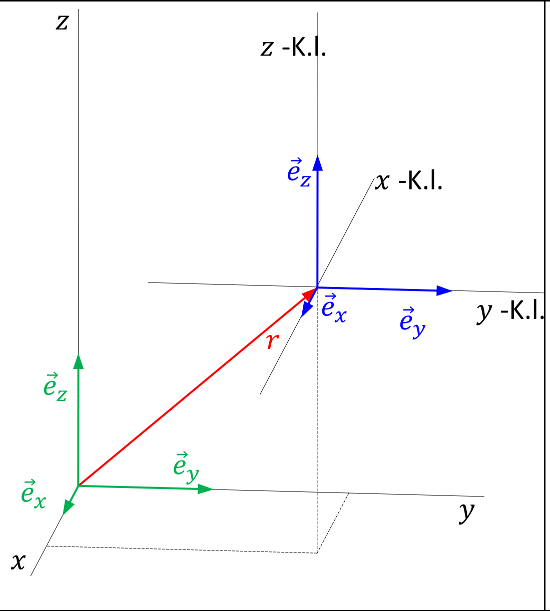
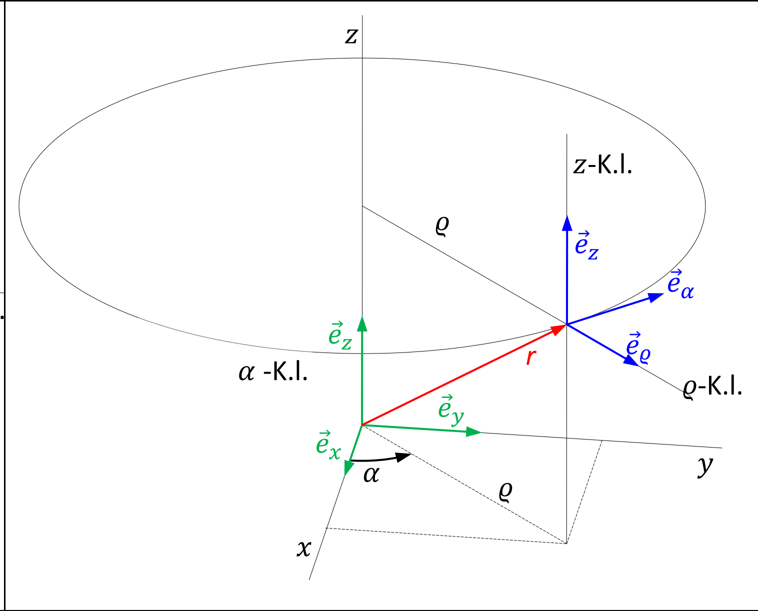
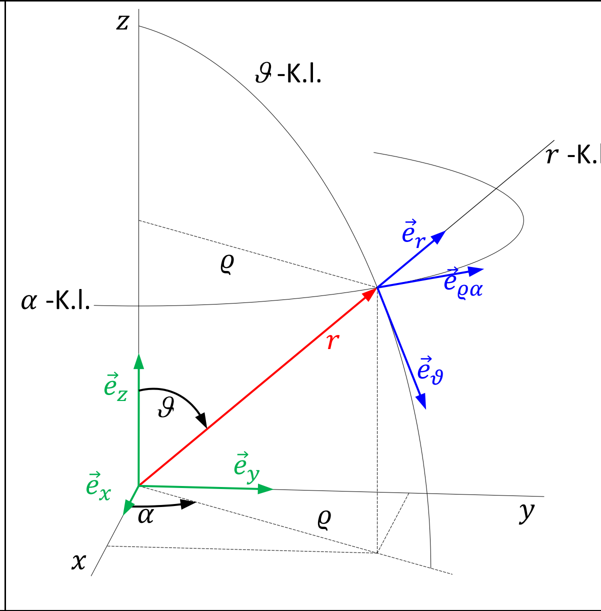
Vektoranalytische Ausdrücke in verschiedenen Koordinatensystemen

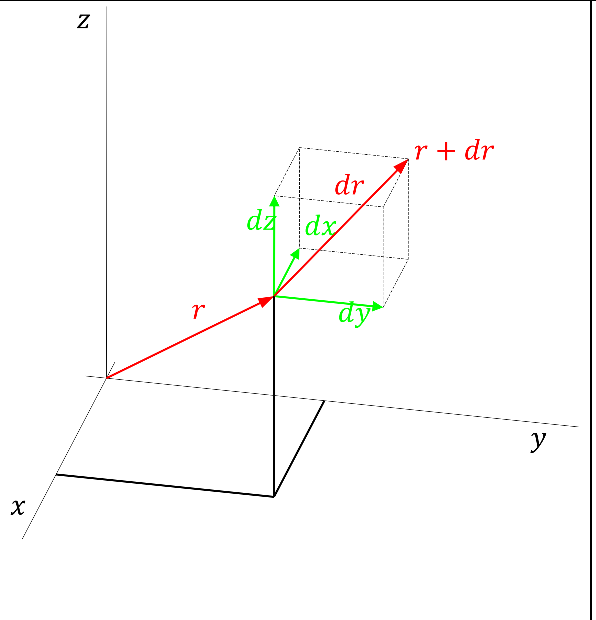
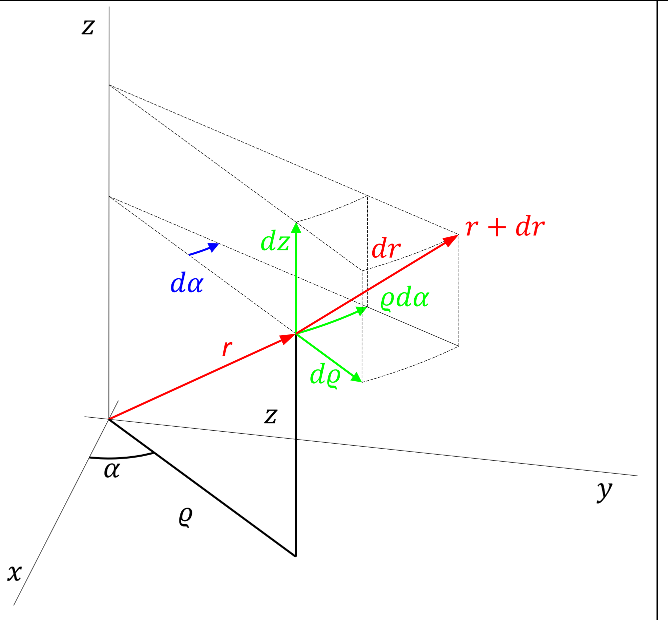
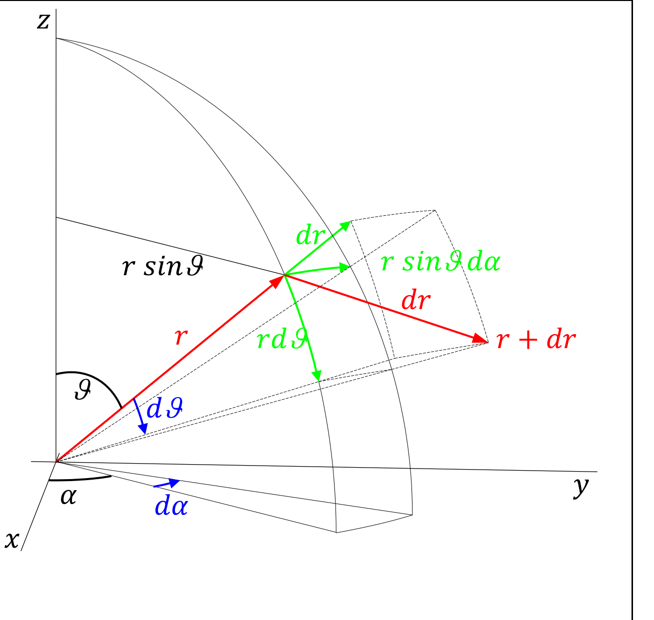
	Kartesische Koordinaten	**Zylinderkoordinaten**	**Kugelkoordinaten**
$\operatorname{grad}\varphi$	$\vec{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\vec{e}_\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}+\vec{e}_\alpha\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}+\vec{e}_\alpha\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$
$\operatorname{div}\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho A_\varrho)+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}$
$\operatorname{rot}\vec{A}$	$\vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$ $+\vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$\vec{e}_\varrho\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right)+\vec{e}_\alpha\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right)$ $+\vec{e}_z\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho A_\alpha)-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_\varrho}{\partial\alpha}\right)$	$\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\alpha\sin\vartheta)-\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right)$ $+\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha)\right)+\vec{e}_\alpha\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta)-\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)$
$\Delta\varphi$	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$ oder $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$
$\Delta\vec{A}$	$\Delta A_x+\Delta A_y+\Delta A_z$	$\vec{e}_\varrho\left(\Delta A_\varrho-\frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{A_\varrho}{\varrho^2}\right)$ $+\vec{e}_\alpha\left(\Delta A_\alpha+\frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial A_\varrho}{\partial\alpha}-\frac{A_\alpha}{\varrho^2}\right)+\vec{e}_z(\Delta A_z)$	$\vec{e}_r\left(\Delta A_r-\frac{2}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)-\frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}\right)$ $+\vec{e}_\vartheta\left(\Delta A_\vartheta-\frac{A_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}-\frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}\right)$ $+\vec{e}_\alpha\left(\Delta A_\alpha-\frac{A_\alpha}{r^2\sin^2\vartheta}+\frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha}+\frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right)$
$d\vec{s}$	$\vec{e}_x\,dx+\vec{e}_y\,dy+\vec{e}_z\,dz$	$\vec{e}_\varrho\,d\varrho+\vec{e}_\alpha\,\varrho d\alpha+\vec{e}_z\,dz$	$\vec{e}_r\,dr+\vec{e}_\vartheta\,rd\vartheta+\vec{e}_\alpha\,r\sin\vartheta\,d\alpha$

Transformation der Komponenten eines Vektors $\vec{A}$ in verschiedene Koordinatensysteme

System	Vektorkomponenten	Ausgedrückt mit kartesischen Koordinaten	Ausgedrückt mit Zylinderkoordinaten	Ausgedrückt mit Kugelkoordinaten
Kartesisch	A_x A_y A_z	A_x A_y A_z	$A_\varrho \cos\alpha - A_\alpha \sin\alpha$ $A_\varrho \sin\alpha - A_\alpha \cos\alpha$ A_z	$A_r \sin\vartheta \cos\alpha + A_\vartheta \cos\vartheta \cos\alpha - A_\alpha \sin\alpha$ $A_r \sin\vartheta \sin\alpha + A_\vartheta \cos\vartheta \sin\alpha + A_\alpha \sin\alpha$ $A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
Zylindrisch	A_ϱ A_α A_z	$A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha$ $-A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha$ A_z	A_ϱ A_α A_z	$A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$ A_α $A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
Sphärisch	A_r A_α A_ϑ	$A_x \sin\vartheta \cos\alpha + A_y \sin\vartheta \sin\alpha + A_z \cos\vartheta$ $-A_x \sin\alpha - A_y \cos\alpha$ $A_x \cos\vartheta \cos\alpha + A_y \cos\vartheta \sin\alpha - A_z \sin\vartheta$	$A_\varrho \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta$ A_α $A_\varrho \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta$	A_r A_α A_ϑ

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
		
$\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{z}$	$\varrho\cos\alpha$ $\varrho\sin\alpha$ z	$r\sin\vartheta\cos\alpha$ $r\sin\vartheta\sin\alpha$ $r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$ $\arctan(y/x)$ z	$\boldsymbol{\varrho}$ $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{z}$	$r\sin\vartheta$ α $r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\arctan(y/x)$ $\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right)$	$\sqrt{\varrho^2+z^2}$ α $\arctan(\varrho/z)$	$\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{\vartheta}$

K.l.: Koordinatenlinien (mit dazugehörigen Basisvektoren gezeichnet)

<table>
<tr><td>Elemente im kartesischen System</td><td>Elemente im Zylinderkoordinatensystem</td><td>Elemente im Kugelkoordinatensystem</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$</td><td>$d\vec{r} = d\varrho\vec{e}_\varrho + \varrho d\alpha\vec{e}_\alpha + dz\vec{e}_z$</td><td>$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r\sin\vartheta\, d\alpha\vec{e}_\alpha + rd\vartheta\vec{e}_\vartheta$</td></tr>
</table>

Formelsammlung zur Vektoralgebra und Vektoranalysis

Gradient

1. $\operatorname{grad}(\psi + \varphi) = \operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi$
2. $\operatorname{grad}(c\varphi) = c \operatorname{grad}\varphi \quad (c = \text{const.})$
3. $\operatorname{grad}(\psi\varphi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi \quad$ (Produktregel)
4. $\operatorname{grad}\left(\vec{A}\vec{B}\right) = \left(\vec{A}\operatorname{grad}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\operatorname{grad}\right)\vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{A}$
5. $\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
6. $\operatorname{grad}[\varphi(r)] = \varphi'(r)\vec{e}_r$
7. $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$
8. $\operatorname{grad}[\ln(r)] = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r}\vec{e}_r$

Divergenz

9. $\operatorname{div}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}$
10. $\operatorname{div}\left(c\vec{A}\right) = c \operatorname{div}\vec{A} \quad (c = \text{const.})$
11. $\operatorname{div}\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad}\varphi$
12. $\operatorname{div}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$
13. $\operatorname{div}\vec{e}_r = \frac{2}{r}$
14. $\operatorname{div}[\varphi(r)\vec{r}] = 3\varphi(r) + r\varphi'(r)$
15. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$
16. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$

Rotation

17. $\operatorname{rot}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{rot}\vec{B}$
18. $\operatorname{rot}\left(c\vec{A}\right) = c \operatorname{rot}\vec{A} \quad (c = \text{const.})$
19. $\operatorname{rot}\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi \operatorname{rot}\vec{A} + (\operatorname{grad}\varphi) \times \vec{A}$
20. $\operatorname{rot}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + \left(\vec{B}\operatorname{grad}\right)\vec{A} - (\vec{A}\operatorname{grad})\vec{B}$
21. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$ (Graßmann-Identität: $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A}$)
    (sogenannte BAC-CAB Formel)
22. $\operatorname{rot}[\varphi(r)\vec{r}] = 0$
23. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$
24. $\left(\vec{A}\operatorname{grad}\right)\vec{B} = \left(\vec{A}\operatorname{grad}B_x\right)\vec{e}_x + \left(\vec{A}\operatorname{grad}B_y\right)\vec{e}_y + \left(\vec{A}\operatorname{grad}B_z\right)\vec{e}_z$

Bildung der Rotation

in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varrho}\vec{e}_\varrho & \vec{e}_\alpha & \dfrac{1}{\varrho}\vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\varrho & \varrho F_\alpha & F_z \end{vmatrix}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\vartheta & r\sin\vartheta\,\vec{e}_\alpha \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ F_r & rF_\vartheta & r\sin\vartheta\,F_\alpha \end{vmatrix}$$