzbedingung der FT nicht mehr gegeben. Dies gilt z.B. für e^t, $1(t)$



Eine Rechenhilfe bietet die *Laplace Transformation*. Eingeführt wird die *komplexe Frequenz*:

$$j\omega \to p = \sigma + j\omega$$

Hinweis

Es gilt die Darstellung des Cosinus mithilfe zweier, entgegengesetzt rotierender, komplexer Zeiger:

$$x(t) = X_0 \cdot \cos\omega_0 t = \frac{X_0}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

Wird außer der Rotation der Drehzeiger noch eine *zeitliche Änderung der Zeigerlänge* (Amplitude) zugelassen, so folgt für die komplexe Frequenz:

$$p = \sigma + j\omega$$

Die LT erfasst somit eine wesentlich größere Klasse von Zeitfunktionen / Signalen und löst somit das Ausgangsproblem

Mathematisches Konzept

Die Laplacetransformation bildet, wie die Fouriertransformation, ein Bindeglied zwischen Zeit und Frequenzbereich, mit dem Unterschied, dass hier die komplexe Frequenz p verwendet wird.

$$\begin{aligned}
\text{Eingang: } & x(t) \leftrightarrow X(p) = \mathrm{LT}\{x(t)\} \\
\text{Übertragung: } & g(t) \leftrightarrow G(p) = \mathrm{LT}\{g(t)\} \\
\text{Ausgang: } & y(t) \leftrightarrow Y(p) = \mathrm{LT}\{y(t)\}
\end{aligned}$$

Forderung

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Bedeutet also, dass die Funktion x(t) abklingen muss! Dies ist jedoch bei vielen technischen Systemen (sin-, cos-, Sprung-, Rampenfunktion) nicht erfüllt und führt zu *Konvergenzschwierigkeiten*.

Ausweg

anstatt $x(t) \to x(t) \cdot e^{-\sigma t}$, wobei $\sigma > 0$
Die Forderung wird dann durch geeignete Wahl von σ herstellbar!

$\Rightarrow e^{-\sigma t}$ ist ein *konvergenzerzwingender Faktor* für rationale Funktionen.

Aus dem Fourierintegral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

wird dann mit $x(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt \; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$$

Dies entspricht der Fouriertransformation einer *exponentiell gedämpften Zeitfunktion*! Es lässt sich außerdem erkennen, dass für den Fall $\sigma = 0$ das Integral zum regulären Fourierintegral wird.

Das Integral der Laplacetransformation, bei der die untere Grenze $-\infty$ ist, bezeichnet man als *bilaterale Laplacetransformation*. Ist diese Grenze gleich 0, spricht man von der *unilateralen Laplacetransformation*, bei welcher die Anfangsbedingungen berücksichtigt werden.
Für Signale, deren Funktionswerte zu Zeiten $t < 0$ gleich 0 sind, ist die unilaterale gleich der bilateralen Laplacetransformation. Dies gilt insbesondere für *kausale Systeme*.

Die Konvergenz des Laplace*integrals* muss gegeben sein. Diese ist vom Wert von p abhängig, es muss also herausgefunden werden, für welche werte von p das Integral nicht unendlich groß wird sondern konvergiert.
Diese Analyse führt zum **Konvergenzbereich** der Laplacetransformation/des Integrals.

Real- und Imaginärteil von p, also σ und ω, lassen sich in einer komplexen Ebene darstellen.