

## 3 Geführte Wellen

### 3.1 Einleitung

Bei Anwendungen der Mikrowellenphysik wird man häufig mit dem Problem konfrontiert, wie ein elektromagnetisches Signal von einem Ort zum anderen übertragen wird. Dabei kann der Abstand nur einige Meter betragen, etwa wenn es darum geht, das Signal von einer Antenne zu einem Detektor zu bringen, oder er kann tausende von Kilometern betragen, wenn das Signal von einem Satelliten zu einer Bodenstation, oder umgekehrt, übermittelt wird. In diesem Falle verläuft die elektromagnetische Welle natürlich im freien Raum. Wie sich das Signal über einen Leiter oder über den freien Raum ausbreitet ist Bestandteil dieses Kapitels. Breitet sich das Signal über einen Leiter aus, so hat man es mit Leitungswellen zu tun (engl. transmission lines). Die gängigste Ausbreitungssituation für ein Signal mit einer Frequenz von einigen GHz ist sicher via ein Kabel, im Speziellen über ein Koaxialkabel. Wir werden sehen, dass es bei höheren Frequenzen günstiger ist, nicht zwei Leiter zur Übermittlung des Signals zu brauchen, sondern nur einen. Dies ist meist in Form einer speziell geformten Röhre, genannt Hohlleiter. Für Frequenzen über 100 GHz ist aber auch diese Methode nicht mehr besonders günstig und eine Art optische Ausbreitung ist dann sinnvoll, genannt Quasioptik. Wir wollen im Folgenden die verschiedenen Möglichkeiten der Ausbreitung genauer studieren.

### 3.2 Leitungswellen

#### 3.2.1 Zwei parallele Leiterplatten

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass sich eine elektromagnetische Welle entlang einer Leitung ausbreiten kann. Zudem wird ein Zusammenhang zwischen den elektrischen und magnetischen Feldstärken  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und der Spannung und Stromstärke  $U$ ,  $I$  hergestellt, was uns schliesslich zu den Leitungsgleichungen bringt. Eine Leitung kann im Prinzip aus zwei leitenden Platten im Abstand  $a$  beschrieben werden, wie das Figur (3.1) zeigt. Das ist sicher technisch nicht die sinnvollste Art, aber physikalische Überlegungen lassen sich an diesem Modell günstig durchführen. Zwischen diesen Platten gibt es natürlich beliebig viele mögliche Feldkonfigurationen oder Moden. Wir nehmen an, die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  sei parallel zur x-Achse, die magnetische Feldstärke  $\vec{B}$  sei parallel zur y-Achse und die Ausbreitung erfolge parallel zur z-Achse. In diesem Fall spricht man von einem TEM-Mode (Transversal Elektro Magnetischer Mode). Diese Feldverteilung ist in Figur (3.2) skizziert.

### 3 Geführte Wellen

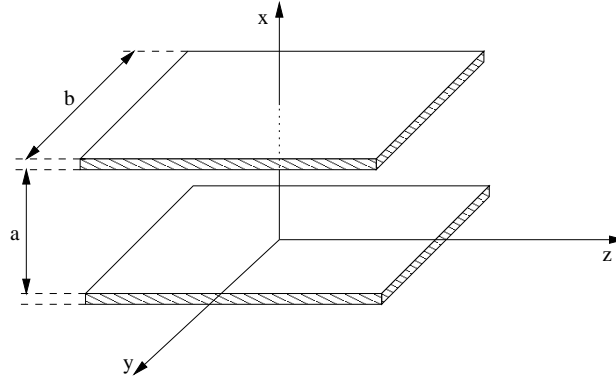


Abbildung 3.1: Leitung aus zwei parallelen leitenden Platten

Aus den Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

und der Tatsache, dass im Innern eines idealen Leiters sowohl die elektrische als auch die magnetische Feldstärke Null sind, folgen die Randbedingungen auf den Leiteroberflächen:

$$E_n : \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \quad \rho_s : \text{Oberflächenladungsdichte} \quad (3.5)$$

$$E_t : \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (3.6)$$

$$B_n : \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.7)$$

$$B_t : \vec{n} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}_s. \quad \vec{J}_s : \text{Oberflächenstromdichte} \quad (3.8)$$

Insbesondere ist  $E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$  und  $B_t = \mu_0 J_{sz}$ .

Wir untersuchen nun eine Konfiguration wie in Figur (3.1) gegeben, und betrachten einen Streifen der Breite  $b$ .

Wendet man das Gesetz von Faraday

$$\oint_c \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{a} \quad (3.9)$$

auf einen Integrationsweg  $c$  an, wie in Figur (3.3) gezeigt, so erhält man

$$\oint_c \vec{E} d\vec{s} = \underbrace{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}}_{=-V(z)} + \underbrace{\int_2^3 \vec{E} d\vec{s}}_{=0} + \underbrace{\int_3^4 \vec{E} d\vec{s}}_{=V(z+dz)} + \underbrace{\int_4^1 \vec{E} d\vec{s}}_{=0} = -adz \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (3.10)$$

### 3 Geführte Wellen

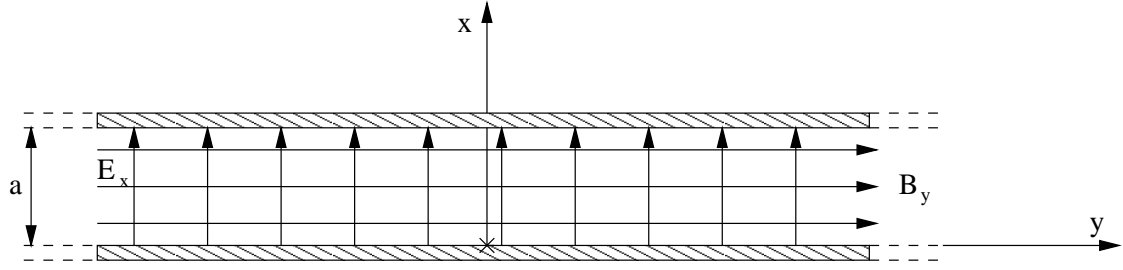


Abbildung 3.2: Ansicht von der Seite

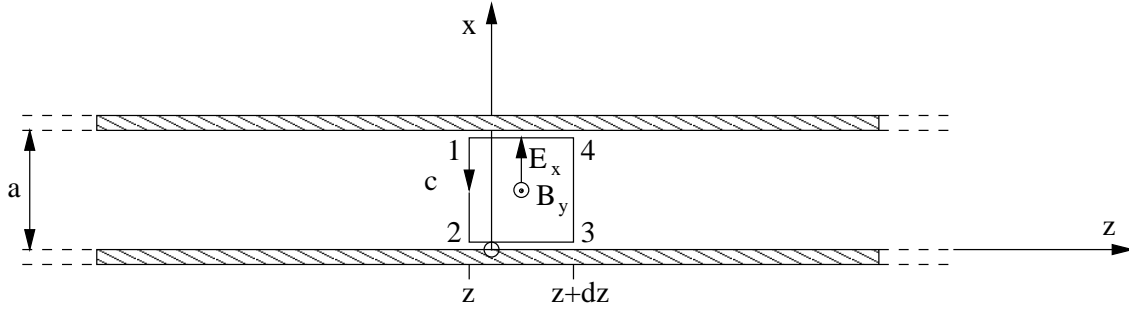


Abbildung 3.3: Integrationsweg

Daraus folgt, zusammen mit den Randbedingungen:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -a \frac{\partial B_y}{\partial t} = -(\mu_0 \frac{a}{b}) \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3.11)$$

wobei  $B_y = \mu_0 J_{sz} = \frac{\mu_0}{b} I$  ist.

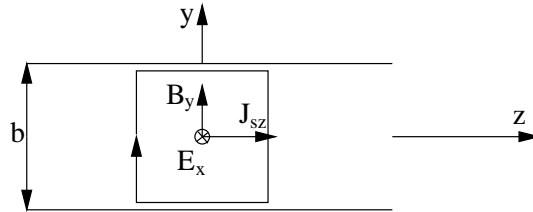


Abbildung 3.4: von oben

Wendet man das Gesetz von Ampère

$$\oint_c \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{a} \quad (3.12)$$

auf den Integrationspfad in Figur (3.4) an, so folgt

$$bB_y(z) - bB_y(z + dz) = \mu_0 \epsilon_0 b dz \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3.13)$$

und damit

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(\varepsilon_0 \frac{b}{a}) \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.14)$$

wobei  $E_x = \frac{V}{a}$  ist.

Eingesetzt in (3.11) erhält man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (3.16)$$

Wir haben gezeigt, dass sich entlang der Leitung Spannungs- und Stromwellen ausbreiten können und zwar mit einer Phasengeschwindigkeit von  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ . Die Wellengleichung ist unabhängig von der Geometrie, d.h.  $a$  und  $b$  kommen nicht mehr darin vor. Die Geometrie kommt allerdings in den Gleichungen (3.11) und (3.14) vor. Wir wollen kurz die physikalische Bedeutung von  $\varepsilon_0 \frac{b}{a}$  und  $\mu_0 \frac{a}{b}$  betrachten.  $\varepsilon_0 \frac{bl}{a}$  ist die Kapazität eines Plattenkondensators der Länge  $l$ , Breite  $b$  und Plattenabstand  $a$ . Somit ist  $C_0 = \varepsilon_0 \frac{b}{a}$  die Kapazität der Leitung pro Einheitslänge. Analog dazu ist  $L_0 = \mu_0 \frac{a}{b}$  die Induktivität der Leitung pro Einheitslänge.

Damit gilt

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3.17)$$

und

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (3.18)$$

$L_0$  und  $C_0$  charakterisieren also die Leitung.

Bei einer zwei (oder mehr) -Drahtleitung gibt es immer einen Mode, d.h. eine Konfiguration des elektrischen und des magnetischen Feldes, bei dem  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  transversal zur Richtung der Energieausbreitung liegen (TEM-Mode.) Es gibt allerdings auch höhere Moden, die dadurch charakterisiert sind, dass entweder  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$  eine Komponente in Ausbreitungsrichtung hat.

Mit TEM-Mode können (theoretisch) beliebige Frequenzen übermittelt werden. Da die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz ist, gibt es keine Dispersion. Die Phasengeschwindigkeit lässt sich auch ausdrücken durch

$$v = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}. \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Koaxialkabel

Wir betrachten ein ideales Koaxialkabel mit einem Innenleiter mit Radius  $b$  und einer ideal konzentrischen Ummantelung im Abstand  $a$  vom Zentrum (Figur (3.5)). Dazwischen sei Luft. Im realen Kabel ist allerdings zwischen den Leitern ein Dielektrikum eingefügt, meistens Teflon, um die Geometrie aufrecht zu erhalten. Wird der Zwischenraum

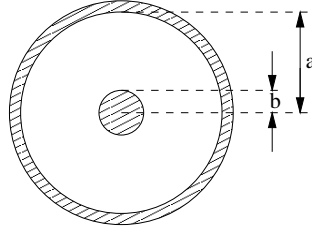


Abbildung 3.5: Koaxialkabel

zwischen zwei Leitern mit einem Dielektrikum, das den Brechungsindex  $n$  aufweist, ausgefüllt, so hat dies einen Einfluss auf die Phasengeschwindigkeit. Diese verringert sich gegenüber der Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum und ist dann  $v = c/n$ .

Im Falle eines TEM-Modus ist das elektrische Feld radial und das Magnetfeld azimuthal. Um nun die charakteristischen Größen des Kabels zu bestimmen, müssen die Kapazität und die Induktivität pro Einheitslänge bestimmt werden, d.h.  $C_0$  und  $L_0$ . Unter Verwendung der Gesetze von Ampère und Gauss lässt sich (als Übung) zeigen, dass

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{und} \quad C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}. \quad (3.20)$$

Man sieht, dass das Produkt von  $L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0$  ist, und somit die Phasengeschwindigkeit  $v = c$  ist.

### 3.2.3 Charakteristische Impedanz, $Z_0$

Wir wollen nun durch unsere Zweidrahtleitung resp. unser Koaxialkabel eine Welle transmittieren. Wir schliessen also das Kabel an einen Generator an, der ein Sinus förmiges Signal der Frequenz  $\omega$  generiere:

$$V = V_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (3.21)$$

resp.

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \beta z)}. \quad (3.22)$$

Dabei haben wir mit  $\beta$  den eindimensionalen Wellenvektor bezeichnet. Es wird sich also eine elektromagnetische Welle entlang dem Kabel ausbreiten, und wie wir gesehen haben, kann man dies alternativ als eine Spannungs- oder Stromwelle beschreiben. Dabei ist die Phasengeschwindigkeit  $v = \frac{\omega}{\beta}$ . Strom und Spannung sind natürlich durch die beiden Differentialgleichungen (3.17) und (3.18) miteinander verknüpft. Durch Einsetzen von (3.21) resp. (3.22) in (3.17) und (3.18) findet man

$$I_0 = [\beta/(\omega L_0)] V_0$$

und da

$$\beta/\omega = (L_0 C_0)^{1/2}$$

folgt

$$I_0 = (C_0/L_0)^{1/2}V_0$$

mit dem Resultat, dass

$$V(z, t) = V_0 e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$I(z, t) = \frac{V_0}{Z_0} e^{i(\omega t - \beta z)} = \frac{V}{Z_0}.$$

Dabei ist die charakteristische Impedanz,  $Z_0$ , gegeben durch

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (3.23)$$

Diese Impedanz heisst charakteristisch, weil sie eine für den Leiter charakteristische Grösse darstellt. Im Gegensatz zur Phasengeschwindigkeit, die Geometrie unabhängig ist, hängt die charakteristische Impedanz sehr wohl von der Geometrie ab. Für ein Koaxialkabel erhalten wir

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \left( \frac{a}{b} \right). \quad (3.24)$$

Die Grösse  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \, \Omega$  bezeichnet man als Impedanz des Vakuums. Koaxialkabel, haben in der Regel eine charakteristische Impedanz von  $50 \Omega$ .

### 3.2.4 Beschreibung mittels elektrischem Netzwerk

Die Ausbreitung entlang einer Leitung kann auch von einem ganz anderen Ansatz her betrachtet werden, nämlich dem der Netzwerk-Analyse. Normalerweise geht man allerdings bei einem elektrischen Netzwerk davon aus, dass die Komponenten sehr viel kleiner als die Wellenlänge sind. Im Mikrowellenbereich, mit Wellenlängen von Millimetern oder weniger, sind die Komponenten von derselben Grössenordnung. Das bedeutet, dass Spannungen, sowohl im Betrag als auch in der Phase, über eine Komponente variieren können. Eine Wellenleitung (transmission line) wird meistens wie in Figur (3.6) als Zweidraht-Leitung dargestellt. Dies ist verständlich, da es zwei Drähte braucht, um einen TEM-Mode aufrecht zu erhalten. Dabei wird das Netzwerk charakterisiert durch

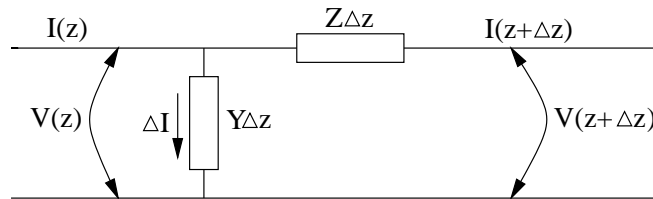


Abbildung 3.6:

die folgenden Grössen: die Impedanz pro Einheitslänge  $Z = R + i\omega L$  und die Admittanz pro Einheitslänge  $Y = G + i\omega C$ . Dabei ist:

### 3 Geführte Wellen

$R$ : Widerstand pro Einheitslänge, erzeugt Verluste

$L$ : Induktivität pro Einheitslänge, verändert die Phase

$G$ : Konduktanz pro Einheitslänge (Leitwert der Isolation zwischen den Leitern)

$C$ : Kapazität pro Einheitslänge

Es gilt dann:

$$\Delta V = -IZ\Delta z \quad (3.25)$$

$$\Delta I = -VY\Delta z \quad (3.26)$$

Der Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow dz$  führt zu

$$\frac{dV(z)}{dz} = -ZI(z) \quad \text{und} \quad \frac{dI(z)}{dz} = -YV(z). \quad (3.27)$$

Die beiden Gleichungen können gleichzeitig gelöst werden, was auf eine Wellengleichung für  $V(z)$  und  $I(z)$  führt, so dass

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V \quad \text{und} \quad \frac{d^2I}{dz^2} = \gamma^2 I \quad (3.28)$$

wobei

$$\gamma^2 = ZY. \quad (3.29)$$

$\gamma$  heisst Ausbreitungskonstante (propagation constant) und ist im Allgemeinen komplex, d.h.  $\gamma = \alpha + i\beta$ .

Setzt man  $Z$  und  $Y$  in (3.29) ein und löst nach  $\gamma$  auf, so erhält man:

$$\gamma = \pm \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \pm \sqrt{(RG - LC\omega^2) + i(LG + RC)\omega}. \quad (3.30)$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (3.28) lautet dann

$$V = v_i e^{i\omega t - \gamma z} + v_r e^{i\omega t + \gamma z} \quad (3.31)$$

und

$$I = \frac{\gamma}{Z} (v_i e^{i\omega t - \gamma z} - v_r e^{i\omega t + \gamma z}) \quad (3.32)$$

wobei  $v_i e^{i\omega t - \gamma z}$  die einfallende (incident) und  $v_r e^{i\omega t + \gamma z}$  die reflektierte (reflected) Welle ist. Gleichung (3.31) lässt sich auch schreiben als

$$V = v_i e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} + v_r e^{i(\omega t + \beta z)} e^{\alpha z}. \quad (3.33)$$

Dabei stellt  $e^{\pm\alpha z}$  einen Dämpfungsfaktor dar und  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  ist der (hier eindimensionale) Wellenvektor, wie bereits oben erwähnt.

### 3.2.5 Eigenschaften der verlustlosen Leitung

Die obige Herleitung war für den allgemeinen Fall gültig, wo die Leitung auch Verluste aufweist. Häufig sind diese aber klein. Im folgenden sei  $\alpha \approx 0$ , d.h. die Leitung weist keine Verluste auf. Zudem wird der Übersichtlichkeit halber der Faktor  $e^{i\omega t}$  weggelassen. Wir erhalten dann für die Spannungs- resp. die Stromwelle

$$V = v_i e^{-i\beta z} + v_r e^{i\beta z} \quad (3.34)$$

resp.

$$I = \frac{1}{Z_0} (v_i e^{-i\beta z} - v_r e^{i\beta z}) \quad (3.35)$$

wobei mit

$$Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (3.36)$$

die charakteristische Impedanz,  $Z_0$  bezeichnet wird. Für eine verlustlose Leitung ist  $Z_0$  reell.

Eine Leitung der Länge  $A$  sei mit  $Z_0$  abgeschlossen, d.h.  $\frac{V(A)}{I(A)} = Z_0$ . Gemäss Gleichung (3.35) und (3.34) gilt aber auch

$$\frac{V(A)}{I(A)} = Z_0 \frac{v_i e^{-i\beta A} + v_r e^{i\beta A}}{v_i e^{-i\beta A} - v_r e^{i\beta A}} \quad (3.37)$$

was nur möglich ist, wenn  $v_r = 0$  ist. Das gibt uns die wichtige Erkenntnis, dass auf einer Leitung, die mit  $Z_0$  abgeschlossen ist, keine reflektierte Welle entstehen kann. Es ist, als wäre diese Leitung unendlich lang. Eine solche Leitung nennt man angepasst (engl. matched).

### 3.2.6 Reflexionskoeffizient, Stehwellenverhältnis

Eine Leitung mit der charakteristischen Impedanz  $Z_0$  sei mit einer beliebigen Impedanz  $Z_L$  abgeschlossen, wie das in Figur(3.7) dargestellt ist. Wir werden sehen, dass in diesem Falle eine Welle reflektiert wird und dadurch eine stehende Welle entsteht. Diese lässt dann Rückschlüsse auf  $Z_L$  zu.

Wenn die Leitung mit irgend einer Impedanz  $Z_L$  abgeschlossen ist, dann ist das Ver-

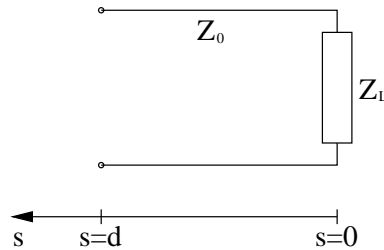


Abbildung 3.7: Eine mit einer Last-Impedanz  $Z_L$  abgeschlossene Leitung



### 3 Geführte Wellen

hältnis aus Spannung und Strom an der Stelle der Last auch  $Z_L$ . Dies ist aber nur dann erfüllt, wenn eine reflektierte Welle auftritt. Die totale Spannung auf der Leitung ist dann

$$V = v_1 e^{i\beta s} + v_2 e^{-i\beta s} \quad (3.38)$$

und der zugehörige Strom

$$I = \frac{1}{Z_0} (v_1 e^{i\beta s} - v_2 e^{-i\beta s}). \quad (3.39)$$

$v_1$  ist die Amplitude der auf  $Z_L$  zulaufenden und  $v_2$  die Amplitude der von  $Z_L$  weglauenden Welle. Die  $v_i$  sind im allgemeinen komplex.

Das Verhältnis

$$\rho = \frac{v_1}{v_2} \quad (3.40)$$

nennen wir Reflexionskoeffizient. Dieser lässt sich schreiben mit

$$\rho = |\rho| e^{i\psi} = \frac{|v_2| e^{i\vartheta_2}}{|v_1| e^{i\vartheta_1}} = \frac{|v_2|}{|v_1|} e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \quad (3.41)$$

wobei  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Phasen der beiden Wellen darstellen.

Mit (3.38) und (3.40) folgt

$$\begin{aligned} V &= v_1 e^{i\beta s} + \rho v_1 e^{-i\beta s} \\ &= v_1 e^{i\beta s} (1 + |\rho| e^{i\psi} e^{-2i\beta s}) \\ &= v_1 e^{i\beta s} (1 + |\rho| e^{i(\psi - 2\beta s)}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

$V$  wird minimal, falls  $e^{i(\psi - 2\beta s)} = -1$  ist, d.h.  $(\psi - 2\beta s) = (2m + 1)\pi$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Die Distanz zwischen den Minima beträgt  $s_m - s_{m+1} = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2}$ . Das erste Minimum ist im Abstand  $d_{min}$  von  $Z_L$ , wobei  $\psi - 2\beta d_{min} = \pi$ , was die Bestimmung von  $\psi$  ermöglicht.

Man definiert als Stehwellenverhältnis die Grösse

$$S = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}}. \quad (3.43)$$

$S$  wird auch als voltage standing wave ratio (VSWR) bezeichnet. Weil  $|V|_{min} = |v_1|(1 - |\rho|)$ ,  $|V|_{max} = |v_1|(1 + |\rho|)$ , folgt

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad |\rho| = \frac{S - 1}{S + 1}. \quad (3.44)$$

Wir wollen noch den Zusammenhang zwischen  $Z_0$ ,  $Z_L$ ,  $\rho$  und  $S$  darstellen. Es gilt:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-2i\beta s}}{1 - \rho e^{-2i\beta s}}. \quad (3.45)$$

Setzt man in (3.45)  $s = 0$  ein und beachtet dabei, dass  $Z(s = 0) = Z_L$  ist, so erhält man

$$Z_L = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (3.46)$$

### 3 Geführte Wellen

Mit der Normierung  $z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1+|\rho|e^{i\psi}}{1-|\rho|e^{i\psi}}$  erhält man

$$z_L = \frac{1 - iS \tan(\beta d_{min})}{S - i \tan(\beta d_{min})}. \quad (3.47)$$

Durch Ausmessen des Stehwellenverhältnisses und der Distanz zum ersten Minimum kann somit die komplexe Impedanz bestimmt werden. Wir wollen uns nun noch fragen, welche Impedanz “sieht” man, wenn man an der Stelle  $s = l$  in die Leitung “sieht”? Diese sogenannte Eingangsimpedanz  $Z_{in}$  respektive  $z_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0}$  erhält man aus

$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{v_1[e^{i\beta l} + \rho e^{-i\beta l}]}{v_1[e^{i\beta l} - \rho e^{-i\beta l}]} Z_0 \quad (3.48)$$

zu

$$z_{in} = \frac{z_L + i \tan(\beta l)}{1 + iz_L \tan(\beta l)}. \quad (3.49)$$

#### 3.2.7 Beispiele und Diskussion

Wir wollen nun einige in der Anwendung häufig vorkommende Beispiele kurz erwähnen:

- Offene Leitung, d.h.  $Z_L = \infty$   
Eingesetzt in (3.46) folgt  $\rho = 1 \rightarrow$  Das einfallende Signal wird reflektiert. Einfallendes und reflektiertes Signal sind am Leitungsende, d.h. bei  $Z_L$ , in Phase.
- Kurzschluss, d.h.  $Z_L = 0$   
Es folgt  $\rho = -1 \rightarrow$  Das einfallende Signal wird auch hier reflektiert, allerdings sind das einfallende und das reflektierte Signal am Leitungsende um 180 Grad ausser Phase.
- Beweglicher Kurzschluss (engl. back short) im Abstand  $d$ .  
Die Eingangsimpedanz  $z_{in} = i \tan(\beta d) = \frac{Z_{short}}{Z_0}$  ist rein reaktiv und mit  $d$  frei wählbar.
- Anpassung mit Parallel-Impedanz  $Z_S$ , vgl. Figur (3.8)

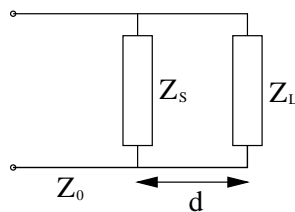


Abbildung 3.8: Anpassung mit einer Impedanz  $Z_S$  im Abstand  $d$  von der Lastimpedanz  $Z_L$

### 3 Geführte Wellen

Die Eingangsimpedanz an der Stelle  $d$  beträgt nach (3.45)  $Z_i = Z_0 \frac{1+\rho e^{-2i\beta d}}{1-\rho e^{-2i\beta d}}$ . Die totale Impedanz  $Z$  an der Stelle  $d$  ist gegeben durch

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_i} \quad (3.50)$$

(vergleiche Parallelschaltung von Widerständen). Die Reflexion ist Null, falls  $Z = Z_0$ , d.h.  $Z_S = \frac{Z_0 Z_i}{Z_i - Z_0}$ .

- Anpassung mit Back-Short  $Z_{short}$  im Abstand  $d$

Wir wollen an eine Leitung mit charakteristischer Impedanz  $Z_0$  eine Impedanz  $Z = X + iY$  anschliessen. Es ist möglich durch Einfügen eines Kurzschlusses im Abstand  $d$  vor der Last Reflexionen zu verhindern.

$$\rightarrow \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{X + iY} + \frac{1}{Z_{short}} = \frac{1}{X + iY} + \frac{1}{i \tan(\beta d)} \quad (3.51)$$

Keine Reflexionen treten genau dann auf, wenn gilt:

$$\frac{X^2}{Y} + Y = Z_0 \tan(\beta d) \quad (3.52)$$

Bei allen Anpassungen ist zu beachten, dass eine ideale Anpassung stets nur für ein bestimmtes  $\beta$ , d.h. für eine bestimmte Wellenlänge  $\lambda$  erreicht werden kann.

#### 3.2.8 $\lambda/4$ -Transformator

Leitungen können selbst verwendet werden, um Impedanzen anzupassen. Als Beispiel soll eine Leitung mit charakteristischer Impedanz  $Z_1$  an eine andere Leitung mit charakteristischer Impedanz  $Z_2$  angepasst werden, wie das in Figur (3.9) dargestellt ist.

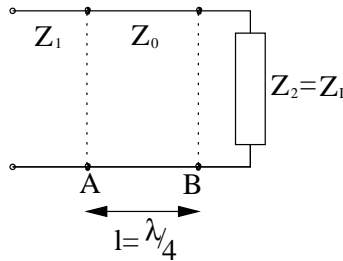


Abbildung 3.9:

Die einfallende Welle wird bei A und B reflektiert. Damit sich die beiden reflektierten Wellen weginterferieren können, muss der Transformator eine Länge von  $l = \lambda/4$  haben. Nun stellt sich die Frage, welche Impedanz der Transformator selbst haben muss:

Die Eingangsimpedanz  $Z_{in}$  an der Stelle A ist

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_2 + iZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + iZ_2 \tan(\beta l)} = Z_0 \frac{Z_2 \cos(\beta l) + iZ_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + iZ_2 \sin(\beta l)}. \quad (3.53)$$

Mit  $\beta l = \frac{\beta \lambda}{4} = \frac{2\pi \lambda}{\lambda 4} = \frac{\pi}{2}$  folgt  $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_2}$ . Damit Anpassung auch bei A vorliegt, muss  $Z_1 = Z_{in}$  gelten, und daraus folgt

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (3.54)$$

Wie bei den anderen bisher diskutierten Anpassungen ist auch diese Anpassung frequenzabhängig. Je mehr Elemente kaskadiert werden, desto breitbandiger ist die Anpassung. Vergleicht man diese Problematik mit der Optik, so sieht man, dass der Impedanz der Brechungsindex entspricht. Man spricht in der Optik nicht unbedingt von Impedanzanpassungen, sondern eher von Vergütungen beispielsweise einer Linse. Auch in diesem Fall werden  $\lambda/4$ -Transformatoren eingesetzt.

### 3.2.9 S-Parameter

Für tiefe Frequenzen ist es möglich, Impedanzen durch Spannungs- und Strommessungen zu bestimmen. Dies ist im Mikrowellenbereich nicht mehr der Fall. Man bestimmt an Stelle der Impedanz die Reflexion, Transmission und Absorption mit Hilfe eines sogenannten vektoriellen Netzwerk-Analysators. Ein Prinzipschema zeigt Figur (3.10). „Vektoriell“ bedeutet, dass sowohl Amplitude wie Phase gemessen werden.

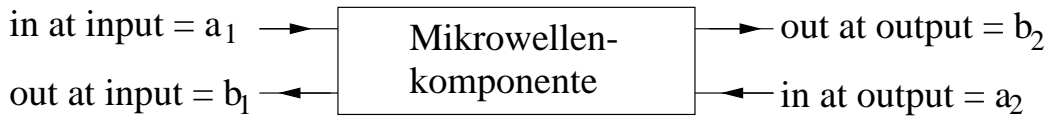


Abbildung 3.10:

Es ist zu beachten, dass  $a_1$  und  $b_1$  am gleichen Anschluss der Komponente gemessen werden, ebenso  $a_2$  und  $b_2$ .

Man definiert

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{b_1}{a_1}, \quad a_2 = 0 \quad \text{Reflexionskoeffizient (input)} \\ S_{21} &= \frac{b_2}{a_1}, \quad a_2 = 0 \quad \text{Transmissionskoeffizient, (engl. Gain/Loss)} \\ S_{12} &= \frac{b_1}{a_2}, \quad a_1 = 0 \quad \text{Transmissionskoeffizient, (Isolation)} \\ S_{22} &= \frac{b_2}{a_2}, \quad a_1 = 0 \quad \text{Reflexionskoeffizient (output)} \end{aligned}$$

Allgemein kann man schreiben:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

oder kurz  $b = S * a$ .

$S$  wird als Streumatrix bezeichnet, die Komponenten von  $S$  heißen S-Parameter. Sie charakterisieren eine Mikrowellenkomponente und besitzen Amplitude und Phase.

### 3.2.10 Technische Kenngrössen

Das Verhalten einer Mikrowellenkomponente bezüglich Reflexion, Dämpfung, Verstärkung usw. wird durch spezielle Grössen charakterisiert. Dabei werden durchaus häufiger die englischen Ausdrücke verwendet, insertion loss, Gain, Return loss als die deutschen, wie Einfügedämpfung etc. Zudem werden zugehörige Zahlenwerte meist in der sog. dB-Terminologie angegeben.

dB-Terminologie:  $\text{dB} = 10 \log(N)$  (Faktor)

dBm-Terminologie: Der Referenzwert für Leistungen im Mikrowellengebiet ist 1mW.

Verwendet man statt dem Zehner- den natürlichen Logarithmus, so spricht man statt von dB von Neper.



Abbildung 3.11:

Gemäss Figur (3.11) definiert man:

$$\text{Insertion Loss} = \frac{P_{trans.}}{P_{in}}$$

$$\text{Return Loss} = \frac{P_{refl.}}{P_{in}}$$

Dabei ist zu beachten, dass der Loss als positiver Wert in dB angegeben wird. Das Wort “Loss” sagt, dass der Wert negativ genommen wird. Die Dämpfung ist nicht der Insertion Loss, sondern der Verlust innerhalb der Komponente.

Als Gain (Verstärkung) bezeichnet man:

$$G = 10 \log\left(\frac{\text{Ausgangsleistung}}{\text{Eingangsleistung}}\right) \quad [\text{dB}] \quad (3.56)$$

Es lohnt sich, sich die folgenden Zahlen zu merken:

Faktor	dB-Wert
2	3
3	5
10	10

Zwei Beispiele:

Ein Faktor von  $80 (= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10)$  entspricht einem dB-Wert von 19dB ( $= 3 + 3 + 3 + 10$ ), ein Faktor von  $0.02 (= \frac{2}{10 \cdot 10})$  entspricht einem dB-Wert von  $-17\text{dB} (= 3 - 10 - 10)$

Es gibt verschiedene Arten, die reflektierte Leistung zu spezifizieren.

### 3 Geführte Wellen

$P_{refl.}[\%]$	$P_{trans.}[\%]$	Return Loss [dB]	SWR	refl. Koeff. $\rho$
1	99	20	1.25	0.1
5	95	13	1.58	0.22
10	90	10	1.95	0.32
50	50	3	5.8	0.71

Zur Illustration ist das Datenblatt eines Koaxialkabels angegeben, indem die meisten der eben definierten Begriffe vorkommen.

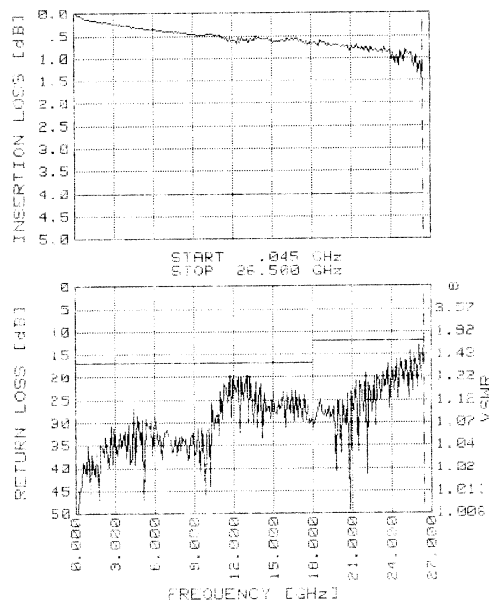
## Test Certificate

### Microwave Cable Assembly

Frequency [GHz]	IL [dB]	RL [dB]	VSWR [1]	SUCOFLEX 104
.045	.25	50.1	1.006	Serial no. : 40409
2.955	.24	30.9	1.059	Length : 360 mm
5.997	.35	27.1	1.092	Connector 1 : 21 SMA-451
9.040	.47	30.7	1.060	Connector 2 : 21 SMA-451
11.950	.62	19.6	1.234	
14.992	.60	19.6	1.234	
18.034	.70	22.5	1.162	
20.944	.84	23.1	1.151	
23.987	.84	17.3	1.316	
26.500	1.66	12.9	1.586	

Measurement system :  
Synth. Sweeper : HP 8341B  
Network Analyzer : HP 8510B

Visual inspection performed ☒  
by : M.E. Jul 03, 1991



HUBER+SUHRNER, INC.

One Allen Martin Drive, P.O. Box 400, Essex, VT 05451, USA  
☎ 802-878-0555 FAX 802-878-9880

Abbildung 3.12: Test Zertifikat eines Koaxialkabels

### 3.2.11 Smith-Chart

Wie wir gesehen haben, gibt es Zusammenhänge zwischen dem Reflexionsfaktor  $\rho$ , dem Stehwellenverhältnis  $S$  und der Eingangsimpedanz  $Z_{in}$ , resp. der normierten Eingangsimpedanz  $z_{in} = Z_{in}/Z_0$ . Um diese Zusammenhänge graphisch darzustellen hat 1939 ein Mr. P. H. Smith bei den Bell Laboratories in den USA eine Grafik entwickelt, die später nach ihm als sog. Smith-Chart bezeichnet wurde<sup>1</sup>. Ein Bild dieser Smith-Chart ist in Figur (3.13) gegeben. Auf den ersten Blick sieht dieses Diagramm eher abschreckend als nützlich aus, obschon ihm eine inhärente Aesthetik sicher nicht abgesprochen werden kann. Man mag sich auch fragen, was im Zeitalter der Computer ein so altes Diagramm, das eher an einen Rechenschieber erinnert, noch zu suchen hat. Tatsächlich ist es so, dass auch heute im CAD-Zeitalter genau dieses Diagramm immer noch Verwendung findet, weil es dem (geübten) Interpreten viele Zusammenhänge auf einen Blick offeriert und also auch heute als grafische Visualisierung verwendet wird. Ein Netzwerk-Analysator wird beispielsweise seine Messergebnisse in Form einer Smith-Chart darstellen.

Wir wollen uns hier lediglich darauf beschränken die Zusammenhänge der Grafik kurz aufzuzeigen. Das Nutzen des Diagrammes zum Optimieren von Anpassungen soll hier aber nicht besprochen werden. Dies ist Bestandteil einer anderen Vorlesung über Mikrowellentechnik.

Der Schlüssel für das Verständnis der Smith-Chart liegt darin, dass im Prinzip der Reflexionskoeffizient, der eine komplexe Grösse ist, in einem polaren Diagramm dargestellt wird. Die Smith-Chart ist also ein polares Diagramm, wobei der Radius dem Reflexionsfaktor  $\rho$  entspricht und der Winkel der Phasenlage bezüglich einer Referenzebene. Dem überlagert sind Orte konstanter Resistanz  $r$  ( $= \frac{R}{Z_0}$ ) bzw. konstanter Reaktanz  $x$  ( $= \frac{X}{Z_0}$ ).

Zur Konstruktion:

Es sei

$$w = u + iv = |\rho|e^{-i\beta s}. \quad (w \hat{=} \rho) \quad (3.57)$$

Gemäss (3.46) besteht ein Zusammenhang zwischen der Impedanz und dem Reflexionsfaktor. Nun ist

$$z = r + ix = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (3.58)$$

eine bilineare konforme Abbildung, d.h. eine eindeutige Zuordnung von  $z$  und  $w$  wobei Kreise in Kreise und Geraden in Geraden übergeführt werden, und rechte Winkel erhalten bleiben. Setzt man (3.57) in (3.58) ein, so erhält man

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (3.59)$$

Dies lässt sich umformen in

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (u-1)^2 = \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2. \quad (3.60)$$

Dies stellt Kreise mit Kreismittelpunkt  $[\frac{r}{1+r}, 0]$  und Radius  $\frac{1}{1+r}$  bzw. Kreismittelpunkt  $[1, \frac{1}{x}]$  und Radius  $\frac{1}{x}$  dar.

---

<sup>1</sup>Electronics, Vol. 12, p. 29

### 3 Geführte Wellen

NAME	TITLE	DWG. NO.
SMITH CHART Form 530I-7560-N	GENERAL RADIO COMPANY, WEST CONCORD, MASSACHUSETTS	DATE

### IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

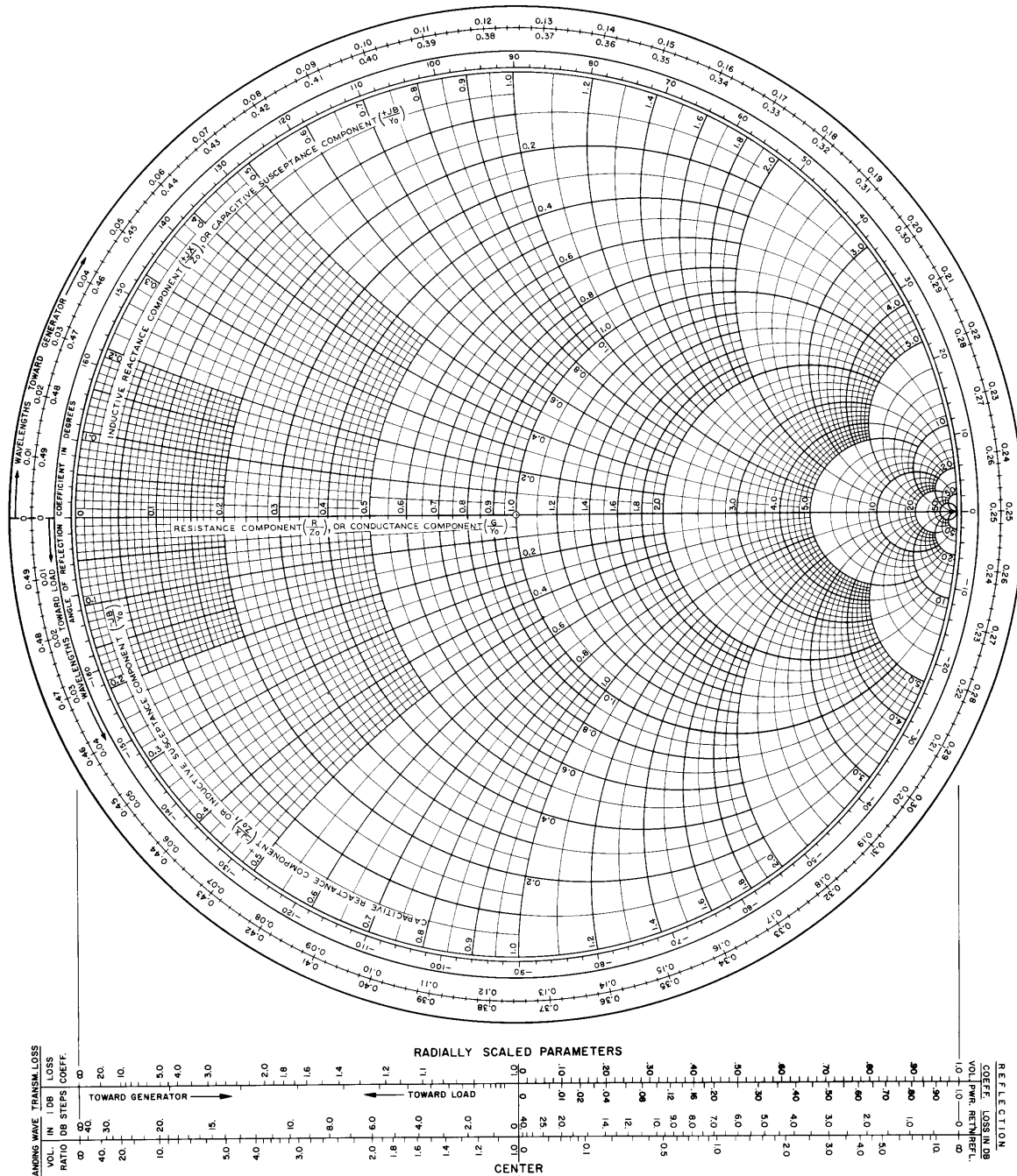
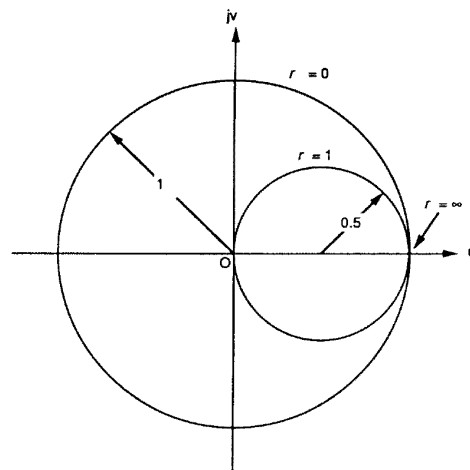


Abbildung 3.13: Smith Chart



Diskussion:

- $r = 0 \rightarrow u^2 + v^2 = 1$ : Man erhält den Einheitskreis mit Zentrum im Ursprung der  $w$ -Ebene. Geht  $r$  gegen  $\infty$ , so geht der Radius des Kreises gegen Null und das Zentrum ist bei  $[1,0]$ .  $r = 1 \rightarrow$  Radius  $= \frac{1}{2}$ , Zentrum bei  $[\frac{1}{2}, 0]$ .  
Für  $z = r + i \cdot 0$  und  $r > 1$  erhält man  $|\rho| = \frac{r-1}{r+1}$  und  $\text{SWR} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = r$ . Falls  $r < 1$  ist, folgt  $\text{SWR} = \frac{1}{r}$ .



Construction of normalized resistance contours.

Abbildung 3.14:

- Geraden mit  $x = \text{konstant}$  in der  $z$ -Ebene werden zu Kreisen in der  $w$ -Ebene (und in dieser Ebene ist die Smith-Chart ja gezeichnet). Diese sind orthogonal zu den  $r=\text{konstant}$ -Kreisen. Alle diese Kreise gehen durch den Punkt  $[1,0]$ .  
 $x = 0 \rightarrow$  Zentrum bei  $[1, \pm 1]$ , Radius  $= \infty$   
 $x \rightarrow \infty \rightarrow$  wird in die  $u$ -Achse transformiert  
 $x = 1 \rightarrow$  Zentrum bei  $[1,1]$ , Radius  $= 1$

- Ersetzen von  $w$  durch  $-w$ :

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1+w}{1-w} \quad (3.61)$$

ist auch eine bilineare Transformation, aber diesmal für die Admittanz  $Y = \frac{1}{Z}$ .

Die Admittanz  $y$  zu einer gegebenen Impedanz  $z$  findet man durch Spiegelung am Nullpunkt. Die Smith-Chart funktioniert für  $y$  und  $z$ .

- Im Zentrum der Smith-Chart ist  $|\rho| = 0$ , d.h. hier ist die Anpassung optimal (perfectly matched).
- Einmal rings herum entspricht einer Verschiebung um  $\frac{\lambda}{2}$ .

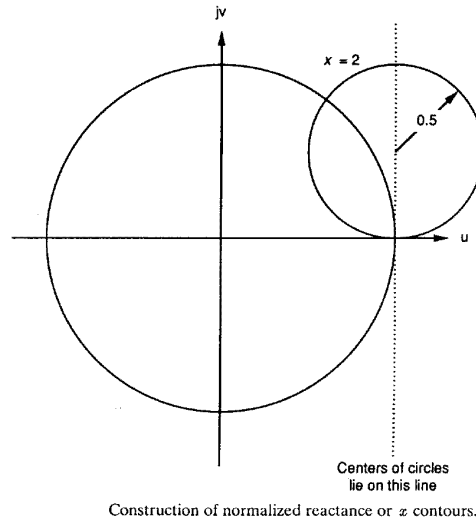


Abbildung 3.15:

Als kleine Übung kann man mit Hilfe der Smith Chart (3.13) folgende Aufgabe lösen. Eine Lastimpedanz  $Z_L = 130 + i90\Omega$  schliesse eine Leitung, die eine charakteristische Impedanz von  $Z_0 = 50\Omega$  hat und die eine Länge von  $0.3\lambda$  aufweist, ab. Bestimme den Reflexionskoeffizienten bei der Last und am Eingang der Leitung, das Stehwellenverhältnis und den return loss.

Lösung: Die normierte Eingangsimpedanz ist  $z_L = Z_L/Z_0 = 2.60 + i1.80$  und kann in der Smith-Chart eingezeichnet werden. Ausmessen des Abstandes zum Mittelpunkt z.B. mit einem Zirkel und Abtragen auf der Skala unterhalb der Smith-Chart ergibt einen Reflexionsfaktor von  $|\rho| = 0.6$ . Abtragen auf der VSWR-Skala ergibt ein Stehwellenverhältnis von 3.98. Der return loss beträgt 4.4dB. Verbinden des Mittelpunktes mit dem Punkt, der  $Z_L$  charakterisiert, bis zum Rand der Smith-Chart, ergibt an der Peripherie den Winkel des Reflexionskoeffizienten mit  $21.8^\circ$ . Nun wird ein VSWR-Kreis durch den Punkt der Last gezeichnet mit Mittelpunkt im Zentrum. Der Referenzpunkt der Last liegt bei  $0.220\lambda$ , wie man zu äusserst abliest. Nun geht man um  $0.3\lambda$  in Richtung Generator und endet bei  $0.520\lambda$  auf der Skala „wavelength toward generator“. Das ist aber identisch mit  $0.020\lambda$ . Nun wird von dort eine Gerade zum Mittelpunkt gezeichnet. Der Schnittpunkt mit dem VSWR-Kreis liefert die normierte Eingangsimpedanz  $z_{in} = 12.7 + i5.8\Omega$ . Der Reflexionskoeffizient hat natürlich immer noch denselben Betrag von 0.6, aber der Winkel ist nun  $165.8^\circ$ .

### 3.3 Hohlleiter

Ein Wellenleiter (engl. waveguide) oder Hohlleiter ist eine „hohle“ Röhre aus Metall, meist Messing, Kupfer oder Silber. Gegenüber der Zweidrahtleitung hat ein Wellenleiter den Vorteil, dass die Dämpfung geringer ist, und dass keine Probleme mit genauer Montierung des Innenleiters bestehen. Dies ist kritisch, da die Impedanz für ein Koaxi-