10.9 Aktiver Tiefpass 1. Ordnung

Aufgabe

Realisieren sie einen aktiven RC-Tiefpass mit einem rückgekoppelten Operationsverstärker.

(a) Skizzieren Sie die Schaltung

(b) geben sie die Gleichung für die Spannungsverstärkung V_u, den Phasengang und die Grenzfrequenz ω_{gr} an

(c) Dimensionieren Sie die Schaltung für: $f_{Gr} \approx 1,6kHz$ und $V_u = -21,3$ für $f \ll f_{Gr}$

(d) Skizzieren sie den logarithmischen Amplitudenfrequenzgang und Phasengang

Lösung

Schaltung Die Schaltung ist gemäß Abbildung 1 aufzubauen

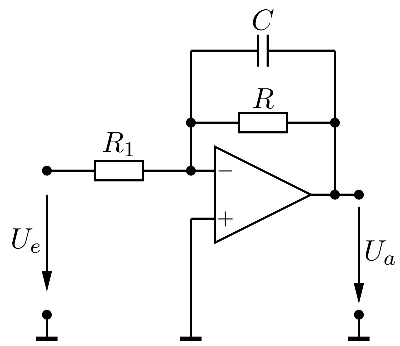

Abbildung 1: Aktiver Tiefpass 1. Ordnung

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{V} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_2}} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R} + j\omega C} = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{1}$$

Aus Gleichung 1 lassen sich die Formeln für den Amplitudengang,

$$|\underline{V}| = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{2}$$

den Phasengang (die Grundphasendrehung des OPVs ($\varphi_{OPV} = -180°$) wird hier nicht betrachtet)

$$\varphi = -\arctan(\omega RC) \tag{3}$$

und die Grenzfrequenz

$$\omega_{gr} = \frac{1}{RC} \tag{4}$$

ablesen.

Dimensionierung Um die geforderte Verstärkung einzustellen, muss man einen Widerstandswert festlegen und daraus den zweiten berechnen. Da vom Widerstand R sowohl die Verstärkung als auch die Grenzfrequenz abhängen, bietet es sich an diesen fest zu legen: mit $R = 100k\Omega$ und:

$$V = -21,3 = \frac{R}{R_1} \tag{5}$$

folgt:

$$R_1 = \frac{R}{V} = \frac{100k\Omega}{21,3} \approx 4,7k\Omega \tag{6}$$

analog folgt aus:

$$\omega_{gr} = 2\pi f_{gr} = \frac{1}{RC} \tag{7}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_{gr} R} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,6kHz \cdot 100k\Omega} = 1nF \tag{8}$$

Bode-Diagramm Zum Skizzieren von Amplitudenfrequenzgang und Phasengang ist es sinnvoll typische Funktionswerte zu berechnen. Außerdem macht es Sinn für die Berechnung einen sogenannten *normierten Frequenzgang* zu Nutzen:

$$\underline{V} = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{gr}}} \tag{9}$$

$$|\underline{V}| = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{gr}}\right)^2}} \tag{10}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{gr}}\right) \tag{11}$$

Mit den so gefundenen Gleichungen lassen sich einfach typische Funktionswerte ermitteln:

$$\left|\underline{V}\left(\omega=0\right)\right| = \frac{R}{R_1} = 21,3 \hat{=} 26,6dB \tag{12}$$

$$\left|\underline{V}\left(\omega=\omega_{gr}\right)\right| = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{=} 26,6dB - 3dB = 23,3dB \tag{13}$$

$$\left|\underline{V}\left(\omega\rightarrow\infty\right)\right| = 0 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Bei der Berechnung der Phase wird wie zuvor die Grundphasendrehung des OPVs nicht betrachtet:

$$\varphi\left(\omega=0\right) = -\arctan(0) = 0° \tag{16}$$

$$\varphi\left(\omega=\frac{\omega_{gr}}{10}\right) = -\arctan(0,1) = -6° \tag{17}$$

$$\varphi\left(\omega=\omega_{gr}\right) = -\arctan(1) = -45° \tag{18}$$

$$\varphi\left(\omega=10\omega_{gr}\right) = -\arctan(10) = -84° \tag{19}$$

$$\varphi\left(\omega\rightarrow\infty\right) = -\arctan(\infty) = -90° \tag{20}$$

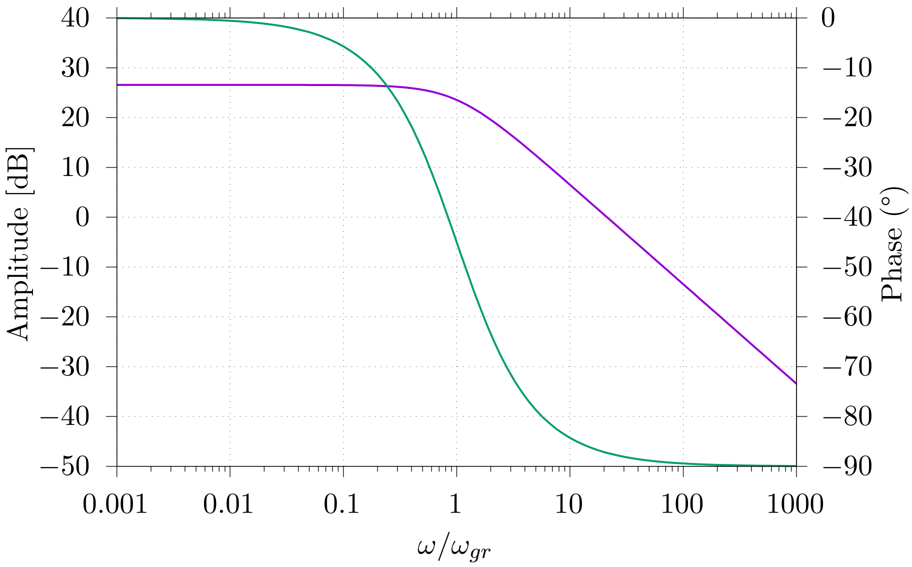

Abbildung 2: Normierter Amplituden- und Phasenfrequenzgang

10.10 Bandpass 2. Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung

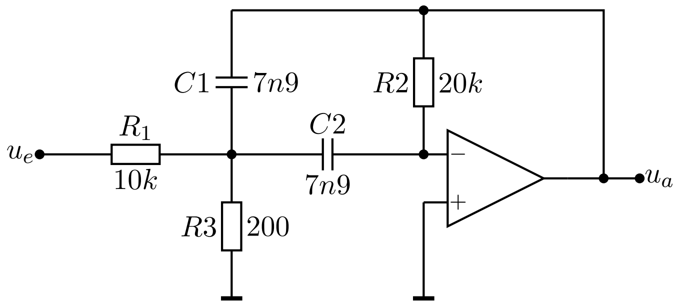

Abbildung 1: Bandpass 2. Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung

Aufgabe

Gegeben ist die Schaltung eines Bandpasses 2. Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung (Abbildung 1).

(a) Leiten Sie die Gleichung für die komplexe Verstärkung her. (Nutzen Sie hierzu die Knotenspannungsanalyse)

(b) Leiten Sie die Gleichung für die Resonanzfrequenz her.

Wie groß ist die Verstärkung bei Resonanzfrequenz?

(c) Normieren sie die Gleichung für die Verstärkung auf $\frac{\omega}{\omega_0}$ und berechnen Sie die Bandbreite und die Güte.

Anmerkung: Bringen sie die Gleichung für die komplexe Verstärkung in folgende Form:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{a \cdot pC}{1 + b \cdot pC + c \cdot p^2C^2} \qquad \text{mit } p = j\omega \tag{1}$$

Lösung

Herleitung der komplexen Verstärkung Aufstellen der Knotengleichungen K1 und K2:

$$\begin{aligned} \text{K1:} \quad & (u_3 - u_e)G_1 + u_3G_3 + (u_3 - u_n)pC_2 + (u_3 - u_a)pC_1 &= 0 \quad (2)\\ \text{K2:} \quad & (u_n - u_3)pC_2 + (u_n - u_a)G_2 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

mit $u_n = 0$: wird daraus:

$$\begin{aligned} \text{K1:} \quad & u_3(G_1 + G_3 + pC_2 + pC_1) - u_eG_1 - u_apC_1 &= 0 \quad (4)\\ \text{K2:} \quad & -u_3pC_2 - u_aG_2 &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

durch umstellen von K2 erhält man u_3:

$$\text{K2:} \; -u_a \frac{G_2}{pC_2} = u_3 \tag{6}$$

was man in K1 einsetzen kann:

$$\text{K1:} \; -u_a \frac{G_2}{pC_2}(G_1 + G_3 + pC_2 + pC_1) - u_e G_1 - u_a pC_1 = 0 \tag{7}$$

mit $C_1 = C_2 = C$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$-u_a \left[\frac{G_2}{pC}(G_1 + G_3 + 2pC) + pC\right] = u_e G_1 \tag{8}$$

dies Gleichung lässt sich zum Gesuchten Verhältnis $\frac{u_a}{u_e}$ umstellen:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{G_1}{\frac{G_2}{pC}(G_1 + G_3 + 2pC) + pC} \tag{9}$$

$$= -\frac{G_1 pC}{G_2(G_1 + G_3 + 2pC) + p^2C^2} \tag{10}$$

$$= -\frac{G_1 pC}{G_1G_2 + G_2G_3 + 2pCG_2 + p^2C^2} \tag{11}$$

Durch Erweitern mit $R_1R_2R_3$ kann diese Gleichung in die gesuchte Form gebracht werden:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2R_3pC}{R_3 + R_1 + 2pCR_1R_3 + R_1R_2R_3p^2C^2} \tag{12}$$

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{\frac{R_2R_3}{R_1+R_3}pC}{1 + 2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC + \frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}p^2C^2} \tag{13}$$

durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 1 erhält man:

$$a = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_3} \qquad b = 2\frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} \qquad c = \frac{R_1R_2R_3}{R_1 + R_3} \tag{14}$$

Herleitung der Gleichung der Resonanzfrequenz, Berechnung der Verstärkung bei Resonanzfrequenz Für die Resonanzfrequenz gilt: $\frac{u_a}{u_e}$ = reell! Das ist der Fall wenn

Gleichung 15 erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}p^2C^2 &= 0 && (15)\\
1-\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}\omega_0^2C^2 &= 0 && (16)\\
\omega_0^2C^2 &= \frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3} && (17)\\
\omega_0^2 &= \frac{1}{C^2}\frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3} && (18)\\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{C^2}\frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3}} && (19)\\
\omega_0 &= \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3}} && (20)\\
f_0 &= \frac{1}{2\pi C}\sqrt{\frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3}} \approx 10kHz && (21)
\end{aligned}
$$

Die Verstärkung bei Resonanzfrequenz ergibt sich, wenn man die Resonanzbedingung (Gleichung 15) in die zuvor berechnete Verstärkung der Schaltung (Gleichung 13) einsetzt:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_a}{u_e} &= -\frac{\frac{R_2R_3}{R_1+R_3}pC}{2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC} && (22)\\
\frac{u_a}{u_e} &= -\frac{R_2}{2R_1} = -1 && (23)
\end{aligned}
$$

Normierung der Gleichung auf die Resonanzfrequenz, Berechnung von Bandbreite und Güte Für diese Aufgabe ist die Gleichung für die Verstärkung in die Form:

$$\frac{u_a}{u_e} = -A_0\frac{a\cdot pC}{1+b\cdot pC+c\cdot p^2C^2} \tag{24}$$

zu bringen, wobei A_0 die Verstärkung bei Resonanzfrequenz ist. Gleichung 13 wird damit zu:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC}{1+2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC+\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}p^2C^2} \tag{25}$$

mit Gleichung 18:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C^2}\frac{R_1+R_3}{R_1R_2R_3} \tag{26}$$

erhält man:

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC}{1+2\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}pC+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad (27)$$

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{\frac{2}{R_2C}\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}pC^2}{1+\frac{2}{R_2C}\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_3}pC^2+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad (28)$$

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{\frac{2}{R_2C}\frac{1}{\omega_0^2}p}{1+\frac{2}{R_2C}\frac{1}{\omega_0^2}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad (29)$$

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}p}{1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad (30)$$

mit $p = j\omega$ folgt,

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}j\omega}{1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}j\omega-\frac{1}{\omega_0^2}\omega^2} \quad (31)$$

woraus durch Einführung einer normierten Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_2}{2R_1}\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}j\Omega}{1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}j\Omega-\Omega^2} \quad (32)$$

wird, woraus sich die Bandbreite $\Delta\omega$ und die Güte $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ ablesen lassen:

$$\Delta\omega = \frac{2}{R_2C} = 2\pi\Delta f \quad (33)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\pi R_2C} \approx 2kHz \quad (34)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\frac{2}{R_2C}} = \frac{1}{2}R_2C\omega_0 = \pi R_2Cf_0 \approx 5 \quad (35)$$

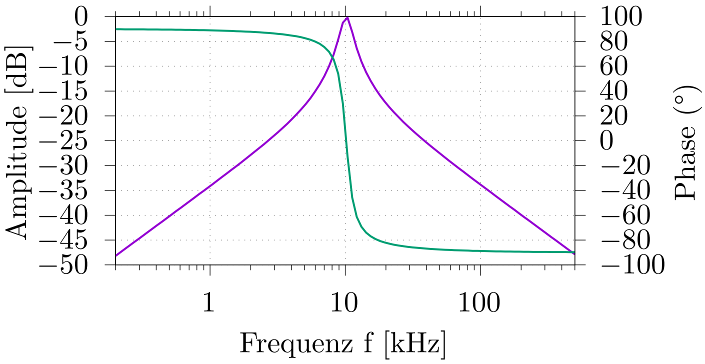

Abbildung 2: Amplituden- und Phasenfrequenzgang des Bandpass 2. Ordnung

10.11 Dimensionierung eines Dreieck-Rechteck-Generators

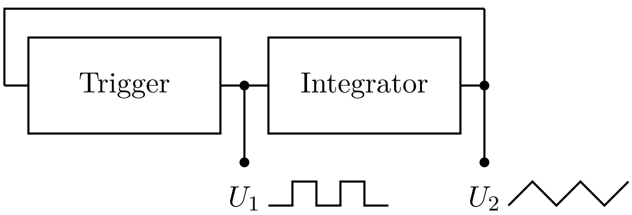

Abbildung 1: Dreieck-Rechteck-Generator

Aufgaben

(a) Entwickeln Sie die Schaltung unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Ausgangsspannungen sollen gleichanteilsfrei sein
- Die Rechteckspannung soll durch zwei Z-Dioden ($U_Z = 6V$, $U_F = 0,6V$, $I_D = 0,5mA$) begrenzt werden und unabhängig von U_S sein

(b) Dimensionieren Sie die Schaltung für:

- $\hat{U}_2 = 10V$, $f_0 = 1kHz$, $U_S = \pm 15V$
- Der Ausgangsstrom der verwendeten OPVs soll $\leq 2mA$ sein
- Der Ladestrom des Integrators ist auf $1mA$ zu begrenzen

(c) Wie lässt sich die Frequenz möglichst einfach variieren?

Lösung

Entwicklung der Schaltung Durch die Aufgabenstellung quasi vorgegeben, besteht die Schaltung aus zwei Blöcken:

Trigger Dieser wird realisiert durch einen *nichtinvertierenden Schmitt-Trigger*, welcher die Rechteckspannung liefert

Interator Dieser wird durch einen *invertierenden Integrator* realisiert und liefert die Dreieckspannung

Zusätzlich zu diesem grundlegenden Schaltungskonzept, gab es noch ein paar zusätzliche Vorgaben:

Begrenzung der Rechteckspannung dies soll wie in der Aufgabenstellung mit *zwei Z-Dioden* geschehen

Begrenzung des Ausgangsstromes der OPVs Dies geschieht durch einen *zusätzlichen Ausgangswiderstand* R_V am Ausgang des Triggers

Die resultierende Schaltung ist in Abbildung 2 abgebildet.

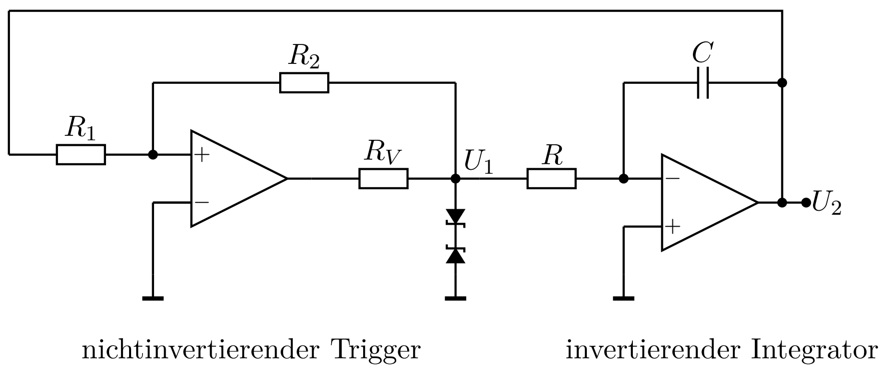

Abbildung 2: Dreieck-Rechteck-Generator Schaltung

Dimensionierung der Schaltung Die einzelnen Bestandteile der Schaltung können fast unabhängig voneinander dimensioniert werden:

Trigger Für die Dimensionierung des Triggers ist zu beachten:

- U_2 ist die Eingangsspannung des Triggers
- U_1 ist die durch die Z-Dioden begrenzte Ausgangsspannung des Triggers mit

$$|U_1| = U_Z + U_F = 6V + 0,6V = 6,6V \tag{1}$$

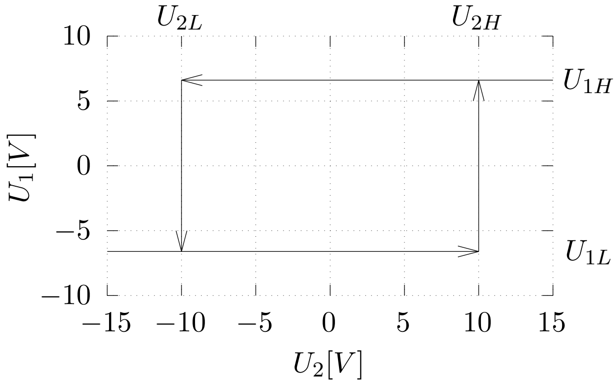

Abbildung 3: Schaltpunkte Trigger

Die Schaltschwellen des Triggers sind dabei wie folgt durch die Aufgabenstellung gegeben (vergleiche Schaltverhalten in Abbildung 3):

$$U_{1L} = -6,6V \quad U_{1H} = 6,6V$$
$$U_{2L} = -10V \quad U_{2H} = 10V$$

Durch die bekannten Schaltfunktionen des Triggers lässt sich das Widerstandsverhältnis von $\frac{R_1}{R_2}$ bestimmen:

$$U_{2L} = -\frac{R_1}{R_2}U_{1H} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = -\frac{U_{2L}}{U_{1H}} = -\frac{-10V}{6,6V} = 1,515 \tag{2}$$

Zur Bestimmung der genauen Widerstandswerte lässt sich der Knoten der Ausgangsspannung U_1 heranziehen:

$$I_{R_{V_{max}}} = I_D + I_{int} + I_{R_2} \tag{3}$$
$$I_{R_{2_{max}}} = I_{R_V} - I_D - I_{int} \tag{4}$$
$$= 2mA - 0,5mA - 1mA = 0,5mA \tag{5}$$

Der Eingangsstrom des Operationsverstärkers kann mit $I_P = 0$ angenommen werden. Damit fließt I_{R_2} auch durch R_1. I_{R_2} wird maximal bei der maximalen Spannungsdifferenz $U_1 - U_2$. Der Gesamtwiderstandswert von R_{ges} lässt sich daraus wie folgt berechnen:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 = \frac{U_{1H} - U_{2L}}{I_{R_2}} = \frac{6,6V - (-10V)}{0,5mA} = \frac{16,6V}{0,5mA} = 33,2k\Omega \tag{6}$$

Mit dem aus Gleichung 2 bekannten Widerstandsverhältnis lassen sich R_1 und R_2 berechnen:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 = R_1 + 1,515 \cdot R_1 = 2,515 \cdot R_1 \tag{7}$$
$$R_1 = \frac{33,2k\Omega}{2.515} = 13,2k\Omega \tag{8}$$
$$R_2 = R_{ges} - R_1 = 33,2k\Omega - 13,2k\Omega = 20k\Omega \tag{9}$$

Ausgangsstrombegrenzung OPV Der Widerstand R_V lässt sich aus der maximalen Ausgangsspannung des OPVs (Annahme: $\pm 15V$), der gegebenen Amplitude von U_1 und dem spezifizierten maximalen Strom wie folgt berechnen:

$$R_V = \frac{U_{R_V}}{I_{R_{V_{max}}}} = \frac{U_{out_{max}} - U_1}{I_{R_{V_{max}}}} = \frac{15V - 6,6V}{2mA} = \frac{8,4V}{2mA} = 4,2k\Omega \tag{10}$$

Integrator Der Integrator soll einen konstanten Ladestrom von $I_{int} = 1mA$ haben. Mit der Annahme eines idealen Operationsverstärkers, lässt sich damit R wie folgt berechnen:

$$R = \frac{U_R}{I_{int}} = \frac{U_1}{I_{int}} = \frac{6,6V}{1mA} = 6,6k\Omega \tag{11}$$

Außerdem gilt für den Integrator:

$$U_2(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \tag{12}$$

was sich durch den konstanten Integrationsstrom $I_{int} = 1mA$ wie folgt vereinfacht:

$$U_2(t) = U_2(0) + \frac{1}{C} \cdot I_{int} \cdot t \tag{13}$$

$$\Delta U_2 = \frac{1}{C} \cdot I_{int} \cdot \Delta t \tag{14}$$

$$C = \frac{i \cdot \Delta t}{\Delta U_2} \tag{15}$$

Damit der Trigger die geforderte Ausgabefrequenz $f = 1kHz$ hat, muss der Integrator jeweils in einer halben Periodendauer ($\Delta t = 0,5ms$) von einer Schaltschwelle zur anderen „umgeladen“ werden ($\Delta U = 20V$).

$$C = \frac{1mA \cdot 0,5ms}{20V} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{20}F = 0,025 \cdot 10^{-6}F = 25 \cdot 10^{-9}F = 25nF \tag{16}$$

Variation der Frequenz Prinzipiell lässt sich die Frequenz entweder durch die Änderung der Integrationszeitkonstante ($R \cdot C$) des Integrators oder durch die Anpassung der Schaltschwellen des Triggers ändern.

Damit der Integrationsstrom bei der ersten Variante wie gefordert $I_{int} = 1mA$ konstant bleibt wäre der Kodensator C anzupassen. Eine ANpassung von R wäre allerdings Schaltungstechnisch einfacher.

Eine Anpassung der Schaltschwellen des Triggers hätte automatisch zusätzlich eine Änderung des Ausgangspegels von U_2 zur Folge und wäre deshalb nicht optimal.