

Das einphasige Ersatzschaltbild des Drehstromtransformators

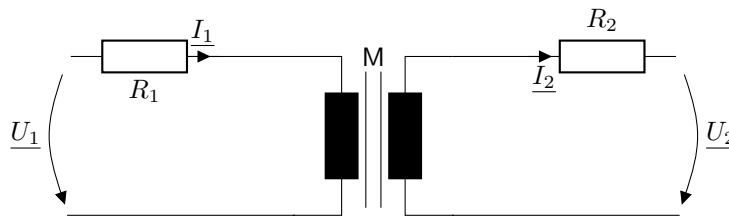
R.G., 2020

1 Problem

Physikalisch gesehen sind beide Seiten des Drehstromtransformators (Ober- und Unterseite) über einen *Eisenkern* miteinander gekoppelt. Für praktische Berechnungen eignet sich jedoch eine *galvanische Kopplung* deutlich besser.

2 Lösung

Man erhält das Modell des galvanisch gekoppelten DS-Transformators über eine mathematische Umformung der beiden Maschengleichungen und folgender Rekonstruktion des Schaltbildes aus den umgeformten Gleichungen.



Schritt 1: Aufstellen der beiden Maschengleichungen

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \quad (1)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot R_2 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega M \cdot \underline{I}_1 \quad (2)$$

Schritt 2: Erweiterung der Maschengleichung der Sekundärseite um das Übersetzungsverhältnis

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \quad (3)$$

$$\ddot{u} \cdot \underline{U}_2 = \ddot{u}^2 \cdot \frac{I_2}{\ddot{u}} \cdot R_2 + j\ddot{u}^2 \cdot \omega L_2 \cdot \frac{I_2}{\ddot{u}} + j\omega \ddot{u}^2 \cdot M \cdot \frac{I_1}{\ddot{u}} \quad (4)$$

Schritt 3: Anpassung des Terms mit der Gegeninduktivität in der ersten Gleichung an den der zweiten

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega \ddot{u} \cdot M \cdot \frac{I_2}{\ddot{u}} \quad (5)$$

$$\ddot{u} \cdot \underline{U}_2 = \ddot{u}^2 \cdot \frac{I_2}{\ddot{u}} \cdot R_2 + j\ddot{u}^2 \cdot \omega L_2 \cdot \frac{I_2}{\ddot{u}} + j\omega \ddot{u}^2 \cdot M \cdot \frac{I_1}{\ddot{u}} \quad (6)$$

Schritt 4: Einführung von Kurzschreibweisen (Strichgrößen)

$$\underline{\ddot{u}}^2 \cdot R = R', \quad \underline{\ddot{u}}^2 \cdot L = L', \quad \underline{\ddot{u}} \cdot M = M', \quad \frac{I}{\underline{\ddot{u}}} = I', \quad \underline{\ddot{u}} \cdot \underline{U} = \underline{U}'$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M' \cdot \underline{I}_2' \quad (7)$$

$$\underline{U}_2' = \underline{I}_2' \cdot R_2' + j\omega L_2' \cdot \underline{I}_2' + j\omega M \cdot \underline{I}_1 \quad (8)$$

Schritt 5: Einführung ergänzender Größen, um identische Ausdrücke in beiden Gleichungen zu erhalten

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 - j\omega M' \underline{I}_1 + j\omega M' \cdot \underline{I}_2' + j\omega M' \underline{I}_1 \quad (9)$$

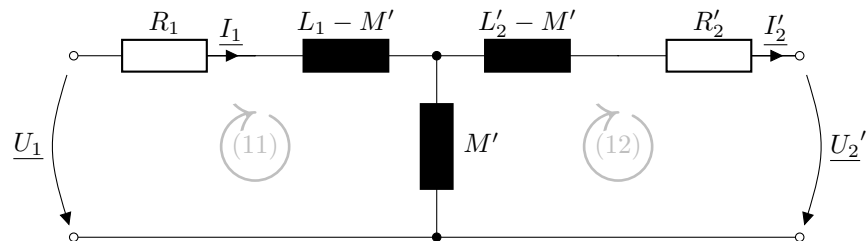
$$\underline{U}_2' = \underline{I}_2' \cdot R_2' + j\omega L_2' \cdot \underline{I}_2' - j\omega M' \underline{I}_2' + j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega M' \underline{I}_2' \quad (10)$$

Schritt 6: Zusammenfassen der Ausdrücke

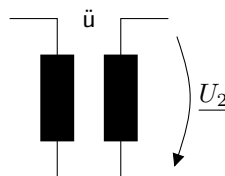
$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M') \cdot \underline{I}_1 + j\omega M'(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') \quad (11)$$

$$\underline{U}_2' = R_2' \cdot \underline{I}_2' + j\omega(L_2' - M') \cdot \underline{I}_2' + j\omega M'(\underline{I}_1 + \underline{I}_2') \quad (12)$$

Schritt 5: Konstruktion des Ersatzschaltbildes aus den beiden neuen Maschengleichungen (11) und (12)



Da wir die Sekundärgrößen (I_2, U_2, L_2, R_2) auf die Primärseite bezogen haben (I_2', U_2', L_2', R_2') , gehört jetzt auf die Sekundärseite noch ein *idealer Übertrager* mit $\underline{\ddot{u}}$, der uns dann die realen Sekundärgrößen liefert:



Das galvanische Ersatzschaltbild, das ja ein fiktives Modell ist, verhält sich nach außen hin (Eingangs- zu Ausgangsgrößen) genauso wie das induktive Ersatzschaltbild, also der reale Transformator.

Übung: Ersatzschaltbild Transformator

Gegeben sind die einphasigen Größen eines Drehstromtransformators
($S_n = 400 \text{ kVA}$, $\bar{u} = 10 \text{ kV} / 0,4 \text{ kV}$):

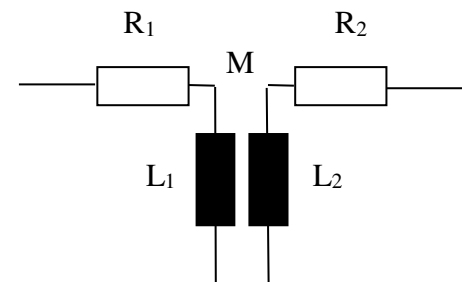
$$R_1 = 77 \text{ m}\Omega$$

$$L_1 = 4,52 \text{ H}$$

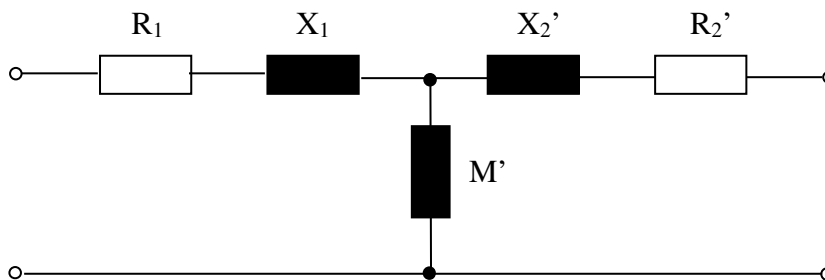
$$R_2 = 5,1 \text{ m}\Omega$$

$$L_2 = 7,25 \text{ mH}$$

$$M = 180 \text{ mH}$$



1. Geben Sie alle Größen für das galvanisch gekoppelte ESB an (Vernachlässigung von R_{Fe}).



Wie wird in diesem ESB das Übersetzungsverhältnis berücksichtigt?

2. Der Transformator wird mit $\underline{Z} = (350 + j 330) \text{ m}\Omega$ symmetrisch in jeder Phase belastet. Dabei soll die Spannung über dem Verbraucher den Nennwert haben. Ermitteln Sie alle Strom- und Spannungsgrößen und zeichnen Sie das vollständige Zeigerbild dieser Größen.

Verändern Sie \underline{Z} : $\underline{Z} = 350 \text{ m}\Omega$

ohmsche Belastung

$\underline{Z} = (350 - j 330) \text{ m}\Omega$

ohmsch-kapazitive Belastung

Wie groß ist die Eingangsspannung dann (Betrag und Winkel)?

3. Geben Sie für alle 3 Fälle die aus dem Netz entnommene Scheinleistung und die im Transformator entstehenden Wicklungsverluste an.

3 Übungen

1. Berechnung der Größen des galvanisch gekoppelten ESBs, Vernachlässigung von R_{Fe}

$$S_n = 400 \text{ kVA}, \tilde{u} = 10 \text{ kV} / 0.4 \text{ kV}$$

$$R_1 = 77 \text{ m}\Omega, R_2 = 5.1 \text{ m}\Omega$$

$$L_1 = 4.52 \text{ H}, L_2 = 7.25 \text{ mH}$$

$$M = 180 \text{ mH}$$

- (a) Widerstände

$$R_1 = R_1 = 77 \text{ m}\Omega$$

$$R'_2 = R_2 \cdot \tilde{u}^2 = 5.1 \text{ m}\Omega \cdot 25^2 = 3.188 \Omega$$

- (b) Selbstinduktivitäten

$$L_1 = L_1 = 4.52 \text{ H}$$

$$L'_2 = L_2 \cdot \tilde{u}^2 = 7.25 \text{ mH} \cdot 25^2 = 4.531 \text{ H}$$

- (c) Gegeninduktivität

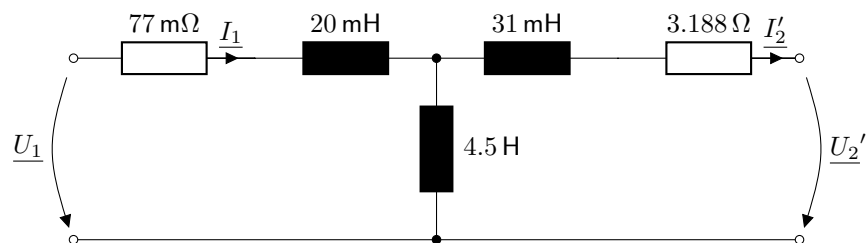
$$M' = M \cdot \tilde{u} = 180 \text{ mH} \cdot 25 = 4.5 \text{ H}$$

- (d) Als Reaktanzen:

$$X_1 = j\omega(L_1 - M') = j2\pi 50 \text{ Hz} \cdot (4.52 - 4.5) \text{ H} = j6.283 \Omega$$

$$X_2 = j\omega(L'_2 - M') = j2\pi 50 \text{ Hz} \cdot (4.531 - 4.5) \text{ H} = j9.739 \Omega$$

$$X'_n = j\omega M' = 1413.717 \Omega$$



Der ideale Übertrager ist nicht dargestellt.

2. Symmetrische Belastung des Transformators in jeder Phase

- (a) Belastung mit $\underline{Z} = 350 \text{ m}\Omega + j330 \text{ m}\Omega$

- (b) Spannung über Verbraucher (Sekundärseitig): 0.4 kV (Nennwert, s.o.)

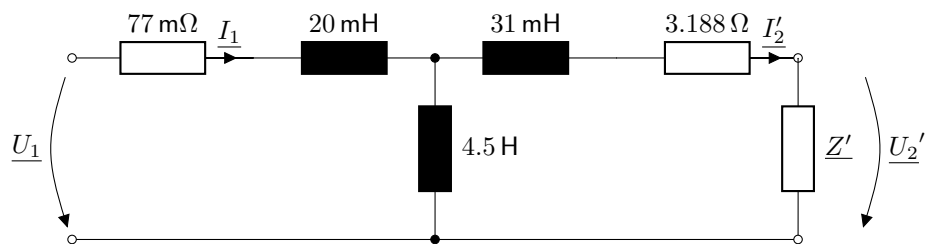
- (c) Ermittlung aller Strom- und Spannungsgrößen und deren Zeigerbild

- i. Wir befinden uns im *EINPHASIGEN* ESB. Die Spannung U'_2 ist die Strangspannung

$$U'_2 = \frac{10 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$

und die Spannung U_2 ist die Strangspannung

$$U_2 = \frac{0.4 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$



Belastung mit \underline{Z} an der Sekundärseite des idealen Übertragers (nicht eingezeichnet). Wandlung zu \underline{Z}' .

Wiederholung: Impedanzwandlung beim idealen Übertrager

- (a) Die Leistung auf beiden Seiten des Übertragers ist gleich.

$$S_1 = S_2$$

$$\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2$$

- (b) Es gilt

$$\ddot{u} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

- (c) sowie

$$\frac{U_1}{I_1} = \underline{Z}_1, \text{ Eingangsseitig gesehene Impedanz}$$

$$\frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_2, \text{ Ausgangsseitig gesehene Impedanz}$$

- (d) (a) in (b)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1 \cdot \ddot{u}}{I_2}$$

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} \cdot \ddot{u}^2$$

$$Z_1 = Z_2 \cdot \ddot{u}^2$$

Dadurch ist die eingangsseitige Impedanz Z'

$$Z' = Z \cdot \vec{u}^2 = (350 + j330)\text{m}\Omega \cdot 25^2$$

Da Spannung und Impedanz bekannt sind (Spannung wird einfach zum Winkel 0 definiert), kann der Strom I'_2 berechnet werden. Darüber lassen sich dann auch alle weiteren Ströme und Spannungen berechnen. Letztendlich kommt man auf eine Eingangsspannung von

$$\underline{U}_1 = 6.058 \text{ kV} \cdot e^{j1.7^\circ}$$

Bei rein ohmscher Belastung ($Z = 350 \text{ m}\Omega$) ist

$$\underline{U}_1 = 5.901 \text{ kV} \cdot e^{j4.12^\circ}$$

Bei rein induktiver Belastung ($Z = j330 \text{ m}\Omega$) ist

$$\underline{U}_1 = 6.250 \text{ kV} \cdot e^{-j0.85^\circ}$$

Bei ohmsch-kapazitiver Belastung ($Z = (350 - j330) \text{ m}\Omega$) ist

$$\underline{U}_1 = 5.640 \text{ kV} \cdot e^{j2.72^\circ}$$

3. Aus dem Netz entnommene Scheinleistung und Wirkleistungsverluste im Transformator

- (a) Die Spannung U_1 ist die Strangspannung. Die Leiter-Leiter-Spannung beträgt

$$U_{1LL} = \sqrt{3} \cdot 6.058 \text{ kV} = 10.49 \text{ kV}$$

- (b) Scheinleistung ($Z = (350 + j330)\text{m}\Omega$):

$$S_{ges} = 3 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{1LL} \cdot \underline{I}_1^*$$

$$S_{ges} = 406 \text{ kV A} \cdot e^{j52.7^\circ}$$

- (c) Wirkleistungsverluste im Transformator (Z' zählt nicht dazu!!)

$$P_{Vi} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 1215 \text{ W}$$

$$P_{Vges} = 3 \cdot P_{Vi} = 3644 \text{ W}$$

