



GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK II

Frequenzverhalten einfacher RLC-Netzwerke

Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard GRÜNERT

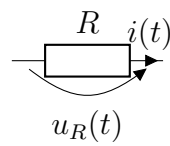
25.4.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \phi_i)$$

(3)

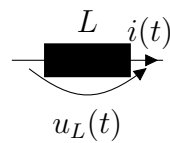


$$\begin{aligned} u_R(t) &= R \cdot i(t) \\ &= \underbrace{R \cdot \hat{I}}_{\hat{U}_R} \cdot \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

Da sich die Phase nicht ändert, gilt außerdem $\phi_i = \phi_u$ und somit:

$$u_R(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \phi_u)$$

(4)

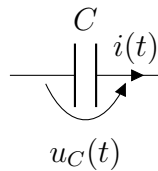


$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} \\ &= L \cdot \hat{I} \cdot \frac{d}{dt} (\cos(\omega t + \phi_i)) \\ &= -\underbrace{\omega \cdot L \cdot \hat{I}}_{\hat{U}_L} \cdot \sin(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

Um die Spannung $(-\sin x)$ wieder durch $\cos x$ auszudrücken, muss auf den ursprünglichen Phasenwinkel $\pi/2$ addiert werden:

$$u_L(t) = \hat{U}_L \cdot \cos(\omega t + \underbrace{\phi_i + \frac{\pi}{2}}_{\phi_u})$$

(5)



$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \int_0^t i(t) \, dt \\ &= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \int_0^t \cos(\omega t + \phi_i) \, dt \\ &= \frac{\hat{I}}{C} \cdot \frac{1}{\omega} [\sin(\omega t + \phi_i)]_0^t + \underbrace{U_0}_{\text{initialer Ladezustand}} \\ &= \underbrace{\frac{\hat{I}}{C \cdot \omega}}_{\hat{U}_C} [\sin(\omega t + \phi_i) - \sin(\phi_i)] + U_0 \end{aligned}$$

Um die Spannung $(\sin x)$ wieder durch $\cos x$ auszudrücken, muss von dem ursprünglichen Phasenwinkel $\pi/2$ subtrahiert werden:

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \left(\cos(\omega t + \underbrace{\phi_i - \frac{\pi}{2}}_{\phi_u}) - \cos(\underbrace{\phi_i - \frac{\pi}{2}}_{\phi_u}) \right) + U_0$$

1.2

(3)

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

(4)

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$di(t) = \frac{1}{L} \cdot u_L(t) dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t) dt + i_0$$

(5)

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

1.3

Zur Anwendung der symbolischen Methode werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

- *Linearität*: Die Kenngrößen der Elemente R, L, C sind von den Kenngrößen der Erregung (U, I, ω) unabhängig
- Es liegt eine *harmonische Erregung* (\sin / \cos) vor

- Der *stationäre Zustand* ist erreicht, das System ist "eingeschwungen" und es treten keine Schaltvorgänge auf

1.4

Der *Betragsgang* ist die Funktion $f(\omega)$, die den Verlauf des Verhältnisses der Amplituden (komplexer Betrag) oder Effektivwerte zweier Größen (z.B. Aus- und Eingangssignal) mit der (Kreis-)Frequenz abbildet.

$$f(\omega) = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{U_{2eff}}{U_{1eff}}$$

Der *Phasengang* $\phi(\omega)$ ist das von der (Kreis-)Frequenz abhängige Argument des komplexen Verhältnisses des Aus- und Eingangssignals.

$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)$$

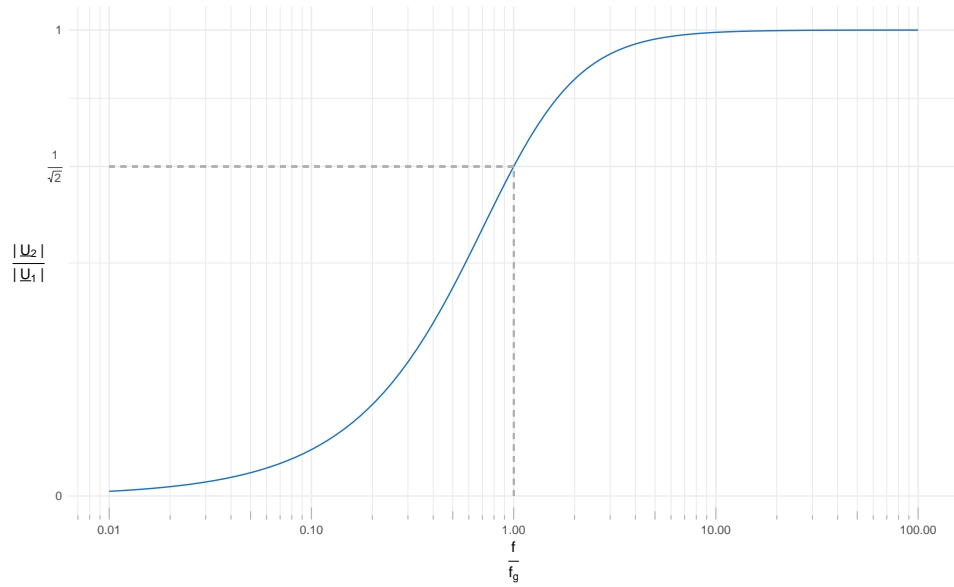
Sind Real- und Imaginärteil dieses komplexen Verhältnisses gleich, so wird das Amplitudenverhältnis $1/\sqrt{2}$ und die Phasenverschiebung 45° . Die dabei präsente Frequenz wird dann *Grenzfrequenz* genannt.

$$|\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)| = |\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)|$$

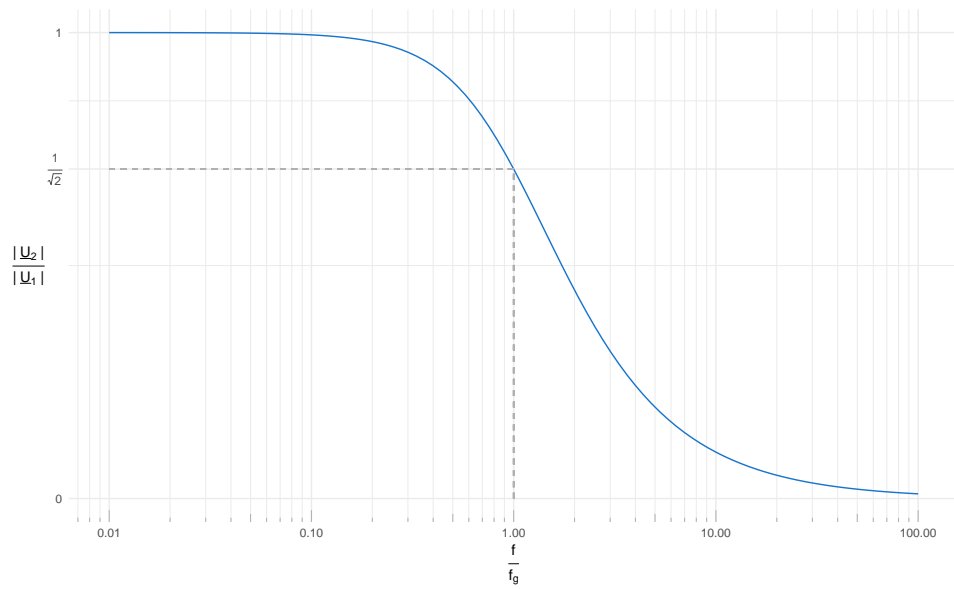
1.5

Im Folgenden wurden normierte Darstellungen der Betragsgänge gewählt, um von den Kenngrößen unabhängige Graphen zu erhalten. Zusätzlich sind die Abszissen dieser logarithmisch eingeteilt.

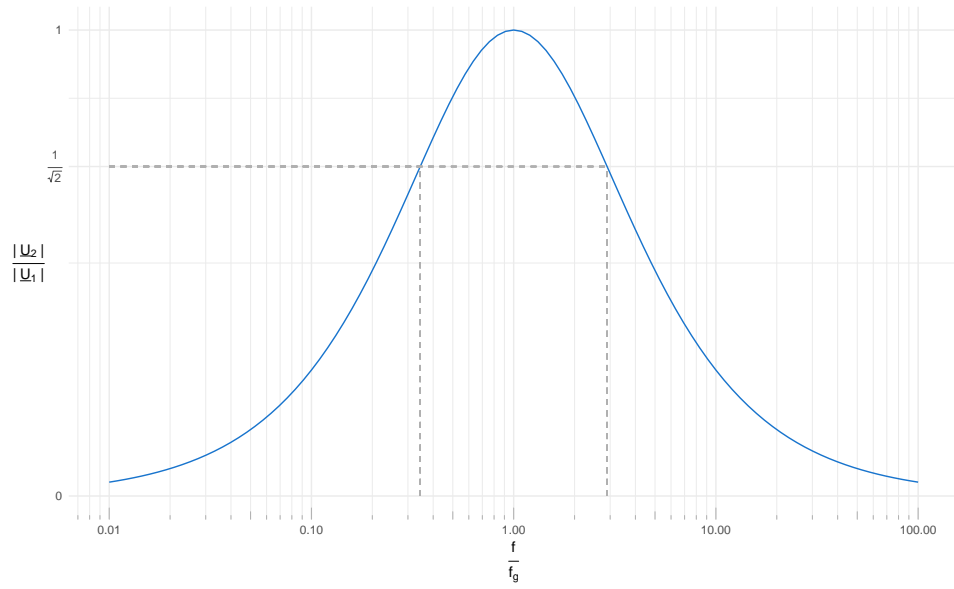
Hochpassfilter (HP)



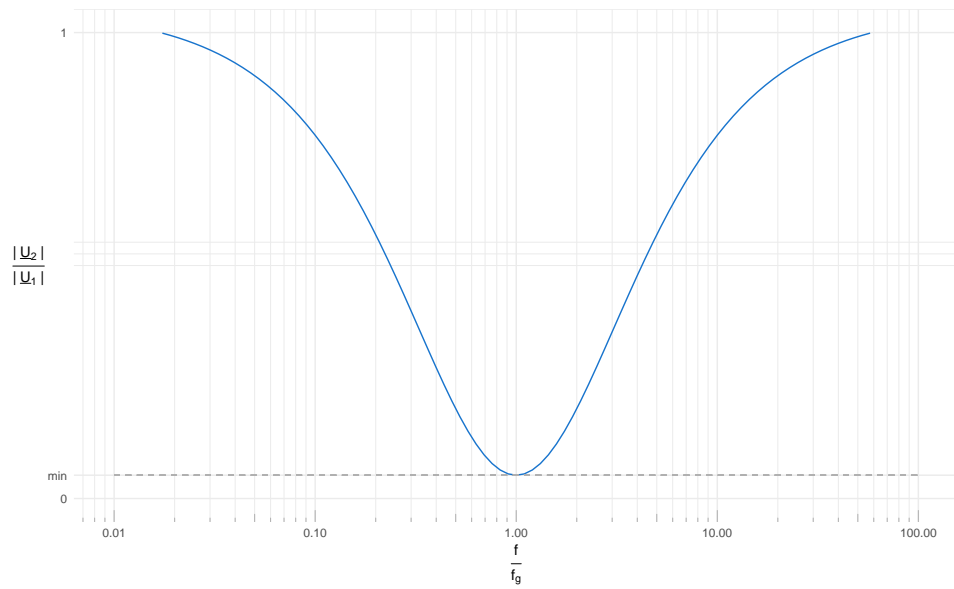
Tiefpassfilter (TP)



Bandpass (BP)

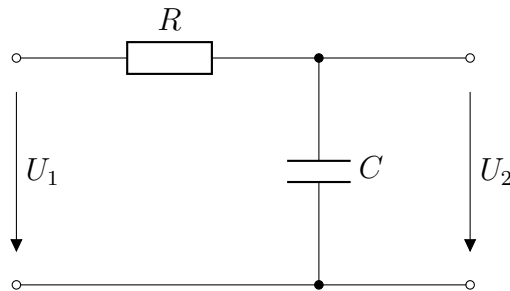


Bandsperre (BS)



1.6

RC-Tiefpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jR\omega C}$$

Amplitude:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{|1|}{|1 + jR\omega C|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan \frac{\omega RC}{1} = -\arctan(\omega RC)$$

Grenzfrequenz:

$$|\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)| = |\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)|$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2} = \frac{\omega_g RC}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2}$$

$$\omega_g RC = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

Normierung:

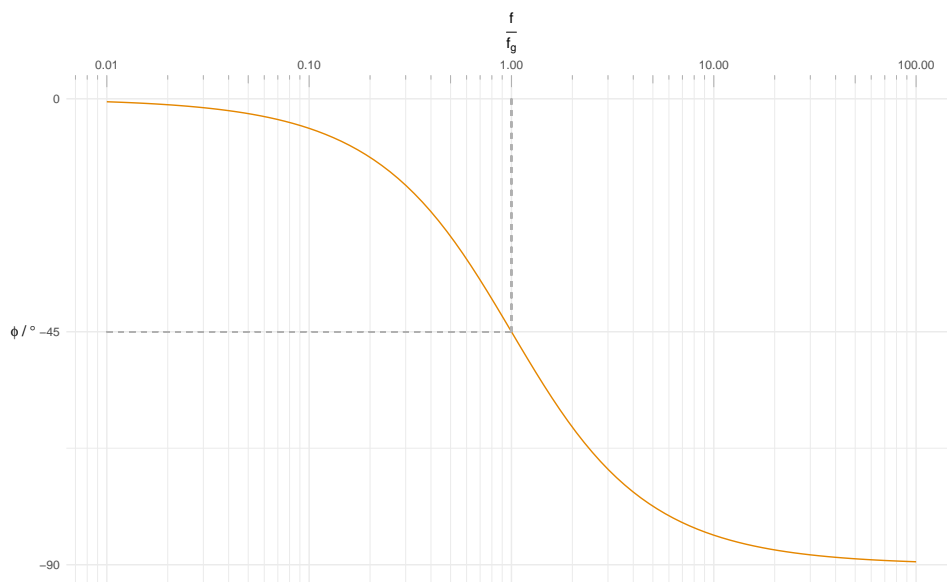
$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g} \right)^2}}$$

$$\phi \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g}$$

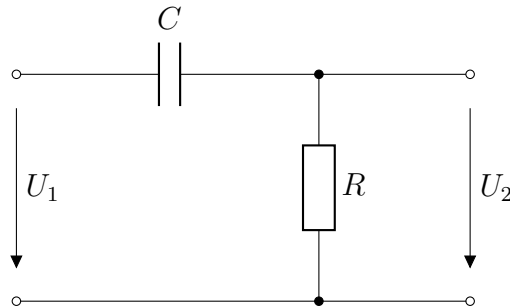
Betragsgang:

siehe 1.5: Tiefpassfilter

Phasengang:



RC-Hochpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}$$

Amplitude:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{|1|}{|1 - j\frac{1}{\omega RC}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = \arctan\frac{1}{\omega RC}$$

Grenzfrequenz:

$$|\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)| = |\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)|$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C^2}} = \frac{\frac{1}{\omega_g RC}}{1 + \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C^2}}$$

$$\frac{1}{\omega_g RC} = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

Normierung:

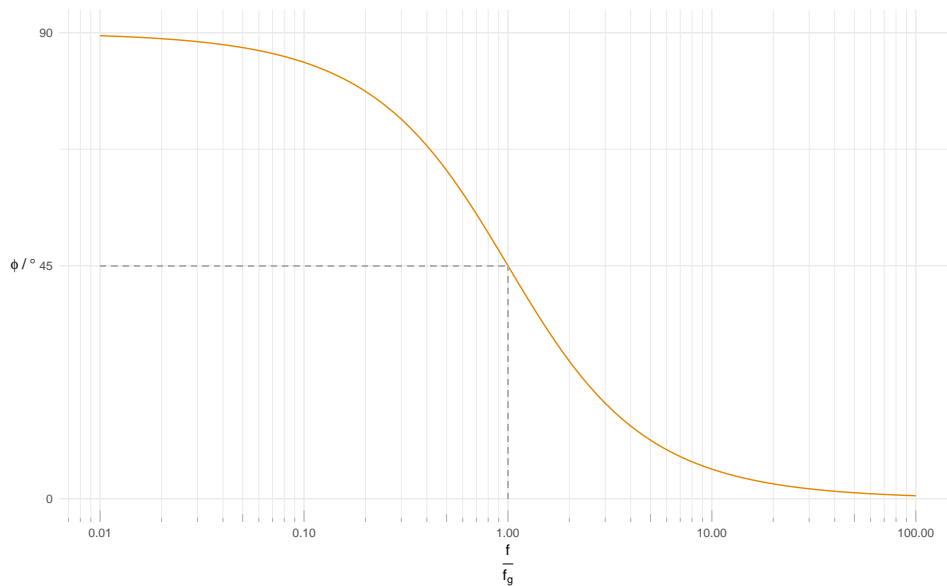
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{f}{f_g} \right)^2}}}$$

$$\phi \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \arctan \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_g}}$$

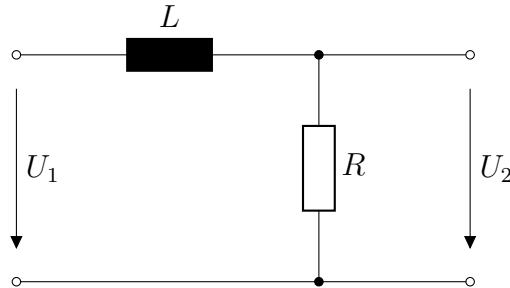
Betragsgang:

siehe 1.5: Hochpassfilter

Phasengang:



RL-Tiefpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}$$

Amplitude:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{|1|}{|1 + j\frac{\omega L}{R}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan \frac{\frac{\omega L}{R}}{1} = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Grenzfrequenz:

$$|\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)| = |\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)|$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega_g^2 L^2}{R^2}} = \frac{\frac{\omega_g L}{R}}{1 + \frac{\omega_g^2 L^2}{R^2}}$$

$$\frac{\omega_g L}{R} = 1$$

$$\omega_g = \frac{R}{L}$$

Normierung:

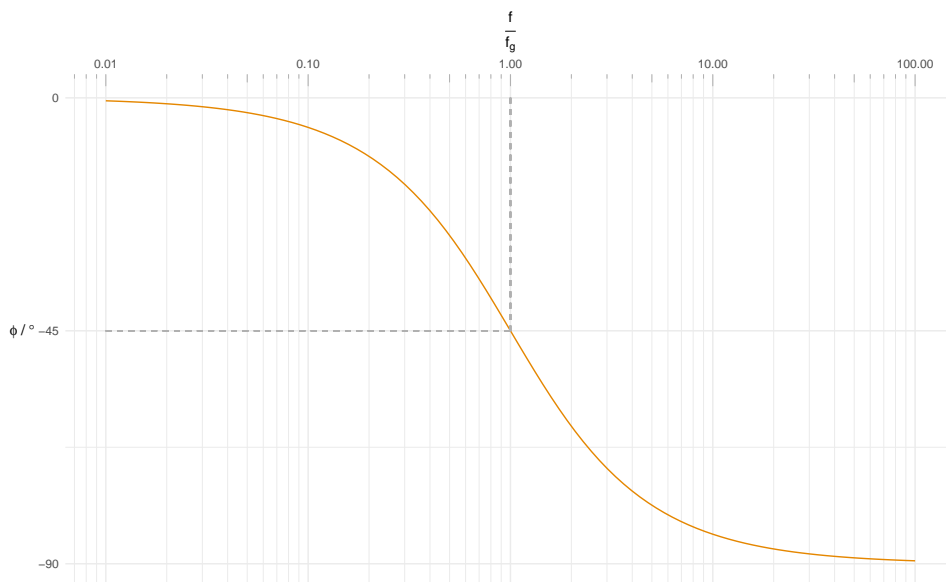
$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g} \right)^2}}$$

$$\phi \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_g}$$

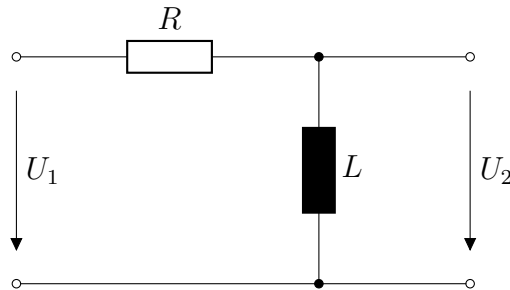
Betragsgang:

siehe 1.5: Tiefpassfilter

Phasengang:



RL-Hochpass



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$$

Amplitude:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{|1|}{|1 - j\frac{R}{\omega L}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}}$$

Phase:

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0 - \arctan\left(-\frac{R}{\omega L}\right) = \arctan\frac{R}{\omega L}$$

Grenzfrequenz:

$$|\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)| = |\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)|$$

Nach komplex-konjugierter Erweiterung:

$$\frac{1}{1 + \frac{R^2}{\omega_g^2 L^2}} = \frac{\frac{R}{\omega_g L}}{1 + \frac{R^2}{\omega_g^2 L^2}}$$

$$\frac{R}{\omega_g L} = 1$$

$$\omega_g = \frac{R}{L}$$

Normierung:

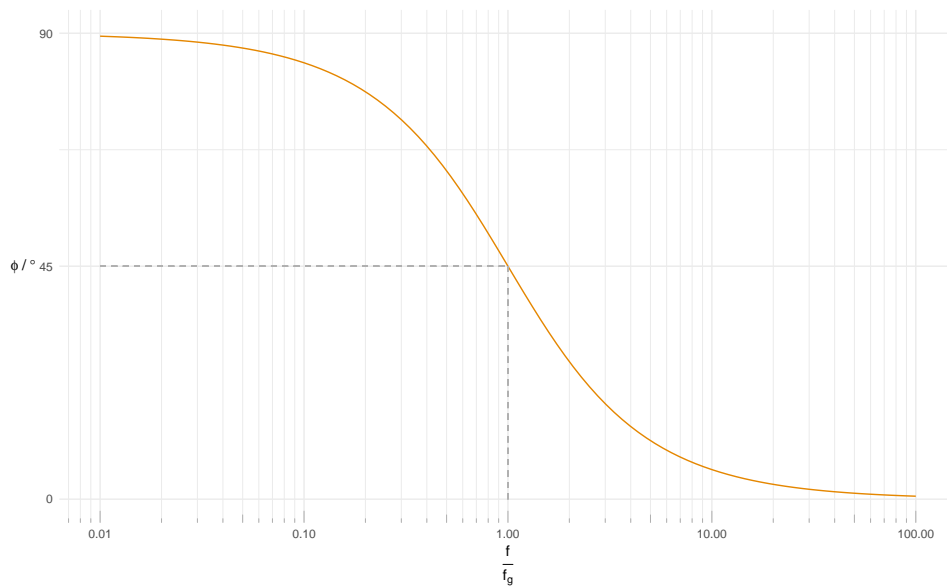
$$\frac{|U_2|}{|U_1|} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{f}{f_g} \right)^2}}}$$

$$\phi \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) = \arctan \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_g}}$$

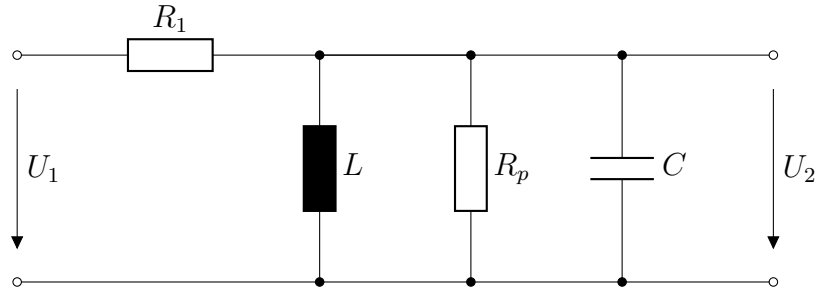
Betragsgang:

siehe 1.5: Hochpassfilter

Phasengang:



1.7



$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_p = 1 \text{ k}\Omega, L = 1 \text{ mH}, C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}$$

$$\frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{R_p}}} = \frac{1}{jR_1\omega C + \frac{R_1}{j\omega L} + \frac{R_1}{R_p} + 1}$$

$$\frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_p} + j\left(\omega R_1 C - \frac{R_1}{\omega L}\right)}$$

Grenzfrequenzen:

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right) \right|$$

$$R_1 \left(\omega_{\pm 45} C - \frac{1}{\omega_{\pm 45} L} \right) = 1 + \frac{R_1}{R_p}$$

$$\omega_{\pm 45} C - \frac{1}{\omega_{\pm 45} L} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p}$$

$$\frac{1}{\omega_{\pm 45}} \left(\omega_{\pm 45}^2 C - \frac{1}{L} \right) = \frac{R_1 + R_p}{R_1 \cdot R_p}$$

$$\omega_{\pm 45}^2 C - \frac{1}{L} = \omega_{\pm 45} \frac{R_1 + R_p}{R_1 \cdot R_p}$$

$$\omega_{\pm 45}^2 - \omega_{\pm 45} \frac{R_1 + R_p}{C \cdot R_1 \cdot R_p} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_p}{2 \cdot C R_1 R_p} \right)^2 + \frac{1}{LC}} \pm \frac{R_1 + R_p}{2 \cdot C R_1 R_p}$$

Mit den Beispielwerten:

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\left(\frac{1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega}{2 \cdot 1\mu\text{F} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 1\text{k}\Omega} \right)^2 + \frac{1}{1\text{mH} \cdot 1\mu\text{F}}} \pm \frac{1\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega}{2 \cdot 1\mu\text{F} \cdot 1 \cdot \text{k}\Omega \cdot 1\text{k}\Omega}$$

$$\omega_{+45} = 32638.584 \text{ s}^{-1}, f_{+45} = 5194.592 \text{ Hz}$$

$$\omega_{-45} = 30638.584 \text{ s}^{-1}, f_{-45} = 4876.282 \text{ Hz}$$

$$B_\omega = \omega_{+45} - \omega_{-45} = 2000 \text{ s}^{-1}$$

$$B_f = 318.31\text{Hz}$$

Resonanzfrequenz:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right) = 0$$

$$\frac{\omega_0 R_1 C - \frac{R_1}{\omega_0 L}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + \left(\omega_0 R_1 C - \frac{R_1}{\omega_0 L}\right)^2} = 0$$

$$\omega_0 R_1 C = \frac{R_1}{\omega_0 L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\text{mH} \cdot 1\mu\text{F}}} = 31622.777 \text{ s}^{-1}$$

$$f_0 = 5032.921\text{Hz}$$

Betrag:

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

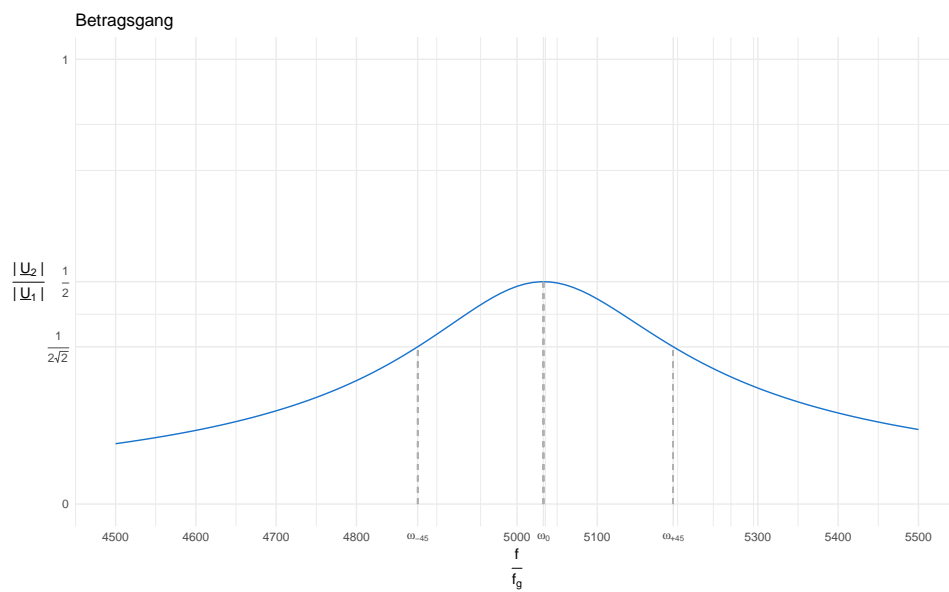
Betrag bei Resonanzfrequenz:

$$\begin{aligned} \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} (\omega = \omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} C - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_p}\right)^2 + R_1^2 \left(\frac{LC - \sqrt{LC}^2}{\sqrt{LC} L}\right)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_p}} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} \end{aligned}$$

Mit den Beispielwerten:

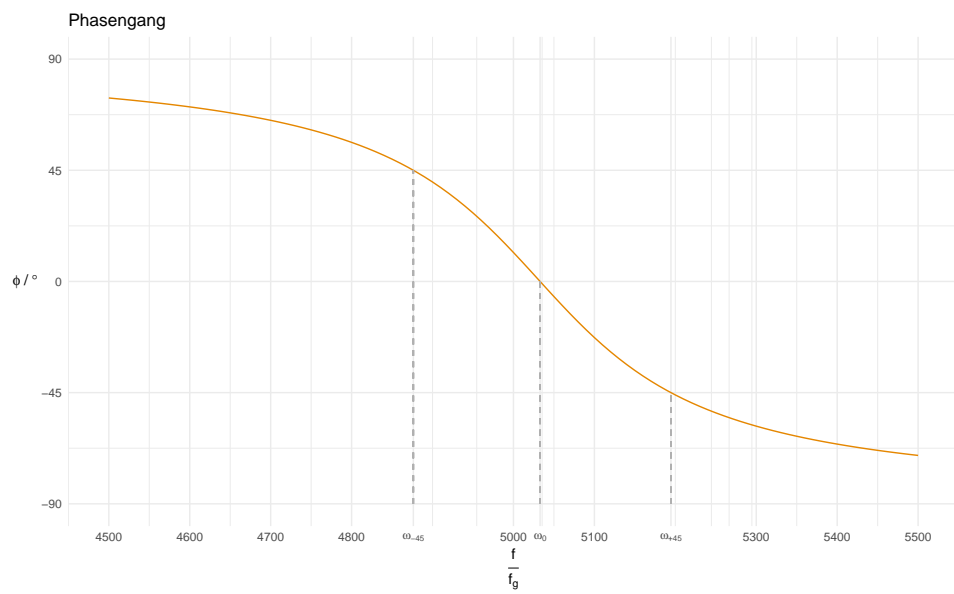
$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}(\omega = \omega_0) = \frac{1k\Omega}{1k\Omega + k\Omega} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}(\omega = \omega_{\pm 45}) = \frac{R_p}{R_1 + R_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$



Phase:

$$\phi = 0 - \arctan\left(\frac{\omega R_1 C - \frac{R_1}{\omega L}}{1 + \frac{R_1}{R_p}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p}}\right)$$



2 Versuchsaufgaben

Alle Messungen von Spannung, Frequenz sowie Phase erfolgten mithilfe eines digitalen Oszilloskops; alle Messungen von Bauteilkenngrößen mithilfe eines LCR-Meters.

2.1 RC-Tiefpass

$\frac{f}{f_g}$	$ \underline{U}_1 / \text{V}$	$ \underline{U}_2 / \text{V}$	$\phi / ^\circ$
0.01	1.02	1	-1.3
0.1	1.02	1	-5.6
0.2	1.02	0.98	-11.2
0.3	1.01	0.95	-16.7
0.4	1.01	0.92	-22.8
0.5	1.01	0.9	-27.4
0.8	1.01	0.79	-39.8
1	1.01	0.71	-45.7
2	0.99	0.45	-63
4	0.99	0.25	-76.1
7	0.99	0.15	-83
10	0.99	0.11	-86
30	0.99	0.036	-89
100	1.01	0.01	-99

Messwerte aus Aufgabe 4.1

Am verwendeten Tiefpassfilter wurden die folgenden Kenngrößen gemessen:

$$R = 6 \text{ k}\Omega, C = 4.4 \text{ nF}.$$

Daraus ließ sich die Grenzfrequenz rechnerisch ermitteln:

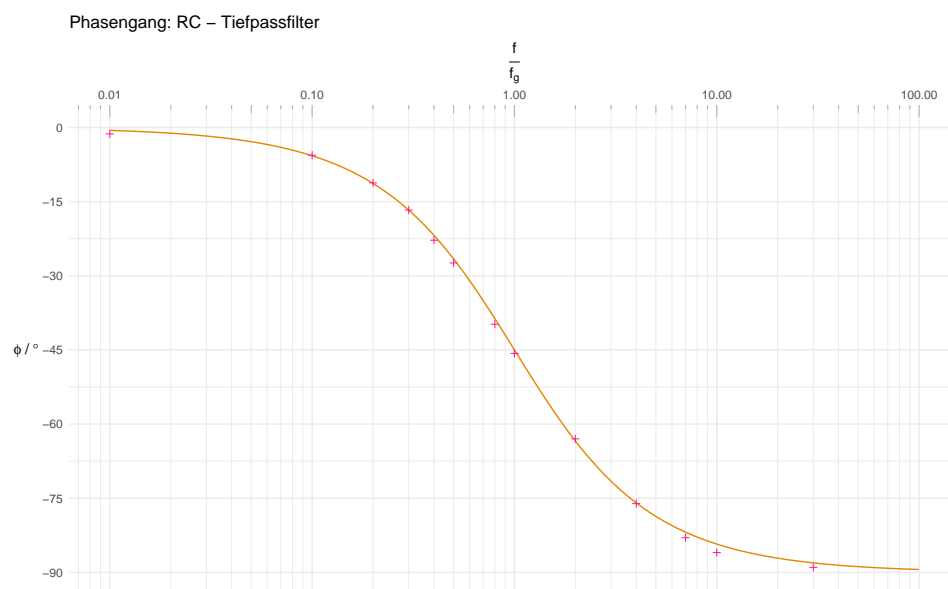
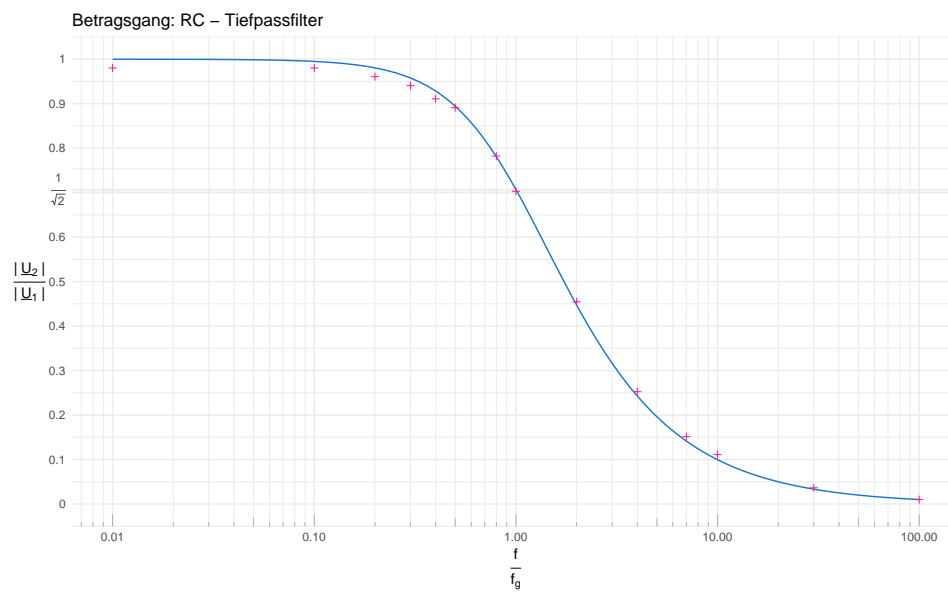
$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 6\text{k}\Omega \cdot 4.4\text{nF}} \approx 6.03 \text{ kHz}$$

Die Grenzfrequenz wurde dann auch durch Einstellen der Frequenz und gleichzeitiger Messung des Phasenwinkels zu -45° gemessen:

$$f_{g_{\text{gemessen}}} = 5.902 \text{ kHz}$$

Zur Bildung der Verhältnisse $\frac{f}{f_g}$ für die Messreihe wurde die berechnete Grenzfrequenz verwendet.

Die folgenden Diagramme zeigen die Messwerte (rosa) im Vergleich zum theoretischen Verlauf (blau/orange).



2.2 RL-Hochpass

$\frac{f}{f_g}$	$ \underline{U}_1 / V$	$ \underline{U}_2 / V$	$\phi / ^\circ$
0.01	1.01	0.0145	80
0.05	1.03	0.05	83
0.1	1.03	0.0975	81
0.2	1.03	0.201	76
0.4	1.03	0.378	66.8
0.7	1.03	0.58	53.5
1	1.03	0.7	44.5
2	1.01	0.92	25
4	1.01	1	11.1
7	1.02	1.01	3.4

Messwerte aus Aufgabe 4.2

Am verwendeten Hochpassfilter wurden die folgenden Kenngrößen gemessen:
 $R = 3.23 \text{ k}\Omega$, $L = 102.35 \text{ mH}$.

Daraus ließ sich die Grenzfrequenz rechnerisch ermitteln:

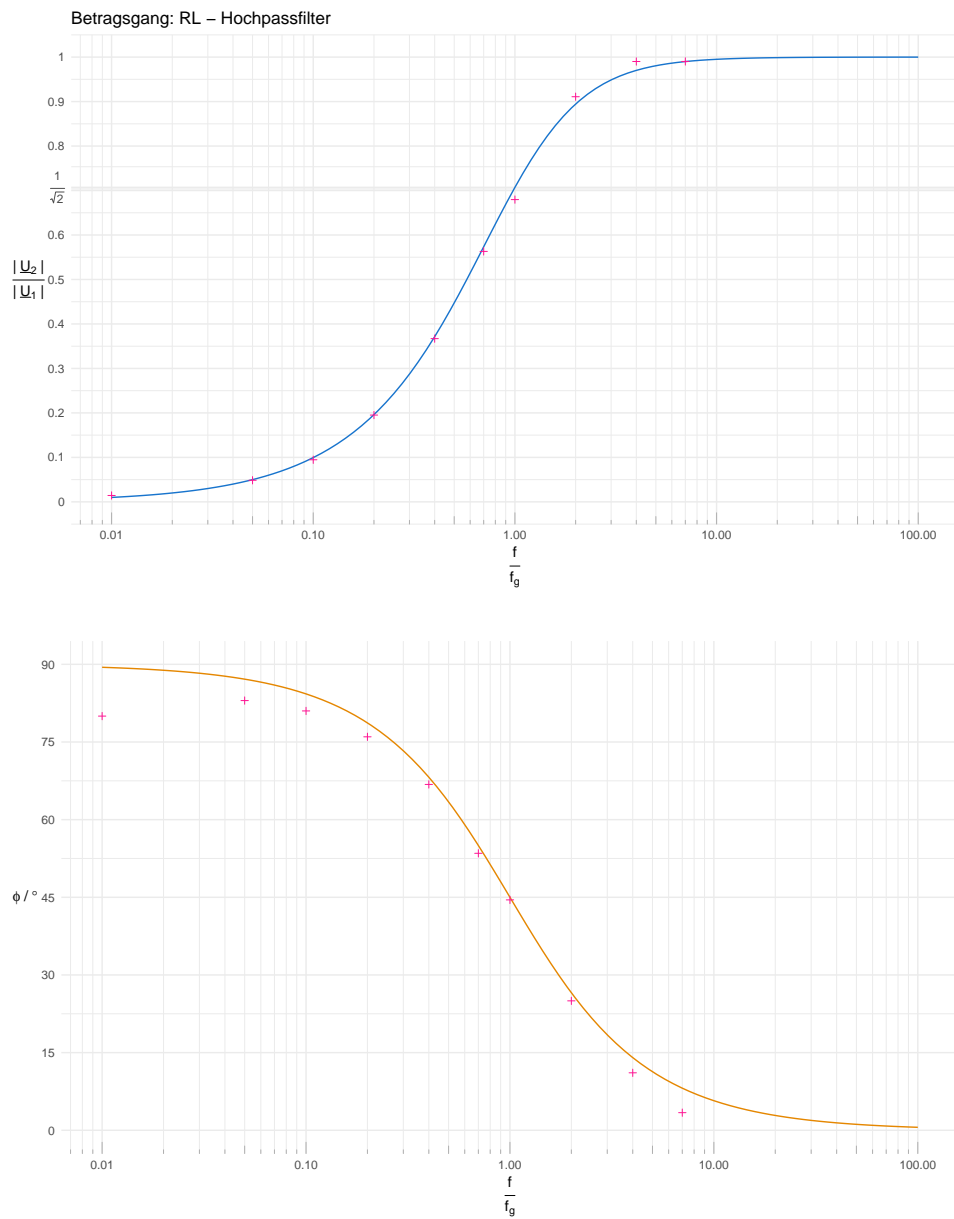
$$f_g = \frac{R}{2\pi L} = \frac{3.23 \text{ k}\Omega}{2\pi \cdot 102.35 \text{ mH}} \approx 5.02218 \text{ kHz}$$

Die Grenzfrequenz wurde dann auch durch Einstellen der Frequenz und gleichzeitiger Messung des Phasenwinkels zu 45° gemessen:

$$f_{g_{\text{gemessen}}} = 5.020 \text{ kHz}$$

Zur Bildung der Verhältnisse $\frac{f}{f_g}$ für die Messreihe wurde die gemessene Grenzfrequenz verwendet.

Die folgenden Diagramme zeigen die Messwerte (rosa) im Vergleich zum theoretischen Verlauf (blau/orange).



Bemerkung: Ab der Messung für $\frac{f}{f_g} = 10$ wurde diese ungenau. Es wurde ein negativer Winkel gemessen, was von den mit steigender Frequenz zunehmenden parasitären Eigenschaften (kapazitiv) der Anordnung zeugt.

2.3 RLC-Netzwerk

f/Hz	$ \underline{U}_1 /\text{V}$	$ \underline{U}_2 /\text{V}$	$\phi/^\circ$
3000	0.97	0.031	80
4000	0.97	0.066	74.8
4500	0.97	0.123	62.6
4700	0.96	0.179	52
4800	0.96	0.23	41
4900	0.98	0.265	27.3
5000	0.98	0.297	8
5036	0.98	0.302	0.3
5100	0.98	0.297	-13
5200	0.98	0.265	-31.2
5300	0.97	0.223	-44.8
5500	0.96	0.159	-59.9
5600	0.97	0.09	-76.1
5700	0.96	0.047	-82.6

Messwerte der Aufgabe 4.3

Das Amplitudenverhältnis sowie die Phase des RLC-Netzwerks wurden für Frequenzen im Intervall 3 kHz bis 5.7 kHz gemessen.

Die gemessenen Grenzfrequenzen sind:

$$f_{+45} = 5.304 \text{ kHz}$$

$$f_{-45} = 4.768 \text{ kHz}$$

Die daraus resultierende Bandbreite ist: (theoretisch: 318.31 Hz)

$$B_f = (5.304 - 4.768)\text{kHz} = 536 \text{ Hz}$$

Dies entspricht einer Abweichung von etwa -2.2% von den theoretischen Werten der Grenzfrequenzen (siehe 1.7)

Die gemessene Resonanzfrequenz ist: (theoretisch: 5.033 kHz)

$$f_0 = 5.036 \text{ kHz}$$

Die folgenden Diagramme zeigen die Messwerte (rosa) im Vergleich zum theoretischen Verlauf (blau/orange).

