



SIGNALE UND SYSTEME

Multiplikation von Zeitsignalen

Studien- und Versuchsaufgaben

Autoren: Richard GRÜNERT
Tim CORLEIS

19.11.2019

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

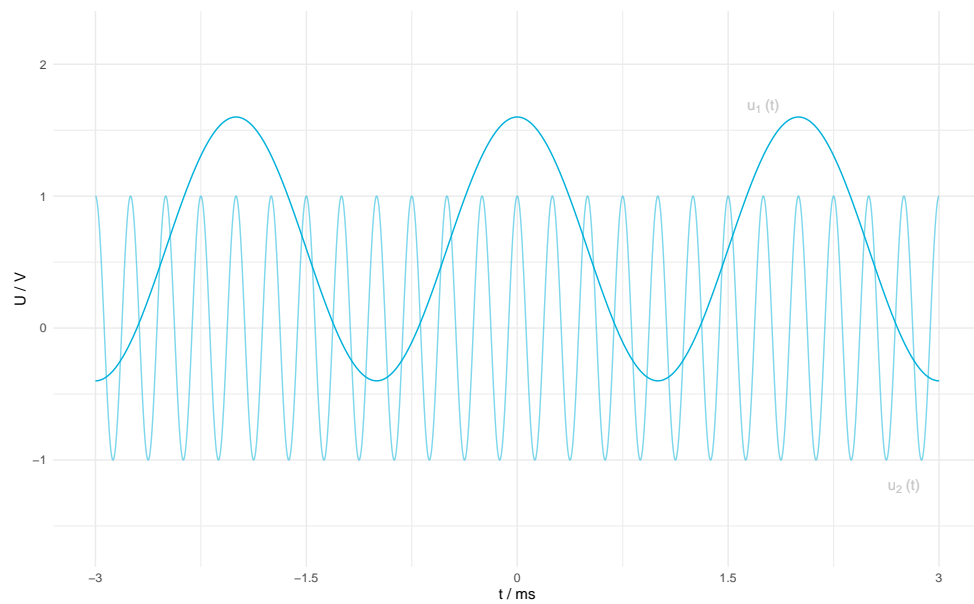


Abbildung 1: $u_1(t)$ und $u_2(t)$

$$\begin{aligned} u_3(t) &= u_1(t) \cdot u_2(t) \\ &= (U_0 + U_1 \cos(\omega_1 t)) \cdot U_2 \cos(\omega_2 t) \\ &= U_0 U_2 \cos(\omega_2 t) + U_1 U_2 [\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

mithilfe der Gleichung aus "theoretische Grundlagen" ergibt sich

$$u_3(t) = U_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{U_1 U_2}{2} \cdot [\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t)]$$

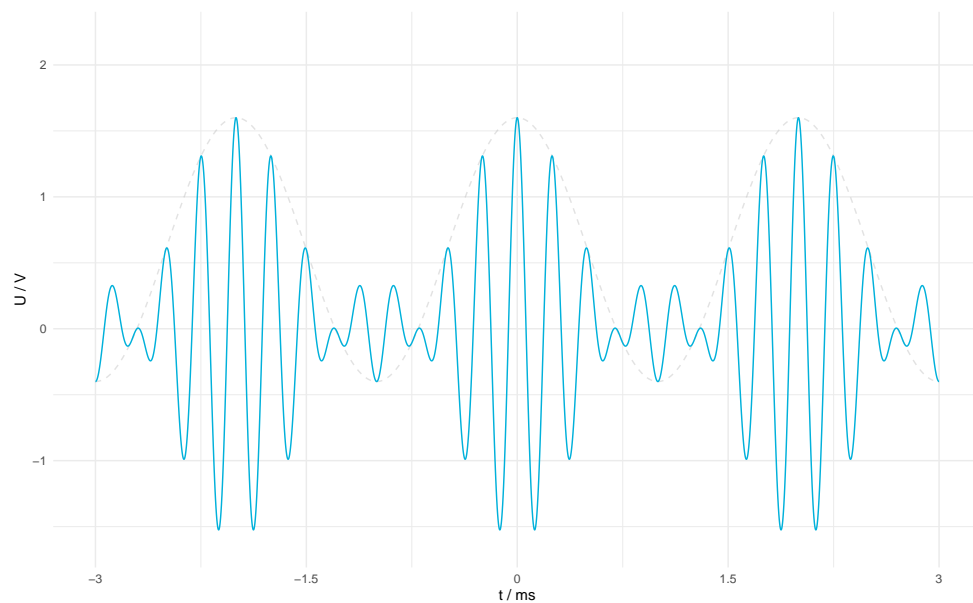


Abbildung 2: $u_3(t)$; $u_1(t)$ ist als einhüllende Funktion erkennbar

Fouriertransformation:

$$U_3(\omega) = U_0 U_2 \cdot \mathcal{F}\{\cos(\omega_2 t)\} + \frac{U_1 U_2}{2} \cdot [\mathcal{F}\{\cos((\omega_1 - \omega_2)t)\} + \mathcal{F}\{\cos((\omega_1 + \omega_2)t)\}]$$

mit

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}U_3(\omega) = & \frac{U_0 U_2}{2} \cdot [\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)] \\& + \frac{U_1 U_2}{4} \cdot [\delta(\omega - (\omega_1 - \omega_2)) \\& \quad + \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2) \\& \quad + \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2)) \\& \quad + \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2)]\end{aligned}$$

mit den vorgegebenen Werten:

$$\begin{aligned}U_3(f) = & 0.3 \cdot [\delta(f - 4\text{kHz}) + \delta(f + 4\text{kHz})] \\& + \frac{1}{4} \cdot [\delta(f + 3.5\text{kHz}) \\& \quad + \delta(f - 3.5\text{kHz}) \\& \quad + \delta(\omega - 4.5\text{kHz}) \\& \quad + \delta(\omega + 4.5\text{kHz})]\end{aligned}$$

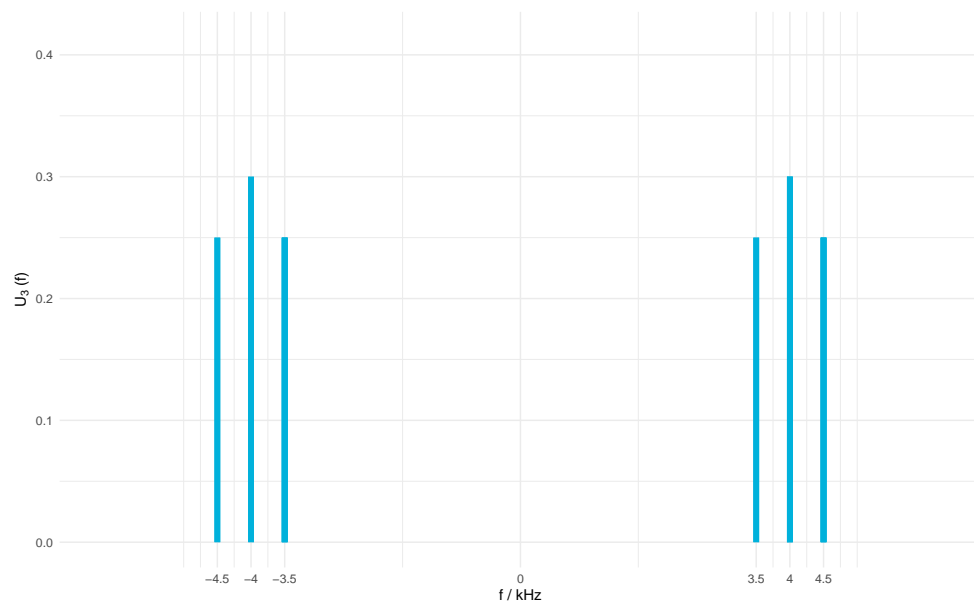


Abbildung 3: Amplitudendichtespektrum von $u_3(t)$

1.2

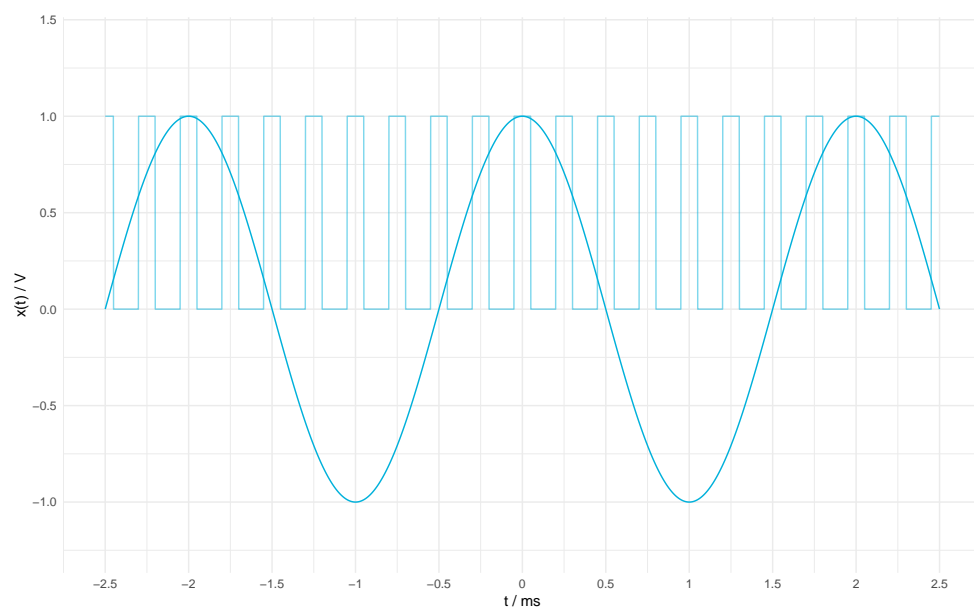


Abbildung 4: $u_1(t)$ und $u_2(t)$

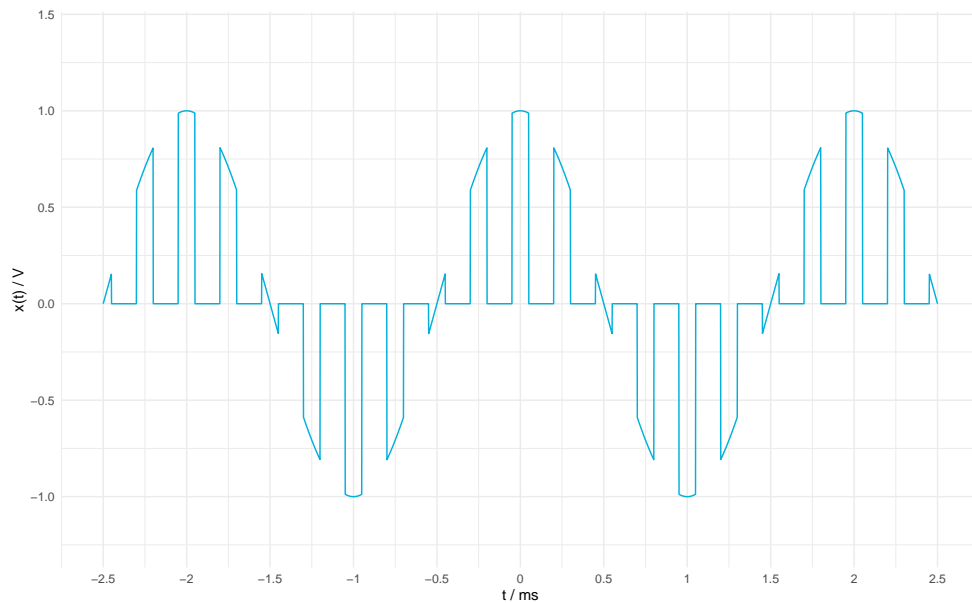


Abbildung 5: $u_3(t)$ aus der Multiplikation von $u_1(t)$ mit dem Träger $u_2(t)$

Fouriertransformation:

Das Trägersignal $u_2(t)$ ist eine *periodische* Rechteckfolge und hat demnach ein *diskretes* Spektrum, dessen Einhüllende die Si-Funktion ist (Abbildung 6).

Die multiplikative Verknüpfung der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ im Zeitbereich lässt sich in eine Faltung im Frequenzbereich überführen. Da dies analytisch nicht so einfach ist, wird hier auf eine grafische Lösung zurückgegriffen. Dazu die Vorüberlegung:

$$X_3(f) = X_1(f) * X_2(f)$$

$$X_2(f) = A \cdot \delta(f - f_0) \quad \text{---} \bullet \quad x_2(t) = Ae^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$$

(Verschiebungssatz)

$$X_3(f) = X_1(f) * A \cdot \delta(f - f_0) = A \cdot X_1(f - f_0)$$

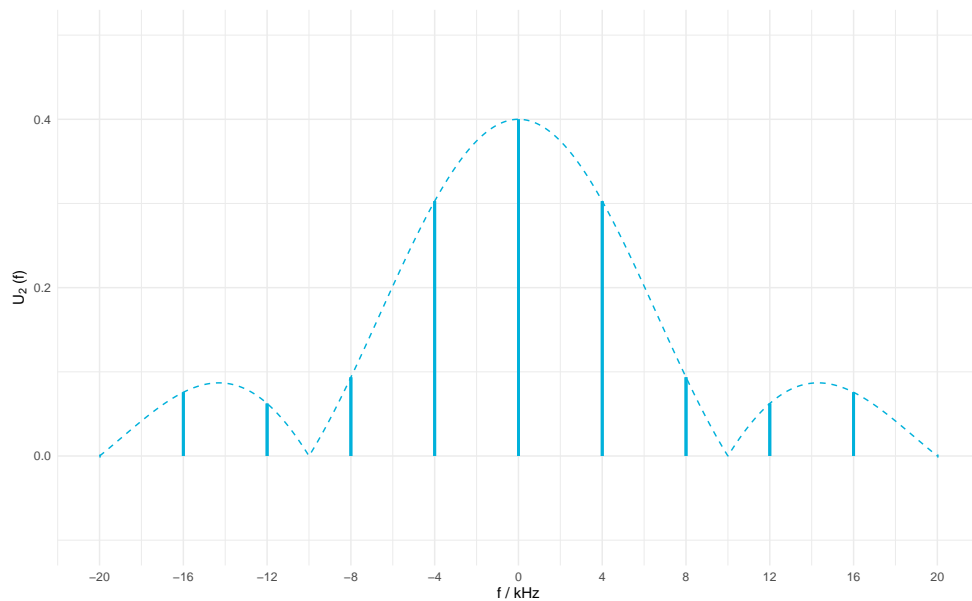


Abbildung 6: Spektrum von $u_2(t)$, Einhüllende ist die Si-Funktion (Betrag)

Die einzelnen Spektrallinien des Rechtecksignals können in der Faltung beider Funktionen im Frequenzbereich als Dirac-Impulse aufgefasst werden. Da diese sich jeweils bei $n \cdot 4$ kHz wiederholen, wird die Transformation des Nachrichtensignals (Gleichung 1) durch die Faltung um die Frequenz des Trägersignals periodisch verschoben und mit der Amplitude der jeweiligen Träger-Impulse gewichtet.

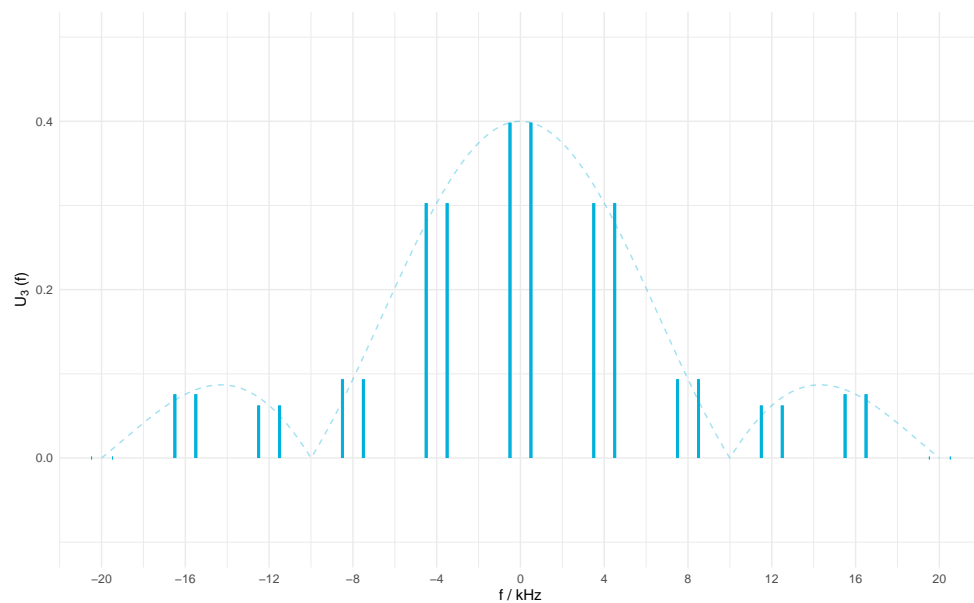


Abbildung 7: Resultierendes Amplitudenspektrum von $u_3(t)$ mit Gleichanteil im Träger

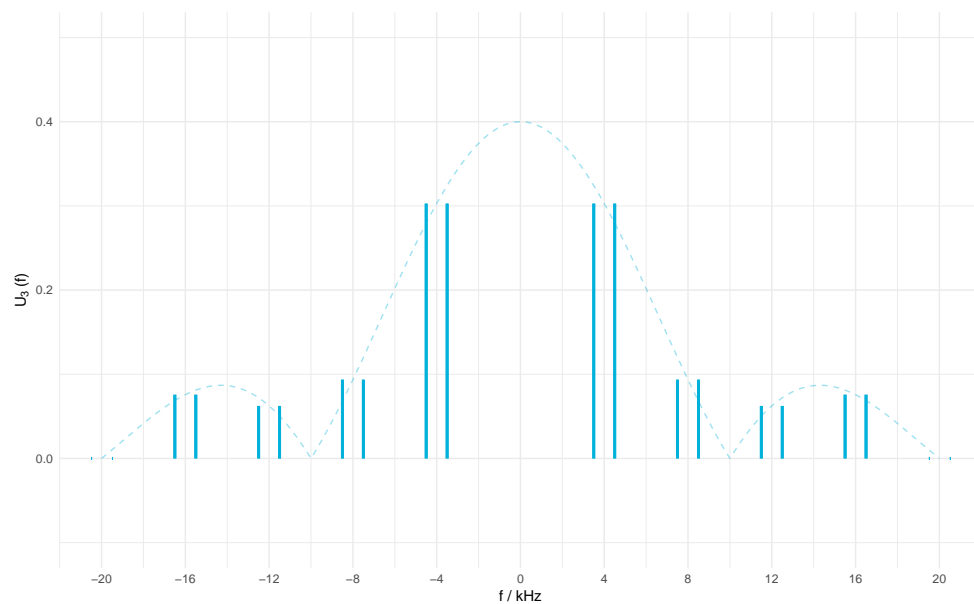


Abbildung 8: Resultierendes Amplitudenspektrum von $u_3(t)$ ohne Gleichanteil im Träger

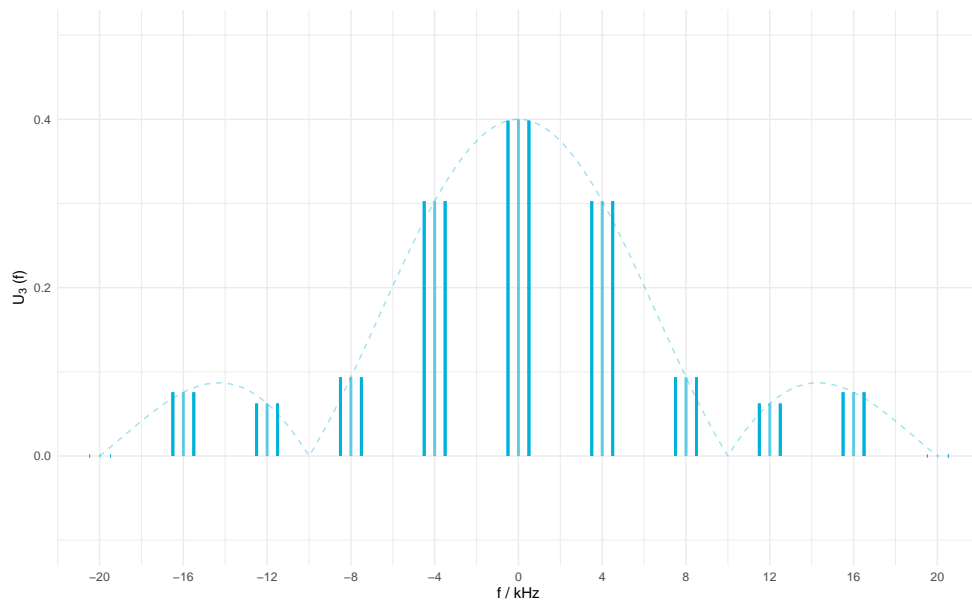


Abbildung 9: Resultierendes Amplitudenspektrum von $u_3(t)$ mit Gleichanteil in Träger und Nachrichtensignal

1.3 Praktische Anwendungsmöglichkeiten

Die Multiplikation von Zeitsignalen findet Anwendung in der Nachrichtenübertragung. Dort kann das zu übertragene Signal mit einem *Trägersignal* multipliziert werden, um zum Einen das Signal in einen für die Antentechnik brauchbaren¹ Frequenzbereich zu bringen und zum Anderen das Signal am Empfänger von anderen Signalen in der Frequenz unterscheiden zu können (vgl. 1.1).

Außerdem nutzen Oszilloskope die Multiplikation mit einem Rechtecksignal um ein Fenster des aufgenommenen Signals zu erhalten, welches dann fourieranalysiert werden kann.

¹Änderung der Übertragungseigenschaften des Signals mit der Frequenz

2 Versuchsaufgaben

2.1

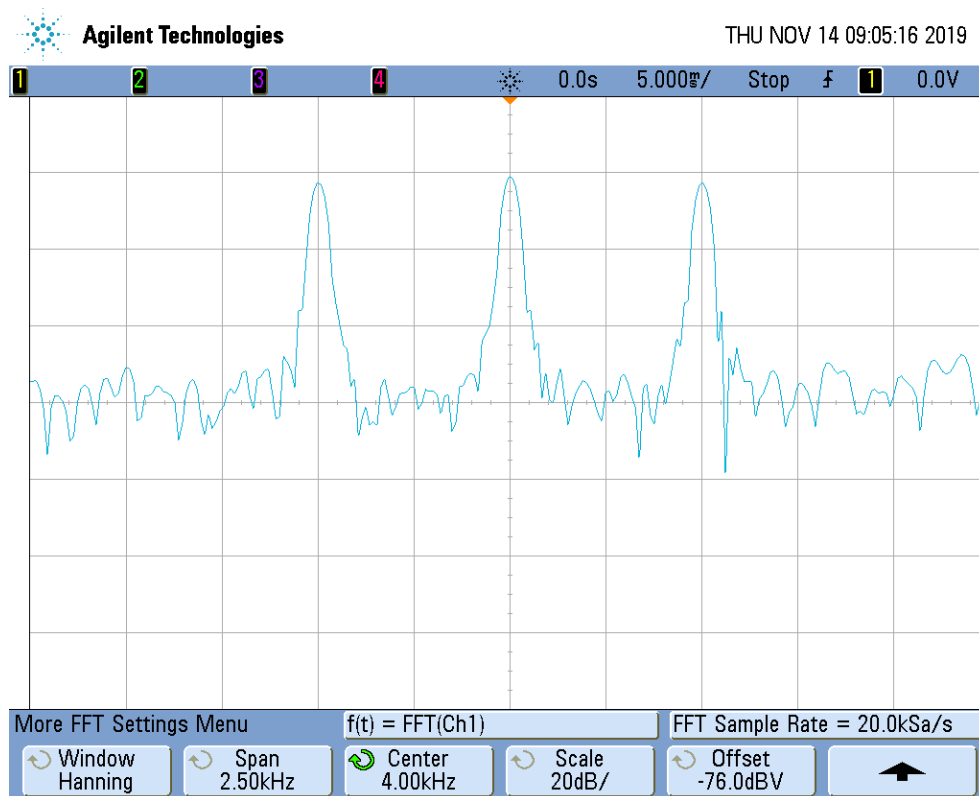


Abbildung 10: FFT von $u_3(t)$ analog Aufgabe 1

Wie in Abbildung 10 zu sehen, stimmen die ermittelten Frequenzen mit denen der Vorbereitungsaufgabe überein. Durch Limitierungen des Oszilloskops (z.B. Fensterung) und der Soundkarte sowie Störeinflüsse sieht man keine exakt diskreten Amplitudenlinien, die Maxima sind jedoch klar bei den berechneten Frequenzen erkennbar.

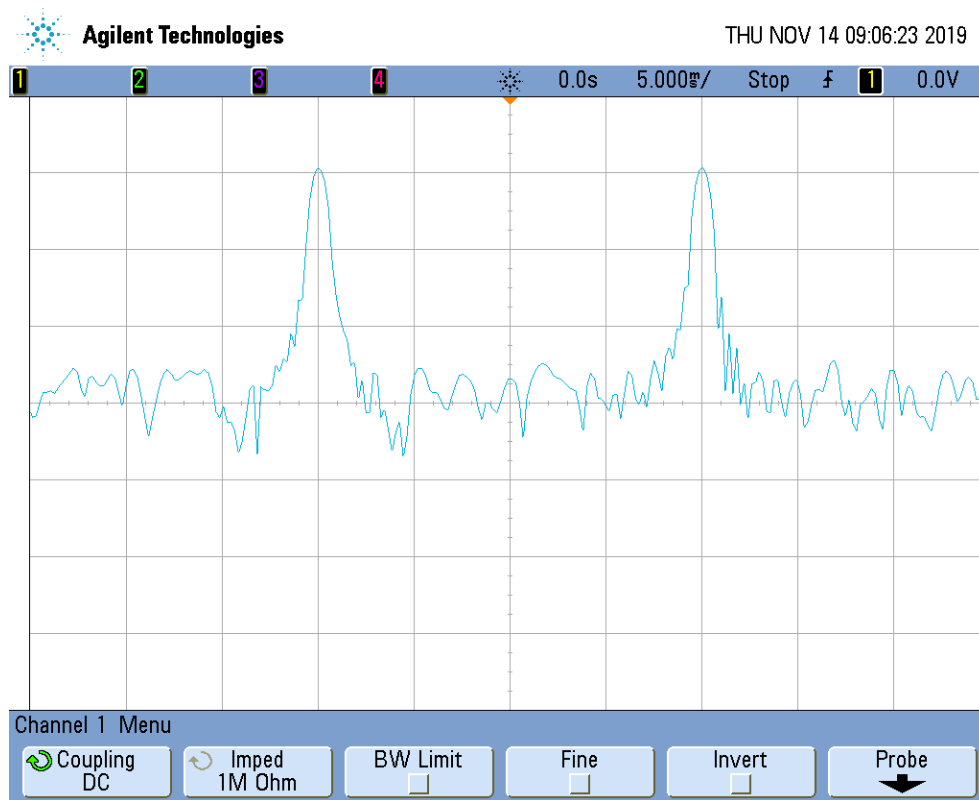


Abbildung 11: FFT von $u_3(t)$ ohne Gleichanteil der Nachricht

Nach Entfernen des Gleichanteils des Nachrichtensignals verschwindet die Frequenz des Trägers aus dem Betragsspektrum des übertragenen Signals (Abbildung 11). Der Gleichanteil der Nachricht lässt also den Träger erscheinen.

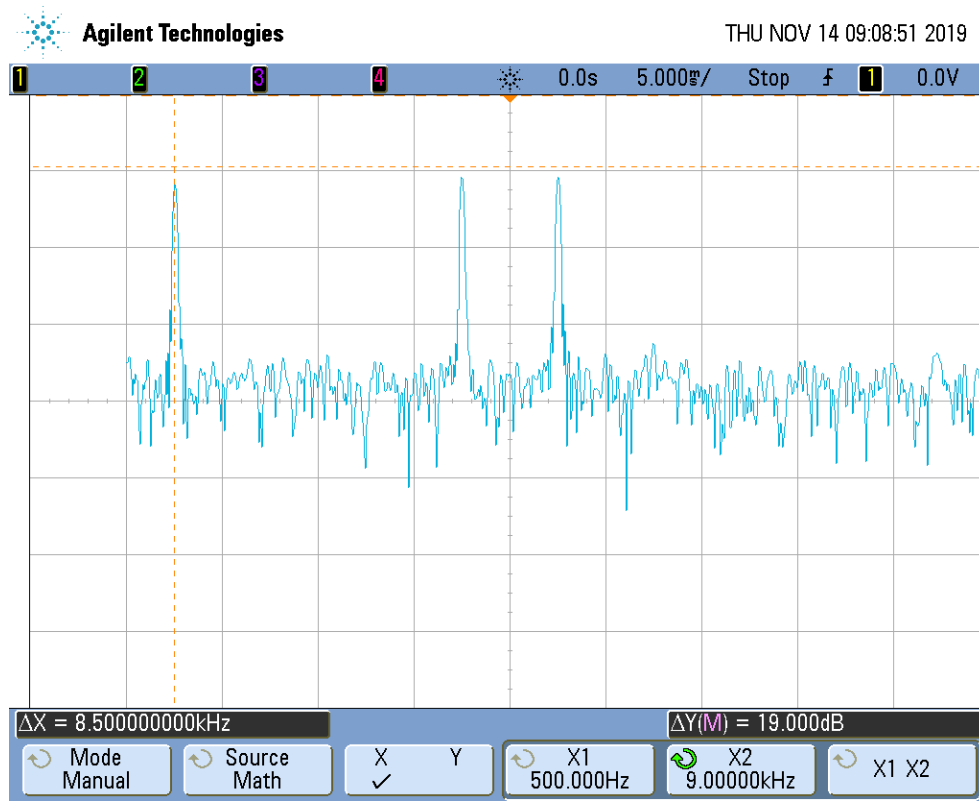


Abbildung 12: FFT von $u_3(t)$ mit Gleichanteil im Träger

Wird nun das Trägersignal mit einem Gleichanteil versehen, wird die Originalfrequenz des Nachrichtensignals mitübertragen. Der Gleichanteil des Trägersignals lässt die Frequenz(en) des Nachrichtensignals erscheinen.

Erhöht man jetzt die Frequenz des Nachrichtensignals, rücken diese und die untere Frequenz des ursprünglich gefalteten Signals immer näher zusammen (Abbildung 13). Die beiden ursprünglichen Frequenzen rücken dabei weiter auseinander. Bei einer Frequenz von 2 kHz überlappen sich die Originalfrequenz und die ursprüngliche Faltungsfrequenz und sind nicht mehr unterscheidbar.



Abbildung 13: Frequenzen nahe der Überschneidung

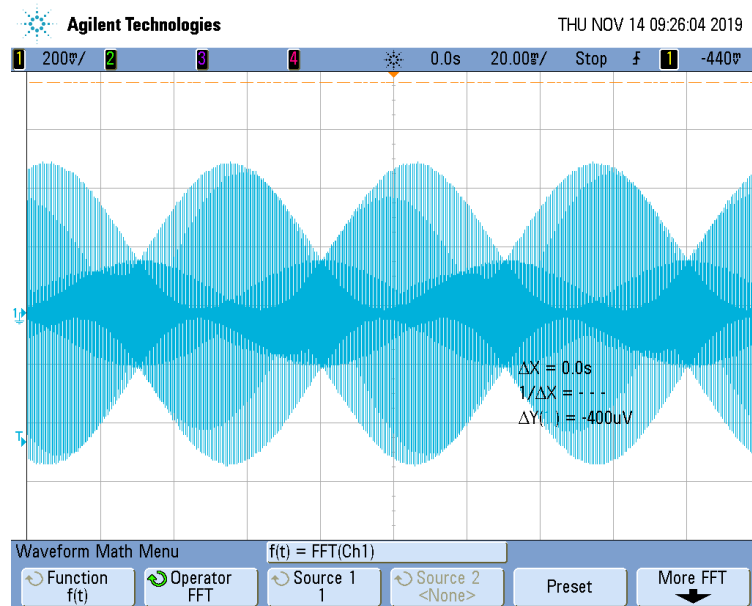


Abbildung 14: Zeitsignal bei Annäherung der Frequenzen von $u_1(t)$ und $u_3(t)$

Bei Frequenzen, die sehr nahe an der Überschneidungsfrequenz sind (z.B. 1990 Hz), entstehen Schwebungen im Zeitbereich (Abbildung 14).

2.2

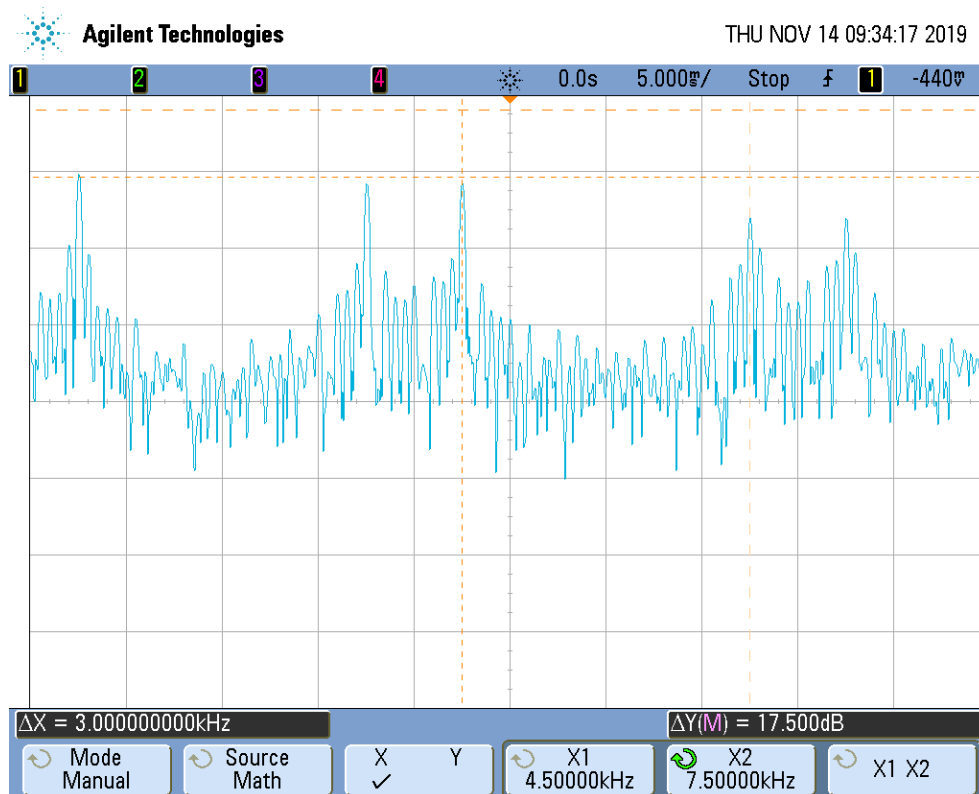


Abbildung 15: FFT von $u_3(t)$ analog Aufgabe 2

Wie in Abbildung 15 zu sehen, stimmen die ermittelten Frequenzen mit denen der Vorbereitungsaufgabe überein.

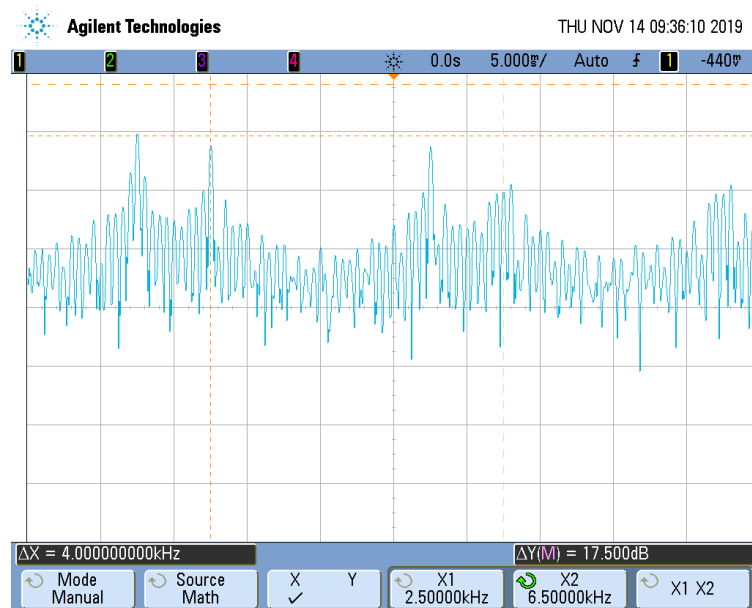


Abbildung 16: Bewegung der Frequenzanteile durch Variation der Nachrichtenfrequenz, noch keine Überschneidung



Abbildung 17: Bewegung der Frequenzanteile, Überschneidung bei 2 kHz

Bei Frequenzerhöhung weichen, wie auch in Versuchsaufgabe 2.1, die Frequenzen um das Trägerzentrum auseinander bis sie sich mit anderen bei (z.B.) 2 kHz treffen (Abbildung 16).

Die periodisch auftretenden Frequenzbreiten um $n \cdot 4 \text{ kHz}$ können z.B. als Sender bei einer bestimmten Trägerfrequenz aufgefasst werden, welche zudem eine bestimmte Bandbreite für die zu übertragenden Nachrichtensignale benötigen ($U_1(f)$). Die in Versuchsaufgabe 1 und 2 dargestellte Problematik der Überlappung von Frequenzanteilen zeigt, dass in der Praxis ein minimaler Frequenzabstand zwischen zwei Sendern notwendig ist, da sonst kein Filter realisierbar wäre, das es ermöglicht, die einzelnen Signale in der Frequenz unterscheiden zu können.

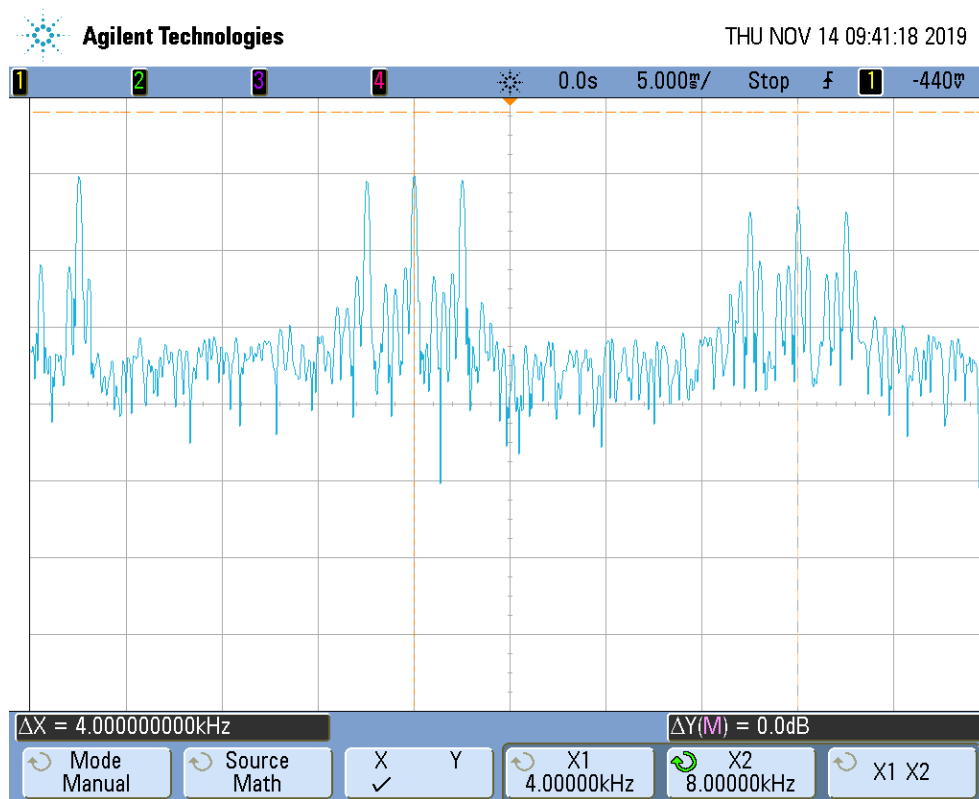


Abbildung 18: FFT von $u_3(t)$ mit Gleichanteil in der Nachricht

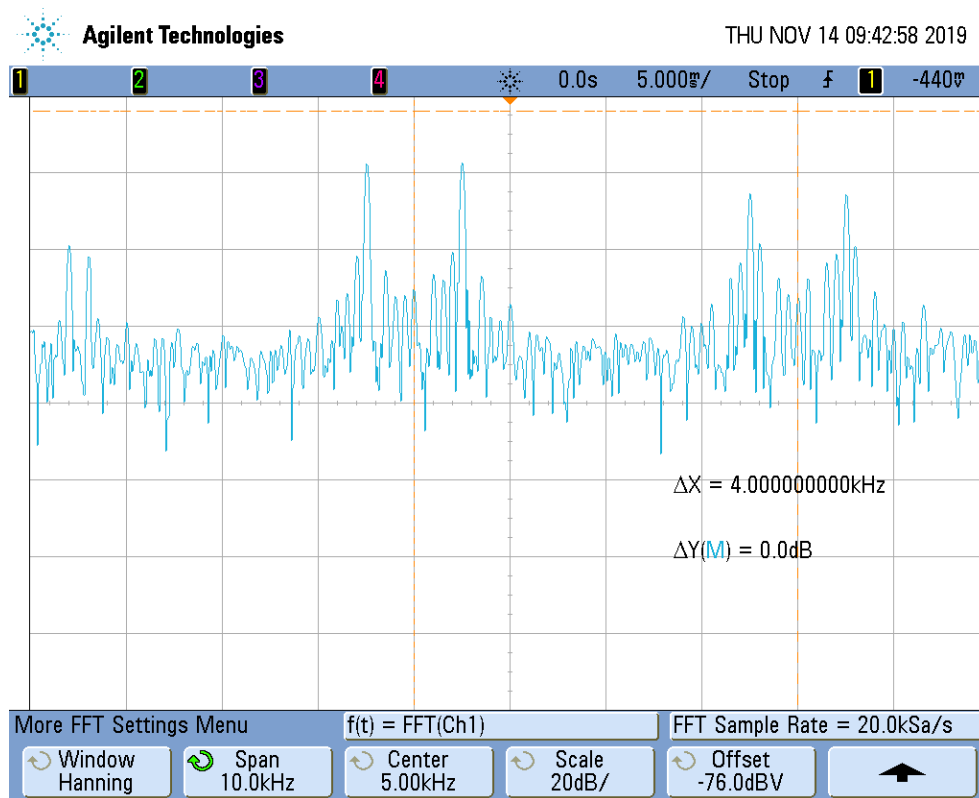


Abbildung 19: FFT von $u_3(t)$ ohne Gleichanteil in der Nachricht

Wie auch in der Versuchsaufgabe 2.1 lässt ein hinzugefügter Gleichanteil im Träger- bzw. Nachrichtensignal die Originalfrequenz des jeweils anderen Signals im Spektrum erscheinen (Abbildung 18 und 19).