



NACHRICHTENTECHNIK

PCM

Studien- und Versuchsaufgaben

Autor: Richard GRÜNERT

14.4.2020

1 Vorbereitungsaufgaben

1.1

Da ein periodisches Signal vorliegt, kann es mithilfe der Fourierreihe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

in seine diskreten Frequenzanteile a_n und b_n bei $n \cdot \omega_0$ zerlegt werden.

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \, dt$$

Die Rechteckfolge ist eine gerade Funktion, $x(t) = x(-t)$, weshalb die Koeffizienten $b_n = 0$ sind.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \dots = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 \cdot \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \int_0^{\tau/2} \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{n\omega_0} \cdot \sin n\omega_0 \cdot \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

mit $\omega_0 = 2\pi/T$

$$a_n = \frac{2U_0}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)$$

durch Erweiterung mit τ/T in die Form $\sin(x)/x = Si(x)$

$$a_n = 2U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \text{Si}(n\pi \cdot \frac{\tau}{T})$$

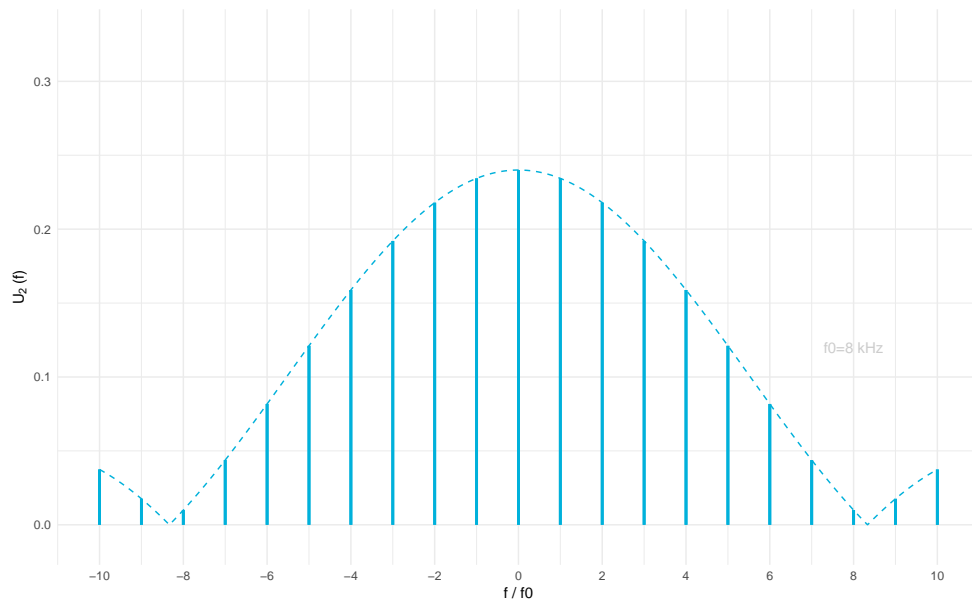


Abbildung 1: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/8 \text{ ms}$

Der Gleichanteil a_0 ist

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t) \, dt \\ &= \frac{U_0}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \, dt = \frac{U_0}{T} \cdot \left[\frac{\tau}{2} - \left(-\frac{\tau}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$a_0 = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{\tau}{T}$$

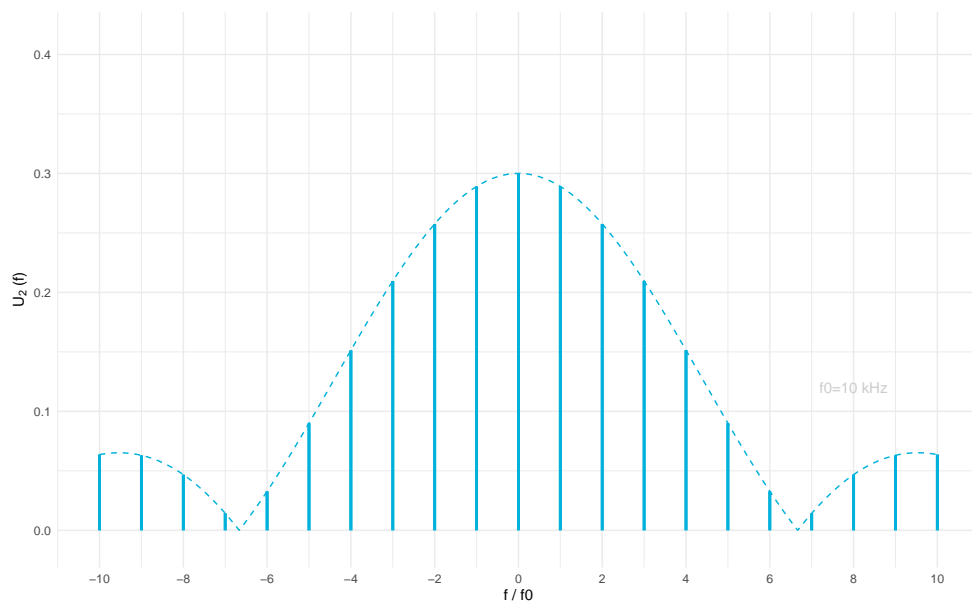


Abbildung 2: Teil des Spektrums der Rechteckimpulsfolge bei $T = 1/10 \text{ ms}$

1.2

Für die fehlerfreie Signalabtastung muss die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so groß sein wie die maximal im Signal auftretende Frequenz f_{SMax} (Nyquist-Theorem).

$$f_A \geq 2 \cdot f_{SMax}$$

Um die maximale Frequenz / die Bandbreite des Eingangssignals zu begrenzen muss das Signal vor der Abtastung gefiltert werden.

1.3

Die Multiplikation des Eingangssignals $u_1(t)$ mit dem Diracimpulskamm $u_0(t)$ führt auf eine Faltung im Zeitbereich.

$$U_2(f) = U_1(f) * U_0(f)$$

Die Fouriertransformation des Dirac-Kammes $U_0(f)$ führt ebenfalls auf einen mit der Abtastperiode gedämpften Dirac-Kamm

$$u_0(t) \circ \bullet \frac{1}{T_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot \frac{1}{T_a})$$

Die Faltung einer Funktion $f(x)$ mit einem Diracimpuls $\delta(x)$ führt zur Verschiebung dieser Funktion an die Stelle des Diracs B und Wichtung der Funktion mit dem Faktor a

$$f(x) * a \cdot \delta(x - B) = a \cdot f(x - B) \quad (1)$$

Da ein Diracimpulskamm lediglich eine Summe mehrerer Diracimpulse ist, kann man die Linearität des Faltungsintegrals ausnutzen

$$\begin{aligned} U_2(f) &= U_1(f) * U_0(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_1(F) \cdot U_0(F - f) dF \\ &= \frac{1}{T_a} \cdot \int U_1(F) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta((F - f) - k \cdot \frac{1}{T_a}) dF \\ &= \frac{1}{T_a} \cdot \left(\cdots + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta(F - f)}_{\text{Gl. (1)}} + \underbrace{\int U_1(F) \cdot \delta((F - f) - \frac{1}{T_a})}_{\text{Gl. (1)}} + \cdots \right) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Summe der Faltungen der Funktion $U_1(f)$ mit den einzelnen Diracimpulsen des Kammes, also im Falle des Frequenzbereiches die periodische Verschiebung des Spektrums $U_1(f)$ um die Werte $k \cdot 1/T_a$ sowie die Skalierung mit $1/T_a$.

(Das Spektrum des Eingangssignals $u_1(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$ stellt zwei Spektrallinien bei $-f_1$ und $+f_1$ dar)

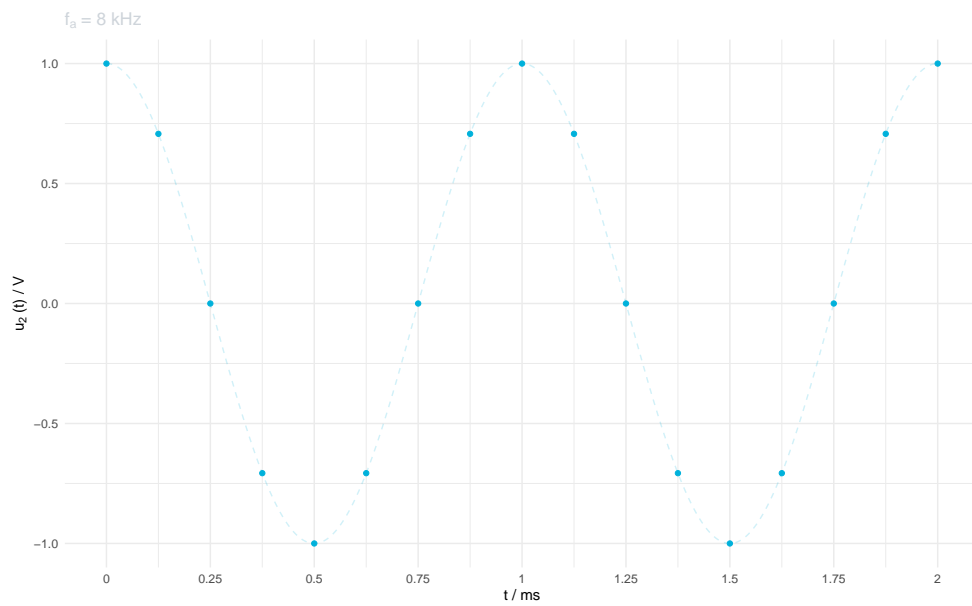


Abbildung 3: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 8 \text{ kHz}$

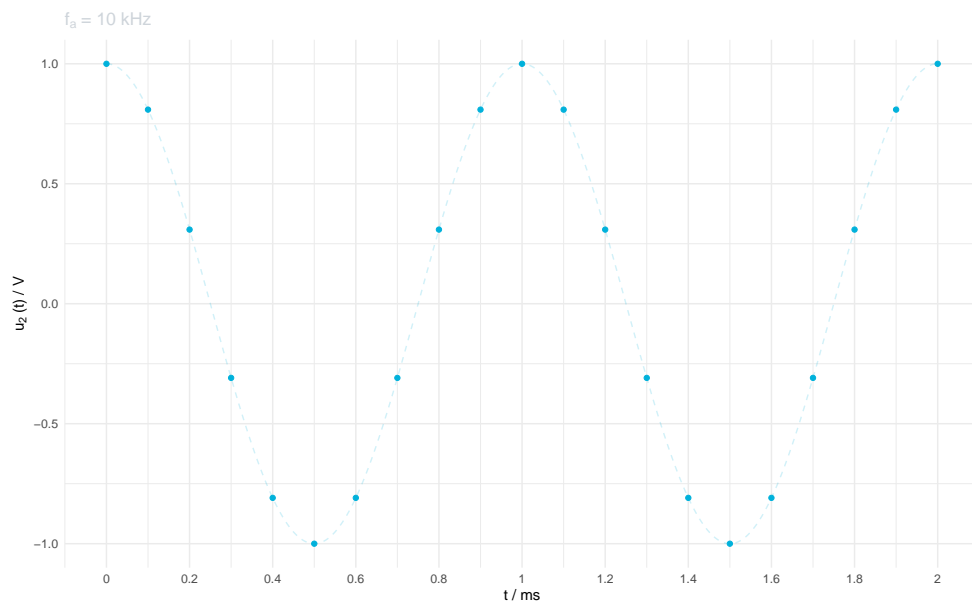


Abbildung 4: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit $f_a = 10 \text{ kHz}$

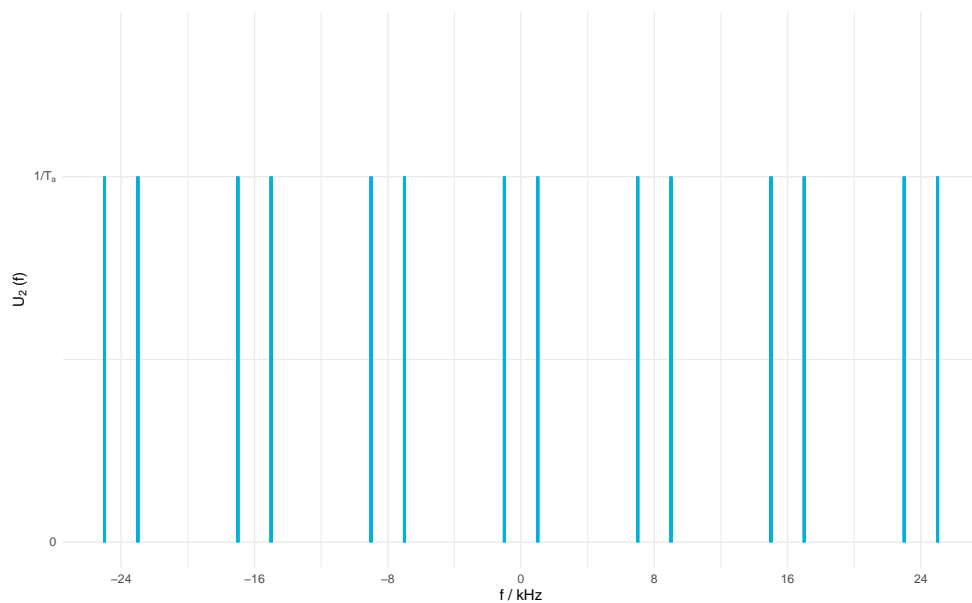


Abbildung 5: Ausschnitt des Spektrums bei Abtastung mit $f_a = 8$ kHz

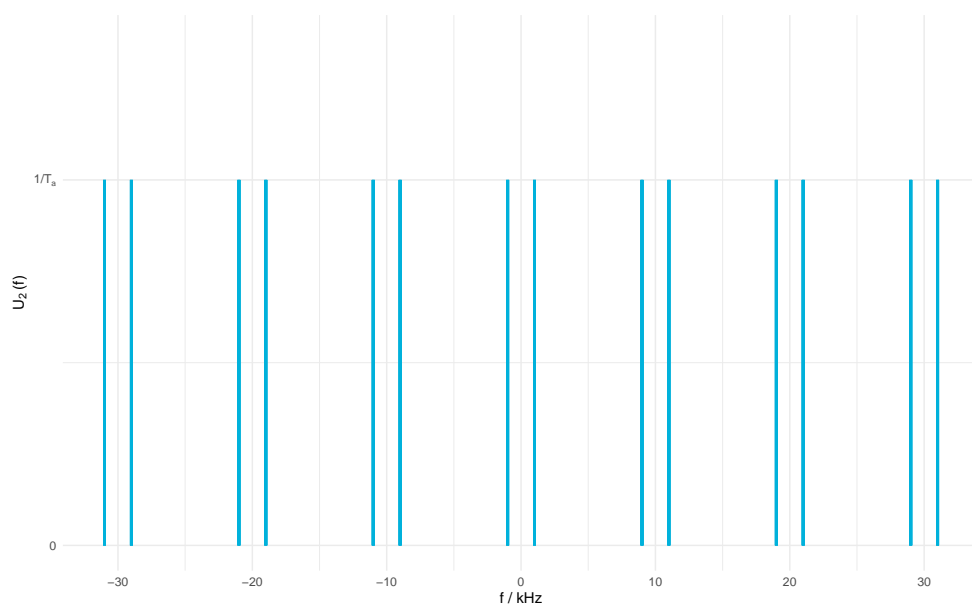


Abbildung 6: Ausschnitt des Spektrums bei Abtastung mit $f_a = 10$ kHz

Wird die Rechteckfolge aus 4.1. zur Abtastung verwendet, entsteht im Zeitbereich eine stückweise kontinuierliche Funktion (Abb.).

Im Frequenzbereich entsteht die Faltung ähnlich wie bei der Abtastung mit dem Dirackamm, nur dass das Spektrum mit dem gefaltet wird das diskrete Spektrum aus Abb. 1 bzw. Abb. 2 ist. Die Verschiebungen des Eingangssignalspektrums entstehen daher immernoch zu $k \cdot 1/T_a$, die Wichtung der einzelnen Spektrallinien ist jedoch nicht mehr konstant, sondern folgt der einhüllenden Si-Funktion des Spektrums der Rechteckfolge.

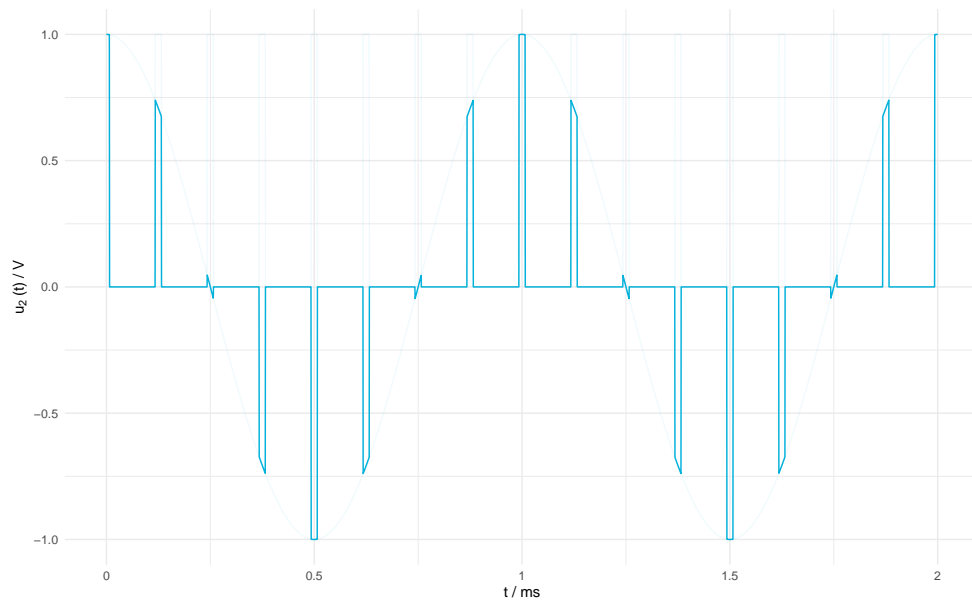


Abbildung 7: Zwei Perioden des Eingangssignals abgetastet mit der periodischen Rechteckfolge aus 4.1 ($T = 1/8$ ms)

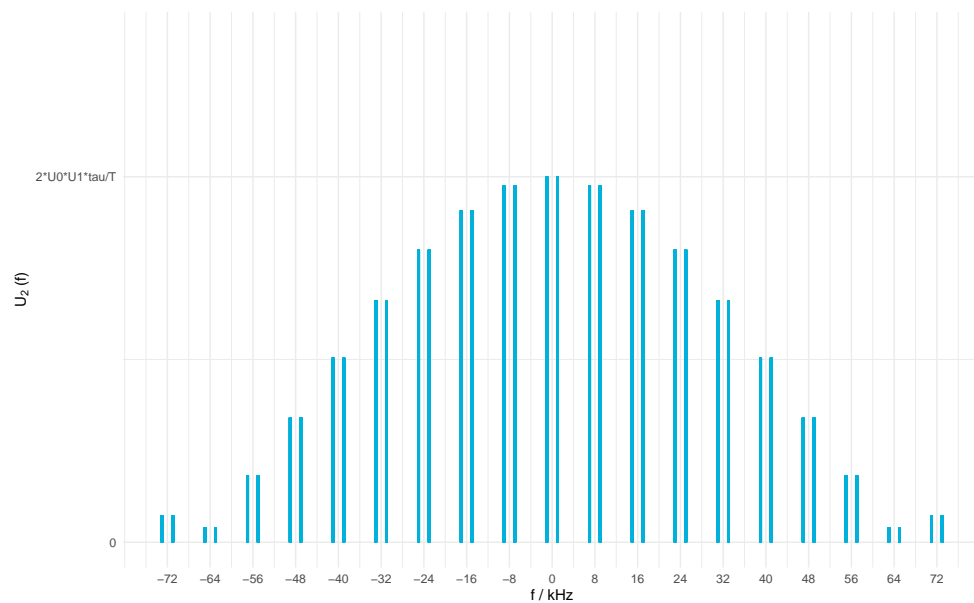


Abbildung 8: Teil des Spektrums bei Abtastung mit der Rechteckfolge aus 4.1 ($f_a = 8 \text{ kHz}$)

2 Versuchsaufgaben

2.1

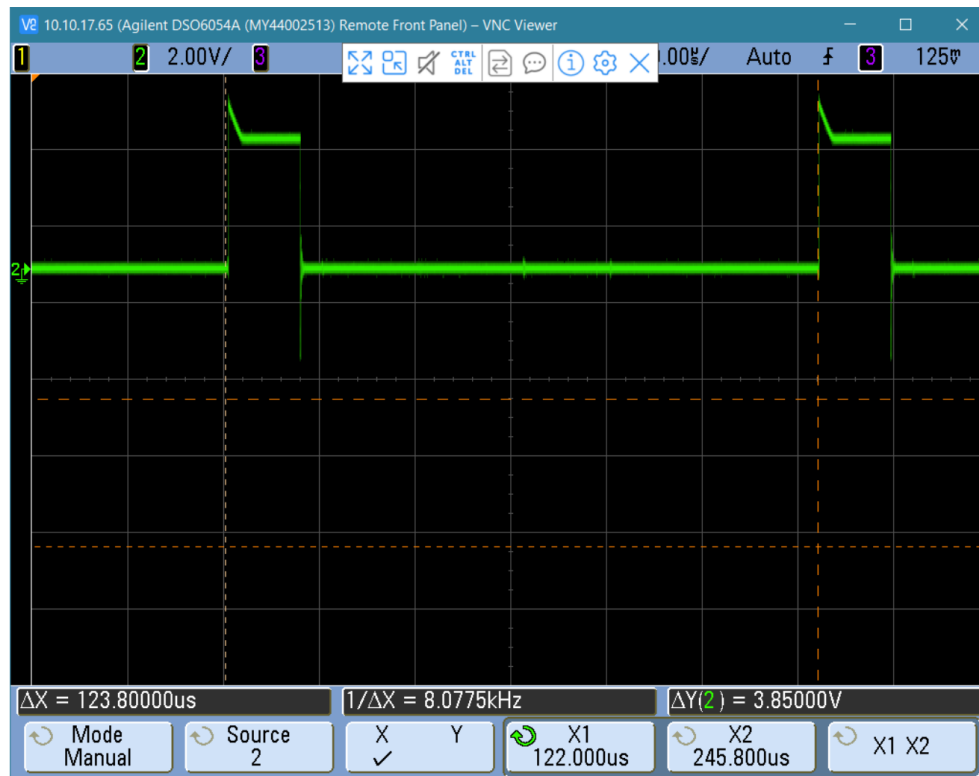


Abbildung 9: Abtastsignal am Oszilloskop, Zeiteinstellung: 20 $\mu s/\text{div}$.

Aus der Oszilloskopmessung lässt sich eine Periodendauer von $T_a = 123\mu s$ und damit eine Frequenz von $f_a = 8.0775\text{kHz}$ sowie eine Impulsbreite von $\tau \approx 15.5\mu s$ ermitteln. Diese Werte stimmen in etwa mit den Vorgaben der Vorbereitungsaufgaben überein. Da die Impulsbreite leicht länger ist als die theoretische, ist eine Verschiebung der Nullstelle der Einhüllenden Si-Funktion im Spektrum nach links zu erwarten.

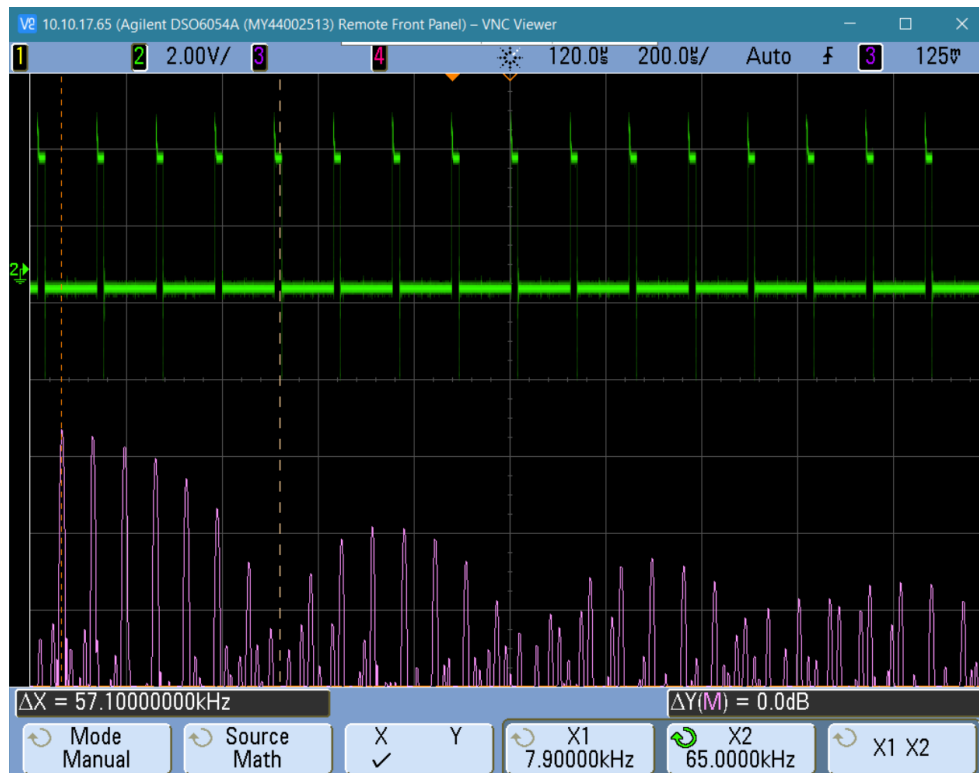


Abbildung 10: FFT des Abtastsignals

Der Frequenzabstand der Spektrallinien stimmt ebenfalls etwa mit dem theoretischen (8 kHz) überein. Die theoretische Nullstelle ist wie erwartet leicht verschoben.

2.2

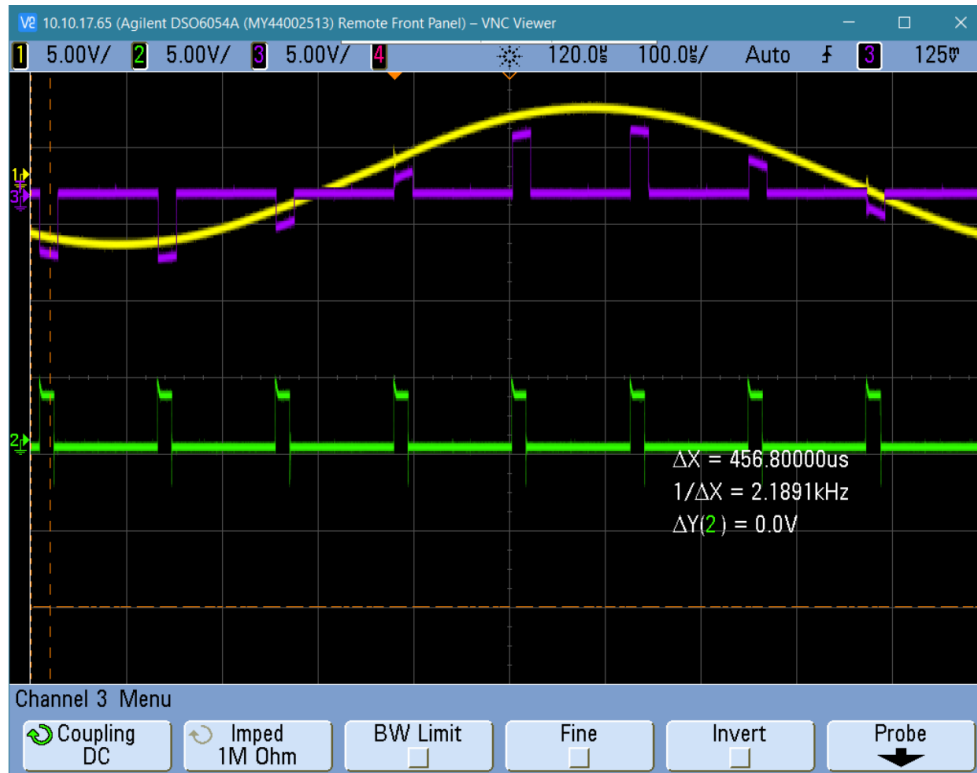


Abbildung 11: Abtastsignal (grün), Nachrichtensignal (gelb), und abgetastetes Signal (Violett) am Oszilloskop

Aus Abbildung 11 lässt sich die Multiplikation von Abtast- und Nachrichtensignal erkennen. Bereits hier lässt sich eine zeitliche Verbreiterung der Impulse des abgetasteten Signals gegenüber dem Abtastsignal erkennen.

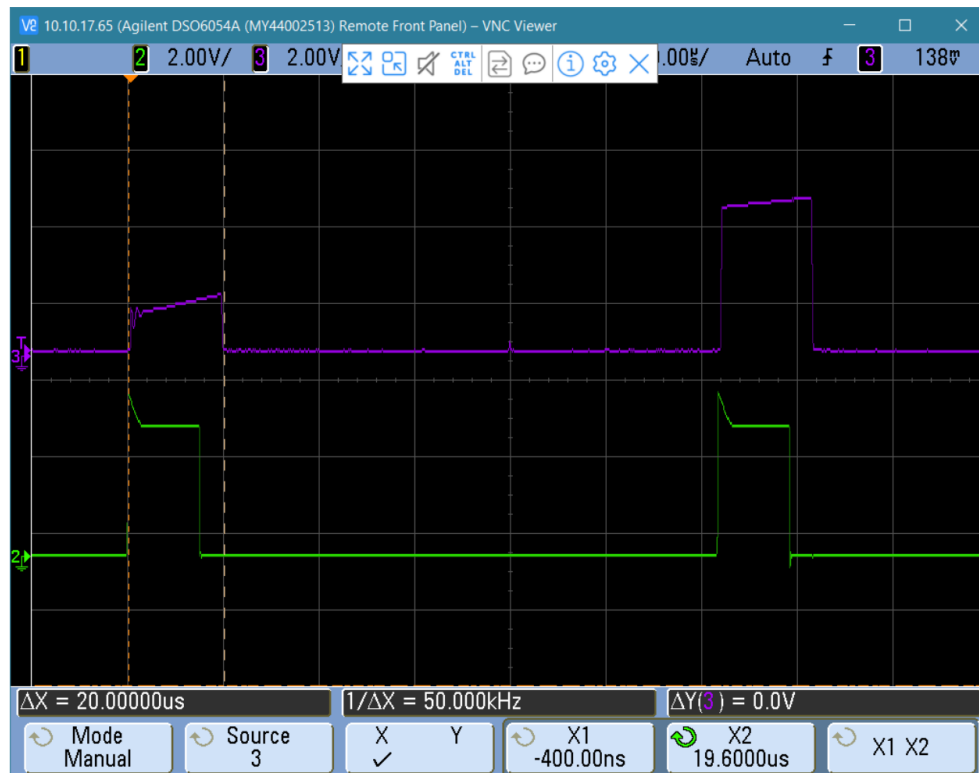


Abbildung 12: Vergleich von Abtast- und Ausgangsimpulsen

Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass die Impulsbreite des abgetasteten Signals etwa 20 % größer ist als die der Abtastimpulsfolge. Dies lässt sich auf die Trägheit des Systems zurückführen.

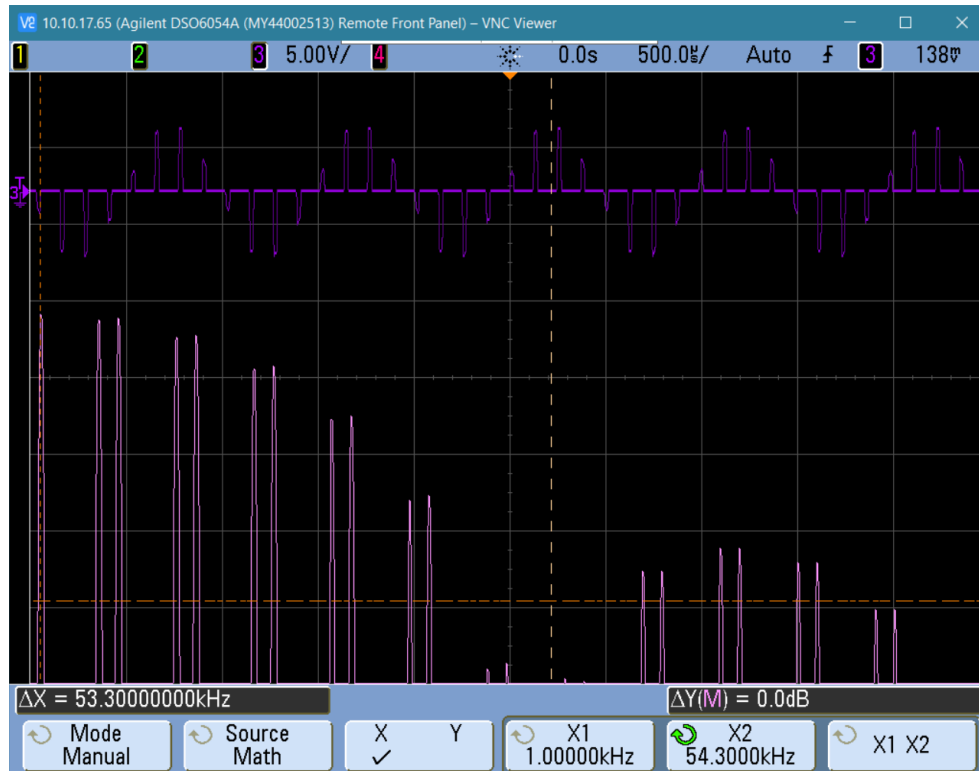


Abbildung 13: FFT des PAM-Signals

Im Spektrum des Signals treten wie erwartet die Spektrallinien des Signals um die Abtastfrequenz auf. Der Effekt der verringerten Impulsbreite spiegelt sich hier ebenfalls wider, da sich die Nullstelle nun zu einer geringeren Frequenz bewegt (ebenfalls ca. um 20 % verringert).

2.3

Die Quantisierungsstufenzahl S errechnet sich bei einer Quantisierung mit n Bits nach

$$S = 2^n$$

Bei 6 Bits ergeben sich also $2^6 = 64$ mögliche Stufen. Bei linearer Quantisierung einer Spannung im Bereich ± 5 V erhält man einen Stufenabstand s von

$$s = \frac{5 \text{ V}}{32} = 156.25 \text{ mV}$$

wenn man das MSB als Vorzeichenbit verwendet.

Durch Anlegen von Gleichspannungen und Ermittlung der Spannungswerte der D/A-gewandelten Bitfolgen lässt sich die Quantisierungskennlinie darstellen

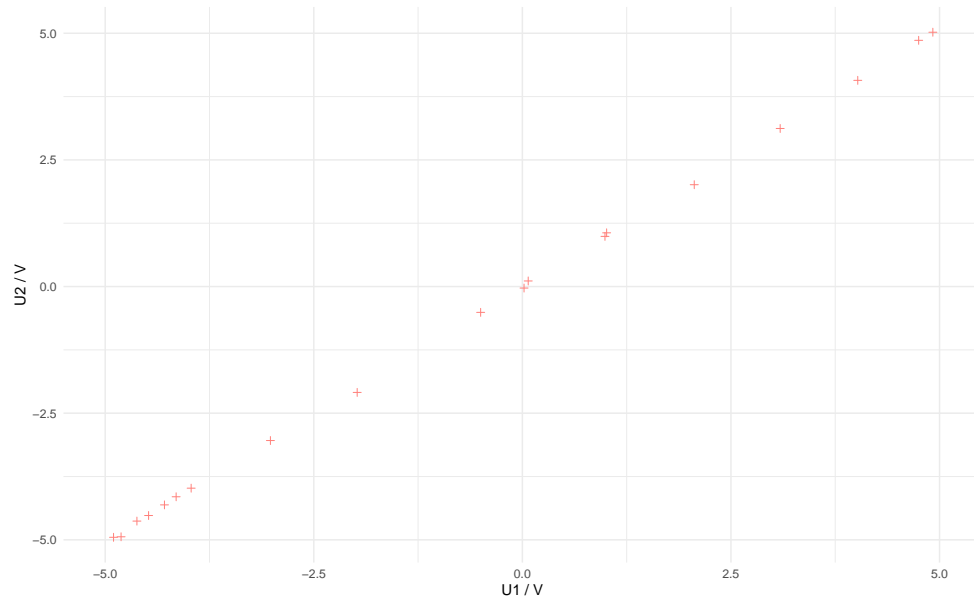


Abbildung 14: Aufgenommene Werte der Ausgangsspannung über der Eingangsspannung

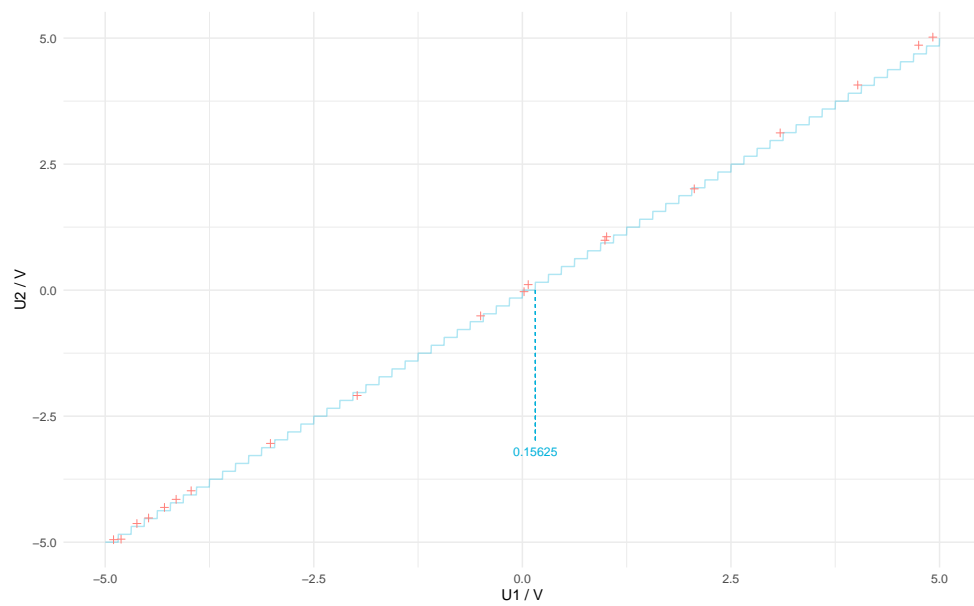


Abbildung 15: Aufgenommene Werte der Ausgangsspannung über der Eingangsspannung mit theoretischer Quantisierungskennlinie

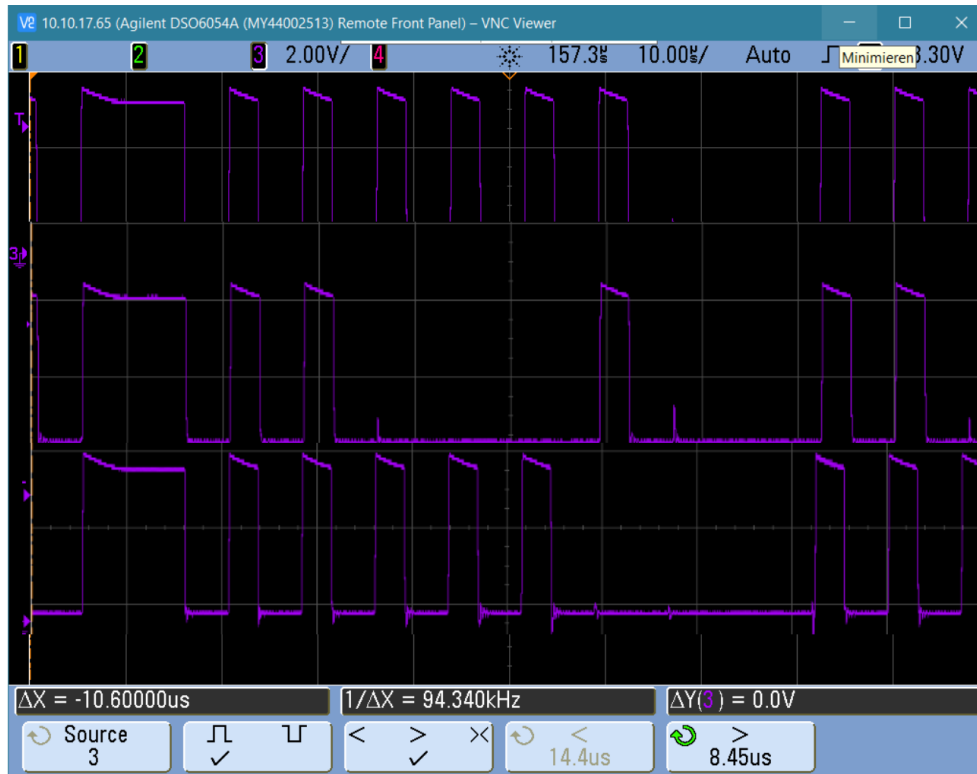


Abbildung 16: Darstellung einiger kodierter Spannungswerte nach der Quantisierung am Oszilloskop

Aus Abbildung 16 lassen sich die eingegangenen Spannungswerte über die gemessenen Bitfolgen ermitteln. Der etwas längere Synchronisationsimpuls (links) bestimmt jeweils das Ende der Bitfolge aus 2 Kanälen, je 6 Bits. Nimmt man an, dass das MSB bei einem HIGH-Pegel als positives, bei LOW-Pegel als negatives Bit zu werten ist und dass der niedrigste Spannungswert (-5 V) durch die Nullfolge (000000) dargestellt wird, ergeben sich die folgenden eingangsseitigen Spannungswerte (als Intervall)

Oben: Folge: 1 1 1 1 1 1

$$\text{Stufenwert: } (+)2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$$

$$\text{Spannungswert: } 31 \cdot s \dots 32 \cdot s = +4.844\text{ mV} \dots + 5\text{ V}$$

Mitte: Folge: 1 0 0 0 1 1

$$\text{Stufenwert: } (+)2^1 + 2^0 = 3$$

$$\text{Spannungswert: } 3 \cdot s \dots 4 \cdot s = +468.75\text{ mV} \dots + 625\text{ mV}$$

Unten: Folge: 0 1 1 1 1 1

Stufenwert: $(-)2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (-)31$

Spannungswert: $-1 \cdot s \dots 0 \cdot s = -156.25 \text{ mV} \dots 0 \text{ V}$ (000000 entspricht -5 V)